Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Арутюнов, Гладкие аномальные задачи теории экстремума и анализа, *УМН*, 2012, том 67, выпуск 3, 3–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9478>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 17:19:28

УДК 519.7

Памяти Евгения Фроловича Мищенко

Гладкие анормальные задачи теории экстремума и анализа

А. В. Арутюнов

Работа содержит обзор результатов, связанных с теоремой об обратной функции, а также необходимых и достаточных условий экстремума первого и второго порядка для гладких экстремальных задач с ограничениями. Главным отличием приводимых результатов от классических является то, что они справедливы и содержательны без априорных предположений нормальности.

Библиография: 48 названий.

Ключевые слова: анормальная точка, принцип Лагранжа, необходимые и достаточные условия экстремума второго порядка, теорема об обратной функции, 2-регулярность, 2-нормальность, квадратичное отображение.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	3
2. Необходимые условия экстремума второго порядка. Индексный подход.....	6
3. Необходимые условия экстремума первого и второго порядка. 2-регулярность.....	20
4. Достаточные условия экстремума второго порядка.....	27
5. Квадратичные отображения и квадратичные задачи.....	34
6. Теоремы об обратной функции.....	45
7. Необходимые условия второго порядка в задачах оптимального управления.....	50
8. Некоторые приложения.....	56
Список литературы.....	58

1. Введение

Исследование нелинейных экстремальных задач с ограничениями (задач на условный экстремум) основано на принципе Лагранжа, предложенном Ж. Лагранжем в конце XVIII века. Строгое обоснование принципа Лагранжа для широкого класса задач потребовало серьезных усилий многих математиков и было в основном закончено во второй половине XX века (см. [1] и библиографию

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-01-00427).

© А. В. АРУТЮНОВ, 2012

там же), что в принципе ознаменовало окончание классического этапа развития теории. Однако, как мы поясним ниже, необходимые условия первого порядка в форме принципа Лагранжа содержательны лишь в предположении выполнения условий невырожденности (нормальности) ограничений, а в аномальном случае принцип Лагранжа не информативен.

Родственной тематикой являются теоремы об обратной или, более общо, о неявной функции. Они дают важнейший инструмент исследования нелинейных отображений и имеют огромное значение для теории и приложений. Первые теоремы об обратной функции появились во второй половине XIX века, а к концу XX века их обобщили на максимально общую ситуацию, включая негладкие отображения. Однако эти результаты были получены в предположении невырожденности (нормальности) рассматриваемого отображения, что в гладком случае означает сюръективность линейного оператора, определяемого его производной в рассматриваемой точке. Итак, к концу прошлого века в основном был завершен классический этап развития этой теории (см., например, [2]). На примере двух описанных задач поясним подробнее, что же такое аномальность.

Теория экстремальных задач. Пусть X – векторное пространство. Рассмотрим задачу минимизации с ограничениями:

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad F(x) = 0. \quad (1.1)$$

Здесь $F: X \rightarrow Y = \mathbb{R}^k$ – заданное отображение, а минимум заданной функции $f_0: X \rightarrow \mathbb{R}$ ищется на допустимом множестве $M = \{x \in X: F(x) = 0\}$. Для простоты вначале предположим, что X – банахово пространство (можно даже считать, что $X = \mathbb{R}^n$), а f_0 и F дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0 ,¹ являющейся локальным минимумом задачи (1.1). Тогда в точке x_0 выполнен принцип Лагранжа. Для его формулировки введем в рассмотрение функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda) = \lambda^0 f_0(x) + \langle y^*, F(x) \rangle; \quad \lambda = (\lambda^0, y^*), \quad \lambda^0 \in \mathbb{R}, \quad y^* \in Y^*, \quad (1.2)$$

где $(k+1)$ -мерный вектор $\lambda = (\lambda^0, y^*)$ и его компоненты называются множителями Лагранжа, а угловые скобки, как обычно, означают скалярное умножение².

ТЕОРЕМА 1.1 (принцип Лагранжа). *Пусть x_0 является точкой локального минимума задачи (1.1). Тогда существует такой множитель Лагранжа λ , что*

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x_0, \lambda) = 0, \quad \lambda^0 \geq 0, \quad \lambda \neq 0. \quad (1.3)$$

Принцип Лагранжа дает необходимые условия экстремума первого порядка и хорошо известен (см. [1], [3] и т. д.).

¹Во введении для простоты накладываются избыточные предположения гладкости

²Множитель Лагранжа y^* берут из пространства Y^* , топологически сопряженного к Y . Однако там, где Y предполагается конечномерным арифметическим пространством, мы будем отождествлять Y с его сопряженным и считать множитель Лагранжа y^* элементом пространства Y .

Рассмотрим два случая. Пусть вначале точка x_0 является нормальной, т. е. $\text{im } F'(x_0) = Y$. (В отечественной литературе в этом случае часто говорят, что в точке x_0 выполнено условие Люстерника. Кроме того, наряду с термином “нормальная” точка, часто употребляют также термины “невыврожденная” или “регулярная” точка.) Итак, если точка минимума x_0 нормальна, то в силу (1.3) $\lambda^0 > 0$ и, следовательно, учитывая положительную однородность соотношений (1.3) по переменной λ , можно считать, что $\lambda^0 = 1$. При этом существует единственный множитель Лагранжа, имеющий вид $\lambda = (1, y^*)$, причем для него выполняются классические необходимые условия второго порядка

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x, x] \geq 0 \quad \forall x \in X: F'(x_0)x = 0 \quad (1.4)$$

(см. [3; § 3.4, с. 287]). Здесь квадратные скобки обозначают действие билинейной формы.

Рассмотрим второй случай: точка x_0 аномальна, т. е. $\text{im } F'(x_0) \neq Y$. Тогда в ней принцип Лагранжа (1.3) выполняется при $\lambda^0 = 0$ и произвольном $y^* \neq 0$, принадлежащем ядру сопряженного оператора $\ker F'(x_0)^*$, которое является ненулевым, поскольку $\text{im } F'(x_0) \neq Y$. Таким образом, в любой аномальной точке принцип Лагранжа автоматически выполняется независимо от минимизируемого функционала f_0 и является лишь прямым следствием определения аномальности. Поэтому принцип Лагранжа бесполезен при исследовании аномальной точки на экстремум. Что же касается классических необходимых условий второго порядка (1.4), то в аномальной точке минимума они могут нарушаться. Вот простой двумерный пример, подтверждающий это:

$$\begin{aligned} X &= \mathbb{R}^2, & f_0(x) &= -|x|^2 \rightarrow \min, \\ F_1(x) &= x_1^2 - x_2^2 = 0, & F_2(x) &= x_1 x_2 = 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. В этой задаче ограничениям удовлетворяет единственная точка $x_0 = 0$, естественно являющаяся точкой минимума. Однако в ней условия (1.4) не выполняются ни при каком удовлетворяющем (1.3) множителе Лагранжа λ . Итак, в аномальной точке принцип Лагранжа неинформативен, а классические необходимые условия второго порядка могут нарушаться. Таким образом, возникает проблема нахождения содержательных необходимых условий минимума в задаче (1.1) без априорных предположений нормальности исследуемой точки.

Теорема об обратной функции. Пусть отображение $F: X \rightarrow Y$ непрерывно дифференцируемо в окрестности точки $x_0 \in X$ и $y_0 = F(x_0)$. Спрашивается, существует ли такая окрестность V точки y_0 , что для всех $y \in V$ уравнение

$$F(x) = y \quad (1.6)$$

имеет такое решение $x(y)$, что $x(y_0) = x_0$ и отображение $x(\cdot)$ непрерывно в точке y_0 , или даже более того, непрерывно на всей окрестности V . Если точка x_0 нормальна, то классическая теорема об обратной функции дает на этот вопрос положительный ответ, причем отображение $x(\cdot)$ можно выбрать непрерывно

дифференцируемым. Если же точка x_0 аномальна, то это уже не так. Например, скалярное уравнение $x_1^2 + x_2^2 = y$, рассматриваемое в окрестности нуля, для $y < 0$ не имеет решений, а уравнение $x_1^2 - x_2^2 = y$ имеет бесконечно много непрерывных решений, для которых $x(0) = 0$, но все они в нуле не дифференцируемы и даже, более того, не удовлетворяют условию Липшица. Итак, возникает проблема нахождения условий, более слабых, чем нормальность, которые гарантируют существование решения $x(\cdot)$ уравнения (1.6) с нужными свойствами.

Обсуждению этих двух, а также других, близких к ним, задач и посвящен настоящий обзор. При этом основное внимание акцентируется на последних достижениях, а история вопроса и ранние работы, усиленные впоследствии, как правило, оставлены в стороне. Следующие разделы 2 и 3 содержат необходимые условия экстремума первого и второго порядка для задач с различными типами ограничений. Отличительной чертой этих результатов является то, что они получены и содержательны без априорных предположений нормальности, а в нормальном случае превращаются в классические условия. Эти два раздела отличаются тем, что они содержат два различных подхода: в первом из них результаты получены в терминах индексов вторых производных классической функции Лагранжа L , а в разделе 3 исследования основаны на обобщенной функции Лагранжа $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$. Раздел 4 содержит достаточные условия второго порядка. В нем наряду с классическими приведены достаточные условия для задач с незамкнутым образом и достаточные условия в терминах функции $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ для тех классов аномальных задач, в которых классические достаточные условия автоматически вырождаются. В разделе 5 изучаются квадратичные задачи, дающие типичный пример класса аномальных задач, а также получены некоторые результаты по теории квадратичных отображений. Раздел 6 содержит различные варианты теорем об обратной и неявной функции. Так же как и указанные выше результаты, они получены и содержательны без априорных предположений нормальности, а в нормальном случае превращаются в классические теоремы. В разделе 7 в качестве приложения абстрактной теории, изложенной в разделах 2 и 3, получены необходимые условия оптимальности второго порядка для различных задач оптимального управления. Раздел 8 посвящен приложению изложенных абстрактных результатов к теории бифуркаций, теории чувствительности, управляемости управляемых динамических систем и теории квадратичных отображений.

2. Необходимые условия экстремума второго порядка. Индексный подход

Экстремальная задача с ограничениями типа равенств и неравенств. Пусть по-прежнему X – векторное пространство и $Y = \mathbb{R}^k$. Заданы функции $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{0, l}$, и отображение $f: X \rightarrow Y$. Рассмотрим экстремальную задачу с ограничениями типа равенств и неравенств

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad f_j(x) \leq 0, \quad j = \overline{1, l}, \quad f(x) = 0. \quad (2.1)$$

Пусть точка $x_0 \in X$ удовлетворяет ограничениям задачи (2.1). В дальнейшем для простоты будем считать, что все индексы, отвечающие ограничениям типа неравенств, активны, т.е. $f_j(x_0) = 0$, $j = \overline{1, l}$. Это не нарушает общности, так как при локальных рассматриваниях, которыми мы занимаемся, ограничения $f_j: f_j(x_0) < 0$ можно опустить.

Заданные функции f_j и отображение $f: X \rightarrow Y$ будем предполагать гладкими в следующем смысле. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всевозможных конечномерных подпространств $M \subseteq X$, каждое из которых наделим единственной отделимой векторной топологией. Через $\|\cdot\|_M$ будем обозначать какую-нибудь из (эквивалентных) норм, порождающих в M эту топологию. В векторном пространстве X введем так называемую конечную топологию. В ней открытыми считаются те и только те множества, пересечение которых с любым $M \in \mathcal{M}$ открыто. Если пространство X бесконечномерно, то оно, будучи наделенным конечной топологией, вообще говоря, не является векторным топологическим пространством, так как в нем сложение, как правило, разрывно. С другой стороны, конечная топология сильнее всех топологий, превращающих X в векторное топологическое пространство. При этом локальный относительно конечной топологии минимум является слабейшим среди всех рассматриваемых типов минимума.

Относительно отображения f будем предполагать, что оно дважды непрерывно дифференцируемо в окрестности точки x_0 относительно конечной топологии τ . Последнее означает, что для произвольного конечномерного линейного подпространства M сужение f на M дважды непрерывно дифференцируемо в некоторой (зависящей от M) окрестности x_0 . Следовательно, существуют линейный оператор $A: X \rightarrow Y$ и билинейное отображение $Q: X \times X \rightarrow Y$, а также отображение $\alpha: X \rightarrow Y$ такие, что

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \frac{1}{2}Q[x - x_0, x - x_0] + \alpha(x - x_0) \quad \forall x \in X$$

и для произвольного конечномерного подпространства M имеет место

$$\frac{\|\alpha(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|_M^2} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow x_0, \quad x \in M.$$

Отображения A и Q обозначаются через $f'(x_0)$ (или $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$) и $f''(x_0)$ (или $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0)$) и называются первой и второй производными f . Аналогичные предположения считаются выполненными относительно всех функций f_j . Предположение гладкости относительно конечной топологии является слабейшим среди обычно рассматриваемых.

Важно отметить, что последующие результаты остаются содержательными и в случае, когда $X = \mathbb{R}^n$, а f, f_j дважды непрерывно дифференцируемы в обычном смысле. Поэтому если не интересоваться бесконечномерной спецификой, то можно без ущерба для понимания общего замысла предполагать, что $X = \mathbb{R}^n$.

Определим функцию Лагранжа для задачи (2.1):

$$L(x, \lambda) = \sum_{j=0}^l \lambda^j f_j(x) + \langle y^*, f(x) \rangle; \quad \lambda = (\lambda^0, \dots, \lambda^l, y^*), \quad \lambda^j \in \mathbb{R}, \quad y^* \in Y^*.$$

Рассмотрим множество нормированных множителей Лагранжа задачи (2.1), отвечающих точке x_0 в силу принципа Лагранжа:

$$\Lambda(x_0) = \left\{ \lambda: \frac{\partial L}{\partial x}(x_0, \lambda) = 0, \lambda^j \geq 0 \forall j, \sum_{j=0}^l \lambda^j + |y^*| = 1 \right\}. \quad (2.2)$$

(Отметим, что условия дополняющей нежесткости $\lambda^j f_j(x_0) = 0$, $j = \overline{1, l}$, здесь опущены, так как в силу сделанного предположения $f_j(x_0) = 0$, $j = \overline{1, l}$.)

Для целых неотрицательных s введем в рассмотрение множества (возможно, некоторые из них пусты) $\Lambda_s(x_0)$, состоящие из тех множителей Лагранжа $\lambda \in \Lambda(x_0)$, для которых существует такое (зависящее от λ) линейное подпространство $\Pi \subseteq X$, что

$$\text{codim } \Pi \leq s; \quad \Pi \subseteq \ker F'(x_0); \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x, x] \geq 0 \quad \forall x \in \Pi. \quad (2.3)$$

Здесь и ниже отображение $F = (f_1, \dots, f_l, f)$ действует из X в $\mathbb{R}^m$ и

$$m = k + l.$$

Введем в рассмотрение конус

$$\mathcal{K}(x_0) = \{h \in X: \langle f'_j(x_0), h \rangle \leq 0, j = \overline{0, l}; f'(x_0)h = 0\},$$

называемый критическим. Он, очевидно, выпуклый и непустой ($0 \in \mathcal{K}(x_0)$).

ТЕОРЕМА 2.1 (необходимые условия второго порядка). *Пусть в задаче (2.1) точка x_0 является локальным минимумом относительно конечной топологии. Тогда множество $\Lambda_m(x_0)$ непусто и, более того,*

$$\max_{\lambda \in \Lambda} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x, x] \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{K}(x_0), \quad \Lambda = \Lambda_m(x_0). \quad (2.4)$$

Доказательство теоремы использует следующую конструкцию.

Оценка снизу верхнего топологического предела последовательности подпространств. Если $\{\Pi_i\}$ – последовательность подмножеств метрического пространства, то $\text{Ls}\{\Pi_i\}$ обозначает ее верхний топологический предел, который состоит из всевозможных предельных точек последовательностей $\{x_i\}: x_i \in \Pi_i \forall i$.

