Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Матвеев, Корни и разложения трехмерных топологических объектов, *УМН*, 2012, том 67, выпуск 3, 63–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9476>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 04:45:20

УДК 515.162.3

Корни и разложения трехмерных топологических объектов

С. В. Матвеев

В 1942 г. М. Х. А. Ньюман сформулировал и доказал несложную лемму, которая оказалась весьма полезной в различных областях математики, в частности в алгебре и теории базисов Грёбнера–Ширшова. Позднее ее стали называть леммой о диаманте, поскольку ее ключевая конструкция графически изображается в виде ромба (символа диаманта). В 2005 г. автор настоящей статьи предложил новый вариант этой леммы, предназначенный для решения топологических проблем. В статье дается обзор результатов о существовании и единственности примарных разложений различных топологических объектов: трехмерных многообразий, узлов в утолщенных поверхностях, заузленных графов, трехмерных орбифолдов, заузленных тета-кривых в трехмерных многообразиях. Оказалось, что все топологические объекты упомянутых типов допускают примарные разложения, но в ряде случаев (например, для орбифолдов) единственности нет. Для тета-кривых и узлов геометрической степени 1 в утолщенном торе удастся полностью описать алгебраические структуры соответствующих полугрупп. И в том, и в другом случае они являются факторами свободных групп по явно предъявляемым соотношениям коммутирования.

Библиография: 33 названия.

Ключевые слова: трехмерное многообразие, узел, виртуальный узел, примарное разложение, орбифолд.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	64
2. Лемма о диаманте.....	65
3. Универсальная схема.....	67
4. Модельный случай: теорема Кнезера–Милнора.....	68
4.1. Разложения на неприводимые части.....	69
4.2. Примарные разложения.....	72
5. Граничные связанные суммы.....	74

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00605), а также целевых программ УРО РАН (совместный проект 12-С-1-1018/1 и проект ОМН РАН 12-Т-1-1003/2).

6. Разложения заузленных графов в многообразиях.....	76
6.1. Корни заузленных графов	78
6.2. Контрпримеры к теореме о примарных разложениях заузленных графов.....	79
6.3. Общая структура контрпримеров.....	82
6.4. Разложения раскрашенных графов и орбифолдов.....	83
7. Кольцевые редукции трехмерных многообразий.....	84
8. Примарные разложения узлов в $F \times I$	89
9. Примарные разложения виртуальных узлов.....	98
10. Полугруппа тета-кривых.....	107
11. Циклические разложения узлов в $T \times I$	110
Список литературы.....	113

1. Введение

В 1942 г. М. Х. А. Ньюман сформулировал и доказал несложную лемму [1], которая оказалась весьма полезной в различных областях математики, в частности в теории базисов Грёбнера–Ширшова [2]–[5]. Позднее ее стали называть “леммой о диаманте”, поскольку ее ключевая конструкция графически изображается в виде ромба (символа диаманта). Мы предлагаем новый вариант этой леммы, весьма удобный и эффективный при решении топологических проблем. Настоящая статья представляет собой обзор полученных на этом пути результатов о корнях и примарных разложениях различных топологических и геометрических объектов: трехмерных многообразий, заузленных графов в них, орбифолдов, узлов в утолщенных поверхностях, виртуальных узлов. Мы рассматриваем различные редукции этих объектов: сферические, кольцевые, дисковые. Как правило, редукция каждого типа состоит в разрезании данного объекта по допустимой поверхности (сфере, кольцу или диску), причем в первых двух случаях поверхности, появившиеся на крае нового многообразия, заклеиваются шарами и ручками индекса 2 соответственно.

Предположим, что типы рассматриваемых объектов и их редукций выбраны. Будем применять к данному объекту X нетривиальные редукции до тех пор, пока это возможно. Если этот процесс остановится, то мы получим набор новых объектов, который называется корнем объекта X . Этот набор состоит из объектов, которые не допускают дальнейших редукций. Предположим, что X имеет хотя бы один корень. Единствен ли он? Ответ зависит от того, какие редукции разрешены: по произвольным поверхностям нужного типа или только по разбивающим поверхностям. В первом случае положительный ответ удобно называть либо теоремой о единственности корня, либо теоремой о неприводимом разбиении, поскольку корень состоит из неприводимых объектов. Во втором случае каждая редукция превращает один связный объект в два, а тогда обратную операцию можно интерпретировать как связанное суммирование этих объектов. Поэтому корень состоит из примарных (т. е. неразложимых) слагаемых, а соответствующую теорему правильно называть теоремой о примарном разложении.

Приведем перечень результатов, обсуждаемых в настоящей статье.

1. Новые концептуальные доказательства теорем о разложениях трехмерных многообразий в связные суммы и в граничные связные суммы примарных слагаемых.

2. Теорема о корнях заузленных графов в трехмерных многообразиях. Знаменитая теорема Х. Шуберта [6] о примарных разложениях классических узлов и аналогичная теорема о глобальных узлах (т. е. узлах в произвольных трехмерных многообразиях) являются ее частными случаями.

3. Один из самых неожиданных результатов состоит в том, что для заузленных графов (и, как следствие, для трехмерных орбифолдов) теоремы о примарных разложениях не верны: построены контрпримеры. При этом структура множества всех возможных контрпримеров допускает приемлемое описание.

4. Теорема о существовании и единственности кольцевого корня трехмерного многообразия. Эта теорема напоминает частный случай (для многообразий с краем) теоремы о JSJ-разбиении [7], но не следует из нее.

5. Теорема о примарных разложениях гомологически тривиальных узлов в утолщенных поверхностях. Интересно отметить, что для произвольных узлов в утолщенных поверхностях единственности примарных разложений нет.

6. Теорема о примарных разложениях виртуальных узлов.

7. Описание структуры полугруппы тета-кривых в трехмерных многообразиях.

8. Теорема о примарных циклических разложениях узлов в утолщенном торе $T \times I$.

Я благодарен Ф. Г. Кораблеву, В. В. Таркаеву, В. А. Тураеву, Ц. Хог-Ангелони и Е. А. Фоминых за полезные обсуждения различных разделов статьи. Часть статьи была написана в Математическом институте в Обервольфахе в рамках программы RIP (с М. Поляком) и во время моего пребывания в Математическом институте имени Макса Планка в Бонне. Я благодарен этим институтам за прекрасные условия и творческую атмосферу.

2. Лемма о диаманте

Пусть Γ – ориентированный граф. Множества его вершин и ребер будем обозначать $\mathbb{V}(\Gamma)$ и $\mathbb{E}(\Gamma)$. Ориентированным путем в Γ будем называть произвольную последовательность $\{\overrightarrow{A_1 A_2}, \overrightarrow{A_2 A_3}, \dots\}$, которая составлена из его ребер так, что начало каждого следующего ребра совпадает с концом предыдущего.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что вершина $B \in \mathbb{V}(\Gamma)$ является *корнем* вершины $A \in \mathbb{V}(\Gamma)$, если:

- 1) существует ориентированный путь по ребрам графа Γ из вершины A в вершину B ;
- 2) B является стоком, т. е. исходящих из нее ребер нет.

Никаких условий на граф Γ не накладывается. Он может быть бесконечным, валентности вершин тоже могут быть бесконечными. Из рис. 1 видно, что вершина графа может не иметь корней, иметь один корень или несколько корней.

Рис. 1. Вершина A имеет два корня C и D , вершина B – только один. Все остальные вершины корней не имеют, кроме вершин C , D , которые совпадают со своими корнями.

ВОПРОС: при каких условиях на граф Γ каждая его вершина имеет ровно один корень?

Мы сформулируем два свойства. Первое называется свойством конечности путей и обозначается (FP) (от слов “Finite Paths”).

(FP): *Любой ориентированный путь по ребрам графа Γ обрывается.*

Другими словами, Γ не должен иметь ориентированных циклов и бесконечных ориентированных путей. Из справедливости свойства (FP) сразу следует, что любая вершина $A \in \mathbb{V}(\Gamma)$ имеет хотя бы один корень.

Обозначим $\mathbb{E}^{(2)}(\Gamma)$ множество всех пар ребер графа Γ вида $(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2})$, т. е. пар ребер с общим началом. Сформулируем второе свойство, которое обозначается (MF) (от слов “Mediator Function”).

(MF): *Существует отображение $\mu: \mathbb{E}^{(2)}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, которое называется функцией-посредником и обладает следующими свойствами:*

(MF1) *если $\mu(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}) = 0$, то найдется вершина $C \in \mathbb{V}(\Gamma)$, в которую можно проложить ориентированные пути по ребрам как из вершины B_1 , так и из вершины B_2 ;*

(MF2) *если $\mu(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}) > 0$, то найдется такое ребро $\overrightarrow{AC}$, что $\mu(\overrightarrow{AB_i}, \overrightarrow{AC}) < \mu(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2})$ при $i = 1, 2$.*

Следующая лемма справедлива для произвольного графа. Она похожа на знаменитую лемму о диаманте (Diamond Lemma) М. Х. А. Ньюмана [1], но намного лучше нее приспособлена к решению геометрических задач.

ЛЕММА 1 (о диаманте). *Если ориентированный граф Γ обладает свойствами (FP) и (MF), то корень любой его вершины существует и единствен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование корня гарантируется свойством (FP). Идея доказательства единственности проста. Для краткости будем называть вершину *регулярной*, если она имеет ровно один корень, и *сингулярной* в противном случае. О характере ребра будем судить по его концу: ребро регулярно тогда и только тогда, когда регулярен его конец. Рассуждая от противного,

допустим, что граф Γ содержит сингулярную вершину. Тогда найдется сингулярная вершина A , из которой исходят только регулярные ребра. Действительно, если бы из каждой сингулярной вершины исходило сингулярное ребро, то любой путь с сингулярным концом можно было бы неограниченно продолжать добавлением новых сингулярных ребер. Это противоречит свойству (FP).

Выберем два ребра $\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}$ так, чтобы вершины B_1 и B_2 имели различные корни и число $\mu_0 = \mu(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2})$ было минимально возможным среди всех чисел $\mu(\overrightarrow{AX_1}, \overrightarrow{AX_2})$, где вершины X_1, X_2 тоже имеют различные корни. Заметим, что из регулярности вершин B_1, B_2 и различности их корней следует, что $B_1 \neq B_2$.

Рассмотрим два случая: $\mu_0 = 0$ и $\mu_0 > 0$. В первом случае любой корень вершины C , существующей по свойству (MF1), служит общим корнем вершин B_1, B_2 . Поскольку они регулярны, то других корней они не имеют, а это противоречит выбору вершин B_1, B_2 .

Во втором случае мы получаем противоречие между свойством (MF2) и выбором ребер $\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}$. Покажем это. Поскольку вершины B_1, B_2 и C (конец существующего по этому свойству ребра $\overrightarrow{AC}$) регулярны, то каждая из них имеет ровно один корень. Корни вершин B_1, B_2 различны, поэтому хотя бы один из них (пусть корень вершины B_1) отличен от корня вершины C . Так как $\mu(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AC}) < \mu_0$, то это противоречит минимальности числа μ_0 . Лемма доказана.

3. Универсальная схема

Доказательства всех результатов, обсуждаемых в статье, проводятся по одной и той же схеме. Пусть $\mathcal{O}$ – некоторый класс интересующих нас объектов. Как правило, эти объекты являются компактными связными трехмерными многообразиями или парами вида (M, G) , где M – компактное связное многообразие и G – компактный одномерный полиэдр внутри него. Сначала строится граф Γ , вершинами которого являются неупорядоченные конечные наборы объектов из класса $\mathcal{O}$. Переходя к несвязному объединению всех объектов, входящих в данную вершину, можно рассматривать эту вершину как одно не обязательно связное многообразие или как одну не обязательно связную пару.

Ребра графа задаются с помощью нетривиальных редукций. Каждая редукция представляет собой перестройку какого-нибудь объекта $x \in \mathcal{O}$, входящего в данную вершину A . Первый шаг состоит в разрезании этого объекта по лежащей в нем поверхности S , потом выполняются различные склеивания. Поэтому эта редукция ставит в соответствие объекту x один или два объекта из $\mathcal{O}$, в зависимости от того, является ли поверхность S разбивающей. Разумеется, набор рассматриваемых редукций зависит от существа задачи. Редукции объектов определяют редукции вершин графа и тем самым его ребра. Вершины A, B графа Γ соединены ребром $\overrightarrow{AB}$ тогда и только тогда, когда они состоят из одних и тех же объектов за исключением того, что один объект

вершины A , к которому собственно и применяется редукция, заменяется на результат ее применения, т. е. на новый объект или новую пару объектов. Одно и то же ребро может отвечать различным редукциям. Оно полностью определяется начальным и конечным наборами объектов, а как именно выполняется редукция, значения не имеет. Таким образом, кратных ребер в графе Γ нет.

Доказательство свойства (FP) обычно не вызывает затруднений, хотя и встречаются исключения (см. доказательство леммы 6). Это зависит от конкретной задачи. Напротив, участвующая в формулировке свойства (MF) функция-посредник во всех случаях строится одинаково. Ее значение $\mu(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2})$ на двух ребрах определяется как минимальное число $\sharp(S_1 \cap S_2)$ компонент связности в пересечении поверхностей $S_1, S_2 \subset A$, которые задают ребра $\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}$, а минимум берется по всем парам таких поверхностей. Разумеется, здесь мы предполагаем, что поверхности находятся в общем положении. Если $\mu(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}) = 0$, т. е. если эти ребра можно задать непересекающимися поверхностями, то каждая из них выживает при редукции по другой. Отсюда следует, что вершина, получающаяся в результате применения обеих редукций, не зависит от того, какая из них выполняется первой, какая – второй. Поэтому ее можно взять в качестве вершины C , участвующей в формулировке свойства (MF1).

Пусть $\mu(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}) > 0$. Заметим, что тогда вершины B_1, B_2 различны, так как в противном случае ребра $\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}$ можно было бы задать параллельными копиями одной и той же поверхности и получить $\mu(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}) = 0$. Для доказательства свойства (MF2) достаточно установить, что для любых двух поверхностей $S_1, S_2 \subset A$, задающих ребра $\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}$, найдется такая задающая ребро поверхность $S \subset A$, что $\sharp(S_i \cap S) < \sharp(S_1 \cap S_2)$ при $i = 1, 2$. Такую поверхность S будем называть поверхностью-посредником. Замечательный факт состоит в том, что для нахождения поверхности-посредника работает стандартная техника устранения пересечений поверхностей, которая давно применяется в маломерной топологии и поэтому хорошо развита. Разумеется, приемы построения посредника зависят от существа задачи. Тем не менее, описанная универсальная схема позволяет во всех случаях либо добиться желаемого результата, т. е. доказать единственность корня любой вершины, либо точно выделить основное препятствие.

4. Модельный случай: теорема Кнезера–Милнора

В качестве поясняющего примера применения универсальной схемы и леммы о диаманте приведем новое доказательство теоремы Кнезера–Милнора о примарных разложениях трехмерных многообразий [8]. Для простоты мы ограничимся случаем ориентируемых многообразий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть S – двумерная сфера внутри компактного связного трехмерного многообразия M . Тогда *сферическая редукция* многообразия M по S состоит в разрезании многообразия M вдоль S и заклеивании шарами двух копий сферы S на крае получившегося многообразия.

Сферические редукции удобно разбить на два класса, в зависимости от типа используемой сферы.

1. Сфера S разбивает M на две части. Тогда в результате редукции по ней получаются два многообразия M_1, M_2 . В этом случае говорят, что M является связной суммой $M_1 \# M_2$. Явное построение суммы $M_1 \# M_2$ по данным многообразиям-слагаемым можно описать так. Нужно выбрать шары $B_i \subset \text{Int } M_i, i = 1, 2$, и склеить многообразия $M_i \setminus \text{Int } B_i$ по какому-нибудь гомеоморфизму $h: \partial B_1 \rightarrow \partial B_2$.

Редукция (и обратная ей операция связного суммирования) называются тривиальными, если S ограничивает в M шар или, эквивалентно, одно из многообразий M_1, M_2 является трехмерной сферой. Здесь уместно отметить, что при таком определении операция связного суммирования многозначна, поскольку при домножении гомеоморфизма h на симметрию сферы ∂B_2 многообразие $M_1 \# M_2$ может измениться.

2. Сфера S не разбивает M . В этом случае редукция по ней дает такое связное многообразие M_1 , что $M = M_1 \# S^1 \times S^2$. При этом в качестве сферы, которая разбивает M в указанную связную сумму, можно взять сферу ∂N , где $N = N(S \cup C)$ – регулярная окрестность объединения $S \cup C$, а C – простой замкнутый контур в M , трансверсально пересекающий S в одной точке.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Многообразие M называется *примарным*, если оно отличается от сферы S^3 и его нельзя представить в виде нетривиальной связной суммы. Многообразие M называется *неприводимым*, если любая сфера в нем ограничивает шар.

Напомним, что есть только одно ориентируемое многообразие, которое является примарным и приводимым. Это – многообразие $S^1 \times S^2$.

ТЕОРЕМА 1 (Кнезера–Милнора о примарном разложении). *Любое отличное от сферы компактное связное ориентируемое трехмерное многообразие M гомеоморфно связной сумме $M_1 \# \dots \# M_n \# m(S^1 \times S^2)$, где все M_i неприводимы и $m(S^1 \times S^2)$ обозначает связную сумму $m \geq 0$ экземпляров многообразия $S^1 \times S^2$. Все слагаемые определены однозначно с точностью до порядка.*

Чтобы доказать эту теорему, применим универсальную схему в два шага. Сначала, рассматривая редукции по всем сферам, установим однозначную определенность неприводимых многообразий M_i . Потом ограничимся редукциями только по разбивающим сферам и докажем справедливость теоремы в полном объеме, в частности, получим однозначную определенность числа m . Затем мы прокомментируем необходимые изменения в формулировке и доказательстве теоремы для случая неориентируемых многообразий.

4.1. Разложения на неприводимые части. Построим граф Γ . Каждая его вершина является компактным ориентируемым многообразием, возможно несвязным, или, эквивалентно, конечным набором связных многообразий указанного типа. Гомеоморфные вершины, а также вершины, отличающиеся на добавление или удаление нескольких экземпляров сферы S^3 , будем считать одинаковыми. Множество всех вершин обозначим $\mathbb{V}(\Gamma)$. Вершины $A, B \in \mathbb{V}(\Gamma)$ соединены ориентированным ребром $\overrightarrow{AB}$ тогда и только тогда, когда многообразие B получается из многообразия A применением нетривиальной редукции

по некоторой сфере S , лежащей в какой-нибудь его связной компоненте. При этом число компонент либо увеличивается на единицу (если S – разбивающая сфера), либо остается прежним (если нет). Запрещение тривиальных редукций обязательно, так как им отвечают петли (ребра с совпадающими концами), которые мешают выполнению свойства (FP). Доказательство существования и единственности неприводимых слагаемых данного многообразия основано на следующем наблюдении. Пусть A – вершина графа Γ , состоящая всего из одного связного многообразия M . Тогда для данного набора неприводимых многообразий M_i , $1 \leq i \leq n$, утверждения “ M допускает разложение вида $M = M_1 \# \dots \# M_n \# m(S^1 \times S^2)$ ” и “объединение $\bigcup_i M_i$ является корнем вершины A ” эквивалентны. Это следует из определений связного суммирования и корня, так как каждая нетривиальная сферическая редукция либо разбивает многообразие в связную сумму, либо уничтожает слагаемое $S^1 \times S^2$. Поэтому для доказательства существования и единственности неприводимых слагаемых M_i достаточно доказать, что Γ обладает свойствами (FP) и (MF) и применить лемму 1 о диаманте, гарантирующую существование и единственность корня данного многообразия M .

Справедливость свойства (FP) сразу следует из известной леммы Х. Кнезера [9].

ЛЕММА 2. *Каждому компактному трехмерному многообразию M можно поставить в соответствие число k , обладающее следующим свойством: если последовательность сферических редукций, примененных к M одна за другой, имеет длину $k + 1$, то хотя бы одна из этих редукций тривиальна.*

Доказательство леммы Кнезера основано на понятии нормальной поверхности, которое было введено в упомянутой статье Кнезера и с тех пор интенсивно используется в алгоритмической топологии (см., например, [10], [11]). Вполне достаточно взять $k = 10t$, где t – число тетраэдров в какой-нибудь триангуляции многообразия M .

Следующий шаг заключается в доказательстве того, что Γ обладает свойством (MF).

ЛЕММА 3. *Граф Γ обладает функцией-посредником.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}) \in \mathbb{E}^{(2)}(\Gamma)$ – пара ребер графа Γ с общим началом. Согласно универсальной схеме, определим значение $\mu(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2})$ функции-посредника $\mu: \mathbb{E}^{(2)}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ как минимальное число $\sharp(S_1 \cap S_2)$ компонент связности в пересечении сфер $S_1, S_2 \subset A$, которые задают ребра $\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}$. Минимум берется по всем парам таких сфер. Разумеется, здесь мы предполагаем, что сферы находятся в общем положении и поэтому их пересечение состоит из конечного числа окружностей.

Рассмотрим сначала случай, когда $\mu(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}) = 0$, т.е. сферы S_1 и S_2 , по которым совершаются редукции, не пересекаются. Тогда каждая из них выживает при редукции по другой. Поэтому можно считать, что $S_i \subset B_j$ для $(i, j) = (1, 2)$ и $(i, j) = (2, 1)$. Редуцируя каждое из многообразий B_j по сфере S_i , получим одну и ту же вершину $C \in \mathbb{V}(\Gamma)$. Это доказывает свойство (MF1). Здесь уместно отметить, что если после редукции вершины A по

Рис. 2. Перестройка по самой внутренней окружности

одной сфере (скажем, S_1) вторая сфера S_2 становится тривиальной, то редукцию вершины B_1 по S_2 выполнять не нужно. Действительно, в этом случае многообразия B_1 и C отличаются на добавление или удаление сферы S^3 , поэтому мы сразу получим вершину C . Это следует из того, что вершины рассматриваются по модулю добавления или удаления сферы S^3 .

Для проверки свойства (MF2) рассмотрим случай, когда любые сферы S_1 и S_2 , задающие ребра $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AB_2}$, пересекаются, т.е. $\mu_0 = \mu(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}) > 0$. Тогда они лежат в одном и том же связном многообразии $Q \subset A$. Согласно универсальной схеме, достаточно установить, что для них найдется сфера-посредник, т.е. такая нетривиальная сфера $S \subset A$, что $\#(S_i \cap S) < \#(S_1 \cap S_2)$ при $i = 1, 2$. Разумеется, любая нетривиальная сфера в $A \setminus Q$ является посредником. Если же такой сферы нет, то будем строить сферу-посредник путем устранения окружностей в $S_1 \cap S_2$. Здесь нам понадобится прием, который называется “перестройка по самой внутренней окружности” (или “по самому внутреннему диску”).

Выберем среди окружностей в $S_1 \cap S_2$ окружность c , которая по отношению к сфере S_1 является самой внутренней. Это означает, что она ограничивает в S_1 такой диск D , что $D \cap S_2 = c$. Разрежем S_2 по c и заклеим края разреза двумя параллельными копиями диска D . После небольшого шевеления получатся две новые сферы S' , S'' , которые не пересекают сферы S_2 и вместе пересекают сферу S_1 по меньшему числу окружностей (поскольку окружность c исчезла). См. рис. 2. Хотя бы одна из них (пусть S') обязана быть нетривиальной в Q , так как в противном случае сфера S_2 была бы тривиальной. Поэтому S' можно взять в качестве сферы-посредника. Лемма доказана.

Уже сейчас можно доказать теорему о неприводимом разложении, которая в случае отсутствия неразбивающих сфер совпадает с теоремой 1 о примарном разложении.

ТЕОРЕМА 2. Для любого компактного трехмерного многообразия M множество его неприводимых слагаемых конечно и определено однозначно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Γ – граф, построенный в п. 4.1, и A – его вершина, состоящая только из многообразия M . Из лемм 2 и 3 следует, что Γ обладает свойствами (FP) и (MF). Так как неприводимые слагаемые многообразия M составляют его корень, то их единственность следует из леммы 1 о диаманте. Теорема доказана.

4.2. Примарные разложения. В предыдущем пункте мы доказали теорему 2 о неприводимом разложении, которая представляет собой частный случай теоремы 1 о примарном разложении. Чтобы доказать последнюю в полном объеме, нужны дополнительные соображения. Преимущество такого двухступенчатого метода состоит в том, что первый шаг (существование и единственность разложения в объединение неприводимых частей) часто бывает более или менее стандартным, а все индивидуальные моменты появляются только на втором шаге.

Для завершения доказательства теоремы 1 изменим граф Γ , построенный в п. 4.1, оставив прежнее множество вершин, но запретив редукции по неразбивающим сферам. Таким образом, ребра нового графа $\Gamma' \subset \Gamma$ отвечают редукциям только по разбивающим сферам, а тогда корень любой его вершины состоит в точности из примарных слагаемых составляющих ее многообразий. Свойства (FP) и (MF1) графа Γ наследуются графом Γ' автоматически. Единственная трудность с доказательством свойства (MF2) состоит в том, что после перестройки сферы S_2 по самой внутренней окружности $c \subset S_1$ (см. рис. 2) обе новые сферы $S', S'' \subset Q$ могут оказаться неразбивающими, а тогда их уже нельзя брать в качестве сфер-посредников.

Исправить ситуацию можно с помощью нового приема, который мы назовем “переключательной перестройкой”. Допустим, что $S_1 \cap S_2$ состоит из $n \geq 3$ окружностей. Тогда соединим сферы S', S'' трубкой, не пересекающей сферы S_1 (см. рис. 3).

Рис. 3. Переключательная перестройка

Полученная сфера S_3 похожа на исходную сферу S_2 , поскольку каждая из них получается соединением сфер S', S'' трубками, идущими в одной и той же части, на которые $S' \cup S''$ разбивает Q . Поэтому сфера S_3 является разбивающей и нетривиальной (последнее следует из простого наблюдения, что любая простая дуга в многообразии $S^2 \times I$, которая соединяет различные сферы его края, является тривиальной). Важно отметить, что после подходящего малого шевеления сферы S_3 она будет пересекать сферу S_1 по $n - 1$ окружностям,

Рис. 4. Сферу-посредника нужно искать среди сфер ∂X_i (слева) или среди сфер ∂X_i и сферы $\partial X_1 \# \partial X_3$ (справа)

а сферу S_2 – по двум окружностям. Поэтому ее можно взять в качестве сферы посредника.

Случаи $n = 1$ и $n = 2$ приходится рассматривать отдельно. Покажем, что в каждом из них сфера-посредник существует. Если $n = 1$, то сферы S_1, S_2 разбивают Q на 4 части $X_i, 1 \leq i \leq 4$ (см. рис. 4 слева). Эти части различны, поскольку их разделяют сферы S_1, S_2 : любые две части лежат по разные стороны от хотя бы одной из них. Край каждой части состоит из одной разбивающей сферы. Хотя бы одна из этих сфер нетривиальна, поскольку нетривиальны S_1 и S_2 . Поэтому ее можно взять в качестве сферы-посредника.

Пусть $n = 2$. Тогда сферы S_1, S_2 разбивают Q либо на 5 частей $X_i, 1 \leq i \leq 5$ (если части X_1, X_3 различны), либо на 4 части (если части X_1, X_3 на самом деле совпадают), см. рис. 4 справа. Никакие другие части совпадать не могут, поскольку только X_1, X_3 не разделяются сферами S_1, S_2 . Если $X_1 \neq X_3$, то каждая из частей $X_i, 1 \leq i \leq 4$, ограничена сферой, причем по крайней мере одна из этих сфер обязана быть нетривиальной из-за нетривиальности сферы S_2 . Тогда ее можно взять в качестве сферы-посредника. Для полноты картины отметим, что часть X_5 ограничена тором.

Допустим, что части X_1, X_3 совпадают и составляют одну связную часть X . Тогда у нас есть три кандидата на роль сферы-посредника: сферы $\partial X_2, \partial X_4$ и новая сфера $S = \partial X_1 \# \partial X_3 \subset X$, полученная соединением трубкой, идущей внутри X , двух сфер $\partial X_1, \partial X_3$, составляющих ∂X . Мы утверждаем, что по крайней мере одна из них нетривиальна и поэтому является посредником.

Рассуждая от противного, предположим, что все три сферы тривиальны. Это означает, что X_2, X_4 являются шарами, а часть X гомеоморфна $S^2 \times I$. Тогда редукция по сфере S_1 дает два многообразия $Y_1 = (X \cup X_4) \cup B_1$ и $Y'_1 = (X_5 \cup X_2) \cup B'_1$, редукция по сфере S_2 – также два многообразия $Y_2 = (X \cup X_2) \cup B_2$ и $Y'_2 = (X_5 \cup X_4) \cup B'_2$. Здесь шары X_2, X_4 рассматриваются как ручки индекса 1 (если они приклеиваются к X) или как ручки индекса 2 (если они приклеиваются к X_5), а шары B_1, B'_1, B_2, B'_2 заклеивают сферы на краях соответствующих многообразий. Так как ручки X_2, X_4 индекса 1 соединяют различные сферы на крае многообразия $X \approx S^2 \times I$, то $Y_1 \approx Y_2 \approx S^1 \times S^2$.

С другой стороны, основания ручек X_2, X_4 индекса 2 в торе ∂X_5 изотопны, поэтому $Y'_1 \approx Y'_2$. Таким образом, редукции по сферам S_1, S_2 дают один и тот же результат. Это противоречит тому, что в рассматриваемой ситуации, когда $\mu(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}) > 0$, вершины B_1, B_2 обязаны быть различными.

В случае примарных разложений неориентируемых многообразий указанные соображения тоже работают, за исключением того, что ручки X_2, X_4 индекса 1 могут приклеиваться к краю многообразия $X \approx S^2 \times I$ по-разному. Поэтому в одном случае может получиться прямое произведение $S^1 \times S^2$, в другом – скрученное произведение $S^1 \tilde{\times} S^2$. Однако, так как многообразие M неориентируемо, то все слагаемые $S^1 \times S^2$ можно заменить на слагаемые $S^1 \tilde{\times} S^2$. Поэтому теорему Кнезера–Милнора для неориентируемых многообразий можно сформулировать так.

ТЕОРЕМА 3. *Любое компактное связное неориентируемое трехмерное многообразие M гомеоморфно связной сумме $M_1 \# \dots \# M_n \# m(S^1 \tilde{\times} S^2)$, где все M_i неприводимы и $m(S^1 \tilde{\times} S^2)$ обозначает связную сумму $m \geq 0$ экземпляров многообразия $S^1 \tilde{\times} S^2$. Все слагаемые определены однозначно с точностью до порядка и гомеоморфизма.*

5. Граничные связные суммы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть D – собственный диск в компактном связном трехмерном многообразии Q . Тогда *дисковая редукция* многообразия Q по D состоит в разрезании многообразия Q вдоль диска D , в результате чего получается новое многообразие Q' . Редукция называется *тривиальной*, если D отсекает от многообразия M трехмерный шар. В противном случае она нетривиальна.

Как и в сферическом случае, нужно различать редукции по разбивающим и неразбивающим дискам. Если диск разбивает, то Q' состоит из двух многообразий Q_1, Q_2 , из которых Q получается склеиванием дисков на их краях или, что то же самое, приклеиванием трехмерной ручки индекса 1. В этом случае говорят, что Q является граничной связной суммой многообразий Q_1, Q_2 и пишут $Q = Q_1 \sqcup Q_2$. Такая сумма тривиальна, если тривиальна порождающая ее редукция, т. е. когда одно из многообразий Q_1, Q_2 является шаром, а второе совпадает с Q . При редукции связного многообразия Q по неразбивающему диску получающееся многообразие Q' остается связным.

Вряд ли имеет смысл изучать дисковые редукции отдельно от сферических. Обычно либо их рассматривают вместе, либо ограничиваются классом неприводимых многообразий, когда нетривиальных сфер нет и поэтому сферические редукции не нужны. Первый случай подробно рассмотрен в [12], поэтому мы ограничимся рассмотрением второго.

ТЕОРЕМА 4. *Любое отличное от шара связное неприводимое компактное трехмерное многообразие M с непустым краем гомеоморфно граничной связной сумме $M_1 \sqcup \dots \sqcup M_n$ примарных многообразий. Все слагаемые определены однозначно с точностью до порядка и замены полного тора $S^1 \times D^2$ на заполненную бутылку Клейна $S^1 \tilde{\times} D^2$ и наоборот.*

Для случая ориентируемых многообразий эта теорема была доказана в [13]. Как и в случае теоремы Кнезера–Милнора, доказательство, следующее универсальной схеме, оказывается гораздо более простым. Построим граф Γ , вершинами которого являются неупорядоченные наборы компактных связных неприводимых многообразий, рассматриваемые с точностью до добавления или удаления трехмерных шаров. Ребра графа отвечают редукциям как по разбивающим, так и по неразбивающим дискам.

Чтобы установить справедливость свойства (FP), введем числовую характеристику $\gamma(A)$ произвольной вершины $A \in \mathbb{V}(\Gamma)$ формулой $\gamma(A) = \sum_i g^2(F_i)$, где поверхности F_i , $1 \leq i \leq n$, составляют край многообразия A , а $g(F_i)$ обозначает род замкнутой поверхности F_i , который связан с эйлеровой характеристикой $\chi(F_i)$ формулой $g(F_i) = 1 - \chi(F_i)/2$. Квадраты взяты для того, чтобы число $\sum_i g^2(F_i)$ (в отличие от числа $\sum_i g(F_i)$) уменьшалось при редукциях по всем дискам.

Свойство (MF) проверяется с помощью той же техники устранения пересечений. Единственное отличие состоит в том, что кроме перестроек по самым внутренним окружностям нужно еще использовать перестройки по самым внешним дугам пересечений дисков. Применение леммы 1 о диаманте сразу доказывает, что корень любой вершины графа существует и единствен. Поэтому справедлива следующая теорема, представляющая собой частный случай теоремы 4 для многообразий без неразбивающих собственных дисков.

ТЕОРЕМА 5. *Любое отличное от шара связанное неприводимое компактное трехмерное многообразие M с непустым краем с помощью дисковых редукций разбивается в объединение гранично неприводимых частей. Эти части определены однозначно с точностью до порядка.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Определение дисковой редукции можно немного изменить, дополнив разрезание многообразия Q по диску изотопным сжатием получающегося многообразия Q' так, чтобы оно попало строго внутрь многообразия Q . Тогда утверждение теоремы 5 можно усилить. Оказывается, получающийся в результате корень $R(M)$ данного многообразия M , т. е. объединение гранично неприводимых многообразий (которые теперь лежат внутри M), определен однозначно с точностью до изотопии. Доказательство остается прежним, нужно только соответственно изменить определение графа Γ . Его вершины теперь будут состоять из наборов связных подмногообразий, лежащих внутри многообразия M . При этом два набора подмногообразий считаются эквивалентными, если они изотопны внутри M (с точностью до добавления или удаления трехмерных шаров).

Это дает новое доказательство теоремы Ф. Бонахона [14] о существовании и единственности характеристического тела сжатия (которое можно определить как дополнение к дисковому корню $R(M) \subset \text{Int } M$).

Следует отметить, что в отличие от случая сферических связных сумм, когда есть всего два примарных, но приводимых многообразия, число гранично приводимых примарных (по отношению к граничным связным суммам) многообразий бесконечно. Например, если к связному гранично неприводимому

Рис. 5. Два примера примарных, но гранично приводимых многообразий

многообразию M приклеить ручки индекса 1 так, чтобы из них и связных компонент края ∂M нельзя было составить цикл, то полученное многообразие будет примарным и гранично приводимым. См. рис. 5 слева. Справа изображен другой пример примарного многообразия, составленного из двух связных гранично неприводимых многообразий и ручек индекса 1. Интересно отметить, что добавление любой новой ручки превращает это многообразие в гранично приводимое.

Существование большого числа примарных, но гранично приводимых многообразий не препятствует завершению доказательства теоремы 4 подобно тому, как это было сделано в п. 4.2 при доказательстве теоремы 1 Кнезера–Милнора. В частности, нужно использовать подходящий вариант переключательной перестройки. Подробности мы опускаем.

6. Разложения заузленных графов в многообразиях

Под заузленным графом мы понимаем пару (M, G) , где M – компактное трехмерное многообразие и G – произвольный конечный граф (компактный одномерный полиэдр) в $\text{Int } M$. Два заузленных графа эквивалентны, если они гомеоморфны как пары. Нам понадобится понятие несжимаемости сферы в (M, G) , которое учитывает наличие графа. Оно отличается от общепринятого определения несжимаемой сферы в многообразии без графа, когда требуется, чтобы она не ограничивала шар.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Двумерная сфера $S \subset (M, G)$ называется *сжимаемой*, если найдется такой диск $D \subset M$, что $D \cap S = \partial D$, $D \cap G = \emptyset$ и каждый из дисков, ограниченных окружностью ∂D в S , пересекает G . В противном случае сфера S называется *несжимаемой*.

По аналогии со сферическими редукциями трехмерных многообразий определим четыре типа сферических редукций заузленных графов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть несжимаемая сфера S в (M, G) находится в общем положении к G и множество $X = S \cap G$ состоит из k точек, где $0 \leq k \leq 3$ (такие сферы будем называть допустимыми). Тогда *сферическая редукция* пары (M, G) по S состоит в разрезании (M, G) вдоль S и взятии конусов $(\text{Con } S_{\pm}, \text{Con } X_{\pm})$ над копиями $(S_{\pm}, X_{\pm})$ пары (S, X) , появившимися при разрезании. Получившаяся при этом пара будет обозначаться (M_S, G_S) .