Пусть X – банахово пространство и $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ – последовательность линейных непрерывных операторов, действующих из X в $Y = \mathbb{R}^k$. Будем предполагать, что последовательность $\{A_i\}$ сходится по норме к линейному оператору $A: X \rightarrow Y$. Положим $M = \text{Ls}\{\ker A_i\}$. Очевидно, что M замкнуто, непусто ($0 \in M$) и $M \subseteq \ker A$. Если оператор A сюръективен, то $M = \ker A$. Если же A сюръективным не является, то, вообще говоря, $M \neq \ker A$ и множество M может даже не быть выпуклым.

ТЕОРЕМА 2.2. *В X существует такое замкнутое подпространство Π , что*

$$\text{codim } \Pi \leq k; \quad \Pi \subseteq \text{Ls}\{\ker A_i\}; \quad \Pi \subseteq \ker A.$$

Справедливость этой теоремы непосредственно вытекает из следующего утверждения, имеющего и самостоятельное значение.

ТЕОРЕМА 2.3. *Пусть $\{\Pi_i\}$ – последовательность замкнутых подпространств из X и $\text{codim } \Pi_i \leq k \forall i$. Тогда существует такое замкнутое подпространство $\Pi \subseteq X$, что*

$$\text{codim } \Pi \leq k; \quad \Pi \subseteq \text{Ls}\{\Pi_i\}. \quad (2.5)$$

Из теоремы 2.3 вытекает замкнутость, а значит, и компактность множеств $\Lambda_s(x_0)$ при любом s в случае, когда X – банахово пространство, а отображения f_i, f гладкие. Это важное свойство используется ниже. Отложим доказательство теоремы 2.3 до конца раздела.

Доказательство теоремы 2.1. Следуя [4]–[6], доказательство теоремы 2.1 проведем в три этапа. Вначале (этап I) в предположении конечномерности X докажем непустоту $\Lambda_m(x_0)$. На этапе II докажем теорему для конечномерных X . Наконец, на этапе III докажем теорему в полной общности (т.е. избавимся от предположения $\dim X < \infty$).

Этап I. Будем предполагать, что пространство X конечномерно. Тогда, не теряя общности, можно считать, что $X = \mathbb{R}^n$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы в задаче

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad f_j(x) \leq 0, \quad j = \overline{1, l}, \quad f(x) = 0, \quad |x - x_0| \leq \delta$$

точка x_0 являлась минимумом. Снимем в этой задаче ограничения (все, кроме последнего) с помощью метода штрафов. Для каждого натурального i положим

$$\varphi_i(x) = f_0(x) + i \left(\sum_{j=1}^l (f_j(x)^+)^4 + |f(x)|^4 \right) + |x - x_0|^4,$$

где $a^+ = \max(a, 0)$. Рассмотрим последовательность задач минимизации

$$\varphi_i(x) \rightarrow \min, \quad |x - x_0| \leq \delta,$$

называемых i -задачами. Решение в i -задаче существует в силу непрерывности φ_i и компактности замкнутого шара в конечномерном пространстве X . Пусть x_i – какое-нибудь из решений i -задачи.

Докажем, что $x_i \rightarrow x_0$. Действительно, учитывая конечномерность X и переходя к подпоследовательности, добьемся того, что $x_i \rightarrow \bar{x}$. Покажем, что $\bar{x} = x_0$. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi_i(x_i) &\leq \varphi_i(x_0) = f_0(x_0) \forall i \\ &\Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} f_j(x_i) \leq 0, \quad j = \overline{1, l}, \quad f(x_i) \rightarrow 0 \\ &\Rightarrow f_j(\bar{x}) \leq 0, \quad j = \overline{1, l}, \quad f(\bar{x}) = 0 \\ &\Rightarrow f_0(\bar{x}) \geq f_0(x_0). \end{aligned}$$

Кроме того, из первого неравенства имеем

$$\begin{aligned} f_0(x_i) + |x_i - x_0|^4 &\leq f_0(x_0) \quad \forall i \\ \Rightarrow f_0(\bar{x}) + |\bar{x} - x_0|^4 &\leq f_0(x_0) \leq f_0(\bar{x}) \Rightarrow \bar{x} = x_0. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что $x_i \rightarrow x_0$. Поэтому при всех больших i , которые мы только и будем рассматривать, имеет место неравенство $|x_i - x_0| < \delta$ и, значит, i -задача локально эквивалентна задаче минимизации гладкой функции без ограничений, и, значит, необходимые условия первого и второго порядка для нее заключаются в том, что

$$\varphi'_i(x_i) = 0, \quad \varphi''_i(x_i)[x, x] \geq 0 \quad \forall x.$$

Расшифровывая их, получаем

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x_i, \lambda_i) + \kappa_i \cdot 4(x_i - x_0)|x_i - x_0|^2 = 0, \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_i, \lambda_i)[x, x] + 12\kappa_i \left(i \sum_{j=1}^m (f_j(x_i)^+)^2 |\langle f'_j(x_i), x \rangle|^2 \right. \\ \left. + i |f(x_i)|^2 |f'(x_i)x|^2 + 1(i)|x|^2 \right) \geq 0 \quad \forall x, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $1(i) \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$, а также $\lambda_i = \kappa_i(1, \bar{\lambda}_i^1, \dots, \bar{\lambda}_i^l, \bar{y}_i^*)$,

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_i^j &= 4i(f_j(x_i)^+)^3, \quad j = \overline{1, l}, \quad \bar{y}_i^* = 4i|f(x_i)|^2 f(x_i), \\ \kappa_i &= \left(1 + \sum_{j=1}^l (\bar{\lambda}_i^j)^2 + |\bar{y}_i^*|^2 \right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

По построению $|\lambda_i| = 1$, $\bar{\lambda}_i^j \geq 0 \quad \forall i, \forall j \leq l$. Поэтому после перехода к подпоследовательности и последующего предельного перехода в (2.6) имеем $\lambda_i \rightarrow \lambda \in \Lambda(x_0)$.

Докажем существование подпространства Π , удовлетворяющего (2.3) при $s = m$. Для этого рассмотрим линейные операторы $A_i = F'(x_i)$. По теореме 2.2 существует подпространство Π , для которого $\Pi \subseteq \ker F'(x_0)$, $\Pi \subseteq \text{Ls}\{\ker A_i\}$, $\text{codim } \Pi \leq m$. Возьмем произвольный вектор $h \in \Pi$. В силу определения верхнего топологического предела существуют $h_i \in \ker F'(x_i)$ такие, что после перехода к подпоследовательности $h_i \rightarrow h$. Подставляя в (2.7) $x = h_i$ и переходя к пределу при $i \rightarrow \infty$, получаем, что $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[h, h] \geq 0$. Отсюда, в силу произвольности $h \in \Pi$, имеем $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x, x] \geq 0 \quad \forall x \in \Pi$. Таким образом, доказано, что $\lambda \in \Lambda_m(x_0)$.

Этап II. Пусть по-прежнему $X = \mathbb{R}^n$. Докажем (2.4). Для удобства будем считать, что $x_0 = 0$, $f_0(x_0) = 0$. Введем в рассмотрение функцию γ :

$$\gamma(\chi) = 0 \quad \forall \chi \leq 1, \quad \gamma(\chi) = (\chi - 1)^4 \quad \forall \chi > 1.$$

Зафиксируем произвольный единичный вектор $h \in \mathcal{H}(x_0)$, для которого $|h| = 1$ (если, конечно, $\mathcal{H}(x_0) \neq \{0\}$). Для $\varepsilon = i^{-1}$, $i = 1, 2, \dots$, рассмотрим задачу минимизации по переменной $(x, \chi) \in X \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x, \chi) &\rightarrow \min, & f_j(x) - \chi f_j(\varepsilon h) &\leq 0, & j = \overline{1, l}, \\ f(x) - \chi f(\varepsilon h) &= 0, & \chi &\geq 0, & |x| \leq \delta, \end{aligned}$$

называемую ε -задачей. Здесь δ определено выше и

$$f_\varepsilon(x, \chi) = \tilde{f}_0(x) - \chi \tilde{f}_0(\varepsilon h) + \gamma(\chi), \quad \tilde{f}_0(x) = f_0(x) + |x|^4.$$

При $\varepsilon < \delta$, которые только и будем рассматривать, решение ε -задачи существует, поскольку точка $x = \varepsilon h$, $\chi = 1$ удовлетворяет всем ее ограничениям, шар $\{x: |x| \leq \delta\}$ компактен и $\gamma(\chi)/\chi \rightarrow \infty$ при $\chi \rightarrow \infty$.

Покажем, что среди решений $(x_\varepsilon, \chi_\varepsilon)$ ε -задачи существует такое, что $\chi_\varepsilon > 0$. Действительно, пусть $(x_\varepsilon, 0)$ является ее решением. Покажем, что тогда $x_\varepsilon = 0$. Действительно, x_ε удовлетворяет всем ограничениям задачи (2.1) и если $x_\varepsilon \neq 0$, то

$$f_\varepsilon(x_\varepsilon, 0) = f_0(x_\varepsilon) + |x_\varepsilon|^4 \geq f_0(0) + |x_\varepsilon|^4 > 0 \quad \text{и} \quad f_\varepsilon(\varepsilon h, 1) = 0 \Rightarrow f_\varepsilon(x_\varepsilon, 0) \leq 0.$$

Полученное противоречие показывает, что $x_\varepsilon = 0$ и, значит, минимум в ε -задаче равен нулю. Поэтому точка $(\varepsilon h, 1)$ также является ее решением, что доказывает требуемое.

Рассмотрим семейство решений $\{x_\varepsilon, \chi_\varepsilon\}$ ε -задач. Из $\gamma(\chi)/\chi \rightarrow \infty$ при $\chi \rightarrow \infty$ вытекает ограниченность последовательности $\{\chi_\varepsilon\}$. Используя это и неравенство $f_\varepsilon(x_\varepsilon, \chi_\varepsilon) \leq 0$, имеем $\tilde{f}_0(x_\varepsilon) \leq \text{const} |\tilde{f}_0(\varepsilon h)| \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому $f_0(\tilde{x}) + |\tilde{x}|^4 \leq 0$ для любой предельной точки $\tilde{x}$ последовательности $\{x_\varepsilon\}$. В то же время $f_0(\tilde{x}) \geq 0$, так как $\tilde{x}$ удовлетворяет всем ограничениям задачи (2.1). Значит, $\tilde{x} = 0$ и, следовательно, доказано, что $x_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому при всех малых $\varepsilon > 0$, которые только и будут рассматриваться, $|x_\varepsilon| < \delta$.

Применим к решению $\{x_\varepsilon, \chi_\varepsilon\}$ ε -задачи, для которого $\chi_\varepsilon > 0$, необходимые условия, полученные на этапе I. Найдутся такие множитель Лагранжа $\lambda_\varepsilon = (\lambda_\varepsilon^0, \dots, \lambda_\varepsilon^l, y_\varepsilon^*)$ и линейное подпространство Π_ε , что $|\lambda_\varepsilon| = 1$, $\lambda_\varepsilon^j \geq 0 \ \forall j$,

$$\begin{aligned} L(\varepsilon h, \lambda_\varepsilon) + \lambda_\varepsilon^0 \varepsilon^4 &= \lambda_\varepsilon^0 \gamma'(\chi_\varepsilon) \geq 0, & \frac{\partial L}{\partial x}(x_\varepsilon, \lambda_\varepsilon) + 4\lambda_\varepsilon^0 x_\varepsilon |x_\varepsilon|^2 &= 0, \\ \Pi_\varepsilon &\subseteq \ker F'(x_\varepsilon), & \text{codim } \Pi_\varepsilon &\leq m, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)[x, x] + 12\lambda_\varepsilon^0 |x_\varepsilon|^2 |x|^2 &\geq 0 \quad \forall x \in \Pi_\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.8}$$

При этом мы воспользовались тем, что ограничение $\chi \geq 0$ в функции Лагранжа для ε -задачи можно опустить, так как для рассматриваемого ее решения $\chi_\varepsilon > 0$ и, значит, множитель Лагранжа, отвечающий этому ограничению, равен нулю (в силу условий дополняющей нежесткости).

Переходя к подпоследовательности, добьемся того, что $\{\lambda_\varepsilon\}$ сходится к некоторому единичному вектору λ . Переходя к пределу в полученных соотношениях, имеем $\lambda \in \Lambda(x_0)$. По теореме 2.3 существует такое подпространство Π , что

$\text{codim } \Pi \leq m$, $\Pi \subseteq \text{Ls}\{\Pi_\varepsilon\}$. Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, как и на этапе I, получаем

$$\Pi \subseteq \ker F'(x_0), \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x, x] \geq 0 \quad \forall x \in \Pi.$$

Значит, $\lambda \in \Lambda_m(x_0)$. Наконец, раскладывая функцию $L(\cdot, \lambda_\varepsilon)$ до членов второго порядка и учитывая, что $h \in \mathcal{K}(x_0)$, из неравенства в (2.8) получаем, что $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[h, h] \geq 0$. Последнее в силу произвольности h завершает рассмотрение этапа II.

Этап III. Докажем теорему в полной общности. Возьмем произвольное $h \in \mathcal{K}(x_0)$. Обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}$ множество таких подпространств $M \in \mathcal{M}$, что $h \in M$, $F'(x_0)(M) = \text{im } F'(x_0)$. Возьмем произвольное $M \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и рассмотрим задачу, полученную из (2.1) заменой X на M . Как доказано на этапе II, для этой конечномерной задачи существуют такие множители Лагранжа λ_M , что

$$|\lambda_M| = 1, \quad \lambda_M^j \geq 0 \quad \forall j, \quad \frac{\partial L}{\partial x}(x_0, \lambda_M) \in M^\perp, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda_M)[h, h] \geq 0,$$

и существует подпространство $\Pi_M \subseteq \ker F'(x_0)$, коразмерность которого относительно M не превышает m и для которого $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda_M)[x, x] \geq 0 \quad \forall x \in \Pi_M$.³ Множество таких λ_M обозначим через $\Lambda_m(M)$. В силу теоремы 2.3 оно, очевидно, замкнуто.

Для произвольных $M_1, \dots, M_s \in \widetilde{\mathcal{M}}$, очевидно, $\bigcap_{i=1}^s \Lambda_m(M_i) \supseteq \Lambda_m(M_1 + \dots + M_s) \neq \emptyset$. Следовательно, система непустых замкнутых множеств $\Lambda_m(M)$, $M \in \widetilde{\mathcal{M}}$, является центрированной. Поэтому в силу компактности единичной сферы в $\mathbb{R}^{m+1}$ пересечение $\bigcap_{M \in \widetilde{\mathcal{M}}} \Lambda_m(M)$ непусто. Очевидно, для произвольного

вектора λ из этого пересечения имеет место $\lambda \in \Lambda_m(x_0)$ и $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[h, h] \geq 0$. Теорема доказана.

Обсуждение теоремы 2.1. Если в задаче (2.1) ограничения типа неравенств отсутствуют (т. е. $l = 0$), то в формулировке теоремы можно критический конус $\mathcal{K}(x_0)$ заменить подпространством $\ker f'(x_0)$ (так как в этом случае, если $h \in \ker f'(x_0)$, то либо $h \in \mathcal{K}(x_0)$, либо $(-h) \in \mathcal{K}(x_0)$). Если при этом точка x_0 нормальна, то теорема 2.1 превращается в классические необходимые условия второго порядка (1.4), так как в нормальной точке множество $\Lambda(x_0)$ состоит из единственной точки и, значит, $\Lambda(x_0) = \Lambda_k(x_0)$ (при этом (2.4) является следствием последнего равенства, так как в нормальной точке $\Pi = \ker f'(x_0)$).

Наиболее сильными из известных ранее необходимых условий второго порядка для задачи (2.1) являются условия, полученные А. А. Милютиним (см. [7], [8]). Сформулируем их. Для этого обозначим через $\Lambda_+(x_0)$ множество тех $\lambda \in \Lambda(x_0)$, для которых индекс квадратичной формы $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda)$ конечен. Напомним, что индекс квадратичной формы q , обозначаемый через $\text{ind } q$, — это

³ $M^\perp$ означает аннулятор подпространства M .

максимум из размерностей всех тех подпространств, на которых она отрицательно определена или, что то же самое, – это минимальная из коразмерностей подпространств, на которых q неотрицательно определена. Теорема Милютина заключается в том, что если x_0 – точка локального минимума, то выполняется условие, полученное из (2.4) заменой множества $\Lambda_m(x_0)$ на $\Lambda_+(x_0)$. Однако если пространство X конечномерно, то, очевидно, $\Lambda_+(x_0) = \Lambda(x_0)$ и, значит, если точка x_0 аномальна для отображения f , т.е. $\text{im } f'(x_0) \neq Y$, то условия Милютина выполняются автоматически (так как в этом случае $\Lambda(x_0)$ содержит две точки: $\lambda_1 = (0, \dots, 0, y^*)$ и $\lambda_2 = -\lambda_1$) и содержательной информации не несут. Но в любом случае необходимые условия Милютина [7], [8] слабее содержащихся в теореме 2.1, так как всегда $\Lambda_m(x_0) \subseteq \Lambda_+(x_0)$.

Впервые необходимые условия второго порядка, заключающиеся в том, что $\Lambda_m(x_0) \neq \emptyset$, без априорного предположения нормальности были получены для задачи оптимального быстрогодействия в [9], а для общей задачи оптимального управления и для задачи математического программирования в [10]. Условия (2.4) получены в [4].

Отметим важную особенность, которую вносят ограничения типа неравенств. Пусть в точке x_0 выполнено условие регулярности Мангасариана–Фромоваца:

$$\text{im } f'(x_0) = Y, \quad \exists d \in \ker f'(x_0): \quad \langle f'_j(x_0), d \rangle < 0, \quad j = \overline{1, l},$$

являющееся естественным обобщением условия Люстерника на задачи с неравенствами. Тогда $\lambda^0 > 0 \forall \lambda \in \Lambda(x_0)$, однако может не существовать “универсального” множителя Лагранжа λ , для которого $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x, x] \geq 0 \forall x \in \mathcal{K}(x_0)$. Соответствующий пример при $X = \mathbb{R}^3$, $l = 4$ приведен в [11; § 2, п. 2.4, с. 159].

Условие (2.4) теоремы можно представить в следующем эквивалентном виде. Для каждого $y \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k$ положим

$$\begin{aligned} \omega(y) &= \inf \{ f''_0(x_0)[x, x], x \in \Omega(y) \} \\ \forall y: \Omega(y) &= \{ x \in \mathcal{K}(x_0): y = F''(x_0)[x, x] \} \neq \emptyset, \end{aligned}$$

причем этот инфимум может принимать и значение $-\infty$. Как легко видеть, (2.4) равносильно тому, что

$$\forall y: \Omega(y) \neq \emptyset \quad \exists \lambda = (\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^l, y^*) \in \Lambda_m(x_0): \quad \lambda^0 \omega(y) + \langle \bar{\lambda}, y \rangle \geq 0, \quad (2.9)$$

где $\bar{\lambda} = (\lambda^1, \dots, \lambda^l, y^*)$. При этом, если $\omega(y) = -\infty$, то последнее неравенство в (2.9) означает, что $\lambda^0 = 0$ и $\langle \bar{\lambda}, y \rangle \geq 0$.

Некоторые обобщения. При исследовании задач оптимального управления с геометрическими ограничениями (см. раздел 7 ниже) удобно использовать следующий вариант теоремы 2.1. Пусть X – нормированное пространство, а $C \subseteq X$ – выпуклый замкнутый конус. Рассмотрим задачу

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad f_j(x) \leq 0, \quad j = \overline{1, l}, \quad f(x) = 0, \quad x \in C, \quad (2.10)$$

которая отличается от (2.1) дополнительным ограничением $x \in C$.

Приведем необходимые условия минимума для задачи (2.10) в точке x_0 . Обозначим через $\tilde{\Lambda}(x_0)$ множество нормированных множителей Лагранжа λ , отвечающих точке x_0 в силу принципа Лагранжа в задаче (2.10):

$$\left\langle \frac{\partial L}{\partial x}(x_0, \lambda), x_0 \right\rangle = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x}(x_0, \lambda) \in C^*, \quad \lambda^j \geq 0 \quad \forall j, \quad \sum_{j=0}^l \lambda^j + |y^*| = 1.$$

Здесь $C^* = \{\xi \in X^*: \langle \xi, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C\}$ – конус, сопряженный к конусу C . Положим

$$\widetilde{\mathcal{K}}(x_0) = \{x \in C + \text{span}\{x_0\}: \langle f'_j(x_0), x \rangle \leq 0 \quad \forall j, \quad f'(x_0)x = 0\}.$$

Положим $N = C \cap (-C)$ (и, значит, N – максимальное линейное подпространство, лежащее в C). Обозначим через $\tilde{\Lambda}_m(x_0)$ множество тех множителей Лагранжа $\lambda \in \tilde{\Lambda}(x_0)$, для которых существует линейное подпространство $\Pi \subseteq N$, удовлетворяющее (2.3), где $s = m = k + l$ и codim означает коразмерность относительно подпространства N .

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть в задаче (2.10) точка x_0 является локальным минимумом. Тогда

$$\Lambda = \tilde{\Lambda}_m(x_0) \neq \emptyset, \quad \max_{\lambda \in \Lambda} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x, x] \geq 0 \quad \forall x \in \widetilde{\mathcal{K}}(x_0). \quad (2.11)$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.1 и приведено в [6]. В условии (2.11) важную роль играет структура конуса $\widetilde{\mathcal{K}}(x_0)$. Дело в том, что он может оказаться незамкнутым. Это является следствием того, что если конус C не является конечногранным (т.е. не представим в виде пересечения конечного числа полупространств), а точка x_0 принадлежит границе C и $x_0 \neq 0$, то конус $C + \text{span}\{x_0\}$, участвующий в определении $\widetilde{\mathcal{K}}(x_0)$, не обязан быть замкнутым. В то же время, в силу компактности множества $\tilde{\Lambda}_m(x_0)$ и непрерывности функции максимума по компактному множеству, неравенство (2.11) справедливо для всех $x \in \text{cl } \widetilde{\mathcal{K}}(x_0)$. Здесь и ниже cl означает замыкание множества.

В связи с этим возникает естественный вопрос: останется ли справедливым условие (2.11), если в нем конус $\widetilde{\mathcal{K}}(x_0)$ заменить на конус

$$\{x \in \text{cl}(C + \text{span}\{x_0\}): \langle f'_j(x_0), x \rangle \leq 0 \quad \forall j, \quad f'(x_0)x = 0\}? \quad (2.12)$$

(Заметим, что $\text{cl}(C + \text{span}\{x_0\})$ совпадает с касательным конусом $T_C(x_0)$ к выпуклому конусу C в точке x_0 .) Пример задачи

$$f_0(x) = x_2 - x_1^2 \rightarrow \min, \quad x \in C, \quad x_3 - 1 = 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

где C – замкнутая коническая оболочка множества $\{x: x_2 \geq x_1^2, x_3 = 1\}$ и $x_0 = (0, 0, 1)$, дает на этот вопрос отрицательный ответ (подробнее см. [12]).

В то же время в условиях второго порядка (2.11) можно вместо конуса $\widetilde{\mathcal{K}}(x_0)$ рассматривать конус (2.12), но для этого нужно в (2.11) к квадратичной форме $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x, x]$ добавить некоторое слагаемое. Поясним сказанное на примере следующей более общей задачи (см. [13]):

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad F(x) \in C, \quad (2.13)$$

где $F: X \rightarrow Y = \mathbb{R}^k$. Здесь C – произвольное замкнутое подмножество Y (множество C не обязательно выпуклое). Отметим, что в [13] рассмотрена даже более общая, чем (2.13), задача, а именно задача с дополнительным ограничением $x \in \widetilde{C}$, где $\widetilde{C}$ – замкнутое в конечной топологии (не обязательно выпуклое) подмножество X .

Для формулировки теоремы введем нужные понятия. Пусть $y_0 = F(x_0) \in C$. Напомним, что вектор d называется касательным к множеству C в точке y_0 , если существует такая последовательность $\{\varepsilon_n\} \downarrow 0$, что

$$\text{dist}(y_0 + \varepsilon_n d, C) = o(\varepsilon_n).$$

Здесь $\text{dist}(y, C) = \inf_{\xi \in C} \{\|\xi - y\|\}$ – расстояние от точки y до множества C . Множество касательных векторов к множеству C в точке y_0 образует конус (конус Булигана), который обозначается через $T_C(y_0)$.

Через $N(C; y_0)$ обозначим нормальный конус Мордуховича к множеству C в точке y_0 (см. [13]). Определим внешнее тангенциальное множество второго порядка к множеству C в точке $y_0 \in C$ по направлению $d \in T_C(y_0)$ по формуле

$$O_C^2(y_0, d) = \left\{ w \in Y : \exists \{\varepsilon_n\} \downarrow 0, \text{dist}\left(y_0 + \varepsilon_n d + \frac{1}{2} \varepsilon_n^2 w, C\right) = o(\varepsilon_n^2) \right\}.$$

Линейное подпространство $P \subseteq Y$ будем называть локально инвариантным подпространством относительно C в точке $y_0 \in C$ (ИП), если $\exists \delta > 0: (C \cap B(y_0, \delta)) + (P \cap B(0, \delta)) \subseteq C$, где $B(y, \delta)$ – шар радиуса δ с центром в точке y . Очевидно, нулевое подпространство является ИП. В силу конечномерности Y существует максимальное по включению ИП, которое обозначим через $\mathcal{I}_C$. Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^C(x_0) &= \{x: F'(x_0)x \in T_C(y_0), \langle f'_0(x_0), x \rangle \leq 0\}, \\ \lambda &= (\lambda^0, y^*), \quad \lambda^0 \in \mathbb{R}, \quad y^* \in Y^*, \\ \Lambda(C; x_0) &= \left\{ \lambda: \lambda^0 \geq 0, y^* \in N(C; y_0), \frac{\partial L}{\partial x}(x_0, \lambda) = 0, |\lambda| = 1 \right\}. \end{aligned}$$

(Здесь функция Лагранжа L , естественно, определяется по формуле (1.2)).

Рассмотрим множество тех множителей Лагранжа $\lambda \in \Lambda(C; x_0)$, для которых существует такое (зависящее от λ) подпространство $\Pi \subseteq X$, что

$$\text{codim } \Pi \leq k, \quad F'(x_0)(\Pi) \subseteq \mathcal{I}_C, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x, x] \geq 0 \quad \forall x \in \Pi. \quad (2.14)$$

Множество таких множителей Лагранжа обозначим через $\Lambda_k(C; x_0)$.

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть в задаче (2.13) точка x_0 является локальным минимумом относительно конечной топологии. Тогда множество $\Lambda_k(C; x_0)$ непусто и, более того, для любых $x \in \mathcal{H}^C(x_0)$ и $w \in O_C^2(F(x_0), F'(x_0)x)$ имеет место неравенство

$$\max_{\lambda \in \Lambda} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x, x] - \langle y^*, w \rangle \right) \geq 0, \quad \text{где } \lambda = (\lambda^0, y^*), \quad \Lambda = \Lambda_k(C; x_0). \quad (2.15)$$

Доказательство этой теоремы приведено в [13]. В силу теоремы о минимаксе (см. [13; приложение А]) из (2.15) вытекает справедливость следующего утверждения.

В предположениях теоремы 2.5 для любого выпуклого подмножества $\mathcal{T}(x) \subseteq O_C^2(F(x_0), F'(x_0)x)$ имеет место неравенство

$$\max_{\lambda \in \Lambda} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x, x] - \sigma(y^*, \mathcal{T}(x)) \right) \geq 0, \quad \text{где } \Lambda = \text{conv } \Lambda_k(C; x_0). \quad (2.16)$$

Здесь $\sigma(\cdot, T)$ – опорная функция множества $T \subseteq X$, т. е. $\sigma(y^*, T) = \sup_{y \in T} \langle y^*, y \rangle$ для $y^* \in Y$, а conv – выпуклая оболочка множества.

Обсудим теорему 2.5. Она естественным образом обобщает результаты [14], [15], где дополнительно предполагалось, что либо выполнено условие регулярности Робинсона $0 \in \text{int}(F(x_0) + \text{im } F'(x_0) - C)$, либо $\text{int } C \neq \emptyset$ (подробнее см. [13], [16]).

Пусть $F'(x_0)x \in \mathcal{J}_C$. Тогда $0 \in O_C^2(F(x_0), F'(x_0)x)$ и при $w = 0$ из (2.15) имеем

$$\max_{\lambda \in \Lambda} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x, x] \geq 0.$$

Если множество C выпукло, то $\sigma(y^*, \mathcal{T}(x)) \leq 0$ для всех y^* таких, что $(\lambda^0, y^*) \in \Lambda(C; x_0)$ для некоторого $\lambda^0 \geq 0$ (см. [14; с. 178] или [13; с. 4]). Если же C – выпуклый конечногранный конус (например, при $C = \mathbb{R}_-^l \times \mathbb{R}^k$, где $\mathbb{R}_-^l$ – неположительный ортант, мы приходим к задаче (2.1)), то $\sigma(y^*, \mathcal{T}(x)) = 0$ для всех указанных y^* .

В то же время, если множество C выпуклым не является, то член $\sigma(y^*, \mathcal{T}(h))$ может оказаться строго положительным. Действительно, пусть $C = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1^l \geq y_2^m\}$, где l, m – натуральные числа, причем $m < l \leq 2m$. Возьмем $h = (1, 0) \in T_C(0)$. Тогда множество $O_C^2(0, h)$ содержит некоторый шар B с центром в нуле и, значит, $\sigma(\zeta, B) > 0 \forall \zeta \neq 0$. Пусть $l = 2, m = 1$, $f_0(x) = x_1^2 - x_2$, $Y = \mathbb{R}^2$, $F(x) \equiv x$. Тогда $x_0 = 0$ является решением задачи (2.13), $h \in \mathcal{H}^C(0)$, $y^* = -f'_0(0)$, но $\sigma(-f'_0(0), B) > 0$.

Анормальные задачи. Вернемся к задаче (2.1). Если для отображения F точка x_0 нормальна, то множество $\Lambda(x_0)$ состоит из единственной точки и, значит, теорема 2.1 дает классические необходимые условия второго порядка (при $l = 0$ превращающиеся в (1.4)). Поэтому в нормальном случае их усилить нельзя. Если же для отображения F точка x_0 анормальна, т. е. оператор $F'(x_0)$ не является сюръективным, то теорему 2.1 усилить можно, заменив в ней множество $\Lambda_m(x_0)$ на меньшее. Сформулируем соответствующее утверждение.

Пусть множество $C \subseteq Y$ выпукло и замкнуто. Определим внутреннее тангенциальное множество второго порядка к множеству C в точке $y \in C$ по направлению $d \in T_C(y)$:

$$T_C^2(y, d) = \left\{ w \in Y : \text{dist} \left(y + \varepsilon d + \frac{1}{2} \varepsilon^2 w, C \right) = o(\varepsilon^2), \varepsilon \geq 0 \right\}.$$

Оно выпукло, замкнуто и $T_C^2(y, d) \subseteq O_C^2(y, d)$, хотя в последнем включении равенства может и не быть (см. [14]).

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть в задаче (2.13) точка x_0 является локальным минимумом относительно конечной топологии и $\text{im } F'(x_0) + \mathcal{I}_C \neq Y$ (в этом случае будем называть точку x_0 аномальной). Тогда множество $\Lambda_{k-1}(C; x_0)$ непусто и для любого $x \in \mathcal{H}^C(x_0)$ имеет место неравенство

$$\max_{\lambda \in \Lambda} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x, x] - \sigma(y^*, T_C^2(F(x_0), F'(x_0)x)) \right) \geq 0, \quad (2.17)$$

где $\Lambda = \text{conv } \Lambda_{k-1}(C; x_0)$.