Оказывается, большинство основных понятий и фактов теории сферических редукций в абсолютной ситуации (когда $G = \emptyset$) переносятся на заузленные графы. Сферические редукции удобно разбить на два класса – в зависимости от того, является сфера S разбивающей или нет. Если редукция по разбивающей сфере S применяется к паре (M, G) и многообразие M связно, то в результате получаются две пары (M_1, G_1) , (M_2, G_2) . В этом случае говорят, что пара (M, G) является связной суммой $(M_1, G_1) \# (M_2, G_2)$ пар (M_1, G_1) , (M_2, G_2) . Таким образом, есть четыре различные операции связного суммирования, которые можно описать так. Сначала для каждого $i = 1, 2$ вырежем из пары (M_i, G_i) тривиальную пару $(V_i, V_i \cap G) \approx (\text{Con } S^2, \text{Con } X)$, где множество $X \subset S^2$ состоит из $k \leq 3$ точек. Затем склеим получившиеся многообразия по такому гомеоморфизму $h: \partial V_1 \rightarrow \partial V_2$, что $h(\partial V_1 \cap G) = \partial V_2 \cap G$. Как и в случае пустого графа, операция связного суммирования многозначна. Редукция по сфере $S \subset (M, G)$ и обратная ей операция связного суммирования называются тривиальными, если S ограничивает в M тривиальную пару вида $(\text{Con } S^2, \text{Con } X)$. Если пара (M, G) допускает только тривиальные редукции, то она называется неприводимой.

Здесь уместно объяснить, зачем мы требуем несжимаемости сферы S и чем вызвано ограничение на число точек k в $S \cap G$. Дело в том, что если разрешать

Рис. 6. Редукции по сжимаемым сферам могут привести к разложениям типа $(M, K_0) = (M, K) \# (S^3, t)$, где узел (S^3, t) нетривиален

Рис. 7. Редукции пары (S^3, G) по сферам S, S' , пересекающим граф соответственно в 2 и 4 точках, дают различные примарные слагаемые

редукции по сжимаемым сферам или допускать $k \geq 4$, то нет никаких шансов получить существование и единственность разбиения заузленного графа на неприводимые или примарные части. Соответствующие примеры показаны на рис. 6 и 7. На рис. 6 изображены узлы $K_0 = S^1 \times \{*\}$ и K в $S^1 \times D^2$, которые задают соответствующие узлы в $M = S^1 \times S^2 \supset S^1 \times D^2$. Пересечение сферы S с подходящей сферой $S_1 = \{*\} \times S^2 \subset M$ является окружностью, которая делит S_1 на два диска. Один из этих дисков является сжимающим для сферы S . Он помогает построить изотопию между узлом K_0 и узлом $K \subset M$, который получается из узла K_0 локальным завязыванием трилистника t и поэтому представим в виде связной суммы $(M, K_0) \# (S^3, t)$. Такое отщепление нетривиальных слагаемых можно было бы продолжать до бесконечности. Рис. 7 показывает, что если допустить $k = 4$, то единственности нет.

6.1. Корни заузленных графов.

ТЕОРЕМА 6. Пусть (M, G) – заузленный граф. Будем применять к нему нетривиальные сферические редукции до тех пор, пока это возможно. Тогда этот процесс заведомо конечен. Получившийся в результате набор неприводимых заузленных графов определен однозначно с точностью до добавления или удаления тривиальных пар типа надстройки (двойного конуса) над парой (S^2, X) , где множество $X \subset S^2$ состоит из $k \leq 3$ точек.

В частном случае пустого графа получаем теорему 2. Схемы доказательства этих теорем весьма близки, поэтому мы ограничимся описанием необходимых дополнительных аргументов.

Как и в п. 4.1, построим граф Γ . Каждая его вершина является конечным набором заузленных графов, т. е. пар вида (M_i, G_i) , где M_i – связное трехмерное многообразие и G_i – граф внутри него. Эквивалентным образом вершину можно понимать и как пару (M, G) , подразумевая, что многообразие M и граф G в нем могут быть несвязными. Вершины, отличающиеся на добавление или удаление тривиальных пар, считаются одинаковыми. Вершины $A, B \in \mathbb{V}(\Gamma)$ соединены ориентированным ребром $\overrightarrow{AB}$ тогда и только тогда, когда вершина B получается из вершины A применением нетривиальной редукции по сфере S , лежащей в какой-нибудь паре $(M_i, G_i) \subset A$.

Достаточно доказать, что для любой вершины графа Γ ее корень существует и единствен (это утверждение является переформулировкой теоремы 6). Справедливость нужного для этого свойства (FP) вытекает из следующего обобщения леммы Кнезера, доказанного в лемме 6 работы [12] с помощью модификации метода нормальных поверхностей, когда рассматривается такая триангуляция многообразия M , что граф $G \subset M$ состоит из ее ребер.

ЛЕММА 4. Для любой пары (M, G) найдется такое число C , что любая последовательность применяемых к ней нетривиальных сферических редукций имеет длину не более чем C .

Проверка свойства (MF) практически совпадает с его проверкой в абсолютном случае (лемма 3), когда рассматриваются многообразия без графов. Для устранения пересечений сфер S_1, S_2 , задающих ребра $\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}$, применяется тот же самый прием перестройки по окружности $C \subset S_1 \cap S_2$, ограничивающей

в S_1 самый внутренний диск D . Если $D \cap G = \emptyset$, то из несжимаемости сферы S_2 следует, что одна из получающихся при перестройке сфер S' , S'' (пусть сфера S') не пересекает графа G . Отсюда следует, что либо она, либо сфера S'' может быть взята в качестве сферы-посредника.

Теперь допустим, что все самые внутренние диски на S_1 и S_2 пересекаются с графом G . Поскольку самых внутренних дисков на сфере по меньшей мере два, а число точек в пересечении каждой сферы с графом не превосходит трех, то найдется самый внутренний диск $D \subset S_1$, пересекающий граф в одной точке. Тогда одна из сфер S' , S'' , получающихся при перестройке сферы S_2 по D , пересекается с графом G в двух, а вторая – в 2 или 3 точках. Как и в предыдущем случае, хотя бы одна из них обязана быть нетривиальной и поэтому может быть взята в качестве сферы-посредника. Этих аргументов достаточно для доказательства теоремы 6.

Отметим, что знаменитая теорема Х. Шуберта [6] о том, что любой нетривиальный узел в S^3 однозначно представим в виде связной суммы примарных узлов, является прямым следствием теоремы 6. Действительно, достаточно применить эту теорему к случаю, когда многообразие является 3-сферой, а граф – узлом в ней. Разумеется, вместо 3-сферы можно взять произвольное трехмерное многообразие без неразбивающих сфер и получить другой частный случай теоремы 6.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть K – нетривиальный (т.е. не ограничивающий диска) узел в многообразии M , не содержащем неразбивающих сфер. Тогда пару (M, K) можно представить в виде связной суммы*

$$(M, K) = (M, K_0) \# (S^3, K_1) \# (S^3, K_2) \# \cdots \# (S^3, K_s),$$

все слагаемые которой примарны и определены однозначно с точностью до порядка и гомеоморфизма пар.

Число s примарных локальных узлов K_i , $i > 0$, будем называть числом Шуберта узла (M, K) .

Для глобальных узлов (т.е. узлов в произвольных, не обязательно неприводимых, трехмерных многообразиях) существование и единственность корня следует из замечательной теоремы К. Мияцаки [15], в которой выяснено, когда глобальный узел допускает различные примарные разложения. Аналогичные результаты можно получить и для зацеплений в трехмерных многообразиях, а также для других графов, например тета-кривых. См. работу [16] и раздел 10, где в случае отсутствия неразбивающих сфер удалось не только доказать однозначную определенность сомножителей данной тета-кривой, но и учесть их порядок и тем самым полностью описать структуру полугруппы тета-кривых.

6.2. Контрпримеры к теореме о примарных разложениях заузленных графов. Как было отмечено в п. 4.2, имеется существенное различие между сферическими корнями и примарными разложениями многообразий. В первом случае разрешается выполнять редукции по всем сферам, во втором – только по разбивающим. Аналогичное (и даже более существенное) различие

Рис. 8. Две разбивающие сферы в многообразии $(S^1 \times S^2) \# (S^1 \times S^2)$

наблюдается и в случае дисковых редукций. Тем не менее в обоих случаях теоремы о примарных разложениях (когда разрешается делать редукции только по разбивающим сферам или соответственно дискам) верны. Оказывается, что для заузленных графов это не так: существуют заузленные графы, имеющие по несколько различных примарных разложений. Мы построим такой граф G в многообразии $M = S^1 \times S^2 \# S^1 \times S^2$, что пара (M, G) допускает два различных разложения на неприводимые слагаемые.

Рассмотрим в сфере S^3 шесть таких двумерных сфер $P_i, Q_i, 1 \leq i \leq 3$, что выполнены следующие условия.

1. Пересечение $P_i \cap Q_j$ состоит из одной окружности при $(i, j) = (1, 3), (3, 1), (2, 2), (3, 3)$ и пусто для всех других пар (i, j) .
2. Сферы P_1 и P_2 лежат по разные стороны сферы P_3 , а сферы Q_1 и Q_2 – по разные стороны сферы Q_3 . См. рис. 8 слева.

Соединим теперь сферу P_3 со сферами P_1, P_2 тонкими трубками. Полученную новую сферу обозначим P . Аналогично, соединение сферы Q_3 трубками со сферами Q_1, Q_2 дает новую сферу Q . Пересечение сфер P, Q состоит из 4 окружностей, разбивающих каждую из них на кольцо, три диска и диск с двумя дырками. Выберем шары $X, X', Y, Y' \subset S^3 \setminus (P \cup Q)$ так, чтобы шары X, X' лежали по одну сторону от сферы P и по одну сторону от сферы Q , а шары Y, Y' – по другую сторону от этих сфер (см. рис. 8 справа).

Вырежем эти шары из сферы S^3 и приклеим к получившемуся многообразию S_*^3 две трехмерные ручки $H_X, H_Y \approx S^2 \times I$ так, чтобы они соединяли сферу ∂X со сферой $\partial X'$ и сферу ∂Y со сферой $\partial Y'$. Получится трехмерное многообразие $M \approx (S^1 \times S^2) \# (S^1 \times S^2)$ со сферами P, Q внутри него.

Теперь опишем заузленный граф $G \subset M$, все вершины которого имеют валентность 3. Две из них лежат в H_X , четыре – в H_Y , а четыре оставшиеся – в S_*^3 . Ребра внутри ручек служат для того, чтобы отличать эти ручки друг от друга. Граф G пересекает все шесть дисковых компонент разности $(P \cup Q) \setminus (P \cap Q)$, каждую в одной точке (см. рис. 9).

Теперь выполним редукцию заузленного графа (M, G) по сфере P . Получим два заузленных графа G_P, G'_P в двух экземплярах многообразия $S^1 \times S^2$ (см. рис. 10, где P_-, P_+ обозначают две копии сферы P , которые получились в результате разрезания многообразия M по ней). Любая разбивающая сфера в $S^1 \times S^2$ ограничивает шар. Поэтому нетрудно доказать, что оба заузленных графа примарны. Заметим, что граф G_P имеет восемь вершин (четыре

Рис. 9. Заузленный граф G в трехмерной сфере с двумя ручками, допускающий два различных разложения на примарные слагаемые: по 2-сфере P и по 2-сфере Q

Рис. 10. Примарные слагаемые $(S^1 \times S^2, G_P)$ и $(S^1 \times S^2, G'_P)$ пары (M, G) , полученные редукцией по сфере P

из них лежат в H_Y), а граф G'_P имеет четыре вершины (две в H_X). Аналогично, редукция пары (M, G) по сфере Q дает также два заузленных графа $G_Q, G'_Q \subset S^1 \times S^2$. Внешне эти графы похожи на графы G_P, G'_P , но отличаются от них числами вершин (по шесть в каждом). Поэтому разложения $(M, G) = (S^1 \times S^2, G_P) \# (S^1 \times S^2, G'_P)$ и $(M, G) = (S^1 \times S^2, G_Q) \# (S^1 \times S^2, G'_Q)$ различны.

Здесь уместно отметить, что все 4 примарных заузленных графа G_P, G'_P, G_Q, G'_Q являются приводимыми. Например, пара $(S^1 \times S^2, G_P)$ допускает нетривиальную редукцию по неразбивающей сфере ∂Y , которая пересекает G_P в двух точках. После применения всех возможных нетривиальных редукций

к парам $(S^1 \times S^2, G_P)$, $(S^1 \times S^2, G'_P)$ получим набор неприводимых заузленных графов в S^3 , который (в полном соответствии с теоремой 6) совпадает с аналогичным набором для пар $(S^1 \times S^2, G_Q)$, $(S^1 \times S^2, G'_Q)$.

6.3. Общая структура контрпримеров. Разобьем множество $\mathcal{G}$ всех заузленных графов в связных многообразиях на два подмножества $\mathcal{R}$ и $\mathcal{C}$. Первое подмножество состоит из заузленных графов, допускающих только одно примарное разложение. Будем называть их регулярными. Второе – из контрпримеров к теореме о примарных разложениях заузленных графов, т. е. из графов, имеющих различные примарные разложения.

Пусть (M, G) – заузленный граф. Если $(M, G) = (M', G') \# (M'', G'')$ и одно из слагаемых, например (M', G') , лежит в $\mathcal{C}$, то (M, G) тоже лежит в $\mathcal{C}$. В этом случае будем говорить, что контрпример (M, G) индуцирован контрпримером (M', G') .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Заузленный граф $(M, G) \in \mathcal{C}$ называется *базисным*, если он не индуцирован никаким графом из $\mathcal{C}$ или, эквивалентно, если в любом его разложении в связную сумму двух заузленных графов оба слагаемых регулярны. Множество всех базисных контрпримеров обозначим $\mathcal{B}$.

Из этого определения следует, что если $(M, G) \in \mathcal{B}$, то выполняется следующее.

1. Для любой допустимой разбивающей нетривиальной сферы $S \subset (M, G)$ каждый из графов (M'_S, G'_S) , (M''_S, G''_S) , полученных из заузленного графа (M, G) редукцией по S , имеет только одно примарное разложение.
2. Найдется такая пара допустимых нетривиальных разбивающих сфер $P, Q \subset (M, G)$, что объединение примарных слагаемых заузленных графов (M'_P, G'_P) , (M''_P, G''_P) отлично от аналогичного объединения слагаемых графов (M'_Q, G'_Q) , (M''_Q, G''_Q) . Будем называть такие пары сфер *исключительными*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть $P_i, Q_i \subset (M_i, G_i)$, $i = 1, 2$, – исключительные пары сфер и $N_i = N(P_i \cup Q_i)$ – регулярные окрестности объединений этих пар. Тогда пары P_i, Q_i называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h: N_1 \rightarrow N_2$, переводящий $P_1 \cup Q_1$ в $P_2 \cup Q_2$.

ГИПОТЕЗА 1. Любой базисный контрпример $(M, G) \in \mathcal{B}$ содержит такую исключительную пару сфер P, Q , что пересечение этих сфер трансверсально и состоит из не более чем шести окружностей.

ГИПОТЕЗА 2. Число классов эквивалентности исключительных пар конечно.

Приведем аргументы в пользу гипотезы 1. Во-первых, основные приемы доказательства теоремы Кнезера–Милнора в пп. 4.1, 4.2 почти всегда работают и для многообразий с графами. Исключением служит случай, когда среди окружностей $P \cap Q$ есть ровно три окружности, самые внутренние по отношению к одной сфере, и две или три самые внутренние окружности по отношению к другой сфере. При этом ребра графа Γ пересекают все ограничиваемые ими самые внутренние диски. Оценить число окружностей в $P \cap Q$, которые не являются самыми внутренними, пока не удастся, хотя шансы есть. Подробнее

это описано в [17]. Второй довод в пользу гипотез 1 и 2 состоит в том, что для глобальных узлов (т. е. для узлов в произвольных трехмерных многообразиях) обе гипотезы верны. Как это можно извлечь из теоремы К. Мияцаки [15] о примарных разложениях, для глобальных узлов существует только один базисный контрпример. Пересечение соответствующих сфер состоит из трех окружностей.

6.4. Разложения раскрашенных графов и орбифолдов. Существование контрпримеров к теореме о примарных разложениях заузленных графов весьма неожиданно. Действительно, эта теорема тесно связана с теоремой о примарных разложениях трехмерных орбифолдов, которая в качестве фольклорного результата была принята математическим сообществом. Мало кто сомневался, что оригинальное доказательство теоремы Кнезера–Милнора после небольшой доработки пройдет и для орбифолдов. Однако это не так: контрпримеры есть не только в классе заузленных графов, но и в классе орбифолдов. Хорошо известно, что трехмерный орбифолд можно рассматривать как заузленный граф, ребра которого снабжены натуральными числами (порядками), см., например, [18], [19]. Мы предпочитаем чуть более общую ситуацию, рассматривая графы с раскрашенными ребрами.

Пусть $\mathcal{C}$ – некоторое множество, элементы которого называются цветами. Под раскраской графа G мы понимаем отображение $\varphi: \mathbb{E}(G) \rightarrow \mathcal{C}$, где $\mathbb{E}(G)$ – множество всех ребер графа G . Граф G с раскраской φ будем обозначать G_φ . Пусть $\mathcal{T}$ – некоторый набор неупорядоченных троек цветов из множества $\mathcal{C}$, которые будем называть разрешенными тройками. В частности, он может состоять из всех возможных троек.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Раскраска $\varphi: \mathbb{E}(G) \rightarrow \mathcal{C}$ графа G в трехмерном многообразии M называется *правильной*, если

- 1) M не содержит сферы, трансверсально пересекающей ребра графа ровно в двух точках разных цветов;
- 2) цвета ребер, исходящих из любой тройной вершины, должны составлять разрешенную тройку.

В этом случае пара (M, G_φ) также называется *правильной*.

Понятия допустимой сферы $S \subset (M, G_\varphi)$, редукции пары (M, G_φ) по не обязательно разбивающей сфере, тривиальной пары и тривиальной редукции определяются точно так же, как и в случае графов без раскрасок. Единственное условие: редукцию по сфере S , пересекающей ребра графа в трех точках, можно выполнять только тогда, когда тройка их цветов разрешена. Как и раньше, пара, не допускающая нетривиальных редукций, называется неприводимой.

ТЕОРЕМА 8. Пусть (M, G_φ) – правильно раскрашенный заузленный граф. Будем применять к нему нетривиальные сферические редукции до тех пор, пока это возможно. Тогда этот процесс заведомо конечен. Получившийся в результате набор неприводимых раскрашенных заузленных графов, т. е. корень пары (M, G_φ) , определен однозначно с точностью до сохраняющего цвета

гомеоморфизма и добавления или удаления тривиальных пар типа надстройки над парой (S^2, X) , где X состоит из $k \leq 3$ точек. Если при этом $k = 3$, то цвета этих точек должны составлять разрешенную тройку.

Доказательство этой теоремы является буквальным повторением доказательства теоремы 6 для заузленных графов без раскрасок. Есть только одно место, где нужно учитывать раскраски. При выполнении перестройки по самому внутреннему диску, пересекающему граф в одной точке, появляется сфера S' , пересекающая граф в двух точках. Для того чтобы ее можно было взять в качестве сферы-посредника, нужно знать, что эти точки имеют один и тот же цвет. Именно для этого в определение 9 введено соответствующее ограничение 1).

Напомним, что трехмерный орбифолд можно задать парой (M, G^*) , где M – ориентированное трехмерное многообразие и $G^* \subset \text{Int } M$ – набор непересекающихся замкнутых окружностей и связных регулярных графов степени 3. При этом все окружности и все ребра графов должны быть снабжены отличными от единицы натуральными числами, которые называются порядками. Порядки ребер, исходящих из каждой вершины, должны составлять одну из следующих троек: $(2, 2, n)$, где $n \geq 2$, или $(2, 3, n)$, где $n \in \{3, 4, 5\}$. См. [18], [19].

Будем называть орбифолд (M, G_*) допустимым, если он не содержит “плохих” двумерных подорбифолдов. Это означает, что в нем нет двумерных сфер, которые пересекают ребра графа в одной точке или в двух точках разных порядков. Порядки ребер и замкнутых окружностей графа можно рассматривать как цвета, а перечисленные выше тройки объявить разрешенными. Поэтому следующая теорема является частным случаем теоремы 8.

ТЕОРЕМА 9. *Для любого допустимого орбифолда (M, G_*) его корень (результат применения нетривиальных сферических редукций до тех пор, пока это возможно) существует и единствен с точностью до сохраняющего порядка гомеоморфизма и добавления или удаления тривиальных орбифолдов.*

Пусть G – такой заузленный граф в трехмерном многообразии M , что он состоит из окружностей и регулярных графов степени 3 и нет ни одной сферы в M , трансверсально пересекающей его в одной точке. Есть много способов снабдить окружности и ребра этого графа порядками так, чтобы получился орбифолд без плохих подорбифолдов. Самое простое – положить все порядки равными двум. При таком переходе любой контрпример к теореме о примарных разложениях заузленных графов, в том числе контрпример из п. 6.2, легко преобразуется в контрпример к теореме о примарных разложениях трехмерных орбифолдов.

7. Кольцевые редукции трехмерных многообразий

В дополнение к сферическим и дисковым редукциям введем новый тип редукций трехмерных многообразий. Они называются кольцевыми. Пусть A – собственное кольцо в трехмерном многообразии M . Будем называть его допустимым, если его граничные окружности лежат в различных компонентах края ∂M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Кольцевая редукция многообразия M по допустимому кольцу $A \subset M$ состоит в разрезании многообразия по A и заклеивании ручки индекс 2 двух копий этого кольца на крае получившегося многообразия. Кольцо A и редукция по нему называются *тривиальными*, если A отсекает от многообразия M трехмерный шар.

Следующий пример поясняет суть этого определения и одновременно служит его наглядной реализацией и мотивировкой.

ПРИМЕР 1. Выберем в связной замкнутой ориентируемой поверхности F простую замкнутую кривую c . Редукция многообразия $M = F \times I$ по кольцу $A = c \times I$ дает многообразие $F_1 \times I$, где замкнутая поверхность F_1 получается разрезанием поверхности F по кривой c и заклеиванием дисками двух копий кривой c , появившихся в результате разреза. При этом поверхность F_1 состоит из двух связных компонент, если c разбивает F , и из одной, если нет.

Нетривиальные допустимые кольца и редукции по ним удобно разделить на два типа. Кольцо A относится к первому типу, если хотя бы одна из окружностей края $\partial A \subset \partial M$ не ограничивает диска в ∂M , и ко второму, если обе окружности ограничивают диски. Здесь уместно отметить, что во втором случае объединение S этих дисков с A является сферой, причем редукция по A мало отличается от редукции по сфере S , чуть продавленной внутрь многообразия. Получающиеся в результате этих редукций многообразия M_S и M_A практически совпадают. Более точно, многообразие M_S получается из многообразия M_A заклеиванием шарами двух сфер на его крае, что можно реализовать редукциями по сдвинутым внутрь многообразия экземплярам этих сфер.

Кольцевые редукции имеет смысл рассматривать вместе со сферическими и дисковыми редукциями. Редукции по нетривиальным дискам также можно разделить на два типа: когда край диска нетривиален в ∂M и когда тривиален. Как и выше, каждую дисковую редукцию второго типа можно заменить на редукцию по сфере. В дальнейшем будем рассматривать только редукции по кольцам и дискам первого типа и редукции по нетривиальным сферам.

Пусть M – компактное трехмерное многообразие. Будем применять к нему нетривиальные редукции до тех пор, пока это возможно. Если этот процесс остановится, то получившееся в результате многообразие (возможно, несвязное) будем называть *кольцевым корнем* многообразия M .

ТЕОРЕМА 10. Для любого компактного трехмерного многообразия M его кольцевой корень существует и единствен с точностью до добавления и удаления трехмерных шаров и сфер.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя универсальной схеме (см. раздел 3), построим ориентированный граф Γ . Каждая его вершина является компактным трехмерным многообразием, возможно несвязным. При этом вершины рассматриваются с точностью до удаления или добавления трехмерных шаров и сфер. Две вершины A, B соединены ребром $\overrightarrow{AB}$ тогда и только тогда, когда B получается из A применением какой-нибудь нетривиальной редукции.

Проверим, что Γ обладает свойством (FP). Для этого воспользуемся числовой характеристикой вершины $\gamma(V) = \sum_i g^2(F_i)$, введенной в разделе 5. При

каждой редукции по диску или кольцу первого типа это число строго уменьшается, а при сферических редукциях оно сохраняется. Поэтому любая последовательность $R_1, R_2, \dots$ допустимых редукций содержит только конечное число редукций по дискам и кольцам. Пусть R_n – последняя из таких редукций. Все редукции после нее являются сферическими, а тогда конечность их числа следует из леммы 2 (леммы Кнезера).

Проверим выполнение свойства (MF). Первые шаги, т. е. определение функции-посредника и проверка свойства (MF1), выполняются по универсальной схеме. Проверка свойства (MF2) аналогична соответствующей проверке того же свойства в доказательстве леммы 3. Однако теперь каждая из поверхностей S_1, S_2 может быть не только сферой, но и диском или кольцом первого типа. Поэтому, кроме перестройки по самой внутренней окружности, нам понадобится несколько более сложных, хотя и стандартных, приемов устранения пересечений. Их мы будем использовать и в других разделах, поэтому опишем более подробно. Обозначим M связное трехмерное многообразие, в котором лежат поверхности S_1, S_2 , задающие ребра $\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}$.

Прием 1. Предположим, что одна из поверхностей S_1, S_2 (пусть S_1) содержит самую внутреннюю окружность, которая ограничивает в S_1 такой диск D , что $D \cap S_2 = \partial D$. Поскольку любая окружность в сфере, диске или кольце является разбивающей, то в результате перестройки поверхности S_2 по D получатся две поверхности, которые обозначим S', S'' . Допустим, что хотя бы одна (пусть S') является сферой. Если она нетривиальна, то ее можно взять в качестве посредника. Если же она тривиальна, то посредником является поверхность S'' .

Случай, когда ни одна из поверхностей S', S'' не является сферой, возможен, только если S_2 – кольцо, а окружность ∂D – его средняя линия. Тогда обе поверхности S', S'' являются дисками, причем хотя бы один из них обязан быть нетривиальным и поэтому является посредником.

В дальнейшем будем предполагать, что никакая окружность в $S_1 \cap S_2$ не является самой внутренней ни по отношению к S_1 , ни по отношению к S_2 .

Прием 2. Предположим, что поверхность S_1 содержит самую внешнюю собственную дугу l , которая отсекает от нее такой диск D , что $D \cap S_2 = l$. Перестраивая S_2 по D , получим две собственные поверхности S', S'' , по крайней мере одна из которых (пусть S') является диском. Возможны следующие случаи.

1. Окружность $\partial S'$ нетривиальна в ∂M . Тогда S' является посредником.
2. Окружность $\partial S'$ ограничивает в ∂M диск D' , но сфера $S' \cup D'$ нетривиальна в M . Тогда ее копию, изотопно сдвинутую внутрь многообразия M , можно взять в качестве посредника.
3. Сфера $S' \cup D'$ ограничивает в M шар, который определяет изотопию поверхности S_2 в поверхность S'' . Тогда S'' является посредником.

В дальнейшем будем предполагать, что в $S_1 \cap S_2$ нет ни тривиальных окружностей, ни тривиальных дуг. Тогда обе поверхности S_1, S_2 являются кольцами и $S_1 \cap S_2$ состоит либо только из нетривиальных окружностей, либо только из радиальных дуг, соединяющих различные компоненты края каждого кольца.

Рис. 11. Кольцо Z не пересекает кольца S_2 и пересекает кольцо S_1 по меньшему числу окружностей

Прием 3. Предположим, что S_1, S_2 – кольца, пересекающиеся по нетривиальным окружностям. Так как граничные окружности каждого кольца лежат в различных компонентах края многообразия M , то найдутся две такие различные компоненты $\partial_1 M, \partial_2 M \subset \partial M$, что одна из окружностей края ∂S_1 лежит в $\partial_1 M$ и одна из окружностей края ∂S_2 лежит в $\partial_2 M$. Окружности $S_1 \cap S_2$ разбивают S_1 на концентрические подкольца, одно из которых (обозначим его X) примыкает к $\partial_1 M$. Пусть Y – подкольцо кольца S_2 , одна из граничных окружностей которого лежит в $\partial_2 M$, а вторая совпадает с той граничной окружностью кольца X , которая лежит внутри многообразия M . Тогда кольцо $X \cup Y$ можно изотопно сдвинуть в кольцо-посредник $Z \subset M$. См. рис. 11. Чтобы получить реальную трехмерную иллюстрацию, нужно умножить рисунок на окружность.

Рассмотрим оставшийся случай, когда кольца S_1, S_2 пересекаются только по радиальным дугам. Тогда пара $(N^3, S_1 \cup S_2)$, где $N^3 = N(S_1 \cup S_2)$ – регулярная окрестность объединения $S_1 \cup S_2$ в M , имеет вид $(F \times I, c_1 \times I \cup c_2 \times I)$, где F – одна из компонент пересечения $N^3 \cap \partial M$, а $c_i = S_i \cap F$ – простые замкнутые кривые в F . Поэтому про кольца можно временно забыть и оперировать только с кривыми в F . Это – так называемый вертикальный случай.

Прием 4. Предположим, что c_1, c_2 пересекаются по двум или более точкам. Пусть $\alpha \subset c_1$ – одна из дуг, на которые эти точки разбивают окружность c_1 . Выполним перестройку окружности c_2 по α , разрезав c_2 по точкам $\partial\alpha$ и приклеив две параллельных копии дуги α . Заметим, что α может примыкать к c_1 либо с одной стороны, либо с разных сторон. В первом случае перестройка дает две окружности c', c'' , причем хотя бы одна из них (обозначим ее c) обязана быть нетривиальной в ∂M . Во втором случае получается одна окружность (тоже c), которая не разбивает поверхности F и поэтому нетривиальна. И в том, и в другом случае кольцо $Z = c \times I \subset M$ является посредником. См. рис. 12,

Рис. 12. Окружность c пересекает каждую из окружностей c_1, c_2 по меньшему числу точек

из которого реальная трехмерная иллюстрация получается умножением на отрезок.

Прием 5. Предположим, что c_1, c_2 пересекаются в одной точке. Тогда край c регулярной окрестности $N^2 = N(c_1 \cup c_2)$ в ∂M является окружностью. Если кольцо $Z = c \times I \subset M$ тривиально, то M гомеоморфно утолщенному тору $S^1 \times S^1 \times I$, но тогда редукции многообразия M по кольцам S_1, S_2 (как и по всем другим нетривиальным кольцам) дают один и тот же результат: многообразие $S^2 \times I$. Поэтому ребра $\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}$, отвечающие этим редукциям, совпадают и могут быть заданы двумя параллельными копиями кольца S_1 , что противоречит нашему предположению $\mu(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}) > 0$. Отсюда следует, что кольцо Z обязано быть нетривиальным, а тогда оно является посредником. Таким образом, свойства (FP) и (MF) выполнены, поэтому теорема 10 следует из леммы о диаманте.

Условие, что граничные окружности колец, по которым выполняются редукции, должны лежать на различных компонентах края многообразия, существенно. Приведем пример неприводимого трехмерного многообразия M со связным краем и двух таких колец $S_1, S_2 \subset M$, что редукции по ним приводят к различным многообразиям, которые не допускают дальнейших редукций и поэтому являются корнями. Существование такого контрпримера показывает, что теорема 10 отличается от близкой по духу теоремы о JSJ-разбиениях многообразий с краем [7], поскольку там условие на граничные окружности колец не встречается.

ПРИМЕР 2. Пусть N^3 – трубчатая окрестность узла восьмерки 4_1 в S^3 и $Q = S^3 \setminus \text{Int } N^3$ – его дополнительное пространство. Выберем на торе ∂Q систему координат, в которой меридиан узла имеет тип $(1, 0)$. Выберем две пары $(p, q), (m, n)$ взаимно простых чисел так, чтобы выполнялись неравенства $|q|, |n| \geq 2$ и $|p| \neq |m|$. Обозначим a, b отвечающие им кривые на ∂Q . Тогда многообразия $Q_{p,q}$ и $Q_{m,n}$, полученные заполнениями края ∂Q полными торами так, чтобы меридианы полных торов попали в a и b , не гомеоморфны. Согласно В. Тёрстону [20], они являются гиперболическими.

Рассмотрим толстый тор $X = S^1 \times S^1 \times I$ и выделим его внешний меридиан $\mu = S^1 \times \{*\} \times \{1\}$ и внутреннюю параллель $\lambda = \{*\} \times S^1 \times \{0\}$. Затем приклеим к X два экземпляра Q', Q'' многообразия Q . Один экземпляр Q' приклеивается

к X по отождествлению кольцевой регулярной окрестности $N(a)$ окружности a в ∂Q с кольцевой регулярной окрестностью $N(\mu)$ меридиана μ в ∂X . Второй экземпляр Q'' приклеивается по отождествлению окрестности $N(b)$ с окрестностью $N(\lambda)$. Обозначим M получившееся многообразие $Q' \cup X \cup Q''$.

Так как многообразие Q является гиперболическим, то M содержит только два нетривиальных кольца S_1 и S_2 , где S_1 получено отождествлением колец $N(a)$ и $N(\mu)$, а S_2 – отождествлением колец $N(b)$ и $N(\lambda)$. Нетрудно показать, что редукция многообразия M по S_1 дает несвязное объединение пунктированных (т. е. получающихся вырезанием шара) многообразий $Q'_{p,q}$ и Q'' , тогда как редукция по S_2 приводит к несвязному объединению пунктированных многообразий Q' и $Q''_{m,n}$. Выполняя редукции по сферам, параллельным сферическим компонентам их краев, получим два различных многообразия $Q_{p,q} \cup Q$ и $Q \cup Q_{m,n}$. Так как их связные компоненты (т. е. $Q_{p,q}$, $Q_{m,n}$, Q) являются гиперболическими, то они не допускают нетривиальных редукций. Поэтому $Q_{p,q} \cup Q$ и $Q \cup Q_{m,n}$ служат различными корнями многообразия M .

В качестве еще одного примера нахождения корней многообразий упомянем, что если ориентируемое многообразие Зейферта расслоено над кольцом с особыми слоями типов (p_i, q_i) , $1 \leq i \leq n$, то его корень является объединением линзовых пространств $L(p_i, \bar{q}_i)$, где $\bar{q}_i = q_i \bmod p_i$. Можно рассматривать также многообразия с узлами и зацеплениями в них, разрешая при этом редукции по кольцам, которые не пересекают данных зацеплений. Теорема о единственности корня в этих случаях остается справедливой. В случае зацеплений в утолщенных поверхностях редукция по кольцу в дополнении данного зацепления называется дестабилизацией, а зацепление, не допускающее нетривиальных дестабилизаций – минимальным. Для таких зацеплений в утолщенных поверхностях теорема о единственности корня равносильна теореме Г. Куперберга о единственности минимального представителя виртуального зацепления [21], которая нам понадобится в разделе 9. Наличие зацеплений практически не влияет на доказательство теоремы 10, которое из-за простоты многообразий становится легким и весьма близким к оригинальному доказательству Г. Куперберга.

8. Примарные разложения узлов в $F \times I$

Пусть F – связная замкнутая ориентируемая поверхность. Узлом в $F \times I$ называется произвольная простая замкнутая кривая $K \subset \text{Int}(F \times I)$. Чтобы избежать диких примеров, обычно считают, что кривая K кусочно линейная или гладкая. Как и в классическом случае, узлы в утолщенных поверхностях (т. е. многообразиях вида $F \times I$) рассматриваются либо с точностью до изотопии, либо с точностью до гомеоморфизма. В случае узлов в трехмерной сфере эти два подхода практически совпадают, так как любой гомеоморфизм трехмерной сферы на себя изотопен либо тождеству, либо симметрии. Однако уже в случае узлов в $T \times I$, где $T = S^1 \times S^1$ – двумерный тор, различие становится существенным. Например, (p, q) -обмотки тора для различных пар взаимно простых чисел (p, q) задают узлы в $T \times \{*\} \subset T \times I$, которые различны в смысле

изотопии, но одинаковы в смысле гомеоморфизма. Мы предпочитаем второй подход.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Два узла $K \subset F \times I$ и $K' \subset F' \times I$ называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм пар $(F \times I, K) \rightarrow (F' \times I, K')$.

Интерес к узлам в прямых произведениях поверхностей на отрезок вызван тем, что многообразия вида $F \times I$ составляют самый простой класс трехмерных многообразий после сферы S^3 , причем многие свойства классических узлов сохраняются при переходе к узлам в утолщенных поверхностях. Это не удивительно, поскольку теория узлов в S^3 совпадает с теорией узлов в $S^2 \times I$.

Как и узлы в S^3 , узлы в утолщенных поверхностях можно задавать диаграммами. Пусть узел $K \times I$ находится в общем положении по отношению к проекции $p: F \times I \rightarrow F$. Это означает, что ограничение проекции p на малую окрестность каждой точки узла K является вложением, в каждую точку поверхности F проектируется не более двух точек узла K , и если две, то образы содержащих их участков узла K в этой точке пересекаются трансверсально. Чтобы построить диаграмму узла, нужно в каждой двойной точке указать, какой из участков узла проходит выше другого (в смысле величины координаты $t \in I = [0, 1]$). По своей диаграмме узел восстанавливается однозначно. Разумеется, роль преобразований Райдемайстера сохраняется: они реализуют изотопии узлов. Отметим, что теория узлов в утолщенных поверхностях близка к теории виртуальных узлов [22], [23] и в некотором смысле доминирует ее.