Отметим, что в теореме 2.6 (так же как и в теореме 2.5) вместо максимального по включению ИП $\mathcal{I}_C$ можно брать любое ИП, например, нулевое подпространство.

Доказательство теоремы 2.6, использующее результаты вещественной алгебраической геометрии, приведено в [17], а при $C = \{0\}$ – в [18]. При $C = \mathbb{R}_-^l \times \{0\} \subset \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k$ получаем задачу (2.1) и, значит, из теоремы 2.6 вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.7. Пусть в задаче (2.1) точка x_0 является локальным минимумом относительно конечной топологии и точка x_0 аномальна для отображения F (т.е. $\text{im } F'(x_0) \neq Y$). Тогда множество $\Lambda_{m-1}(x_0)$ непусто и

$$\max_{\lambda \in \Lambda} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x, x] \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}(x_0), \quad \text{где } \Lambda = \Lambda_{m-1}(x_0). \quad (2.18)$$

Заметим, что пример задачи (1.5) показывает, что в теореме 2.6 даже при $k \geq 2$ заменить $(k-1)$ на $(k-2)$, вообще говоря, нельзя.

“Зазор” между необходимыми и достаточными условиями второго порядка. Важнейшей характеристикой любых необходимых условий второго порядка является величина “зазора” между ними и достаточными условиями второго порядка. Представляется естественным считать этот “зазор” минимально возможным (по отношению к необходимым условиям второго порядка), если необходимые условия превращаются в достаточные после сколь угодно малых в метрике C^2 возмущений минимизируемой функции и отображения, задающего ограничения, но не изменяющих их значений и значений их первых производных в исследуемой точке. Выясним, когда для задачи (2.1) указанный “зазор” является минимально возможным применительно к полученным выше необходимым условиям второго порядка.

Пусть X – гильбертово пространство. Предположим вначале, что для отображения F точка x_0 нормальна и в ней выполнены необходимые условия второго порядка (2.4). Тогда в силу достаточных условий второго порядка (см. [7], [5] или теорему 4.1 из раздела 4 ниже) для произвольного $\varepsilon > 0$ для функции $f_{0,\varepsilon}(x) = f_0(x) + \varepsilon|x - x_0|^2$ при ограничениях задачи (2.1) точка x_0 является строгим локальным минимумом (правда, размер окрестности, определяющей локальный минимум, может стремиться к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$).

Предположим теперь, что для отображения F точка x_0 аномальна. Оказывается, что тогда все зависит от того, содержит ли выпуклая оболочка $\text{conv } \Lambda_{m-1}(x_0)$ нуль или нет. Дело в том, что в (2.18) максимум по множеству $\Lambda = \Lambda_{m-1}(x_0)$ совпадает с максимумом по его выпуклой оболочке. Поэтому, если $0 \in \text{conv } \Lambda$, то (2.18) выполняется автоматически. В этом случае условие (2.18) выполняется при любой минимизируемой функции f_0 и, значит, для задачи минимизации (2.1) содержательной информации не несет. Здесь повторяется та же ситуация, что и с правилом множителей Лагранжа в аномальной точке. Поэтому, если $0 \in \text{conv } \Lambda$, то, вообще говоря, не следует ожидать, что при малых в C^2 возмущениях f , f_j , не изменяющих их значений и значений их первых производных в точке x_0 , она станет локальным минимумом в возмущенной задаче. Сказанное подтверждает пример задачи

$$f_0(x) = x_1 \rightarrow \min; \\ x_1 x_2 = 0, \quad x_1 x_3 = 0, \quad l = 0, \quad m = k = 2, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

В ней $0 \in \text{conv } \Lambda_1(0)$, и ни при каких указанных выше возмущениях точка $x_0 = 0$ локальным минимумом не станет (это вытекает из доказываемой ниже теоремы 3.1). Совершенно по-иному обстоит дело, когда $0 \notin \text{conv } \Lambda$.

Для целых $s \geq 0$ через $\mathcal{F}_s^2(x)$ обозначим множество таких $y^* \in Y^*$, $|y^*| = 1$, что $f'(x)^* y^* = 0$ и в X существует подпространство Π , для которого

$$\begin{aligned} \Pi \subseteq \ker f'(x), \quad \text{codim } \Pi \leq s; \\ \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x)[\xi, \xi], y^* \right\rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in \Pi. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Очевидно, если точка x нормальна для отображения f , то $\mathcal{F}_s^2(x) = \emptyset \forall s$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение f называется 2-нормальным в точке x , если $0 \notin \text{conv } \mathcal{F}_{k-1}^2(x)$ (в частности, если $\mathcal{F}_{k-1}^2(x) = \emptyset$). Отображение f называется 2-нормальным, если оно 2-нормально в каждой точке.

Очевидно, $y^* \in \mathcal{F}_{k-1}^2(x) \Leftrightarrow (0, y^*) \in \Lambda_{k-1}(x)$ (здесь $l = 0$, $m = k$). Данное определение является геометрическим и малоприспособлено для проверки 2-нормальности. В [5; гл. 1, § 1.9], приведены достаточные условия 2-нормальности, сформулированные в терминах отображения f . Там же доказано, что если $X = \mathbb{R}^n$ и $n \gg k$ (например, $n > 2(k-2)$, $(n-k-1)(n-k) > 2(k-1)$), то условие 2-нормальности является условием общего положения, а именно, в пространстве $C_s^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, наделенном топологией Уитни (см. [19; гл. 2, § 1]), множество 2-нормальных отображений массивно (т.е. содержит пересечение счетного числа всюду плотных открытых множеств) и, следовательно, само всюду плотно.

ТЕОРЕМА 2.8. Пусть X – гильбертово пространство. Предположим, что отображение f является 2-нормальным в точке x_0 и в ней выполняются необходимые условия второго порядка (2.18). Тогда существует такой вектор $\bar{y} \in Y$, что для любого $\varepsilon > 0$ в возмущенной задаче

$$\begin{aligned} f_{0,\varepsilon}(x) &= f_0(x) + \varepsilon|x - x_0|^2 \rightarrow \min, \\ f_{j,\varepsilon}(x) &= f_j(x) + \varepsilon|x - x_0|^2 \leq 0, \quad j = \overline{1, l}, \quad f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon|x - x_0|^2 \bar{y} = 0 \end{aligned}$$

точка x_0 доставляет строгий локальный минимум.

Доказательство этой теоремы основано на достаточных условиях второго порядка и приведено в [5; гл. 1, § 1.8].

Доказательство теоремы 2.3. Для произвольного банахова пространства оно приведено в [5], а здесь мы ограничимся доказательством для частного случая, предполагая, что X – гильбертово пространство, что существенно облегчает рассмотрения. Впервые теорема 2.3 была приведена в [9] именно для гильбертова случая.

Не теряя общности, будем считать, что $\text{codim } \Pi_i = k \ \forall i$. В каждом ортогональном дополнении $\Pi_i^\perp$ выберем свой ортонормированный базис $e_{i,1}, \dots, e_{i,k}$. Переходя к подпоследовательностям, будем считать, что для каждого натурального $j \in \{1, \dots, k\}$ последовательность $\{e_{i,j}\}$ при $i \rightarrow \infty$ слабо сходится к вектору e_j . Покажем, что подпространство $\Pi = \{x \in X : \langle e_j, x \rangle = 0 \ \forall j \in \{1, \dots, k\}\}$ является искомым. Для этого достаточно, взяв произвольную точку $x_0 \in \Pi$, построить сходящуюся к ней последовательность $\{x_i\}$: $x_i \in \Pi_i \ \forall i$. Сделаем это. Для этого при каждом i рассмотрим задачу минимизации

$$|x - x_0|^2 \rightarrow \min, \quad \langle e_{i,j}, x \rangle = 0, \quad j = \overline{1, k}.$$

Как несложно видеть, каждая из этих задач имеет решение, которое обозначим через x_i . В силу принципа Лагранжа

$$\exists \lambda_{i,j} : x_i - x_0 = \sum_{j=1}^k \lambda_{i,j} e_{i,j} \Rightarrow |x_i - x_0|^2 = \sum_{j=1}^k \lambda_{i,j}^2 \Rightarrow |\lambda_{i,j}| \leq |x_i - x_0| \quad \forall i, j.$$

Поэтому, умножая первое равенство скалярно на $x_i - x_0$, имеем

$$\begin{aligned} |x_i - x_0|^2 &= - \sum_{j=1}^k \lambda_{i,j} \langle e_{i,j}, x_0 \rangle \leq \sum_{j=1}^k |\lambda_{i,j}| |\langle e_{i,j}, x_0 \rangle| \leq |x_i - x_0| \sum_{j=1}^k |\langle e_{i,j}, x_0 \rangle| \\ &\Rightarrow |x_i - x_0| \leq \sum_{j=1}^k |\langle e_{i,j}, x_0 \rangle| \rightarrow \sum_{j=1}^k |\langle e_j, x_0 \rangle| = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

3. Необходимые условия экстремума первого и второго порядка. 2-регулярность

Обобщенная функция Лагранжа $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$. В этом разделе рассмотрим другой подход к исследованию необходимых условий в экстремальных задачах, основанный на обобщенной функции Лагранжа $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ и понятии 2-регулярности. Чтобы прояснить суть дела, ограничимся рассмотрением задачи лишь с ограничениями типа равенств

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad F(x) = 0. \quad (3.1)$$

Здесь f_0 – заданная минимизируемая функция, $F: X \rightarrow Y$ – заданное отображение, а пространства X и Y те же, что и в предыдущем разделе. Пусть x_0 – точка локального (относительно конечной топологии) минимума в рассматриваемой задаче. В дальнейшем будем предполагать, что в окрестности точки x_0 функция f_0 непрерывно дифференцируема, а отображение F трижды непрерывно дифференцируемо относительно конечной топологии (см. раздел 2), причем его третья производная удовлетворяет условию Липшица.

Введем необходимые понятия. Обозначим через π оператор ортогонального проектирования Y на $(\operatorname{im} F'(x_0))^{\perp}$. Рассмотрим непустой ($0 \in H$) конус

$$H = H(x_0) = \{h \in X: F'(x_0)h = 0, F''(x_0)[h, h] \in \operatorname{im} F'(x_0)\}. \quad (3.2)$$

Этот конус чрезвычайно важен для исследования допустимого множества $M = \{x \in X: F(x) = 0\}$. Действительно, как несложно видеть, если вектор h является касательным к множеству M в точке x_0 , то $h \in H(x_0)$. Однако существенно важнее, что при дополнительных, но естественных предположениях справедливо обратное. Чтобы пояснить сказанное, введем важное понятие.

Для произвольного фиксированного $h \in H(x_0)$ определим линейный оператор $G(x_0, h): X \times \ker F'(x_0) \rightarrow Y$ формулой

$$G(x_0, h)(x_1, x_2) = F'(x_0)x_1 + F''(x_0)[h, x_2], \quad x_1 \in X, \quad x_2 \in \ker F'(x_0).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение F называется 2-регулярным в точке x_0 по направлению $h \in H(x_0)$, если оператор $G(x_0, h)$ сюръективен.⁴ Отображение F называется 2-регулярным в точке x_0 , если оно 2-регулярно в ней по любому ненулевому направлению $h \in H(x_0)$.

Понятие 2-регулярного направления было введено в другой (но эквивалентной) форме в [20]. Отметим, что если отображение нормально в некоторой точке, то оно в ней, очевидно, 2-регулярно, но, вообще говоря, не наоборот.

Итак, как было доказано в [20], если отображение F является 2-регулярным в точке x_0 по направлению $h \in H(x_0)$, то вектор h является касательным к множеству M в точке x_0 . (Это утверждение вытекает также из доказываемой ниже теоремы 3.3.) Таким образом, в частности, если отображение F является 2-регулярным в точке x_0 , то конус $H(x_0)$ совпадает с касательным конусом

⁴Термин “направление” введен для образности, и мы считаем его синонимом понятия “вектор”.

к множеству M в точке x_0 . А описание касательного конуса к допустимому множеству в точке минимума дает возможность вывода необходимых условий минимума в экстремальной задаче.

Рассмотрим введенную в [20] функцию $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}: X \times \mathbb{R} \times Y^* \times Y^* \times H(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(x, \lambda_A, h) &= \lambda^0 f_0(x) + \langle y_1^*, F(x) \rangle + \langle y_2^*, F'(x)h \rangle, \\ \lambda_A &= (\lambda^0, y_1^*, y_2^*), \quad \lambda^0 \in \mathbb{R}, \quad y_1^*, y_2^* \in Y^*, \quad h \in H(x_0). \end{aligned}$$

Вектор λ_A и его компоненты также называются множителями Лагранжа. Отметим, что набор множителей Лагранжа λ_A по сравнению с рассматривавшимся ранее классическим набором множителей Лагранжа λ имеет дополнительную компоненту y_2^* , а функция $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ отличается от функции Лагранжа L наличием последнего слагаемого, содержащего y_2^* . Вектор h в функции $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ играет роль параметра.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть x_0 – точка локального относительно конечной топологии минимума в задаче (3.1). Тогда для любого $h \in H(x_0)$ существует λ_A такое, что

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{A}}}{\partial x}(x_0, \lambda_A, h) = 0, \quad (3.3)$$

$$y_1^* \in \text{im } F'(x_0); \quad y_2^* \in (\text{im } F'(x_0))^\perp, \quad \lambda^0 \geq 0, \quad \lambda^0 + |y_2^*| \neq 0. \quad (3.4)$$

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть x_0 – точка локального относительно конечной топологии минимума в задаче (3.1) и в окрестности точки x_0 функция f_0 дважды непрерывно дифференцируема относительно конечной топологии.

Тогда для любого вектора $h \in H(x_0)$ существует множитель Лагранжа λ_A , для которого выполняются соотношения (3.3), (3.4) и

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}_{\mathcal{A}}}{\partial x^2} \left(x_0, \lambda^0, y_1^*, \frac{1}{3} y_2^*, h \right) [h, h] \geq 0. \quad (3.5)$$

Теоремы 3.1 и 3.2 дают необходимые условия первого и второго порядков. Они были получены в [20] для случая, когда X и Y – банаховы пространства, отображения f_0 , F достаточное число раз дифференцируемы и подпространство $\text{im } F'(x_0)$ замкнуто.

2-регулярность. Перед тем как доказывать эти теоремы, обсудим их. Если точка x_0 нормальна, то в силу (3.4) $y_2^* = 0$, и функция $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ превращается в обычную функцию Лагранжа L , множитель Лагранжа $\lambda_A = (\lambda^0, y_1^*, 0)$, после отбрасывания последней нулевой компоненты, превращается в обычный множитель Лагранжа $\lambda = (\lambda^0, y^*)$, а сама теорема 3.1 – в принцип Лагранжа (1.3). (Чтобы увидеть последнее, надо в теореме 3.1 взять $h = 0$.) Теорема 3.2 при этом превращается в (1.4). Таким образом, в предположении нормальности приведенные теоремы эквивалентны классическим необходимым условиям второго порядка.

Если точка x_0 аномальна и, более того, отображение F не является 2-регулярным по направлению $h \in H(x_0)$, то теореме 3.1 удовлетворяет множитель Лагранжа $\lambda_A = (0, y_1^*, y_2^*)$, где y_1^* – произвольный ненулевой вектор из

$(\operatorname{im} G(x_0, h))^\perp$ и $y_2^* = \pi y_1^*$. Значит, в этом случае теорема 3.1 содержательной информации не несет (ведь $\lambda^0 = 0$ и минимизируемый функционал никак не участвует в условиях (3.3), (3.4)) и она является лишь расшифровкой нарушения условия 2-регулярности по направлению h . Теорема 3.2 в этом случае также содержательной информации не несет, так как наряду с множителем Лагранжа λ_A условиям (3.3), (3.4) удовлетворяет также и $(-\lambda_A)$ и, значит, условие (3.5) выполняется автоматически.

Наиболее интересен третий случай, когда точка x_0 аномальна, но F является 2-регулярным по направлению h . Тогда, как легко видеть, $\lambda^0 > 0$ и теорема 3.1 дает содержательную информацию относительно градиента минимизируемой функции, а теорема 3.2 – относительно ее второй производной. При этом из сюръективности линейного оператора $G(x_0, h)$ вытекает, что множители Лагранжа λ_A определяются из условий (3.3), (3.4) с точностью до нормировки единственным образом.

Доказательство теорем 3.1, 3.2. Оно основано на следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $h \in H(x_0)$ и F является 2-регулярным в точке x_0 по направлению h . Тогда существуют $h_2 \in X$ и конечномерное подпространство $\tilde{X} \subseteq X$ такие, что

$$F'(x_0)h_2 + \frac{1}{2}F''(x_0)[h, h] = 0, \quad F''(x_0)[h, h_2] + \frac{1}{6}F'''(x_0)[h, h, h] \in \operatorname{im} F'(x_0), \quad (3.6)$$

$$F(h(\varepsilon)) = 0 \quad \forall \varepsilon, \quad h(\varepsilon) \in \tilde{X} \quad \forall \varepsilon, \quad \text{где } h(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon h + \varepsilon^2 h_2 + O(\varepsilon^3). \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для удобства здесь и ниже будем считать, что $x_0 = 0$, а в обозначении производных в точке x_0 зависимость от нее будем опускать (т. е. $f'_0 = f'_0(x_0)$, $F'' = F''(x_0)$ и т. д.). В силу конечномерности Y , в X существует такое конечномерное подпространство $\tilde{X}$, что сужение линейного оператора $G(x_0, h)$ на $\tilde{X} \times (\ker F' \cap \tilde{X})$ по-прежнему сюръективно. Поэтому, заменяя X на $\tilde{X}$, будем считать само X конечномерным.

В силу условия 2-регулярности по направлению h существуют $h_2, h_3 \in X$ такие, что

$$F'h_2 + \frac{1}{2}F''[h, h] = 0, \quad F'h_3 + F''[h, h_2] + \frac{1}{6}F'''[h, h, h] = 0 \quad (3.8)$$

(подробнее см. [5; § 5, с. 72, 73]). Будем искать $h(\varepsilon)$ при фиксированных ε в виде

$$h(\varepsilon) = \varepsilon h + \varepsilon^2 h_2 + \varepsilon^3 h_3 + \varepsilon^2 r_2 + \varepsilon^3 r_1,$$

где неизвестные $r_1 = r_1(\varepsilon) \in X$ и $r_2 = r_2(\varepsilon) \in \ker F'$ подлежат нахождению.

В окрестности нуля отображение F представимо в виде

$$F(x) = F'x + \frac{1}{2}F''[x, x] + \frac{1}{6}F'''[x, x, x] + R(x)[x, x, x],$$

где $R(x)$ при каждом x – полилинейное отображение, $R(0) = 0$ и $R(\cdot)$ локально липшицево. При фиксированных $\varepsilon \neq 0$ рассмотрим уравнение $F(h(\varepsilon)) = 0$ относительно неизвестных $r_1 \in X$, $r_2 \in \ker F'$. В силу выписанного представления и (3.8), после деления на ε^3 это уравнение принимает вид

$$G(x_0, h)(r_1, r_2) = \Delta(\varepsilon, r_1, r_2), \quad (3.9)$$

где Δ – непрерывное отображение, для которого $\Delta(0, r_1, r_2) \equiv 0$ и отображение $\Delta(\varepsilon, \cdot, \cdot)$ на единичном шаре удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица $k(\varepsilon)$ такой, что $k(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В силу сюръективности (накрываемости) оператора $G(x_0, h)$ к уравнению (3.9) применима теорема о существовании точек совпадения (теорема 1 из [21]). Из нее получаем, что для любого достаточно малого по модулю ε существует такое решение $r_1(\varepsilon)$, $r_2(\varepsilon)$ уравнения (3.9), что $|r_1(\varepsilon)| + |r_2(\varepsilon)| \leq \text{const } |\varepsilon|$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. В силу сказанного выше нам достаточно рассмотреть случай, когда F является 2-регулярным в точке $x_0 = 0$ по направлению h . Сделаем это. По теореме 3.3 векторы h и $(-h)$ являются касательными к множеству $M = \{x: F(x) = 0\}$ в точке $x_0 = 0$. Следовательно, $\langle f'_0, h \rangle = 0$.

Обозначим через $T_H(h)$ касательный конус к множеству $H = H(x_0)$ в точке h . Определим линейный оператор $\tilde{G}(h): X \rightarrow Y$ формулой $\tilde{G}(h)x = F'x + \pi F''[h, x]$. Из сюръективности оператора $G(x_0, h)$ вытекает сюръективность оператора $\tilde{G}(h)$. Определим отображение $g: X \rightarrow Y$ по формуле $g(x) = \tilde{G}(h)x$. Очевидно, что $H = \{x: g(x) = 0\}$ и для отображения g точка h является нормальной. Поэтому по теореме Люстерника (о касательном конусе, см. [1]) $\ker \tilde{G}(h) \subseteq T_H(h)$. Следовательно, для произвольного $x \in \ker \tilde{G}(h)$ существуют такие сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\{\alpha_i\}$ и сходящаяся к нулю последовательность векторов $\{a_i\}$ из X , что $h_i = h + \alpha_i x + \alpha_i a_i \in H$ при всех больших i . Но в силу теоремы 3.3 все векторы, которые принадлежат H и достаточно близки к h , также являются касательными к множеству M . Сказанное относится к векторам h_i при больших i , и, следовательно, $\langle f'_0, h_i \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle f'_0, x \rangle \leq 0 \forall x \in \ker \tilde{G}(h)$. Следовательно, $\langle f'_0, x \rangle = 0 \forall x \in \ker \tilde{G}(h)$, так как если x принадлежит $\ker \tilde{G}(h)$, то и $(-x)$ также принадлежит $\ker \tilde{G}(h)$.

Итак, доказано, что

$$\langle f'_0, x \rangle = 0 \quad \forall x \in X: \quad F'x = 0, \quad \pi F''[h, x] = 0.$$

Отсюда в силу леммы об аннуляторе (см. [1; с. 26]) вытекает существование таких y_1^*, y_2^* , что для $\lambda_A = (1, y_1^*, y_2^*)$ выполняются условия (3.3) и (3.4). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства теоремы 3.1, приведенного в [20], вытекает, что если X – банахово пространство, то в теореме 3.1 достаточно предполагать лишь, что отображение F дважды дифференцируемо по Фреше в точке x_0 . Отметим, что в [5; § 1.13] получены необходимые условия экстремума высших порядков.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Возьмем h_2 , для которого имеют место (3.6) и (3.7). Тогда в силу (3.7)

$$\langle f'_0, h_2 \rangle + \frac{1}{2} f''_0[h, h] \geq 0. \quad (3.10)$$

Возьмем множитель Лагранжа $\lambda_A = (1, y_1^*, y_2^*)$, удовлетворяющий соотношениям (3.3) и (3.4). Из них в силу (3.6) имеем $\langle f'_0, h_2 \rangle = (\langle y_1^*, F''[h, h] \rangle + \langle y_2^*, F'''[h, h, h] \rangle / 3) / 2$. Подставляя это выражение в (3.10), получаем (3.5). Теорема доказана.

Классический принцип Лагранжа в аномальных задачах. Следующее утверждение дает усиление теоремы 3.1.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть x_0 – точка локального относительно конечной топологии минимума в задаче (3.1). Тогда, если отображение F является 2-регулярным по направлению $h \in H(x_0)$, то для него существует такой множитель Лагранжа λ_A , что выполняются условия (3.3), (3.4), а также

$$\langle y_2^*, F''(x_0)[x, x] \rangle = 0 \quad \forall x: F'(x_0)x = 0, F''(x_0)[h, x] \in \text{im } F'(x_0). \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 3.1 вектору h соответствует единственный множитель Лагранжа с единичной первой координатой $\lambda_A = (1, y_1^*, y_2^*)$. Как было показано при доказательстве теоремы 3.1, для произвольного $x \in \ker \tilde{G}(h)$ существуют сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\{\alpha_i\}$ и последовательность векторов $\{a_i\} \subset X$, лежащая в некотором конечномерном подпространстве и сходящаяся к нулю, для которых $h_i = h + \alpha_i x + \alpha_i a_i \in H(x_0) \forall i$ и отображение F является 2-регулярным по направлениям h_i . Поэтому по теореме 3.1 для любых i существуют множители Лагранжа $\lambda_A^i = (1, y_{1,i}^*, y_{2,i}^*)$, для которых имеет место (3.4) и

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_0, \lambda_A^i, h_i) = 0. \quad (3.12)$$

Из сюръективности оператора $\tilde{G}(h)$ следует, что последовательности $\{y_{1,i}^*\}$ и $\{y_{2,i}^*\}$ ограничены. Поэтому, переходя к подпоследовательности, будем считать, что $\{y_{s,i}^*\} \rightarrow \tilde{y}_s^*$, $i \rightarrow \infty$, $s = 1, 2$. Очевидно, что $\tilde{\lambda}_A = (1, \tilde{y}_1^*, \tilde{y}_2^*)$ соответствует вектору h в силу теоремы 3.1. Следовательно, $\tilde{\lambda}_A = \lambda_A \Rightarrow \lambda_A^i \rightarrow \lambda_A$. Поэтому, применяя левую часть (3.12) к вектору $x \in \ker \tilde{G}(h)$, учитывая, что $f'_0 \in (\ker \tilde{G}(h))^\perp$, $y_{2,i}^* \in (\text{im } F'(x_0))^\perp$, и осуществляя предельный переход при $i \rightarrow \infty$, получаем (3.11). Теорема доказана.

Следующий простой пример показывает, что в теореме 3.4 предположение о 2-регулярности отображения F по направлению h существенно.

ПРИМЕР 3.1. При натуральных $1 \leq m < n$ и $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ рассмотрим задачу

$$f_0 = \langle a, x \rangle \rightarrow \min, \quad F(x) = \sum_{i=1}^m x_i^2 + \sum_{i=m+1}^n x_i^4 = 0.$$

Точка $x_0 = 0$ является ее решением, $H(0) = \{h: h_i = 0, i = \overline{1, m}\} \Rightarrow F''(0)h = 0 \ \forall h \in H(0)$. Возьмем произвольное $h \in H(0)$, $h \neq 0$. Для любых множителей Лагранжа λ_A , отвечающих выбранному h в силу (3.3), (3.4), выполняется $\lambda^0 = 0 \Rightarrow y_2^* \neq 0$. В то же время $F''(0) \neq 0$ и, значит, при $y_2^* \neq 0$ условие (3.11) нарушается. Здесь все дело в том, что отображение F не является 2-регулярным ни по одному направлению $h \in H(0)$.

Пусть в задаче (3.1) минимум достигается в аномальной точке x_0 . Тогда в силу принципа Лагранжа (1.3) ей отвечает множитель Лагранжа $\bar{\lambda} = (0, \bar{y}^*)$. В то же время теорема 3.4 дает достаточные условия существования в этой задаче наряду с указанным множителем Лагранжа $\bar{\lambda}$ и так называемого нормального множителя Лагранжа $\lambda = (1, y^*)$. Последнее означает, что справедлив классический принцип Лагранжа

$$\exists y^*: \quad f'_0(x_0) + F'(x_0)^* y^* = 0, \quad (3.13)$$

т. е. именно в том виде, в котором его сформулировал сам Лагранж.

ЛЕММА 3.1. Пусть в задаче (3.1) x_0 является точкой локального относительно конечной топологии минимума и множество направлений $h \in H(x_0)$, по которым отображение F в точке x_0 2-регулярно, непусто. Предположим, что выполняется хотя бы одно из следующих предположений:

а) для любого ненулевого $y_2^* \in (\text{im } F'(x_0))^\perp$ конус нулей квадратичной формы $\langle y_2^*, F''(x_0)[x, x] \rangle$, рассматриваемой на подпространстве $\ker F'(x_0)$, не содержит никакого подпространства, коразмерность которого равна $\text{codim}(\text{im } F'(x_0))$;

б) отображение F является 2-нормальным в точке x_0 .

Тогда в точке x_0 выполняется классический принцип Лагранжа (3.13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполняется а). Возьмем вектор $h \in H(x_0)$, вдоль которого отображение F является 2-регулярным, и пусть множитель Лагранжа $\lambda_A = (\lambda^0, y_1^*, y_2^*)$ отвечает ему в силу теоремы 3.4. Докажем, что $y_2^* = 0$.

Действительно, в силу (3.11) квадратичная форма $\langle y_2^*, F''(x_0)[x, x] \rangle$ обращается в нуль на подпространстве $\ker \tilde{G}(h)$, коразмерность которого относительно содержащего его подпространства $\ker F'(x_0)$ равна $\text{codim}(\text{im } F'(x_0))$. Отсюда в силу а) следует, что $y_2^* = 0$, откуда в силу (3.4) $\lambda^0 > 0$. Поэтому из (3.3) вытекает (3.13).

Пусть имеет место б). Предположим, что (3.13) не выполняется. Тогда $\lambda^0 = 0 \ \forall \lambda \in \Lambda_{k-1}(x_0)$. Поэтому в силу теоремы 2.7 $\forall x \in \ker F'(x_0) \ \exists y^* \in \mathcal{F}_{k-1}^2(x_0): \langle y^*, F''(x_0)[x, x] \rangle \geq 0$. В силу 2-нормальности отображения F и теоремы отделимости для выпуклых множеств $\exists \bar{y} \in (\text{im } F'(x_0))^\perp: \langle y^*, \bar{y} \rangle > 0 \ \forall y^* \in \text{con } \mathcal{F}_{k-1}^2(x_0)$. В силу условия 2-регулярности отображения F по направлению h существует такое конечномерное подпространство $\tilde{X}$, что $\tilde{G}(h)\tilde{X} = Y$. Для малых по модулю ε рассмотрим систему уравнений

$$F'(x_0)x = 0, \quad \pi F''(x_0)[x, x] + \varepsilon \bar{y}|x|^2 = 0 \quad (3.14)$$

относительно неизвестного $x \in \tilde{X}$. При $\varepsilon = 0$ точка $x = h$ является ее решением. Применяя к этой системе уравнений в нормальной точке $x = h$ классическую теорему о неявной функции, получаем, что при малых по модулю

ε уравнение (3.14) имеет решение $h(\varepsilon)$, для которого $h(\varepsilon) \rightarrow h$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Для каждого ε в силу сказанного выше существует $y^*(\varepsilon) \in \mathcal{F}_{k-1}^2(x_0)$ такое, что $\langle y^*(\varepsilon), F''(x_0)[h(\varepsilon), h(\varepsilon)] \rangle \geq 0$. Умножая второе уравнение в (3.14) при $x = h(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, скалярно на $y^*(\varepsilon)$ и учитывая, что $\langle y^*(\varepsilon), \bar{y} \rangle > 0$, получаем противоречие с предыдущим неравенством. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. Пусть точка x_0 аномальна для отображения F и является точкой локального относительно конечной топологии минимума в задаче (3.1). Предположим, что выполняется хотя бы одно из следующих предположений:

с) для любого ненулевого $y^* \in (\text{im } F'(x_0))^\perp$ индекс квадратичной формы $\langle y^*, F''(x_0)[x, x] \rangle$, рассматриваемой на подпространстве $\ker F'(x_0)$, больше чем $\text{codim}(\text{im } F'(x_0)) - 1$, или, что то же самое, множество $\mathcal{F}_{k-1}^2(x_0)$ пусто;

d) существует такой вектор $\bar{x} \in \ker F'(x_0)$, что $\langle y^*, F''(x_0)[\bar{x}, \bar{x}] \rangle < 0$ для всех $y^* \in \mathcal{F}_{k-1}^2(x_0)$.