Пусть $K_i \subset F_i \times I$, $i = 1, 2$, – два узла. Для того чтобы определить их кольцевую связную сумму $K_1 \# K_2 \subset (F_1 \# F_2) \times I$, для каждого i выберем диск $D_i \subset F_i$ и изотопно продеформируем узел K_i так, чтобы пересечение $l_i = K_i \cap (D_i \times I)$ было тривиальной дугой в шаре $D_i \times I$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. *Кольцевой связной суммой* узлов $K_1 \subset F_1 \times I$ и $K_2 \subset F_2 \times I$ называется узел $K = K_1 \# K_2$ в произведении поверхности $F = F_1 \# F_2$ на отрезок, полученный путем склеивания многообразий $(F_i \setminus \text{Int } D_i) \times I$, $i = 1, 2$, по такому гомеоморфизму $\varphi: \partial D_1 \times I \rightarrow \partial D_2 \times I$, что $\varphi(\partial l_1) = \partial l_2$.

На первый взгляд, это определение мало похоже на определение связного суммирования классических узлов. Однако, если его переформулировать на языке диаграмм, то получится то же самое определение, что и в классическом случае. Нужно из поверхностей F_1, F_2 вырезать диски, пересекающие диаграмму по одной простой дуге каждый, а затем склеить полученные поверхности по гомеоморфизму их краев, сохраняющему концы упомянутых дуг. В случае $F_i = S^2$ получается связное суммирование в классическом смысле.

Связная сумма $K_1 \# K_2$ зависит как от выбора дисков D_1, D_2 и изотопных деформаций узлов, так и от выбора гомеоморфизма φ . Поэтому связное суммирование узлов в утолщенных поверхностях – многозначная операция. Она является коммутативной в том смысле, что множества узлов вида $K_1 \# K_2$ и вида $K_2 \# K_1$ совпадают. В общем случае число различных связных сумм двух данных узлов бесконечно, даже если узлы тривиальны, т. е. ограничивают диски. На рис. 13 эти диски представлены в виде лент.

Рис. 13. Суммирование лент в $T \times I$ может за счет их варьирования дать сколь угодно много различных узлов в утолщенной поверхности рода 2.

Однако, если одно из слагаемых в сумме $K_1 \# K_2$ является тривиальным узлом в $S^2 \times I$, то узел $K_1 \# K_2$ эквивалентен второму узлу. Такое суммирование называется *тривиальным*. Узел в $F \times I$ называется *примарным*, если его нельзя представить в виде нетривиальной связной суммы двух других узлов.

ТЕОРЕМА 11. *Если узел $K \subset F \times I$ отличен от тривиального узла в $S^2 \times I$, то он либо является примарным, либо раскладывается в связную сумму нескольких примарных узлов.*

В этой теореме ничего не сказано про единственность примарных слагаемых. Причина в том, что ее и нет. Ниже мы приведем контрпримеры (см. рис. 17). Оказывается, единственности можно достигнуть, если ограничиться рассмотрением меньшего класса узлов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Узел $K \subset F \times I$ называется *гомологически тривиальным*, если он определяет тривиальный элемент в первой группе гомологий $H_1(F \times I; \mathbb{Z}_2) = H_1(F; \mathbb{Z}_2)$.

Класс гомологически тривиальных узлов замкнут относительно связного суммирования: связная сумма двух узлов гомологически тривиальна тогда и только тогда, когда таковыми являются слагаемые.

ТЕОРЕМА 12 [24]. *Слагаемые любого гомологически тривиального узла, представленного в виде связной суммы примарных слагаемых, определены однозначно с точностью до эквивалентности.*

Эта теорема является аналогом (для узлов в утолщенных поверхностях) теоремы Шуберта [6] о примарных разложениях классических узлов.

Для того чтобы изложить основные идеи доказательств теорем 11, 12, по аналогии с кольцевыми редукциями многообразий (раздел 7) определим четыре типа редукций узлов в утолщенных поверхностях, один основной и три вспомогательных. Пусть F – замкнутая связная ориентируемая поверхность и K – узел в $F \times I$. Будем говорить, что собственное кольцо $A \subset F \times I$ является вертикальным, если оно изотопно кольцу вида $s \times I$, где s – простая замкнутая кривая в F .

Тип 1 (основной). Пусть $A \subset F \times I$ – вертикальное разбивающее кольцо, трансверсально пересекающее узел K в двух точках. Тогда редукция типа 1 состоит в разрезании многообразия $F \times I$ по A и заклеивании двух появившихся копий кольца A ручками индекса 2 с тривиальными дугами в них так, чтобы

получились два узла K_1, K_2 в утолщенных поверхностях $F_1 \times I, F_2 \times I$. Важность этой операции подчеркивается тем, что она обратна операции кольцевого связного суммирования (см. определение 12).

Тип 2. Пусть $A \subset F \times I$ – вертикальное разбивающее кольцо, не пересекающее узла. Если разрезать $F \times I$ по A и заклеить две появившиеся копии кольца A ручками индекса 2 (т.е. применить к многообразию $F \times I$ кольцевую редукцию, см. определение 10), то получатся две утолщенные поверхности $F_1 \times I, F_2 \times I$, одна из которых (пусть $F_1 \times I$) содержит узел K , а вторая узлов не содержит. Редукция типа 2 состоит в замене пары $(F \times I, K)$ на две пары $(F_1 \times I, K), (F_2 \times I, U)$, где U – тривиальный (т.е. ограничивающий диск) узел в $F_2 \times I$. Добавление узла U в $F \times I$ вызвано нежеланием рассматривать пустые узлы.

Заметим, что кольцо A можно заменить на такое параллельное ему кольцо $A' \subset F \times I$, что узел K заходит в область $W \approx A \times [0, 1]$ между ними по тривиальной дуге. Для этого достаточно соединить A с узлом простой дугой l и взять то собственное кольцо на крае регулярной окрестности объединения $A \cup l$, которое пересекает K . Наглядно это можно представить себе как выпускание “щупальца” из кольца A к узлу. Поскольку результаты редукции типа 1 по A' и редукции типа 2 по A совпадают, то редукция типа 2 является частным случаем редукции типа 1. Она называется тривиальной, если A отсекает от многообразия $F \times I$ трехмерный шар, не содержащий узла.

Тип 3. Пусть $S \subset F \times I$ – сфера, трансверсально пересекающая узел K в двух точках. Она ограничивает в $F \times I$ шар, пересекающий узел по дуге. Если разрезать $F \times I$ по S и заклеить две появившиеся копии сферы S шарами с тривиальными дугами в них (т.е. применить к паре $(F \times I, K)$ сферическую редукцию, см. определение 6 при $k = 2$), то получатся новый узел K_1 в $F \times I$ и узел K_2 в S^3 . Редукция типа 3 состоит в замене пары $(F \times I, K)$ на пару $(F \times I, K_1)$ и пару $(S^2 \times I, K_2)$, которая получается из пары (S^3, K_2) удалением двух шаров. Эту редукцию удобно трактовать как вырезание локального узла. Она называется тривиальной, если вырезаемая дуга на самом деле является тривиальной.

Заметим, что сферу S можно соединить с поверхностями $F \times \{0\}$ и $F \times \{1\}$ двумя трубками так, чтобы они не пересекали узел и чтобы получившееся кольцо A было вертикальным. Тогда результаты редукции типа 1 по A и редукции типа 3 по S совпадают, поэтому редукция типа 3 является частным случаем редукции типа 1.

Тип 4. Пусть сфера $S \subset F \times I$ такова, что ограничиваемый ею шар $B \subset F \times I$ содержит K . Тогда редукция типа 4 по S состоит в замене пары $(F \times I, K)$ на пару $(F \times I, U)$ и пару $(S^2 \times I, K)$. Редукция типа 4 является частным случаем редукции типа 2 и, как следствие, частным случаем редукции типа 1.

Пусть редукция одного из типов 1–4 по поверхности $S \subset F \times I$ применяется к паре $(F \times I, K)$. Тогда и редукция, и поверхность S называются тривиальными, если эта пара остается неизменной, но к ней добавляется пара $(S^2 \times I, U)$, где U – тривиальный узел. К тривиальным поверхностям относятся кольца и сферы в многообразии $F \times I$, которые отсекают от него такой шар B , что $B \cap K$ есть либо тривиальная дуга, либо тривиальный узел, либо пустое множество.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть кольцо $A \subset F \times I$, по которому выполняется редукция типа 1 или 2, сжимаемо. Это означает, что окружности ∂A ограничивают диски D_0, D_1 в поверхностях $F \times \{0, 1\}$. Тогда, как это объяснено в разделе 7, эта редукция эквивалентна редукции по сфере S , получающейся продавливанием сферы $D_0 \cup A \cup D_1$ внутрь многообразия. В дальнейшем мы всегда вместо редукций по сжимаемым кольцам будем использовать редукции по соответствующим сферам и считать, что редукции типов 1 и 2 выполняются только по несжимаемым кольцам.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 12. Будем следовать универсальной схеме. Сначала построим ориентированный граф Γ . Множество его вершин состоит из наборов узлов в утолщенных поверхностях. Вершины, отличающиеся на добавление или удаление тривиальных узлов в $S^2 \times I$, считаются одинаковыми. Ребра отвечают нетривиальным редукциям типов 1–4 по несжимаемым кольцам и по сферам. Для краткости такие редукции, как и поверхности, по которым они выполняются, будем называть допустимыми.

Проверка свойства (FP) выполняется так же, как и в доказательстве теоремы 10. Так как при каждой редукции по несжимаемому кольцу число $\gamma(A) = \sum_i g^2(F_i)$ уменьшается, то любая последовательность редукций содержит только конечное число редукций по несжимаемым кольцам. Конечность числа сферических редукций следует из обобщения леммы Кнезера (см. лемму 4). Заметим, что пока мы не использовали условие гомологической тривиальности узлов. Поэтому корень, а вместе с ним и примарное разложение существуют для любого узла. Это доказывает теорему 11.

Приступим к проверке свойства (MF). Значение функции-посредника μ на ребрах определяется как минимально возможное число компонент связности в пересечении задающих их поверхностей. Проверка свойства (MF1) выполняется по универсальной схеме, проверка свойства (MF2) аналогична его проверке в доказательстве теоремы 10. Поэтому ограничимся кратким описанием изменений и изложением дополнительных аргументов. Отличия вызваны тем, что в теореме 10 рассматривались произвольные многообразия и их редукции по кольцам, сферам и дискам, а не только утолщенные поверхности и их редукции по разбивающим кольцам и сферам, как в теореме 12. С другой стороны, теперь нам приходится учитывать наличие узлов. Для удобства сохраним нумерацию нужных приемов.

Пусть допустимые поверхности S_1, S_2 таковы, что они задают ребра $\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}$ и число $\sharp(S_1 \cap S_2)$ компонент их пересечения минимально, т. е. совпадает с $\mu(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2})$.

Прием 1. Предположим, что одна из поверхностей S_1, S_2 (пусть S_1) содержит такой самый внутренний диск D , что $D \cap S_2 = \partial D$. В результате перестройки поверхности S_2 по D получаются две поверхности, которые обозначим S', S'' . Одна из них (пусть S') является сферой, а вторая – сферой или кольцом. Два диска, как на соответствующем шаге доказательства теоремы 10, появиться не могут, так как мы исключили сжимаемые кольца. Если хотя бы одна из этих поверхностей допустима, то она является посредником.

Обе поверхности могут быть недопустимыми только тогда, когда $\sharp(D \cap K) = 2$ и в той половине сферы S_2 , которая отвечает сфере S' , найдется самый внешний диск D' , не пересекающий узла. Тогда нужно поменять роли сфер S_1 , S_2 и получить посредника, перестроив S_1 по D' .

Прием 2. Если S_1 содержит самую внешнюю собственную дугу $l \subset S_1 \cap S_2$, то S_1 , S_2 – кольца. Перестройка кольца S_2 по отсекаемому ею диску D дает две поверхности S' , S'' , одна из которых (пусть S') является собственным диском, а вторая – кольцом. Этот диск, как и любой собственный диск в утолщенной поверхности, отсекает от нее шар. Рассмотрим край этого шара, немного про- давленный внутрь многообразия $F \times I$. Как и выше, если ни он, ни кольцо S'' не являются посредниками, то посредник получается перестройкой поверхности S_1 по самому внешнему диску $D' \subset S_2$, который не пересекает узла.

В дальнейшем будем предполагать, что в $S_1 \cap S_2$ нет ни самых внутренних окружностей, ни самых внешних дуг по отношению к S_1 или S_2 . Тогда обе поверхности S_1 , S_2 являются кольцами и $S_1 \cap S_2$ состоит либо только из нетривиальных окружностей, либо только из радиальных дуг, соединяющих различные компоненты края каждого кольца.

Прием 3. Предположим, что кольца S_1 , S_2 пересекаются по нетривиальным окружностям. Они разбивают S_1 на концентрические подкольца. Так как пересечение кольца S_1 с узлом состоит из ≤ 2 точек, то хотя бы одно из двух самых внешних подколец кольца S_1 (обозначим его X) пересекает узел не более чем в одной точке. Далее рассуждаем как в разделе 7: кольцо-посредник получается небольшим сдвигом вертикального кольца $X \cup Y$, где Y – подходящее подкольцо кольца c_2 .

Рассмотрим последнюю возможную ситуацию, когда кольца S_1 , S_2 пересекаются только по радиальным дугам. Тогда пара $(F \times I, S_1 \cup S_2)$ вертикальна, т. е. имеет вид $(F \times I, c_1 \times I \cup c_2 \times I)$, где $c_i = S_i \cap F$ – простые замкнутые кривые в F . Поэтому про кольца и узел можно временно забыть и оперировать только с окружностями и проекцией $\bar{K}$ узла в F . Естественным образом будем говорить и об окружности-посреднике c , имея в виду, что посредником является кольцо $c \times I$.

Прием 4. Предположим, что $c_1 \cap c_2$ состоит из $k \geq 5$ точек. Они разбивают каждую окружность на k дуг. Поскольку $k \geq 5$, то на любой из них (например, на c_1) найдется пара α , β соседних дуг, не пересекающих $\bar{K}$. Перестроим окружность c_2 по α , разрезав c_2 по точкам $\partial\alpha$ и приклеив две параллельные копии дуги α . Так как кривая c_2 разбивает F , то получатся две окружности c' , c'' , которые являются либо обе разбивающими, либо обе нет. В первом случае одна из окружностей c' , c'' является посредником. Как быть во втором случае? При выполнении шага 4 раздела 7 этой проблемы не возникало, так как тогда мы разрешали редукции и по неразбивающим кольцам, а теперь хотим использовать только разбивающие.

Выход состоит в том, чтобы перестроить объединение $c' \cup c''$ по соединяющей их дуге, параллельной дуге β (см. рис. 14). Этот прием аналогичен приему переключательной перестройки из п. 4.2.

В результате получится нетривиальная разбивающая окружность $c \subset F$, пересекающая проекцию $\bar{K}$ в двух точках, отвечающих точкам $c_2 \cap \bar{K}$. Она

Рис. 14

и служит посредником. Действительно, $\sharp(c \cap c_1) < \sharp(c_1 \cap c_2)$ (так как две точки пересечения $c_1 \cap c_2$ исчезли) и $\sharp(c \cap c_2) < \sharp(c_1 \cap c_2)$ (так как $\sharp(c \cap c_2) = 4$, а $\sharp(c_1 \cap c_2) \geq 5$ по предположению).

Прием 5. Так как окружности c_1, c_2 разбивающие, то они пересекаются в четном числе точек. Поэтому осталось рассмотреть два случая: их пересечение состоит из 2 точек и из 4 точек. Рассмотрим первый случай, когда $\mu(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}) = \sharp(c_1 \cap c_2) = 2$. Тогда дополнение $F \setminus \text{Int } N$, где $N = N(c_1 \cup c_2)$ – регулярная окрестность объединения окружностей c_1, c_2 в F , состоит из 4 связных поверхностей X_i , $1 \leq i \leq 4$, каждая из которых ограничена одной окружностью из ∂N . Из этих окружностей по меньшей мере три пересекают $\bar{K}$ в 0 или 2 точках. Мы утверждаем, что хотя бы одна из них нетривиальна и поэтому является посредником. В противном случае окружности c_1, c_2 можно было бы изотопно сдвинуть в непересекающиеся окружности c'_1, c'_2 , которые задают те же ребра $\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}$, что и ребра c_1, c_2 . Это противоречит условию $\mu(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}) = 2$.

Пусть $\mu(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}) = \sharp(c_1 \cap c_2) = 4$. Точки пересечения окружностей c_1, c_2 разбивают каждую из них на 4 дуги. Предположим, что проекция $\bar{K}$ пересекает некоторую дугу l_1 одной из окружностей (пусть окружности c_1) в одной точке. Так как узел K гомологически тривиален, то $\bar{K}$ пересекает дугу l_2 окружности c_2 с теми же концами тоже в одной точке. Вторая дуга окружности c_1 , пересекающая $\bar{K}$, может быть либо смежной с дугой l_1 , либо нет. Используя гомологическую тривиальность узла K еще раз, получаем два способа, как $\bar{K}$ может пересекать регулярную окрестность $N = N(c_1 \cup c_2)$, см. рис. 15, а), б).

Предположим, что дуг, пересекающих $\bar{K}$ в одной точке, нет, но есть дуга, пересекающая $\bar{K}$ в двух точках. В этой ситуации мы получаем еще три возможности (см. рис. 15, с)–е)). Последняя возможность (см. рис. 15, ф)) возникает в случае $c_1 \cap \bar{K} = c_2 \cap \bar{K} = \emptyset$.

Доказательства существования посредника во всех этих случаях однотипны, поэтому ограничимся разбором случая а). Край ∂N состоит из 6 окружностей, причем дополнение $F \setminus \text{Int } N$ может состоять из 4, 5 или 6 частей X_i , $1 \leq i \leq 6$, где части X_3, X_4 , как и части X_5, X_6 , могут совпадать. Причина в том, что поверхности только этих двух пар лежат по одну сторону от каждой из окружностей c_1, c_2 (см. рис. 16 слева).

Мы утверждаем, что хотя бы одна из окружностей ∂X_i , $1 \leq i \leq 6$, является посредником. Рассуждая от противного, предположим, что среди них посредников нет. Поскольку окружности $\partial X_2, \partial X_4$ пересекают $\bar{K}$ в 2 точках каждая

Рис. 15. Как гомологически тривиальный узел может проходить по N

и не являются посредниками, то они тривиальны. Другими словами, кольца $\partial X_2 \times I$, $\partial X_4 \times I$ отсекают от многообразия $F \times I$ шары с тривиальными дугами в них, а части X_2 , X_4 являются дисками, причем можно считать, что $\bar{K}$ пересекает их по простым дугам.

Если $X_1 \neq X_3$, то окружности ∂X_1 , ∂X_3 являются разбивающими. Так как посредники отсутствуют, то эти окружности тривиальны. Это противоречит нетривиальности окружности c_1 . Поэтому можно заключить, что части X_1 , X_3 составляют одну поверхность (обозначим ее U). По аналогичным причинам части X_5 , X_6 тоже составляют одну поверхность W (см. рис. 16 справа).

Рис. 16. Редукции по окружностям c_1 и c_2 дают один и тот же результат, независимо от того, как узел проходит по U

Введем два преобразования, применяемых к паре $(F, \bar{K})$. Первое преобразование состоит в отрезании от нее пары $(U, U \cap \bar{K})$ и заклеивании двух получившихся дырок дисками с тривиальными дугами в них. Второе преобразование отличается от него тем, что отрезается часть W , а дырки заклеиваются дисками без дуг. Результаты этих преобразований обозначим $(F_u, \bar{K}_u)$ и $(F_w, \bar{K}_w)$ соответственно. Из рис. 16 хорошо видно, что эти пары получаются из пары $(F, \bar{K})$ как при редукции по c_1 , так и при редукции по c_2 . Поэтому ребра $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AB_2}$ совпадают и число $\mu(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2})$ равно 0, что противоречит нашему предположению, что оно равно 4. Для наглядности можно заметить, что в изображенном на рис. 16 случае $U = W = S^1 \times I$ обе редукции дают два экземпляра утолщенного тора $S^1 \times S^1 \times I$ с меридиональным узлом в одном и более сложным узлом в другом. Таким образом, свойства (FP) и (MF) выполнены, поэтому теорема 12 следует из леммы о диаманте.

Как уже отмечалось, условие гомологической тривиальности узлов в формулировке теоремы 12 существенно: если его отбросить, то появляются контрпримеры. Два типа узлов в утолщенных поверхностях, допускающих различные примарные разложения, схематически показаны на рис. 17, а), б).

Для того чтобы превратить рис. 17, а) в реальную картинку, нужно к краям дырок, помеченных строчными буквами u, w , приклеить поверхности U, W с двумя граничными окружностями каждая. Буква T (от слова “tangle”) обозначает диск. Проекция узла должна проходить по U, W, T достаточно сложным образом, чтобы все показанные справа слагаемые, которые получаются редукциями по окружностям c_1, c_2 , были примарными и различными.

Контрпример на рис. 17, б) экономичнее: тэнгл T отсутствует, проекция узла пересекает только одну граничную окружность поверхности U , а два из четырех получающихся слагаемых совпадают. Этот пример показывает, что существуют такие узлы $K_i \subset F_i \times I$, $0 \leq i \leq 3$, что $K_0 = K_1 \# K_2$, $K_0 = K_1 \# K_3$, но $K_2 \neq K_3$. В качестве поверхности F_0 можно взять поверхность кренделя рода 2, а в качестве поверхностей F_i — три экземпляра тора $S^1 \times S^1$.

По аналогии с п. 6.3 будем называть узел $(F \times I, K)$ базисным контрпримером, если

- 1) любое его нетривиальное слагаемое имеет только одно примарное разложение;
- 2) найдется такая пара допустимых колец $P, Q \subset F \times I$, что объединения примарных слагаемых узлов, полученных из узла $(F \times I, K)$ редукциями по P и по Q , отличны друг от друга.

Такие пары колец будем называть исключительными. Две пары $P_i, Q_i \subset (F_i \times I, K_i)$, $i = 1, 2$, исключительных колец называются эквивалентными, если для регулярных окрестностей $N_i = N(P_i \cup Q_i)$ существует такой гомеоморфизм $h: N_1 \rightarrow N_2$, что $h(P_1 \cup Q_1) = P_2 \cup Q_2$ и $h(N_1 \cap K_1) = N_2 \cap K_2$. Для приведенных выше контрпримеров пары $c_1 \times I, c_2 \times I$ являются исключительными. Скорее всего, любая другая исключительная пара колец эквивалентна одной из них.

Рис. 17. Два типа контрпримеров

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Как и в классическом случае, теория узлов в $F \times I$ имеет несколько различных интерпретаций. Узлы, поверхности и объемлющие многообразия (т. е. прямые произведения поверхностей на отрезки) можно рассматривать как с ориентациями, так и без. Во всех случаях теорема о существовании и единственности разложения гомологически тривиального узла в связную сумму примарных слагаемых остается справедливой (при соответствующем изменении понятия связной суммы). Доказательства остаются прежними. Это же относится и к разложениям виртуальных узлов (см. следующий раздел).

9. Примарные разложения виртуальных узлов

Есть два подхода к теории виртуальных узлов: диаграммный и геометрический [23], [25]. В первом случае виртуальный узел определяется как класс эквивалентности виртуальных диаграмм по виртуальным движениям Райдемайстера. Во втором случае под виртуальным узлом понимается класс эквивалентности узлов в утолщенных поверхностях, рассматриваемых с точностью до

операций стабилизации и дестабилизации. Напомним, как определяются эти операции.

Пусть K – узел в $F \times I$ и A – такое нетривиальное вертикальное кольцо в $F \times I$, что $K \cap A = \emptyset$. Поверхность F может и не быть связной. В этом случае узел лежит в утолщении одной из ее компонент. Операция дестабилизации состоит в разрезании многообразия $F \times I$ по A и заклеивании двух появившихся копий кольца A ручками индекса 2. В результате получается узел в новой утолщенной поверхности $F_1 \times I$. Операция стабилизации обратна операции дестабилизации и состоит в вырезании из данной утолщенной поверхности $F_1 \times I$ двух не пересекающих узла утолщенных дисков $D_i \times I$ и отождествлении колец $\partial D_i \times I$ на крае оставшейся части утолщенной поверхности так, чтобы получилась новая ориентируемая утолщенная поверхность $F \times I$ с узлом в ней.

Мы будем придерживаться геометрической точки зрения. Здесь нужно отметить небольшое различие между геометрическими диаграммным подходами. Оно вызвано тем, что в определении 11 эквивалентности узлов мы рассматривали поверхности F, F' без фиксированных ориентаций и не требовали, чтобы эквивалентность $(F \times I, K) \rightarrow (F' \times I, K')$ сохраняла координату $t \in I$, как получается при диаграммном подходе. См. замечание 3.

Связное суммирование виртуальных узлов проще всего определить стандартным образом, т. е. по представителям.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Пусть v_1, v_2 – виртуальные узлы, $(F_1 \times I, K_1), (F_2 \times I, K_2)$ – представляющие их узлы в утолщенных поверхностях и $(F \times I, K) = (F_1 \times I, K_1) \# (F_2 \times I, K_2)$ – какая-нибудь их кольцевая связная сумма (см. определение 12). Тогда класс эквивалентности узла $(F \times I, K)$ называется *связной суммой* виртуальных узлов v_1, v_2 и обозначается $v_1 \# v_2$.

Разумеется, связное суммирование виртуальных узлов является многозначной операцией. Результат зависит от выбора представителей и конкретного способа их суммирования. Представление $v = v_1 \# v_2$ одного виртуального узла в виде связной суммы двух других называется тривиальным, если один из узлов v_1, v_2 совпадает с узлом v , а второй является тривиальным, т. е. является классом эквивалентности тривиального узла в $S^2 \times I$. Здесь уместно отметить, что из тривиальности одного из узлов v_1, v_2 не следует, что второй узел совпадает с v (в отличие от случая классических узлов). Например, ленты, задающие ограничивающие диски узлы $K_i \subset T \times I$ на рис. 13, можно запутать так, чтобы соответствующие виртуальные узлы остались тривиальными, а их сумма – нет. Стандартным примером такого рода служит узел Кишино [26], [27].

Виртуальный узел называется примарным, если он не допускает нетривиальных представлений в виде связной суммы. Как и в теории классических узлов, тривиальный узел не считается примарным.

ТЕОРЕМА 13. *Любой виртуальный узел раскладывается в связную сумму нескольких примарных и тривиальных виртуальных узлов. При этом примарные слагаемые такого разложения определены однозначно, т. е. зависят только от исходного виртуального узла.*

Здесь уместно уточнить смысл утверждения, что данный виртуальный узел раскладывается в связную сумму нескольких слагаемых. Будем применять

к множеству этих слагаемых операции замены двух его произвольных элементов на какую-нибудь их связную сумму. Тогда рассматриваемое утверждение означает, что такие операции можно выбрать так, чтобы получить рассматриваемый узел. Присутствие тривиальных слагаемых в формулировке теоремы 13 обязательно, так как иначе упомянутый выше узел Кишино был бы контрпримером.

Доказательство теоремы 13 основано на тех же идеях, что и доказательства теорем 11 и 12 о разложениях узлов в утолщенных поверхностях. Это не удивительно, так как приведенные на рис. 17 в разделе 8 базисные контрпримеры узлов с различными примарными разложениями перестают быть таковыми при переходе к виртуальным узлам. Первый шаг нужно сделать в обратном направлении: заменить виртуальные узлы на минимальные узлы в утолщенных поверхностях. Напомним, что узел в утолщенной поверхности называется минимальным, если он не допускает дестабилизаций. Упомянутую выше замену можно сделать по теореме Г. Куперберга (см. [21] и раздел 7), которую можно сформулировать так.

ТЕОРЕМА 14. *Любой виртуальный узел, рассматриваемый как класс эквивалентности узлов в утолщенных поверхностях, содержит ровно одного минимального представителя.*

Верно ли, что любое разложение виртуального узла в сумму двух других индуцировано некоторым разложением его минимального представителя? Чтобы ответ на этот вопрос стал положительным, дополним операцию кольцевого суммирования узлов в утолщенных поверхностях еще одной операцией, которая называется специальным суммированием и выполняется по неразбивающим кольцам. Обычно эту операцию называют связной суммой второго типа [22].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Пусть для $i = 1, 2$ узел $K_i \subset F_i \times I$ и вертикальное кольцо $A_i \subset F_i \times I$ таковы, что K_i пересекает A_i в одной точке. Разрежем многообразия $F_i \times I$ по кольцам A_i и склеим два получившихся многообразия по гомеоморфизмам копий колец A_i в их краях так, чтобы появился новый узел K в новой утолщенной поверхности $F \times I$ (см. рис. 18). Мы будем говорить, что этот узел является *специальной связной суммой* узлов $(F_i \times I, K_i)$ и писать $K = K_1 \# K_2$.

Из рис. 18 хорошо видно, что кольцевое и специальное суммирование отличаются на дестабилизацию d по кольцу A , показанному пунктиром. Поэтому на уровне виртуальных узлов различие между ними исчезает. Обратную операцию (переход от узла $K \subset F \times I$ к узлам $K_i \subset F_i \times I$) будем называть специальной редукцией. В отличие от редукции по разбивающему кольцу, пересекающему узел K в 2 точках, она выполняется по такой паре вертикальных непересекающихся колец $X_1, X_2 \subset F \times I$, что K пересекает каждое из них в одной точке и их объединение разбивает $F \times I$.

ЛЕММА 5. *Пусть виртуальный узел v представлен в виде нетривиальной связной суммы виртуальных узлов v_1 и v_2 . Тогда его минимальный представитель является связной суммой (кольцевой или специальной) некоторых представителей узлов v_1, v_2 .*

Рис. 18. Специальное связное суммирование $\tilde{\#}$ есть суперпозиция операций кольцевой связной суммы $\#$ и дестабилизации d по A

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v = v_1 \# v_2$. Тогда некоторый представитель $(F \times I, K)$ узла v допускает редукцию к некоторым представителям $(F_i \times I, K_i)$ узлов v_i по поверхности $X \subset F \times I$, где X является вертикальным разбивающим кольцом, пересекающим K в двух точках, или разбивающей парой $X_1 \cup X_2$ вертикальных колец, пересекающих K в одной точке каждое. Предположим, что в $F \times I$ найдется дестабилизирующее кольцо A . Если $A \cap X = \emptyset$, то можно уменьшить род поверхности F и одной из поверхностей F_i , выполнив дестабилизацию по A . Суть доказательства леммы состоит в следующем. Если пересечение колец A, X непусто, то его нужно устранить, после чего выполнить дестабилизацию. Проблема в том, что устранение пересечения возможно не всегда. Однако во всех таких случаях удастся уменьшить род поверхности F за счет выбора другого представителя виртуального узла v и замены кольцевой редукции к представителям узлов v_1, v_2 на специальную. Перейдем к конкретным комментариям.

Предположим, что пересечение $X \cap A$ содержит тривиальную окружность или тривиальную дугу или что оно состоит только из нетривиальных окружностей. Тогда за счет замены поверхности X на новую его можно уменьшить с помощью приемов 1–3, использованных в доказательстве теоремы 12. Разложение $v = v_1 \# v_2$ при этом сохраняется. Поэтому достаточно рассмотреть вертикальный случай, когда $X \cap A$ состоит из радиальных отрезков, а кольца X, A проектируются в кривые. Тогда вместо узла K и колец $X, A \subset F \times I$ можно рассматривать их проекции $\bar{K}, x, a$ на F .

Допустим, что среди дуг, на которые точки $x \cap a$ делят x , найдется дуга α , не пересекающая $\bar{K}$. Так как x разбивает F , то концы этой дуги различны. Тогда перестройка окружности a по α дает либо две окружности, хотя бы одна из которых является дестабилизирующей, либо одну дестабилизирующую окружность. Это зависит от того, как α подходит к a – с разных сторон или с одной. Рис. 12 правильно иллюстрирует ситуацию, если переобозначить c_1

и c_2 через x и a и не обращать внимания на подпись к нему. Заменяв a на новую дестабилизирующую окружность, мы уменьшим число точек в $x \cap a$.

Предположим, что дуги α с нужными свойствами нет. Это возможно в двух случаях:

- 1) x – разбивающая окружность, которую точки $x \cap a$ делят на две дуги, пересекающие $\bar{K}$ в одной точке каждая;
- 2) $x = x_1 \cup x_2$ – разбивающая пара окружностей, причем a и $\bar{K}$ пересекают каждую из них в одной точке.

В первом случае дестабилизация d исходного узла по кольцу $A = a \times I$ приводит к новому узлу, который распадается в связную сумму в точности тех же слагаемых. Суть в том, что теперь вместо кольцевого суммирования появляется специальное суммирование – именно для этого случая оно и было введено (см. рис. 18).

Во втором случае перестройка окружностей $x_1 \cup x_2$ по одной из соединяющих их дуг окружности a приводит к появлению новой разбивающей окружности, которая пересекает $\bar{K}$ в двух точках и редукция по которой дает представителю тех же самых виртуальных узлов v_1, v_2 .

Будем применять такие операции до тех пор, пока это возможно. Поскольку каждый раз уменьшается либо число точек в $x \cap a$, либо род поверхности, содержащей узел, мы остановимся на разложении минимального представителя. Подробности см. в [28], [29]. Лемма доказана.

Второй шаг в доказательстве теоремы 13 заключается в проверке существования и единственности корней для графа Γ , вершины которого состоят из узлов в утолщенных поверхностях, а ребра отвечают не только редукциям, использованным в доказательстве теоремы 12, но и специальным редукциям. Отметим, что на этот раз в качестве вершин берутся не наборы изучаемых объектов (в данном случае, виртуальных узлов), а по-прежнему наборы узлов в утолщенных поверхностях. Отличие в том, что теперь мы разрешаем утолщенные поверхности без узлов в них.

Редукции типа 2 (которые определялись как дестабилизации по разбивающим кольцам с последующим добавлением тривиальных узлов) заменяются на просто дестабилизации. Добавлять тривиальные узлы уже не нужно, так как теперь узлы могут быть пустыми. Другие редукции (по разбивающим кольцам и сферам, пересекающим узел в двух точках, а также по сферам, не пересекающим узел) остаются прежними, но добавляются специальные редукции, которые выполняются по разбивающим парам вертикальных колец. Как и раньше, каждая редукция изменяет только один узел, входящий в данную вершину.

ТЕОРЕМА 15. *Для любой вершины графа Γ ее корень существует и единствен с точностью до удаления тривиальных и пустых узлов в $S^2 \times I$.*

Введение специальных редукций существенно усложняет проверку свойства (FP). Использование рода поверхности и числа Шуберта уже не хватает, требуются новые инварианты.

Пусть $\mathcal{K}$ – множество всех узлов в утолщенных поверхностях и Ω – некоторое вполне упорядоченное множество.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Отображение $c: \mathcal{K} \rightarrow \Omega$ называется *функцией сложности*, если оно обладает следующим свойством. Пусть узел $(F_0 \times I, K_0)$ или два узла $(F_i \times I, K_i)$, $i = 1, 2$, получаются применением допустимой редукции к узлу $(F \times I, K)$. Тогда $c(F_0 \times I, K_0) < c(F \times I, K)$ или соответственно $c(F_i \times I, K_i) < c(F \times I, K)$, $i = 1, 2$.

Если такая функция сложности существует, то любая последовательность $\xi = \{R_1, R_2, \dots\}$ допустимых редукций, одна за другой применяемых к данной вершине графа Γ , конечна. Действительно, обозначим q_j сложность $c(F_j \times I, K_j)$ узла, к которому собственно и применяется редукция R_j . Так как множество Ω вполне упорядочено, то его подмножество, состоящее из всех q_j , содержит минимальный элемент q_m . Поэтому редукция R_m является последней редукцией в последовательности ξ . Это наблюдение весьма полезно для проверки свойства (FP).

ЛЕММА 6. *Граф Γ обладает свойством (FP).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве Ω возьмем множество конечных упорядоченных наборов неотрицательных целых чисел. Для сравнения двух наборов мы используем лексикографический порядок, предварительно уравнив их длины добавлением нулей в конце более короткого набора. Пусть $(F \times I, K)$ – данный узел. Определим его сложность $c(F \times I, K)$ как набор $(g, s, \bar{w}) \in \Omega$ длины $2g + 2$, где $\bar{w} = \{w_i, 1 \leq i \leq 2g\}$.

Проще всего описать первые два числа набора: $g = g(F)$ – это род поверхности F , а $s = s(F, K)$ – число Шуберта узла K (см. теорему 7). Число Шуберта совпадает с максимальным числом таких попарно непересекающихся трехмерных шаров B_i в $F \times I$, что каждое пересечение $l_i = K \cap B_i$ является заузленной дугой в B_i . Перейдем к описанию чисел w_i .

Упорядоченный набор $\mathcal{C} = \{C_i \subset F \times I, 1 \leq i \leq 2g\}$ трансверсальных узлу K вертикальных колец будем называть контрольным, если в F найдутся такие простые замкнутые кривые c_i , $1 \leq i \leq 2g$, что каждое кольцо C_i изотопно кольцу $c_i \times I$ и при $1 \leq i < 2g$ кривая c_i трансверсально пересекает кривую c_{i+1} ровно в одной точке. Нетрудно доказать, что любое нетривиальное вертикальное кольцо в $F \times I$ пересекает хотя бы одно кольцо любого контрольного набора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. *Весом узла K по отношению к контрольному набору $\mathcal{C}$ называется набор $\bar{w}(K, \mathcal{C}) = \{w_i, 1 \leq i \leq 2g\}$, где w_i обозначает вес кольца C_i , т.е. число точек в $K \cap C_i$.*

Для сравнения весов узла K по отношению к различным контрольным наборам будем использовать лексикографический порядок. Среди всех контрольных наборов выберем набор, вес $\bar{w}(K)$ которого минимален. Этот вес мы и возьмем в качестве оставшейся части $\bar{w}$ сложности $c(F \times I, K)$.