Тогда в точке x_0 выполняется классический принцип Лагранжа (3.13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что (3.13) не выполняется. Тогда $\lambda^0 = 0 \forall \lambda \in \Lambda_{k-1}(x_0)$. Поскольку точка x_0 аномальна, то в силу теоремы 2.7 множество $\Lambda_{k-1}(x_0)$ непусто. Следовательно, множество $\mathcal{F}_{k-1}^2(x_0)$ также непусто и, значит, предположение с) нарушается. Кроме того, в силу теоремы 2.7 существует $y^* \in \mathcal{F}_{k-1}^2(x_0)$ такое, что $\langle y^*, F''(x_0)[\bar{x}, \bar{x}] \rangle \geq 0$. Значит, предположение d) также нарушается. Полученное противоречие завершает рассуждения. Лемма доказана.

Задачи с незамкнутым образом. Изначально теоремы 3.1 и 3.2 были доказаны в [20], когда X и Y – банаховы пространства, в предположении, что подпространство $\text{im } F'(x_0)$ замкнуто. Позднее в [22] эти теоремы были обобщены на случай, когда подпространство $\text{im } F'(x_0)$ априори замкнутым не является (при этом, естественно, банахово пространство Y бесконечномерно). Приведем некоторые из этих результатов.

Будем предполагать, что отображения f_0 и F дважды непрерывно дифференцируемы по Фреше в окрестности x_0 , причем вторая производная F удовлетворяет условию Липшица. Как показывают простые примеры (см. [22; примеры 3, 4]), если в точке локального минимума x_0 задачи (3.1) подпространство $\text{im } F'(x_0)$ не замкнуто, то в ней принцип Лагранжа (1.3) может нарушаться и, более того, может нарушаться даже необходимое условие первого порядка $f'_0(x_0) \in (\ker F'(x_0))^\perp$. Тем не менее справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть x_0 – локальный минимум задачи (3.1). Тогда для любого

$$h \in X: \quad F'(x_0)h = 0, \quad F''(x_0)[h, h] \in \text{cl}(\text{im } F'(x_0)), \quad (3.15)$$

для которого подпространство $\text{im } G(x_0, h)$ замкнуто, существуют не равные одновременно нулю (зависящие от h) $\lambda^0 \geq 0$, $y^* \in Y^*$, удовлетворяющие условиям

$$\frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial x}(x_0, \lambda^0, y^*) \in (\ker F'(x_0))^\perp, \quad F'(x_0)^* y^* = 0.$$

Если же, кроме того, $\text{im } G(x_0, h) = Y$ (т. е. отображение F является 2-регулярным в точке x_0 по направлению h), то $\lambda^0 > 0$.

Здесь $\mathcal{L}_h$ – семейство функций, зависящих от параметра $h \in X$ и переменных $(x, \lambda^0, y^*) \in X \times \mathbb{R} \times Y^*$, определенных по формуле

$$\mathcal{L}_h(x, \lambda^0, y^*) = \lambda^0 f_0(x) + \langle y^*, F'(x)h \rangle.$$

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть x_0 – локальный минимум задачи (3.1), образ $\text{im } F'(x_0)$ всюду плотен в Y и для некоторого $h \in \ker F'(x_0)$ имеет место $\text{im } G(x_0, h) = Y$.

Тогда существует нормальный множитель Лагранжа $\lambda = (1, y^*)$, $y^* \in Y^*$, для которого выполняется классический принцип Лагранжа (3.13) и, кроме того,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[h, h] \geq 0.$$

Доказательства обеих теорем приведены в [22]. Эти результаты обобщены в [23] на задачу (2.13), где C – произвольное выпуклое замкнутое подмножество банахова пространства Y . При этом в необходимых условиях второго порядка для задачи (2.13), так же как и в (2.16), появляется “сигма-член”.

В настоящее время взаимосвязь двух изложенных подходов к исследованию необходимых условий экстремума для аномальных задач: индексного и основанного на обобщенной функции Лагранжа $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ и понятии 2-регулярности – изучена слабо. По существу, лишь в силу недавних результатов, полученных в [24], если в точке x_0 отображение F не имеет 2-регулярных направлений, то для задачи (3.1) выполняются условия

$$\max_{\lambda \in \Lambda} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x, x] \geq 0 \quad \forall x \in \ker F'(x_0),$$

где $\Lambda = \{\lambda \in \Lambda_{k-1}(x_0) : \lambda^0 = 0\}$,

даже более сильные, чем необходимые условия (2.4).

4. Достаточные условия экстремума второго порядка

Достаточные условия в терминах функции Лагранжа. Будем рассматривать задачу (2.1). Два предыдущих раздела посвящены необходимым условиям второго порядка. Займемся достаточными условиями второго порядка, предполагая, что X, Y – нормированные пространства. Многое зависит от того, являются пространства X и Y конечномерными или нет. Будем предполагать, что все функции f_j и отображение f дважды непрерывно дифференцируемы по Фреше в окрестности точки x_0 . Если оба пространства X и Y конечномерны, то для задачи (2.1) достаточные условия второго порядка в точке x_0 известны и заключаются в том, что

$$\Lambda = \Lambda(x_0) \neq \emptyset, \quad \max_{\lambda \in \Lambda} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x, x] > 0 \quad \forall x \in \mathcal{X}(x_0) : x \neq 0. \quad (4.1)$$

Пусть пространство X бесконечномерно, а Y конечномерно. Тогда (4.1) дает лишь достаточные условия локального минимума относительно конечной топологии, однако не является достаточным условием локального минимума относительно истинной топологии пространства X , даже в отсутствие ограничений

(пример: $X = l_2$, $f_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (i^{-1}x_i^2 - x_i^4)$, $x_0 = 0$). Далее будем рассматривать лишь локальный минимум относительно истинной топологии пространства X .

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть пространство Y конечномерно, множество $\Lambda = \Lambda(x_0)$ непусто и существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x, x] \geq \varepsilon \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{K}(x_0). \quad (4.2)$$

Тогда точка x_0 является строгим локальным минимумом в задаче (2.1).

Эта теорема доказана в [5] (см. § 1.7, теорема 7.1).

Условие (4.2) приводит к следующей проблеме, а именно, пусть пространство X полно и, для простоты, ограничения типа неравенств отсутствуют, а точка x_0 нормальна. Тогда (4.2) принимает вид $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x, x] \geq \varepsilon \|x\|^2$ $\forall x \in \ker f'(x_0)$, откуда вытекает (см. [1; п. 7.2.2, с. 307, 308]), что подпространство $\ker f'(x_0)$ гомеоморфно гильбертову пространству. А это существенный недостаток достаточного условия (4.2), которое по существу применимо лишь в гильбертовых пространствах, тогда как в приложениях к бесконечномерным задачам чаще всего ни X , ни $\ker f'(x_0)$ гильбертовым не является. Например, в нелинейной задаче оптимального управления минимизация осуществляется на банаховом пространстве измеримых существенно ограниченных функций $L_\infty[t_1, t_2]$.

Если пространство Y бесконечномерно, то, как доказано ниже, теорема 4.1 справедлива в предположении, что пространства X, Y полны, а подпространство $\text{im } f'(x_0)$ замкнуто. Следующий пример показывает, что при этом предположение замкнутости $\text{im } f'(x_0)$ опустить нельзя.

ПРИМЕР 4.1. Пусть $X = Y = l_2$ – гильбертовы пространства. Определим линейный компактный оператор $A: l_2 \rightarrow l_2$ и квадратичное отображение $Q: l_2 \rightarrow l_2$ по формулам: $Ax = (x_1, x_2/2, \dots, x_j/j, \dots)$ и $Q(x) = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_j^2, \dots)$. Рассмотрим задачу

$$f_0(x) = -|x|^2 \rightarrow \min, \quad f(x) = Ax - Q(x) = 0.$$

В этой задаче при $x_0 = 0$ условие (4.2) выполнено, так как $(1, 0) \in \Lambda(0)$, и по построению $\ker f'(x_0) = \ker A = \{0\}$, однако $x_0 = 0$ локальным минимумом не является.

Действительно, обозначив через $x_i \in l_2$ последовательность, у которой на i -м месте стоит i^{-1} , а на остальных нули, имеем $f(x_i) = 0$, $f_0(x_i) < 0 \forall i$, $x_i \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$. Здесь дело в том, что в этом примере подпространство $\text{im } f'(x_0)$ не замкнуто.

Задачи с бесконечномерным образом. Для бесконечномерных Y предположение замкнутости $\text{im } f'(x_0)$ весьма обременительно. Наша первая цель – привести достаточные условия второго порядка, свободные от этого предположения и от предположения о том, что подпространство $\ker f'(x_0)$ гомеоморфно гильбертову пространству.

Воспользуемся конструкцией, предложенной в [25]. Зафиксируем точку $x_0 \in X$. Пусть дана последовательность подмножеств $\{D_i\}$ из X такая, что $x_0 \in D_i \forall i$ и $\{D_i\}$ сходится к x_0 в том смысле, что любая последовательность точек $\{x_i\}$, лежащих в D_i , сходится к x_0 . В качестве D_i можно, например, взять шары $\{x: \|x - x_0\|_1 \leq \rho_i\}$, где $\rho_i \rightarrow 0+$, а $\|\cdot\|_1$ – какая-нибудь норма в X , которой подчинена исходная норма.

Будем предполагать, что отображение f является тейлоровским второго порядка в точке x_0 относительно $\{D_i\}$, т.е. существуют непрерывный линейный оператор $A: X \rightarrow Y$, непрерывное билинейное симметричное отображение $B: X \times X \rightarrow Y$ и числовая последовательность $\{\alpha_i\} \rightarrow 0+$ такие, что для каждого i справедливо представление

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \frac{1}{2}B[x - x_0, x - x_0] + \Delta(x - x_0),$$

$$\|\Delta(x - x_0)\| \leq \alpha_i \|x - x_0\|^2 \quad \forall x \in D_i.$$

При этом нормы в пространствах X и Y для удобства обозначаются одинаково: через $\|\cdot\|$. Линейный оператор A , называемый относительным первым дифференциалом, будем обозначать через $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$, а билинейную форму B , называемую относительным вторым дифференциалом, – через $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0)$. Отметим, что так введенные относительные дифференциалы A, B , вообще говоря, определены неоднозначно (все зависит от выбора последовательности множеств $\{D_i\}$).

Функции f_j также будем предполагать тейлоровскими второго порядка в точке x_0 относительно $\{D_i\}$ и их относительные дифференциалы будем обозначать аналогично. Эти же обозначения используются для частных производных функции Лагранжа по переменной x . Отметим, что даже в конечномерном случае и при $D_i = \{x: \|x - x_0\| \leq i^{-1}\}$ функция, являющаяся тейлоровской второго порядка в заданной точке, не обязана быть даже непрерывной в ее окрестности.

Далее для удобства снова будем считать, что $f_j(x_0) = 0 \forall j \geq 1$. Положим

$$\mathcal{K}_1(x_0) = \left\{ x \in X: \left\langle \frac{\partial f_j}{\partial x}(x_0), x \right\rangle \leq 0, j = \overline{0, l} \right\}.$$

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть множество $\Lambda = \Lambda(x_0)$ непусто и существуют $\gamma, \varepsilon > 0$ такие, что

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x, x] + \gamma \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)x \right\|^2 \geq \varepsilon \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{K}_1(x_0). \quad (4.3)$$

Тогда для некоторого i_0 точка x_0 является строгим минимумом в задаче (2.1) на множестве D_{i_0} , т.е.

$$f_0(x) > f_0(x_0) \forall x \neq x_0: x \in D_{i_0}, f_j(x) \leq 0, j = \overline{1, l}, f(x) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, для удобства, $x_0 = 0$, $f_0(x_0) = 0$. По лемме Хоффмана [3]⁵

$$\exists c_1 > 0: \text{dist}(x, \mathcal{K}_1(x_0)) \leq c_1 \sum_{j=0}^l \max\left(\left\langle \frac{\partial f_j}{\partial x}(x_0), x \right\rangle, 0\right) \quad \forall x. \quad (4.4)$$

Доказательство теоремы проведем от противного, т. е. предположим, что существует последовательность $\{x_i\}$, для которой

$$f(x_i) = 0, \quad f_j(x_i) \leq 0, \quad j = \overline{0, l}, \quad x_i \in D_i, \quad x_i \neq 0 \quad \forall i. \quad (4.5)$$

Поскольку $\{x_i\}$ сходится к нулю, то из представления для f и f_j имеем:

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)x_i \right\| = o(\|x_i\|), \quad \left\langle \frac{\partial f_j}{\partial x}(x_0), x_i \right\rangle \leq o(\|x_i\|), \quad j = \overline{0, l}. \quad (4.6)$$

Следовательно, в силу (4.4) существует такая последовательность $\{\tilde{x}_i\}$, что $x_i = \tilde{x}_i + o(\|\tilde{x}_i\|)$, $\tilde{x}_i \neq 0$, $\tilde{x}_i \in \mathcal{K}_1(x_0) \quad \forall i$, где $o(\|\tilde{x}_i\|)/\|\tilde{x}_i\| \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$. В силу (4.3) $\forall i \exists \lambda_i = (\lambda_i^0, \dots, \lambda_i^l, y_i^*) \in \Lambda$:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda_i)[\tilde{x}_i, \tilde{x}_i] + \gamma \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)\tilde{x}_i \right\|^2 \geq \frac{\varepsilon}{2} \|\tilde{x}_i\|^2. \quad (4.7)$$

Имеем

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(1)}{\geq} \lambda_i^0 f_0(x_i) \stackrel{(2)}{\geq} L(x_i, \lambda_i) \stackrel{(3)}{=} L(x_0, \lambda_i) + \frac{\partial L}{\partial x}(x_0, \lambda_i)x_i \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda_i)[x_i, x_i] + o(\|x_i\|^2) \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda_i)[\tilde{x}_i, \tilde{x}_i] + o(\|\tilde{x}_i\|^2) \\ &\stackrel{(5)}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda_i)[\tilde{x}_i, \tilde{x}_i] + \gamma \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)\tilde{x}_i \right\|^2 \right) + o(\|\tilde{x}_i\|^2) \stackrel{(6)}{\geq} \frac{\varepsilon}{4} \|\tilde{x}_i\|^2 + o(\|\tilde{x}_i\|^2). \end{aligned}$$

Здесь неравенства $\stackrel{(1)}{\geq}$ и $\stackrel{(2)}{\geq}$ вытекают из предположения (4.5) и неотрицательности всех λ_i^j , равенство $\stackrel{(3)}{=}$ вытекает из представления для f , f_j и ограниченности множества Λ , $\stackrel{(4)}{=}$ следует из того, что $\lambda_i \in \Lambda$, и построения последовательности $\{\tilde{x}_i\}$, $\stackrel{(5)}{=}$ вытекает из того, что в силу (4.6) $\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)x_i \right\|^2 = o(\|x_i\|^2)$, а неравенство $\stackrel{(6)}{\geq}$ — из (4.7). Таким образом, имеем $0 \geq \varepsilon \|x_i\|^2/4 + o(\|x_i\|^2)$. Полученное противоречие доказывает теорему.

ЗАМЕЧАНИЕ. На самом деле, доказано большее. А именно, $f_0(x) \geq f_0(x_0) + \varepsilon \|x - x_0\|^2/4$ для всех x , лежащих в D_{i_0} и удовлетворяющих ограничениям задачи (2.1).

⁵Хотя лемма Хоффмана обычно формулируется в предположении, что X полно, тем не менее из доказательства, приведенного в [3], непосредственно вытекает, что для рассматриваемого конечногранного конуса $\mathcal{K}_1(x_0)$ она справедлива и в произвольном нормированном пространстве X .

Обсудим доказанную теорему. Случай $D_i = \{x: \|x - x_0\| \leq i^{-1}\}$ соответствует локальному минимуму задачи (2.1). Сравним достаточные условия (4.2) и (4.3). Очевидно, из (4.3) всегда вытекает (4.2). Оказывается, что при дополнительном предположении, что пространства X, Y банаховы, а подпространство $\text{im } f'(x_0)$ замкнуто, из (4.2) следует (4.3). Это вытекает из следующего обобщения теоремы Финслера [26].

Пусть задан линейный непрерывный оператор $A: X \rightarrow Y$ и выполняется хотя бы одно из двух предположений: либо Y конечномерно, либо пространства X, Y полны и $\text{im } A$ замкнут. Пусть дано семейство билинейных симметричных отображений $B_\sigma(\cdot, \cdot): X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, зависящее от параметра σ , принимающего значения в заданном множестве Σ . Будем предполагать, что семейство B_σ ограничено равномерно по σ , т.е. $\exists c_2 > 0: |B_\sigma(x_1, x_2)| \leq c_2 \|x_1\| \|x_2\| \forall \sigma \in \Sigma$. Положим $B_\sigma(x) = B_\sigma(x, x)$. Рассмотрим также конечногранный конус $K = \{x \in X: \langle a_j, x \rangle \leq 0, j = \overline{1, k}\}$, где $a_j \in X^*$ заданы.

ЛЕММА 4.1. *Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ имеет место*

$$\sup_{\sigma \in \Sigma} B_\sigma(x) \geq \varepsilon \|x\|^2 \quad \forall x \in \ker A \cap K.$$

Тогда

$$\exists \gamma \geq 0: \quad \sup_{\sigma \in \Sigma} B_\sigma(x) + \gamma \|Ax\|^2 \geq \frac{\varepsilon}{4} \|x\|^2 \quad \forall x \in K.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим конус $\tilde{K} = \{x \in K: Ax = 0\}$. Оценивая расстояние от точки $x \in K$ до конуса $\tilde{K}$, в силу леммы Хоффмана получаем существование такого $c_3 > 0$, что произвольный вектор $x \in K$ можно представить в виде $x = a + b$, где $a \in \tilde{K}$, $Aa = 0$, $c_3 \|b\| \leq \|Ab\|$.

Возьмем произвольный $x \in K$. Используя это представление, при $\gamma > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \sup_{\sigma \in \Sigma} B_\sigma(x) + \gamma \|Ax\|^2 &= \sup_{\sigma \in \Sigma} B_\sigma(a + b, a + b) + \gamma \|Ab\|^2 \\ &\geq \sup_{\sigma \in \Sigma} B_\sigma(a) - 2c_2 \|a\| \|b\| - c_2 \|b\|^2 + \gamma c_3^2 \|b\|^2 \\ &\geq \varepsilon \|a\|^2 - 2c_2 \|a\| \|b\| + (\gamma c_3^2 - c_2) \|b\|^2. \end{aligned}$$

Выберем $\gamma > 0$ так, чтобы выражение, стоящее в правой части полученного неравенства, оценивалось снизу величиной $\varepsilon(\|a\|^2 + \|b\|^2)/2$. Учитывая, что $\|a\|^2 + \|b\|^2 \geq \|x\|^2/2$, завершаем доказательство леммы.

Из этой леммы вытекает, что если либо пространство Y конечномерно, либо пространства X, Y банаховы и подпространство $\text{im } f'(x_0)$ замкнуто, то достаточные условия (4.2) и (4.3) эквивалентны. В то же время, как показывает приведенный выше пример, без предположения замкнутости $\text{im } f'(x_0)$ соотношение (4.2) достаточным условием локального минимума не является. Приведем пример, в котором подпространство $\text{im } f'(x_0)$ замкнутым не является, но предположения теоремы 4.2 выполняются. Рассмотрим задачу

$$f_0(x) = |x|^2 - |\alpha Ax|^2 + r(x) \rightarrow \min, \quad f(x) = Ax - Q(x) + R(x) = 0.$$

Здесь $X = Y = l_2$, линейный оператор A и квадратичное отображение Q определены в примере 4.1, α – произвольная константа, а r, R – произвольные гладкие отображения, у которых первые две производные в нуле равны нулю. Очевидно, что в точке $x_0 = 0$ выполнены все предположения теоремы 4.2 и, значит, $x_0 = 0$ является локальным минимумом, хотя $\text{im } f'(x_0) = \text{im } A$ не замкнуто.

Нелинейные задачи оптимального управления естественно ставить как задачи минимизации в пространстве $X = L_\infty = L_\infty[t_1, t_2]$. А в нем (4.2) не выполняется. Если же L_∞ наделить нормой из L_2 , то оно перестанет быть полным и теорему 4.1 снова применять нельзя. Теорема же 4.2 не предполагает полноты X и поэтому применима.

Поясним сказанное, рассмотрев задачу Лагранжа

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad t \in [t_1, t_2], \quad \int_{t_1}^{t_2} f_0(x, u, t) dt \rightarrow \min \quad (4.8)$$

с фиксированным левым концом $x(t_1)$ и ограничениями типа равенств и неравенств для правого конца $x(t_2)$. В качестве X возьмем евклидово пространство измеримых ограниченных функций $u(\cdot)$, определенных на заданном отрезке $[t_1, t_2]$, наделив X скалярным произведением из $L_2[t_1, t_2]$, порождающим норму $\|\cdot\|$, а в качестве Y – конечномерное пространство, размерность которого определяется количеством концевых ограничений. В качестве D_i возьмем шары $D_i = \{u: \|u - u_*\|_{L_\infty} \leq i^{-1}\}$, где u_* – исследуемое на минимум допустимое управление. Непосредственно проверяется, что если вектор-функция f и функция f_0 дважды непрерывно дифференцируемы по конечномерным переменным (x, u) , то теорема 4.2 применима и дает достаточные условия слабого локального минимума в задаче (4.8).

Достаточные условия для аномальных задач. Достаточные условия из теорем 4.1, 4.2, сформулированные в терминах классической функции Лагранжа L , справедливы без априорных предположений регулярности. Однако, если точка x_0 аномальна, то эти достаточные условия не могут выполняться для целых классов задач. Поясним сказанное, при этом для простоты ограничившись рассмотрением исследованной в предыдущем разделе задачи (3.1) и предполагая, что пространство X является банаховым, пространство Y – конечномерным, функция f_0 дважды, а отображение F трижды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки x_0 , причем третья производная F удовлетворяет в этой окрестности условию Липшица.

Предположим, что в аномальной точке x_0 , являющейся решением задачи (3.1), классическое правило множителей Лагранжа (3.13) не выполняется, т.е. $\nexists y^* \in Y^* \ f'_0(x_0) + F'(x_0)^* y^* = 0$, а также конус $H(x_0)$ является ненулевым. (Если X конечномерно и x_0 не является изолированной точкой множества $\{x: F(x) = 0\}$, то этот конус ненулевой.) Тогда предположения теорем 4.1, 4.2 выполняться не могут. Это вытекает из того, что в описанном случае

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x, x] = 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda(x_0), \quad \forall x \in H(x_0) \subseteq \text{Ker } F'(x_0), \quad H(x_0) \neq \{0\}.$$

Приведем в терминах обобщенной функции Лагранжа $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ достаточные условия экстремума второго порядка, которые остаются содержательными и в описанной выше ситуации, но выполняются лишь при следующих условиях сильной 2-регулярности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение F называется сильно 2-регулярным в точке x_0 , если существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$\tilde{G}(h)(B_X) \supseteq \varepsilon B_Y \quad \forall h \in X: \|h\| = 1, \quad \|\tilde{G}(h)h\| \leq \varepsilon.$$

Здесь B_X и B_Y – единичные шары в пространствах X и Y соответственно, $\tilde{G}(h)x = F'(x_0)x + \pi F''(x_0)[h, x]$, а π – оператор ортогонального проектирования Y на $(\text{im } F'(x_0))^\perp$.

Отметим, что если X конечномерно, то сильная 2-регулярность эквивалентна 2-регулярности. В бесконечномерных пространствах это уже не так, а критерии сильной 2-регулярности в гильбертовом пространстве приведены в [27], [28].

ТЕОРЕМА 4.3. *Предположим, что отображение F является сильно 2-регулярным в точке x_0 . Пусть существует такое $\delta > 0$, что для любого $h \in H(x_0) \setminus \{0\}$ найдутся множители Лагранжа $\lambda_A = (\lambda^0, y_1^*, y_2^*)$: $|\lambda_A| = 1$, удовлетворяющие (3.3), (3.4), для которых*

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}_{\mathcal{A}}}{\partial x^2} \left(x_0, \lambda^0, y_1^*, \frac{1}{3} y_2^*, h \right) [h, h] > \delta \|h\|^2. \quad (4.9)$$

Тогда точка x_0 является строгим локальным минимумом в задаче (3.1).

Эта теорема доказана в [5; гл. 1, § 1.14].

Из теоремы 4.3 вытекает, что если отображение F сильно 2-регулярно в точке x_0 и $H(x_0) = \{0\}$, то x_0 является строгим локальным минимумом в задаче (3.1). Кроме того, если пространство X конечномерно, то в (4.9) достаточно взять $\delta = 0$. Приведем пример, в котором предположения теоремы 4.3 выполняются, а предположения теорем 4.1 и 4.2 – нет.

ПРИМЕР 4.2. Пусть $k = 2$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n = X$,

$$f_0(x) = x_1 + \sum_{i=2}^n x_i^2 \rightarrow \min;$$

$$F_1(x) = x_1(x_1 - 2x_n) = 0, \quad F_2(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \sum_{i=2}^{n-1} x_i^2 - x_n^2 = 0.$$

Здесь $x_0 = 0$ удовлетворяет правилу множителей Лагранжа, однако любой множитель Лагранжа $\lambda \in \Lambda(0)$ имеет вид $\lambda = (0, y^*)$. Поэтому $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[h, h] = 0 \quad \forall h \in H(x_0) = \{x: F(x) = 0\}$, $\forall \lambda \in \Lambda(0)$ и, значит, (4.2) нарушается.

С другой стороны, $h_1 = 0$ для любого $h \in H(0)$ и отображение F является 2-регулярным в нуле. Поэтому для любого λ_A , удовлетворяющего (3.3), (3.4),

имеем:

$$\lambda^0 > 0, y_1^* = 0 \Rightarrow \forall h \in H(0) \setminus \{0\} \exists \lambda_A = (\lambda^0, 0, y_2^*):$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}_{\mathcal{A}}}{\partial x^2} \left(0, \lambda^0, 0, \frac{1}{3} y_2^*, h \right) [h, h] = \lambda^0 \sum_{i=2}^n h_i^2 > 0.$$

В отличие от теорем 4.1, 4.2, в теореме 4.3 предполагается сильная 2-регулярность отображения F . Следующий пример показывает существенность этого предположения.

ПРИМЕР 4.3. Пусть $k = 1$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 = X$. В задаче

$$f_0(x) = -|x|^2 \rightarrow \min, \quad F(x) = x_1^2 + x_2^3 = 0$$

точка $x_0 = 0$, очевидно, минимумом не является. В то же время $H(x_0) = \{h = (h_1, h_2): h_1 = 0\}$ и, значит, (4.9) выполняется при $\lambda_A = (0, 0, 1)$, $\delta = 1$. Здесь все дело в том, что отображение F не является 2-регулярным в нуле.

Достаточные условия высших порядков для задачи (2.1) получены в [5; гл. 1, § 1.14], а достаточные условия второго порядка для задачи (2.13), где C – выпуклое замкнутое множество, получены в [15].

5. Квадратичные отображения и квадратичные задачи

Знакоопределенность квадратичной формы на пересечении квадрик. Типичный пример экстремальной задачи, в которой экстремум всегда достигается в аномальной точке, дает следующая классическая алгебраическая проблема. Даны $(k+1)$ квадратных симметричных $(n \times n)$ -матриц Q_i , $i = \overline{0, k}$, определяющих на $X = \mathbb{R}^n$ квадратичные формы $q_i: q_i(x) = \langle Q_i x, x \rangle$. Требуется получить условия, при которых

$$q_0(x) \geq 0 \quad \forall x: q_1(x) = q_2(x) = \dots = q_k(x) = 0. \quad (5.1)$$

Здесь n, k – заданные натуральные числа. Эта задача представляет интерес как сама по себе, так и в применении к прикладным проблемам (см. [29]–[31] и т. д.) Очевидно, что (5.1) равносильно тому, что в задаче минимизации

$$q_0(x) \rightarrow \min, \quad q_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, k}, \quad (5.2)$$

точка $x_0 = 0$ является минимумом. Однако эта точка автоматически аномальна.

Применяя к задаче (5.2) необходимые условия второго порядка (2.18) из теоремы 2.7, получаем, что если выполняется (5.1), то

$$\Lambda_{k-1} \neq \{\emptyset\}, \quad \max_{\lambda \in \Lambda_{k-1}} \left(\lambda^0 q_0(x) + \sum_{j=1}^k y_j^* q_j(x) \right) \geq 0 \quad \forall x \in X. \quad (5.3)$$

Здесь

$$\Lambda_s = \left\{ \lambda = (\lambda^0, y^*): \lambda^0 \geq 0, \text{ ind} \left(\lambda^0 q_0 + \sum_{j=1}^k y_j^* q_j \right) \leq s, |\lambda| = 1 \right\}.$$

Однако среди векторов $\lambda \in \Lambda_{k-1}$ могут оказаться и те, для которых $\lambda^0 = 0$. А это приводит к тому, что условия (5.3) перестают зависеть от формы q_0 , что может сделать их неинформативными. Так обязательно произойдет, если $0 \in \text{con} \Lambda_{k-1}$, так как в этом случае, очевидно, (5.3) выполняется автоматически. Вот соответствующий пример: $k = 2$, $q_1(x) = x_1 x_2$, а формы q_0 и q_2 произвольны. Очевидно, $\text{con} \Lambda_1$ содержит отрезок $(0, \lambda_1, 0)$, $|\lambda_1| \leq 1$ и, значит, (5.3) выполняется для любых q_0, q_2 и, в частности, для тех, для которых (5.1) нарушается (например, для $q_0(x) = -|x|^2$, $q_2 = 0$).

Наша ближайшая цель – найти условия, гарантирующие, что если выполняется (5.1), то в (5.3) можно ограничиться лишь теми λ , для которых $\lambda^0 > 0$. Следующий очевидный пример показывает, что без дополнительных условий это не так и, более того, может оказаться, что $\lambda^0 = 0 \forall \lambda \in \Lambda_{k-1}$. Действительно, пусть $k = 1$, $n = 2$, $q_0(x) = x_1 x_2$, $q_1(x) = x_1^2$. Очевидно, $q_0(x) = 0 \forall x$: $q_1(x) = 0$, однако $\lambda^0 = 0 \forall \lambda \in \Lambda_0$.

Введем нужные в дальнейшем обозначения. Определим билинейное отображение $\tilde{Q}: X \times X \rightarrow Y = \mathbb{R}^k$, которое произвольным $x_1, x_2 \in X$ ставит в соответствие вектор $y = \tilde{Q}[x_1, x_2]$, i -я координата которого равна $y_i = \langle Q_i x_1, x_2 \rangle$. В силу симметричности матриц Q_i так определенное билинейное отображение $\tilde{Q}$ также симметрично. Положим $Q(x) = \tilde{Q}[x, x]$. Отображение $Q: X \rightarrow Y$ называется квадратичным. Для фиксированного $h \in X$ обозначим через Qh линейный оператор, действующий из X в Y по формуле $Qh(x) = \tilde{Q}[h, x]$. Для $y^* \in Y^*$ положим

$$y^* Q = \sum_{i=1}^k y_i^* Q_i, \quad y^* Q(x) = \sum_{i=1}^k y_i^* q_i(x).$$

Пусть в Y задан выпуклый замкнутый конус C . Рассмотрим конус

$$K = \{x \in X: Q(x) \in C, x \neq 0\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Квадратичное отображение Q называется регулярным относительно конуса C в точке $h \in K$, если

$$\text{im } Qh - C = Y.$$

Квадратичное отображение Q называется регулярным относительно конуса C , если оно регулярно в каждой точке $h \in K$. Для $C = \{0\}$ точки конуса K называются нетривиальными нулями квадратичного отображения Q . При этом регулярность Q в точке h : $Q(h) = 0$ означает линейную независимость векторов $Q_1 h, \dots, Q_k h$, и эту точку h называют регулярным нулем, а регулярность Q означает регулярность всех его нетривиальных нулей (если они существуют).