Докажем, что построенная функция $c: K \rightarrow \Omega$ обладает нужным свойством, т.е. уменьшается при редукциях. Пусть нетривиальная редукция R , которая имеет тип k от 1 до 4 или является специальной, применена к паре $(F \times I, K)$, в результате чего получились либо две пары $(F' \times I, K')$, $(F'' \times I, K'')$, либо одна пара $(F' \times I, K')$ (последнее возможно в случае $k = 2$). Сложности этих пар

будем обозначать $(g, s, \bar{w})$, $(g', s', \bar{w}')$, $(g'', s'', \bar{w}'')$ соответственно. Для определенности будем считать, что $g' \geq g''$. Если R имеет один из типов 1–4, то уменьшение сложности очевидно. Действительно, при таких редукциях $g \geq g' \geq g''$, а если $g = g'$, то уменьшение сложности объясняется тем, что тогда $F'' = S^2$, узел K'' нетривиален и $s'' > 0$. Поэтому локальные узлы в $(F \times I, K)$ распределяются между парами $(F' \times I, K')$, $(F'' \times I, K'')$ и $s' = s - s'' < s$.

Рассмотрение случая специальной редукции разобьем на три части в зависимости от того, какие из поверхностей F' , F'' имеют род 1, т. е. являются торами. Заметим, что $g = g' + g'' - 1$. Поэтому если торов нет, т. е. $g', g'' > 1$, то $g > g', g''$.

Допустим, что $g' > 1$, $g'' = 1$. В этом случае кольца X_1, X_2 , участвующие в определении специальной редукции, разбивают $F \times I$ на две части, одну из которых (обозначим ее N) можно отождествить с многообразием $X_1 \times [1, 2]$ так, что $X_i = X_1 \times \{i\}$, где $i = 1, 2$. В результате применения редукции получаем пары $(F' \times I, K')$, $(F'' \times I, K'')$, где F' – поверхность рода $g' = g$, а F'' – тор. Так как $g'' < g$, то $c(F'' \times I, K'') < c(F \times I, K)$. Докажем, что $c(F' \times I, K') < c(F \times I, K)$.

Будем называть *полосой* в N собственный диск $P \subset N$, две дуги края которого являются радиальными дугами колец X_1, X_2 . Полоса P называется *возвратной*, если эти дуги лежат на одном кольце, и *сквозной*, если на разных. Выберем минимальный контрольный набор $\mathcal{C} = \{C_i \subset F \times I, 1 \leq i \leq 2g\}$, т. е. контрольный набор, который реализует минимальный вес $\bar{w}$ узла K . Затем поправим его с помощью инвариантных на K изотопий каждого кольца C_i в отдельности так, чтобы пересечение $C_i \cap N$ либо было пустым, либо состояло только из сквозных полос. Такие изотопии строятся путем применения тех же приемов устранения пересечений, которые использовались в предыдущих разделах. Сначала уничтожаются самые внутренние тривиальные окружности в пересечении колец C_i и X_j , затем – самые внешние дуги и нетривиальные окружности. В результате мы придем к вертикальному случаю, когда в $C_i \cap X_j$ останутся только радиальные дуги. Отсюда следует, что пересечение $C_i \cap N$ либо станет пустым, либо будет состоять только из полос. Возвратные полосы легко уничтожаются за счет их замены соответствующими участками колец X_j и выталкиванием этих участков в дополнение многообразия N . После этого останутся только сквозные полосы. Как после изотопий различные кольца C_i пересекаются между собой, значения не имеет.

Допустим, что в N найдется сквозная полоса P , не пересекающая узла K . Так как P разрезает N до шара и так как редукция нетривиальна, то дуга $K \cap N$ содержит нетривиальный локальный узел, который после редукции попадает в $(F'' \times I, K'')$ вместе со своими примарными слагаемыми. Поэтому $s' = s - s'' < s$.

Теперь допустим, что K пересекает все сквозные полосы в N . Пусть C_m – первое кольцо минимального набора $\mathcal{C}$, которое пересекает N . Такое кольцо заведомо есть, поскольку любое нетривиальное кольцо, в частности кольцо X_1 , обязано пересекать $\mathcal{C}$. Обозначим через p число сквозных полос в $C_m \cap N$ и через x и y числа тех точек из $K \cap C_m$, которые лежат в N и вне N соответственно. Заметим, что компоненты w_i вектора $\bar{w}$ равны 0 при $i < m$, причем

$w_m = x + y$. Так как K обязан пересекать каждую сквозную полосу по крайней мере в одной точке, то $x \geq p > 0$. Мы утверждаем, что сложности $(g, s, \bar{w})$ пары $(F \times I, K)$ и $(g', s', \bar{w}')$ пары $(F' \times I, K')$ связаны соотношениями $g' = g$, $s' \leq s$ и $\bar{w}' < \bar{w}$. Действительно, пара $(F' \times I, K')$ эквивалентна любой паре вида $(F \times I, L)$, где узел $L \subset F \times I$ совпадает с узлом K вне N , и является монотонной (по отношению к параметру t отрезка $[1, 2]$) дугой внутри N . Поэтому первые два соотношения очевидны. Неравенство $\bar{w}' < \bar{w}$ может быть достигнуто за счет такого выбора монотонной дуги L , что она пересекает не более половины полос в $C_m \cap N$, причем каждую не более одного раза. Отсюда следует, что компоненты w'_i вектора $\bar{w}'$ равны 0 при $i < m$, причем $w'_m < x + y$.

Осталось рассмотреть случай $g' = g'' = 1$, когда $F \times I$ – утолщенный тор и кольца X_1, X_2 разбивают $F \times I$ на две части N, N_1 , каждую из которых можно отождествить с многообразием $X_1 \times [1, 2]$. Поэтому для доказательства неравенств $c(F \times I, K) > c(F' \times I, K')$, $c(F \times I, K) > c(F'' \times I, K'')$ достаточно дважды применить рассуждение из предыдущего случая, один раз для N , второй – для N_1 . Это завершает проверку свойства (FP). Лемма доказана.

ЛЕММА 7. *Граф Γ обладает свойством (MF).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно универсальной схеме, значение функции-посредника μ на ребрах $\overrightarrow{AB_i}$, $i = 1, 2$, с общим началом определяется как минимально возможное число компонент связности в пересечении задающих их поверхностей $X_i \subset F_i \times I$. Если $\mu(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}) = 0$, т. е. если поверхности X_1, X_2 не пересекаются, то каждая из них выживает при редукции по другой. Допустим, что при этом поверхность X_1 целиком попадает в одну из утолщенных поверхностей вершины B_2 и, наоборот, X_2 целиком попадает в одну из утолщенных поверхностей вершины B_1 . Тогда редукции вершин B_1, B_2 вдоль этих поверхностей приводят к одной и той же вершине U графа Γ .

Однако сформулированное выше условие на расположение поверхностей X_1, X_2 может нарушаться из-за того, что они могут быть несвязными. Это бывает только тогда, когда пары $(F_1 \times I, K_1), (F_2 \times I, K_2)$ совпадают, обе редукции специальные, причем при подходящем обходе узла K_1 кольца $X'_1, X''_1 \subset X_1$ и кольца $X'_2, X''_2 \subset X_2$ встречаются в порядке X'_1, X'_2, X''_1, X''_2 . Тогда искомая вершина U получается как специальной редукцией вершины W_1 по объединению кольца X'_2 и общего образа колец X_1, X''_1 в W_1 , так и аналогичной редукцией вершины W_2 . Это завершает проверку свойства (MF1).

При проверке свойства (MF2) новые аргументы нужны только при рассмотрении вертикального случая. Мы имеем в виду ситуацию, когда поверхности, по которым выполняются редукции, задающие ребра $\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}$, имеют вид $c_1 \times I, c_2 \times I$, где $c_1, c_2 \subset F$ – одномерные многообразия в F . В нашей ситуации каждое из них является либо разбивающей окружностью, пересекающей проекцию $\bar{K}$ узла в 2 точках, либо окружностью, не пересекающей $\bar{K}$, либо разбивающей парой окружностей в F , пересекающих $\bar{K}$ в одной точке каждая.

Применим тот же прием, что и в доказательстве леммы 5. Предположим, что одна из дуг, на которые точки $c_1 \cap c_2$ разбивают $c_1 \cup c_2$, имеет различные концы и не пересекает узла. Обозначим эту дугу α и будем считать, что $\alpha \subset c_1$. Возможны следующие случаи.

1. Многообразие c_2 является разбивающей окружностью, пересекающей узел в 2 точках, или окружностью, не пересекающей узла. Перестроим c_2 по α . Если одна из двух получившихся окружностей c'_2, c''_2 не пересекает $\bar{K}$, то либо она, либо вторая окружность является посредником. Если каждая из окружностей c'_2, c''_2 пересекает $\bar{K}$ в одной точке, то пара $c'_2 \cup c''_2$ задает специальную редукцию и поэтому является посредником.

2. Многообразие $c_2 = c'_2 \cup c''_2$ является разбивающей парой окружностей в F , пересекающих узел в одной точке каждая. Если α соединяет эти окружности, то перестройка по ней дает разбивающую окружность-посредника, которая пересекает $\bar{K}$ в 2 точках. Предположим, что концы дуги α лежат на одной из этих окружностей (пусть c'_2). Тогда c'_2 перестраивается в две окружности, одна из которых не пересекает проекции узла. Если она нетривиальна, то она является посредником. Если же она тривиальна, то ограничиваемый ею диск задает изотопию многообразия c_1 , которая сдвигает ее с окружности c'_2 и тем самым превращает ее в окружность-посредника.

Теперь предположим, что любая из дуг, на которые точки $c_1 \cap c_2$ разбивают $c_1 \cup c_2$, либо имеет совпадающие концы, либо пересекает узел. Отметим, что $c_1 \cap c_2 \neq \emptyset$ (в противном случае $\mu = 0$). Продолжим рассмотрение возможных случаев.

3. Одно из многообразий c_1, c_2 (пусть c_1) является разбивающей окружностью, пересекающей $\bar{K}$ в 2 точках. Тогда $c_1 \cap c_2$ состоит из 2 точек, так как в противном случае на c_1 найдется запрещенная дуга α . Если бы c_2 было окружностью, не пересекающей проекции $\bar{K}$, или неразбивающей парой окружностей, то запрещенная дуга α нашлась бы на c_2 . Поэтому c_2 может быть только разбивающей окружностью, пересекающей $\bar{K}$ в двух точках. В этом случае посредником является граничная окружность одной из частей, на которые объединение $c_1 \cup c_2$ разбивает поверхность. Подробно это описано в шаге 5 доказательства теоремы 12.

4. Одно из многообразий c_1, c_2 (пусть c_1) является окружностью, которая не пересекает $\bar{K}$. Тогда $\sharp(c_1 \cap c_2) = 1$, откуда следует, что c_2 тоже является неразбивающей окружностью и поэтому тоже не пересекает $\bar{K}$. В этом случае в качестве посредника можно взять окружность на крае регулярной окрестности $N = N(c_1 \cup c_2) \subset F$. Эта окружность не пересекает $\bar{K}$ и не может быть тривиальной, поскольку в противном случае мы имели бы $\mu = 0$. Более подробно это описано в шаге 5 доказательства теоремы 10.

5. Случай, когда каждое многообразие $c_i, i = 1, 2$, является разбивающей парой $c'_i \cup c''_i$ окружностей, пересекающих $\bar{K}$ в одной точке каждая, невозможен. Действительно, так как c_2 разбивает поверхность, то каждая из кривых c'_1, c''_1 пересекает c_2 в четном числе точек и хотя бы одна (пусть c'_1) – в двух или более точках. Поскольку $\sharp(c'_1 \cap \bar{K}) = 1$, это приводит к существованию запрещенной дуги α . Это завершает проверку свойства (MF2) и, тем самым, доказательство леммы 7. Поскольку свойство (FP) для графа Γ уже проверено в лемме 6, то доказательство теоремы 15 получается непосредственным применением леммы о диаманте.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 13. Пусть v – данный виртуальный узел и $(F \times I, K)$ – какой-нибудь его представитель. По теореме 15 любая вершина

графа Γ , в том числе вершина V , состоящая только из узла $(F \times I, K)$, имеет корень. Входящие в него узлы и отвечающие им виртуальные узлы обозначим соответственно V_i и v_i , где $1 \leq i \leq n$. Из теоремы Г. Куперберга следует, что любые два представителя узла v получаются друг из друга стабилизациями и дестабилизациями, которые на корень никак не влияют. Поэтому можно говорить о корне виртуального узла, имея в виду корень любого его представителя.

Каждая отличная от дестабилизации редукция узла в утолщенной поверхности разбивает его в связную сумму. Поэтому v является связной суммой виртуальных узлов v_i , составляющих его корень, и нескольких тривиальных виртуальных узлов, отвечающих тем тривиальным узлам в $S^2 \times I$, которые были отброшены при построении корня. Так как узлы V_i отличны от пустых и тривиальных узлов в $S^2 \times I$, не допускают нетривиальных редукций и поэтому минимальны, то отвечающие им виртуальные узлы v_i нетривиальны и примарны по лемме 5. Таким образом, требуемое разложение узла v на примарные и тривиальные слагаемые существует.

Допустим, что узел v имеет другое представление в виде связной суммы примарных и тривиальных слагаемых. Это означает, что прежнего или другого представителя $(F_1 \times I, K)$ узла v можно получить из минимальных представителей этих слагаемых последовательными стабилизациями, дестабилизациями, а также кольцевыми и специальными суммированиями. Обращая этот процесс, можем заключить, что упомянутый набор минимальных представителей получается из узла $(F_1 \times I, K)$ с помощью дестабилизаций, стабилизаций, кольцевых и специальных редукций. Поскольку минимальные представители примарных слагаемых не допускают редукций, то они составляют корень виртуального узла v . Так как корень единствен, то примарные слагаемые представлений совпадают. Теорема доказана.

10. Полугруппа тета-кривых

Хорошо известно, что компактные связные ориентированные трехмерные многообразия относительно операции связной суммы образуют свободную абелеву полугруппу $\mathcal{M}$ с нейтральным элементом. Дело в том, что связность многообразий и наличие ориентаций позволяют определить эту операцию так, чтобы она была однозначной. Достаточно потребовать, чтобы гомеоморфизм, по которому склеиваются складываемые многообразия с вырезанными шарами, обращал индуцированные ориентации их граничных сфер. Аналогичный факт верен для ориентированных узлов в S^3 . Это – следствие теоремы Х. Шуберта [6] о примарных разложениях узлов. Полугрупповая структура множества тета-кривых в S^3 была описана Т. Мотохаши [30] в 2007 г., хотя первые результаты в этом направлении были получены намного раньше [31].

Оказывается, универсальная схема позволяет не только предложить более простые доказательства этих результатов, но и распространить их на тета-кривые в ориентированных трехмерных многообразиях, не содержащих неразбивающих сфер. Для многообразий, содержащих неразбивающие сферы, единственности примарных разложений может не быть как для глобальных узлов

(Мияцаки [15]), так и для тета-кривых (как следствие). Интерес к примарным разложениям тета-кривых стимулирован их связью с так называемыми нотоидами (knotoids), введенными В. Тураевым [32].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Пара (M, Θ) , где M – компактное ориентированное трехмерное многообразие и Θ – ориентированный граф в $\text{Int } M$, называется *тета-кривой*, если выполнены следующие условия:

- 1) Θ является Θ -графом, т. е. состоит из двух вершин и трех соединяющих их ребер, которые выходят из одной (начальной) вершины и приходят в другую (конечную);
- 2) каждое ребро помечено одним из символов $-$, $+$, 0 , причем различные ребра помечены различными символами.

Две тета-кривые называются *эквивалентными*, если они гомеоморфны как пары, причем гомеоморфизм сохраняет все ориентации и метки.

Введем на множестве всех тета-кривых бинарную операцию, которую удобно назвать умножением, поскольку она не коммутативна. Эта операция является частным случаем связного суммирования заузленных графов по вершинам валентности 3 (см. раздел 6). Пусть даны тета-кривые $\theta_i = (M_i, \Theta_i)$, $i = 1, 2$. Вырежем из многообразия M_1 регулярную окрестность B_1 конечной вершины кривой θ_1 , а из многообразия M_2 – регулярную окрестность B_2 начальной вершины кривой θ_2 . Затем склеим получившиеся многообразия по такому гомеоморфизму $h: \partial B_1 \rightarrow \partial B_2$, что h обращает индуцированные ориентации сфер ∂B_i и переводит точку пересечения сферы ∂B_1 с каждым ребром графа Θ_1 в точку пересечения сферы ∂B_2 с ребром графа Θ_2 , помеченным тем же символом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Полученная таким образом тета-кривая $\theta = (M, \Theta)$ называется *произведением кривой θ_1 на кривую θ_2* и обозначается $\theta_1 \circ \theta_2$ (см. рис. 19).

Рис. 19. Произведение тета-кривых

Произведение тета-кривых ассоциативно и имеет единицу. Ею служит тета-кривая $e = (S^3, \Theta_0)$, где граф Θ_0 является плоским, т. е. содержится в некотором диске $D \subset S^3$. Здесь уместно отметить, что если $\theta_1 \circ \theta_2 = e$, то $\theta_1 = \theta_2 = e$. Тета-кривая θ называется примарной, если в любом ее представлении $\theta = \theta_1 \circ \theta_2$ один из сомножителей совпадает с тета-кривой e .

Тета-кривые тесно связаны с ориентированными узлами в ориентированных трехмерных многообразиях. Два таких узла (Q_i, K_i) , $i = 1, 2$, эквивалентны, если они гомеоморфны как пары, причем гомеоморфизм должен сохранять ориентации многообразий и узлов. Пусть даны узел $k = (Q, K)$ и метка

Рис. 20. Отображение τ_ε

$\varepsilon \in \{-, 0, +\}$. Определим тета-кривую в Q так. Выберем диск $D \subset Q$, примыкающий к K по дуге l' на его крае. Ориентированную дугу $l = K \setminus \text{Int } l'$ снабдим меткой ε , а дуги l' и $l'' = \partial D \setminus \text{Int } l'$ – ориентациями и двумя оставшимися метками так, чтобы получилась тета-кривая $\tau_\varepsilon(k) = (Q, \Theta_K)$, где $\Theta_K = l \cup l' \cup l''$. См. рис. 20. Будем говорить, что тета-кривая $\tau_\varepsilon(k)$ индуцирована узлом k с меткой ε .

Замена произвольной тета-кривой $\theta = (M, \Theta)$ на любое из произведений $\tau_\varepsilon(k) \circ \theta$, $\theta \circ \tau_\varepsilon(k)$ дает одну и ту же тета-кривую (M_1, Θ_1) , которую можно построить следующим образом. Выберем пары $(B_k, l_k) \subset (Q, \Theta_K)$ и $(B_\theta, l_\theta) \subset (M, \Theta)$, где B_k, B_θ – шары, так, чтобы l_k, l_θ были тривиальными в них дугами, причем дуга l_θ лежала на ε -ребре графа Θ . Тогда пара (M_1, Θ_1) получается из пары (M, Θ) вырезанием пары (B_θ, l_θ) и вклейкой вместо нее пары (B_k, l_k) . Отметим, что обратный переход от пары (M_1, Θ_1) к парам (Q, Θ_K) и (M, Θ) совпадает с редукцией по сфере $\partial B_k = \partial B_\theta \subset M_1$. Нетрудно показать, что сопоставление $k \mapsto \tau_\varepsilon(k)$ индуцирует корректно определенный инъективный гомоморфизм полугруппы $\mathcal{K}$ глобальных узлов в полугруппу $\mathcal{T}$ тета-кривых, образ которого лежит в центре полугруппы $\mathcal{T}$. Полезно выделить частный случай изложенной конструкции, когда данный узел $K \subset Q$ тривиален в том смысле, что он содержится в диске. Тогда узел $\tau_\varepsilon(k)$ не зависит от метки. Тем самым возникает гомоморфизм $\tau: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}$, где $\mathcal{M}$ – полугруппа компактных связных ориентированных трехмерных многообразий относительно связного суммирования. При всех этих гомоморфизмах примарные узлы и многообразия переходят в примарные тета-кривые.

ТЕОРЕМА 16. Пусть ориентированное трехмерное многообразие M таково, что все 2-сферы в нем являются разбивающими. Тогда любая нетривиальная тета-кривая θ представима в виде произведения $\theta = \theta_1 \circ \theta_2 \circ \dots \circ \theta_n$ примарных сомножителей. Такое представление единственно с точностью до соотношений вида $\theta' \circ \theta'' = \theta'' \circ \theta'$, где по крайней мере одна из тета-кривых θ', θ'' индуцирована некоторым узлом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем следовать универсальной схеме. В качестве множества рассматриваемых объектов возьмем множество $\mathcal{U}$ всех пар вида (M, G) , где M – связное ориентируемое трехмерное многообразие без неразбивающих сфер, а $G \subset M$ – либо тета-граф, либо узел с меткой $\varepsilon \in \{-, 0, +\}$, либо пустое

множество. Другими словами, $\mathcal{U}$ есть несвязное объединение $\mathcal{T} \sqcup \mathcal{K}_- \sqcup \mathcal{K}_0 \sqcup \mathcal{K}_+ \sqcup \mathcal{M}$, где $\mathcal{K}_\varepsilon$ – множество узлов, снабженных меткой ε .

Вершинами нужного для доказательства графа Γ служат конечные упорядоченные наборы объектов из множества $\mathcal{U}$. При этом две вершины считаются одинаковыми, если одну можно получить из другой следующими операциями.

1. Перестановкой соседних объектов в том случае, если один из них является узлом, многообразием или индуцированной узлом тета-кривой.
2. Удалением или добавлением тривиальных тета-кривых, тривиальных помеченных узлов и трехмерных сфер с пустыми узлами.

Таким образом, важно только ограничение данного упорядочивания на подмножество входящих в вершину объектов, которое состоит из тета-кривых, не индуцированных узлами.

Каждое ребро $\overrightarrow{AB}$ графа Γ отвечает нетривиальной сферической редукции одного из объектов (M, G) , входящего в вершину B . Пусть редукция выполняется по сфере $S \subset M$, в результате чего объект (M, G) заменяется на два новых объекта (M_1, G_1) , (M_2, G_2) . Если (M, G) – тета-кривая и S пересекает все три ребра графа G , то мы требуем, чтобы тета-кривая (M_1, G_1) содержала общую начальную вершину тета-графа G , тета-кривая (M_2, G_2) – его общую конечную вершину. Во всех других случаях нумерация двух новых объектов произвольна. Таким образом, если вершина A имела вид $(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, (M, G), u_{i+1}, \dots, u_n)$, то вершина B будет иметь вид $(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, (M_1, G_1), (M_2, G_2), u_{i+1}, \dots, u_n)$.

Проверка того, что граф Γ обладает свойствами (FP) и (MF), выполняется точно так же, как и в доказательстве теоремы 6. По лемме 1 о диаманте можем заключить, что любая вершина графа Γ имеет единственный корень. Отсюда следует справедливость теоремы 16. Действительно, рассмотрим вершину A_θ графа Γ , состоящую из данной тета-кривой θ . Тогда ее корень состоит из примарных тета-кривых, узлов с метками и многообразий. Заменяя каждый узел k и каждое многообразие m из этого корня на тета-кривую $\tau_\varepsilon(k)$ или тета-кривую $\tau(m)$, получим упорядоченный набор $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ примарных тета-кривых. Из определения редукций следует, что их произведение $\theta_1 \circ \theta_2 \circ \dots \circ \theta_k$ совпадает с исходной кривой θ . Обратно, любое другое представление $\theta = \theta'_1 \circ \theta'_2 \circ \dots \circ \theta'_{k'}$ определяет последовательность редукций, в результате которых сначала получается набор $(\theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_{k'})$, а потом корень вершины A_θ . Это означает, что разложения совпадают с точностью до перестановок сомножителей, индуцированных узлами, с любыми другими. Теорема доказана.

11. Циклические разложения узлов в $T \times I$

Еще один пример примарных разложений, когда важен порядок слагаемых, появляется при рассмотрении узлов геометрической степени 1 в утолщенном торе. На этот раз будем считать, что узел и утолщенный тор снабжены ориентациями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. Узел $K \subset T \times I$ имеет степень 1, если найдется такое вертикальное кольцо $A \subset T \times I$, что K трансверсально пересекает A в одной точке. Кольца, удовлетворяющие этому условию, будем называть *допустимыми*.

Два узла $K_i \subset T_i \times I$, $i = 1, 2$, называются эквивалентными, если существует гомеоморфизм пар $(T_1 \times I, K_1) \rightarrow (T_2 \times I, K_2)$, который переводит $T_1 \times \{0\}$ в $T_2 \times \{0\}$ и сохраняет ориентации узлов и утолщенных торов.

Пусть $K_i \subset T_i \times I$, $0 \leq i \leq n-1$, – упорядоченный набор из $n \geq 2$ узлов степени 1 в утолщенных торах. Выберем допустимые кольца $A_i \subset T_i \times I$ и для каждого i разрежем $T_i \times I$ по A_i , получив при этом утолщенное кольцо $M_i \approx A_i \times [0, 1]$ с двумя копиями $A'_i = A_i \times \{0\}$, $A''_i = A_i \times \{1\}$ кольца A_i в ∂M_i . Кольца соединены ориентированной дугой $l_i = K_i \cap M_i$. Будем считать, что начальная и конечные точки дуги l_i лежат соответственно в A'_i и A''_i . Для каждого i выберем гомеоморфизм $h_i: A''_i \rightarrow A'_{i+1}$, который обращает индуцированные ориентации колец, переводит $A''_i \cap (T_i \times \{0\})$ в $A'_{i+1} \cap (T_{i+1} \times \{0\})$ и отображает конечную точку дуги l_i в начальную точку дуги l_{i+1} (индексы берутся по модулю n).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. Узел $K = K_0 \# K_1 \# \dots \# K_{n-1} \subset T \times I$, полученный склеиванием пар (M_i, l_i) по h_i , называется *циклической связной суммой* узлов K_i . Допустимые кольца в $T \times I$, полученные склеиванием колец A'_i , A'_{i+1} , будем обозначать R_i , $0 \leq i \leq n-1$, а их объединение называть *допустимым мульти-кольцом*. См. рис. 21 для $n = 2$.

Рис. 21. Циклическая связная сумма

Обозначение $\#$ для записи циклических связных сумм выбрано неслучайно. Дело в том, что циклическая связная сумма двух слагаемых аналогична специальной связной сумме (для частного случая узлов степени 1 в утолщенном торе), рассмотренной в разделе 9, определение 15. Поэтому циклическую связную сумму большего числа слагаемых можно интерпретировать как итерированную специальную связную сумму.

Узел $H \subset T \times I$ называется горизонтальным, если он изотопен простой замкнутой кривой в торе вида $T \times \{*\}$. По отношению к циклическому суммированию он играет роль единицы, поскольку для любого узла $K \subset T \times I$ узлы $K \# H$ и $H \# K$ эквивалентны узлу K . Узел $K \subset T \times I$ называется примарным, если он не является горизонтальным и его нельзя представить в виде циклической связной суммы двух негоризонтальных узлов.

Пусть $K \subset T \times I$ – узел степени 1 и $B \subset T \times I$ – такой шар, что пересечение $l = K \cap B$ является заузленной дугой в B . Заменив l на тривиальную дугу $l_1 \subset B$ с теми же концами, получим новый узел $K_1 \subset T \times I$ степени 1.

Рис. 22. Два допустимых кольца, не изотопных друг другу

Будем говорить, что K_1 получается из K вырезанием локального узла, а K получается из K_1 вставкой локального узла. Конкретное место вставки (т. е. шар B) не имеет значения, поскольку B можно изотопно сдвинуть вдоль узла в любое положение. Негоризонтальный узел $K \subset T \times I$ степени 1 называется существенным, если он не содержит локальных узлов. Узел, получающийся вставкой в горизонтальный узел нетривиального локального узла, называется почти горизонтальным. Разумеется, вставка локального узла эквивалентна взятию циклической связной суммы с соответствующим почти горизонтальным узлом. Поэтому почти горизонтальные слагаемые циклической связной суммы можно переставить в любое место, например, написать их в конце.

ТЕОРЕМА 17. *Любой негоризонтальный узел $K \subset T \times I$ степени 1 можно представить в виде циклической связной суммы*

$$K = K_0 \# K_1 \# \cdots \# K_{n-1} \# L_0 \# L_1 \# \cdots \# L_{m-1},$$

где K_i существенны, а L_j почти горизонтальны. Слагаемые K_i определены однозначно с точностью до циклической, а слагаемые L_j – с точностью до любой перестановки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дан узел $K \subset T \times I$ степени 1. Если он не является примарным, то он допускает представление в виде циклической связной суммы других узлов степени 1, каждый из которых является либо существенным, либо почти горизонтальным. Каждое слагаемое задает нетривиальную специальную редукцию пары $(T \times I, K)$. Поэтому из леммы 6 следует, что общее число слагаемых ограничено. Среди всех представлений узла K в виде циклической связной суммы выберем представление, имеющее максимальную длину. Все его слагаемые примарны, так как в противном случае длину представления можно было бы увеличить путем разложения одного слагаемого в сумму двух узлов. Почти горизонтальные слагаемые L_j определены однозначно по теореме 7. Докажем однозначную определенность существенных слагаемых, для простоты считая, что почти горизонтальных слагаемых нет. Пусть $K = K_0 \# K_1 \# \cdots \# K_{n-1}$, $K = K'_0 \# K'_1 \# \cdots \# K'_{n'-1}$ – два представления узла K в виде циклической

связной суммы существенных примарных слагаемых и $\mathbb{R} = R_0 \cup R_1 \cup \dots \cup R_{n-1}$, $\mathbb{R}' = R'_0 \cup R'_1 \cup \dots \cup R'_{n'-1}$ – отвечающие им допустимые мультикольца в $T \times I$. Будем устранять пересечения колец $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}'$ за счет инвариантной на узле изотопии колец $\mathbb{R}'$ так, как это описано в доказательстве леммы 6. Мы утверждаем, что в результате пересечение $\mathbb{R} \cap \mathbb{R}'$ станет пустым. Действительно, в противном случае в каждом из многообразий M_i останется хотя бы одна сквозная полоса от каждого кольца R'_j . Поскольку из-за существенности узла K_i она обязана пересекать K , число точек в $R'_j \cap K$ будет не меньше n . Это невозможно, так как $n \geq 2$, а $R'_j \cap K = 1$. Здесь уместно отметить, что условие $n \geq 2$ существенно, так как одно допустимое кольцо может пересекать другое неустранимым образом (см. рис. 22).

Мы можем заключить, что каждое кольцо R'_j лежит в утолщенном кольце M_i между некоторыми соседними кольцами R_i и R_{i+1} . Так как узел K_i примарен, то кольцо из R'_j должно быть параллельным (с учетом узла) ровно одному из них. Аналогично, любое кольцо R_i параллельно одному кольцу из $\mathbb{R}'$. Поэтому $n = n'$ и мультикольца $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}'$ можно совместить с помощью инвариантной на узле изотопии. Поэтому разложения состоят из одних и тех же слагаемых. Их упорядочения определяются ориентацией узла K , поэтому могут отличаться только на циклическую перестановку. Подробности см. в [33].

Список литературы

- [1] M. H. A. Newman, “On theories with a combinatorial definition of “equivalence””, *Ann. of Math.* (2), **43**:2 (1942), 223–243.
- [2] T. Becker, V. Weispfenning, *Gröbner bases. A computational approach to commutative algebra*, Grad. Texts in Math., **141**, Springer-Verlag, New York, 1993, xxii+574 pp.
- [3] G. M. Bergman, “The diamond lemma for ring theory”, *Adv. in Math.*, **29**:2 (1978), 178–218.
- [4] Л. А. Бокуть, “Вложения в простые ассоциативные алгебры”, *Алгебра и логика*, **15**:2 (1976), 117–142; англ. пер.: L. A. Bokut’, “Embeddings into simple associative algebras”, *Algebra Logic*, **15** (1977), 73–90.
- [5] А. И. Ширшов, “Некоторые алгоритмические вопросы для алгебр Ли”, *Сиб. матем. журн.*, **3**:2 (1962), 292–296.
- [6] H. Schubert, “Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten”, *S.-B. Heidelberger Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl.*, 1949, № 3, 57–104.
- [7] W. Jaco, P. B. Shalen, “A new decomposition theorem for irreducible sufficiently large 3-manifolds”, *Algebraic and geometric topology* (Stanford Univ., Stanford, CA, 1976), Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., **32**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1978, 71–84.
- [8] J. Milnor, “A unique factorisation theorem for 3-manifolds”, *Amer. J. Math.*, **84** (1962), 1–7.
- [9] H. Kneser, “Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten”, *J. Dtsch. Math. Verein.*, **38** (1929), 248–260.
- [10] W. Haken, “Theorie der Normalflächen”, *Acta Math.*, **105**:3-4 (1961), 245–375.
- [11] S. Matveev, *Algorithmic topology and classification of 3-manifolds*, Algorithms Comput. Math., **9**, Springer-Verlag, Berlin, 2003, xii+478 pp.
- [12] C. Hog-Angeloni, S. Matveev, “Roots in 3-manifold topology”, *The Zieschang Gedenkschrift*, Geom. Topol. Monogr., **14**, Geometry & Topology Publications, Coventry, 2008, 295–319.

- [13] G. A. Swarup, “Some properties of 3-manifolds with boundary”, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **21**:1 (1970), 1–23.
- [14] F. Bonahon, “Cobordism of automorphisms of surfaces”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **16**:2 (1983), 237–270.
- [15] K. Miyazaki, “Conjugation and prime decomposition of knots in closed, oriented 3-manifolds”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **313**:2 (1989), 785–804.
- [16] S. Matveev, V. Turaev, “A semigroup of theta-curves in 3-manifolds”, *Mosc. Math. J.*, **11**:4 (2011), 805–814.
- [17] S. V. Matveev, “On prime decompositions of knotted graphs and orbifolds”, *Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena Reggio Emilia*, **57** (2010), 89–96.
- [18] M. Boileau, S. Mailliot, J. Porti, *Three-dimensional orbifolds and their geometric structures*, Panor. Synthèses, **15**, Société Mathématique de France, Paris, 2003, viii+167 pp.
- [19] C. Petronio, “Spherical splitting of 3-orbifolds”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **142**:2 (2007), 269–287.
- [20] W. P. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology*, v. 1, Princeton Math. Ser., **35**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997, x+311 pp.
- [21] G. Kuperberg, “What is a virtual link?”, *Algebr. Geom. Topol.*, **3** (2003), 587–591.
- [22] Л. Х. Кауфман, В. О. Мантуров, “Виртуальные узлы и зацепления”, *Геометрическая топология, дискретная геометрия и теория множеств*, Сборник статей, Тр. МИАН, **252**, Наука, М., 2006, 114–133; англ. пер.: L. H. Kauffman, V. O. Manturov, “Virtual knots and links”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **252** (2006), 104–121.
- [23] L. H. Kauffman, “Virtual knot theory”, *European J. Combin.*, **20**:7 (1999), 663–690.
- [24] С. В. Матвеев, “Разложение гомологически тривиальных узлов в $F \times I$ ”, *Докл. РАН*, **433**:1 (2010), 13–15; англ. пер.: S. V. Matveev, “Decomposition of homologically trivial knots in $F \times I$ ”, *Dokl. Math.*, **82**:1 (2010), 511–513.
- [25] В. О. Мантуров, *Теория узлов*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, М.–Ижевск, 2005, 512 с.
- [26] T. Kishino, Sh. Satoh, “A note on classical knot polynomials”, *J. Knot Theory Ramifications*, **13**:7 (2004), 845–856.
- [27] H. A. Dye, L. H. Kauffman, “Minimal surface representations of virtual knots and links”, *Algebr. Geom. Topol.*, **5** (2005), 509–535.
- [28] Ф. Г. Кораблев, С. В. Матвеев, “Редукции узлов в расширенных поверхностях и виртуальные узлы”, *Докл. РАН*, **437**:6 (2011), 748–750; англ. пер.: F. G. Korablev, S. V. Matveev, “Reduction of knots in thickened surfaces and virtual knots”, *Dokl. Math.*, **83**:2 (2011), 262–264.
- [29] Ф. Г. Кораблев, “Единственность корней узлов в $F \times I$ и примарные разложения виртуальных узлов”, Тр. ИММ УрО РАН, **17**, 2011, 160–175.
- [30] T. Motohashi, “A prime decomposition theorem for handcuff graphs in S^3 ”, *Topology Appl.*, **154**:18 (2007), 3135–3139.
- [31] K. Wolcott, “The knotting of theta curves and other graphs in S^3 ”, *Geometry and topology* (Athens, GA, 1985), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **105**, Dekker, New York, 1987, 325–346.
- [32] V. Turaev, “Knotoids”, *Osaka J. Math.*, **49**:1 (2012), 195–223.
- [33] S. Matveev, “Prime decomposition of knots in $T^2 \times I$ ”, *Topology Appl.*, **159**:7 (2012), 1820–1824.

С. В. Матвеев (S. V. Matveev)

Челябинский государственный университет;

Институт математики и механики

Уральского отделения РАН

E-mail: matveev@csu.ru

Поступила в редакцию

03.10.2011