Квадратичное отображение Q называется сюръективным, если $Q(X) = Y$. Если у Q существует регулярный нуль h , то Q сюръективно. Действительно, $Q(h) = 0$ и векторы $Q_1 h, \dots, Q_k h$ линейно независимы. Поэтому из классической теоремы об обратной функции, примененной к уравнению $Q(x) = y$ в точке $x = h$, вытекает, что при отображении Q образ единичной окрестности

точки h содержит некоторую окрестность нуля, откуда в силу положительной однородности отображения Q следует его сюръективность.

Для $y \in (Q(X) - C)$ через $\omega(y)$ обозначим инфимум в задаче

$$q_0(x) \rightarrow \inf, \quad Q(x) - y \in C, \quad (5.4)$$

и положим $\omega(y) = +\infty \forall y \notin (Q(X) - C)$. Так определенная функция ω положительно однородна и если

$$q_0(x) \geq 0 \quad \forall x: Q(x) \in C, \quad (5.5)$$

то $\omega(0) = 0$. Обозначим через $S = \{y \in Y: |y| = 1\}$ единичную сферу.

ЛЕММА 5.1. Пусть выполняется (5.5) и, кроме того, если $h \in K$, $q_0(h) = 0$, то Q регулярно относительно конуса C в точке h . Тогда функция ω ограничена снизу на S , т. е. существует $d > 0$ такое, что $\omega(y) \geq -d \forall y \in S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда существуют такие последовательности $\{x_i\} \subset X$, $\{\tilde{\eta}_i\} \subset C$, что $Q(x_i) - \tilde{\eta}_i = y_i \in S \forall i$, $q_0(x_i) \rightarrow -\infty \Rightarrow |x_i| \rightarrow \infty$. Положим $h_i = x_i|x_i|^{-1}$, $\eta_i = \tilde{\eta}_i|x_i|^{-2}$. Поскольку $|h_i| = 1$, то, переходя к подпоследовательности, будем считать, что $h_i \rightarrow h$, откуда $\eta_i \rightarrow \eta \in C$ так как $|Q(h_i) - \eta_i| = |x_i|^{-2} \rightarrow 0$. Очевидно, $q_0(h) \leq 0$, а также $Q(h) = \eta \Rightarrow h \in K$. Следовательно, $q_0(h) = 0$ и поэтому квадратичное отображение Q регулярно относительно конуса C в точке h и, значит, оно удовлетворяет условию Робинсона. Поэтому по теореме Робинсона [16] в окрестности точки h справедлива следующая оценка расстояния до множества K : $\text{dist}(h_i, K) \leq \text{const} \times \text{dist}(Q(h_i), C) \leq \text{const} |y_i| |x_i|^{-2} = \text{const} |x_i|^{-2}$, поскольку $Q(h_i) - y_i |x_i|^{-2} = \eta_i \in C$. Напомним, что dist – расстояние от точки до множества, а const здесь и далее означает некоторые константы, конкретный вид которых нам не важен. Значит, для больших номеров i существуют такие $\tilde{h}_i \in K$, ξ_i , что $h_i = \tilde{h}_i + \xi_i$, $|\xi_i| \leq \text{const} |x_i|^{-2}$. Тогда

$$q_0(h_i) = q_0(\tilde{h}_i) + q_0(\xi_i) + 2\langle Q_0 \tilde{h}_i, \xi_i \rangle \geq -\text{const} |\xi_i| \geq -\text{const} |x_i|^{-2}$$

(так как в силу (5.5) $q_0(\tilde{h}_i) \geq 0$), откуда имеем $q_0(x_i) = |x_i|^2 q_0(h_i) \geq -\text{const} \forall i$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть выполняются все предположения леммы 5.1. Тогда

$$q_0(x) + d|Q(x) - \eta| \geq 0 \quad \forall x \in X, \quad \eta \in C, \quad (5.6)$$

где константа $d > 0$ взята из леммы.

Действительно, в силу положительной однородности функции ω имеем $\omega(y) + d|y| \geq 0 \forall y$. Пусть $\eta \in C$, $x \in X$. Подставляя в это неравенство $y = Q(x) - \eta$ и учитывая, что $q_0(x) \geq \omega(y)$, получаем (5.6).

Для $\varepsilon \geq 0$ и целых $s \geq 0$ положим

$$\Lambda_s(C) = \{\lambda = (\lambda^0, y^*) \in \Lambda_s: y^* \in C^0\}, \quad \Lambda_s^\varepsilon(C) = \{\lambda \in \Lambda_s(C): \lambda^0 \geq \varepsilon\},$$

где $C^0 = \{y^*: \langle y^*, y \rangle \leq 0 \forall y \in C\}$ – полярный конус к конусу C .

Далее будем предполагать, что конус C является конечногранным, т. е. задается конечным числом линейных однородных неравенств.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть выполняется (5.5) и, кроме того, если $h \in K$, $q_0(h) = 0$, то Q регулярно относительно конуса C в точке h . Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\Lambda = \Lambda_{k-1}^\varepsilon(C) \neq \emptyset, \quad \max_{\lambda \in \Lambda} (\lambda^0 \omega(y) + \langle y^*, y \rangle) \geq 0 \quad \forall y. \quad (5.7)$$

Отметим, что случай $K = \emptyset$ не исключается. При этом для $y \notin (Q(X) - C)$ неравенство в (5.7) выполняется автоматически, так как для указанных y имеем $\omega(y) = +\infty$.

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 5.2. Пусть заданы гладкие отображения $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi: X \rightarrow Y$ и константа $d > 0$. Предположим, что функция $f(x, \eta) = \varphi(x) + d|\Phi(x) + \eta|$ достигает минимума по $x \in X, \eta \in C$ в точке (x_0, η_0) , для которой

$$\Phi(x_0) + \eta_0 = 0, \quad \text{im } \Phi'(x_0) + \text{span } \Gamma = Y, \quad \eta_0 \in \text{ri } \Gamma,$$

где Γ – некоторая грань конуса C , а ri – относительная внутренность выпуклого множества. Тогда существует $y^* \in C^0$ такое, что $|y^*| \leq d$,

$$\varphi'(x_0) + \Phi'(x_0)^* y^* = 0 \quad (5.8)$$

и для $q_0 = \varphi''(x_0)$, $Q = \Phi''(x_0)$ выполняется

$$q_0(x) + y^* Q(x) \geq 0 \quad \forall x: \Phi'(x_0)x \in \text{span } \Gamma. \quad (5.9)$$

Доказательство леммы аналогично доказательству предложения 2 из [32], в котором был рассмотрен случай $\Gamma = \{0\}$.

Докажем теорему 5.1. В силу положительной однородности функции ω достаточно доказать существование $\varepsilon > 0$ такого, что множество $\Lambda = \Lambda_{k-1}^\varepsilon(C)$ непусто и неравенство в (5.7) выполняется для любых $y \in S$. Сделаем это.

По условию количество граней конуса C конечно. Для каждой грани рассмотрим оператор ортогонального проектирования Y на ортогональное дополнение к линейной оболочке этой грани. Отбросив нулевой оператор (если он есть) и перенумеровав оставшиеся операторы, будем считать, что это $P_1, \dots, P_{r_0}$.

Зафиксируем произвольную точку $y \in S$. По теореме Сарда для каждого из гладких отображений $P_r Q: X \rightarrow \text{im } P_r$ мера Лебега множества его критических значений равна нулю. Поэтому множество точек, которые являются регулярными значениями для каждого из отображений $P_r Q$, $r = \overline{1, r_0}$, всюду плотно в Y . Кроме того, каждое из этих отображений положительно однородно. Поэтому существует такая сходящаяся к y последовательность $\{y_s\}$, что $y_s \in S \quad \forall s$ и каждое $P_r y_s$ является регулярным значением всех отображений $P_r Q$, $r = \overline{1, r_0}$.

По лемме 5.1 существует $d > 0$, для которого выполняется (5.6). Для натуральных i положим $q_{0,i}(x) = q_0(x) + i^{-1}|x|^2$, $Q_{0,i} = Q_0 + i^{-1}I$, где I – единичная матрица. Зафиксируем произвольный номер s и рассмотрим семейство задач

$$f_i(x, \eta) = q_{0,i}(x) + d|Q(x) - \eta - y_s| \rightarrow \inf, \quad x \in X, \quad \eta \in C,$$

зависящих от натурального параметра i . Они называются i -задачами. В силу леммы 5.1 инфимум в каждой из i -задач конечен. Докажем, что он достигается. Действительно, пусть $\{x_j, \eta_j\}$ – минимизирующая последовательность в i -задаче. Тогда в силу (5.6) выполнено неравенство $f_i(x_j, \eta_j) \geq i^{-1}|x_j|^2 - d|y_s|$ и, значит, если $|x_j| \rightarrow \infty$, то $f_i(x_j, \eta_j) \rightarrow \infty$, $j \rightarrow \infty$, что невозможно. Поэтому последовательность $\{x_j\}$ ограничена, и, следовательно, $\{\eta_j\}$ также ограничена. Переходя к подпоследовательностям, добьемся того, что обе последовательности сходятся и, следовательно, их пределы дают решение i -задачи.

Через $x_{i,s}, \eta_{i,s}$ обозначим какое-нибудь решение i -задачи. Зафиксируем i и рассмотрим два случая.

Первый случай: $Q(x_{i,s}) - \eta_{i,s} \neq y_s$. Тогда в i -задаче в окрестности решения $(x_{i,s}, \eta_{i,s})$ минимизируемая функция f_i является гладкой. Поэтому в силу классических необходимых условий первого и второго порядка имеем

$$\frac{\partial f_i}{\partial x}(x_{i,s}, \eta_{i,s}) = 2(Q_{0,i} + y_{i,s}^* Q)x_{i,s} = 0, \quad \frac{\partial f_i}{\partial \eta}(x_{i,s}, \eta_{i,s}) = -y_{i,s}^* \in -C^0, \quad (5.10)$$

$$q_{0,i}(x) + y_{i,s}^* Q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \ker Qx_{i,s}, \quad (5.11)$$

где $y_{i,s}^* = d(Q(x_{i,s}) - \eta_{i,s} - y_s) / |Q(x_{i,s}) - \eta_{i,s} - y_s|$. Проанализируем эти соотношения.

Пусть вначале $Q(x_{i,s}) \neq 0$. Тогда положим $\Pi_i = \ker Qx_{i,s} + \text{span}\{x_{i,s}\}$. В силу (5.10), (5.11) выполнено неравенство $q_{0,i}(x) + y_{i,s}^* Q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Pi_i$. Кроме того, $\text{codim } \Pi_i \leq k-1$, так как $x_{i,s} \notin \ker Qx_{i,s}$, поскольку $(Qx_{i,s})x_{i,s} = Q(x_{i,s}) \neq 0$. Следовательно, учитывая (5.10), имеем

$$y_{i,s}^* \in C^0, \quad |y_{i,s}^*| \leq d, \quad (5.12)$$

$$\lambda_{i,s}^0(1, y_{i,s}^*) \in \Lambda_{k-1} \quad \text{при} \quad \lambda_{i,s}^0 = (1 + |y_{i,s}^*|^2)^{-1/2}.$$

Умножая первую формулу в (5.10) скалярно на $x_{i,s}$ и используя определение $y_{i,s}^*$, получаем

$$q_{0,i}(x_{i,s}) + d|Q(x_{i,s}) - \eta_{i,s} - y_s| + \langle y_{i,s}^*, y_s \rangle = -\langle y_{i,s}^*, \eta_{i,s} \rangle \geq 0.$$

С другой стороны,

$$q_{0,i}(x) + d|Q(x) - \eta - y_s| \geq q_{0,i}(x_{i,s}) + d|Q(x_{i,s}) - \eta_{i,s} - y_s| \quad \forall x \in X, \quad \forall \eta \in C, \quad (5.13)$$

так как $(x_{i,s}, \eta_{i,s})$ является решением i -задачи. Отсюда в силу предыдущего неравенства

$$\min\{q_{0,i}(x) + d|Q(x) - \eta - y_s|, x \in X, \eta \in C\} + \langle y_{i,s}^*, y_s \rangle \geq 0. \quad (5.14)$$

Пусть $Q(x_{i,s}) = 0$. Умножая (5.10) скалярно на $x_{i,s}$, получаем $q_{0,i}(x_{i,s}) = 0$. Поэтому $(0, \eta_{i,s})$ – также решение i -задачи. Подставляя в (5.11) вместо $x_{i,s}$ точку $x = 0$, имеем $q_{0,i}(x) + y_{i,s}^* Q(x) \geq 0 \quad \forall x$, откуда вытекает (5.12). Доказательство (5.14) аналогично.

Второй случай: $Q(x_{i,s}) - \eta_{i,s} = y_s$. Любая точка, принадлежащая конечно-гранному конусу, принадлежит относительной внутренности какой-нибудь из

его граней. Поэтому у C существует грань Γ , для которой $\eta_{i,s} \in \text{ri } \Gamma$. Пусть вначале $\text{span } \Gamma \neq Y$. Тогда, взяв соответствующий оператор проектирования $P_r \neq 0$ на $(\text{span } \Gamma)^\perp$, имеем $P_r \eta_{i,s} = 0 \Rightarrow P_r Q(x_{i,s}) = P_r y_s$. Следовательно, по построению $\text{im } Qx_{i,s} + \text{span } \Gamma = Y$ и, значит, для i -задачи выполнены предположения леммы 5.2. Из нее получаем существование $y_{i,s}^*$, удовлетворяющих (5.10), (5.12). При этом мы использовали (5.9) и то, что коразмерность подпространства $\Pi_i = \{x: Q[x_{i,s}, x] \in \text{span } \Gamma\}$ не превышает числа $(k-1)$. Если же $\text{span } \Gamma = Y$, то $\eta_{i,s} \in \text{int } C$, откуда легко вытекает, что условия (5.10), (5.12) выполняются при $y_{i,s}^* = 0$.

Умножая первое равенство в (5.10) скалярно на $x_{i,s}$, имеем $q_{0,i}(x_{i,s}) + \langle y_{i,s}^*, Q(x_{i,s}) \rangle = 0$. Отсюда, используя (5.13) и учитывая, что имеют место соотношения $Q(x_{i,s}) - \eta_{i,s} - y_s = 0$, $\langle y_{i,s}^*, \eta_{i,s} \rangle \leq 0$, получаем (5.14).

Таким образом, в результате рассмотрения двух указанных случаев доказано существование $y_{i,s}^*$, для которых имеют место (5.12), (5.14). Выделяя при каждом фиксированном s из ограниченной последовательности $\{y_{i,s}^*\}$ сходящуюся подпоследовательность, добьемся того, что $y_{i,s}^* \rightarrow y_s^*$ при $i \rightarrow \infty$ для некоторого $y_s^*: |y_s^*| \leq d$. Аналогично, переходя от $\{y_s^*\}$ к подпоследовательности, добьемся того, что $y_s^* \rightarrow \hat{y}^*$, $s \rightarrow \infty$, для некоторого $\hat{y}^*$. Зафиксировав $x \in X$, $\eta \in C$ и переходя в (5.12) и (5.14) к пределу, вначале при фиксированном s и $i \rightarrow \infty$, а затем при $s \rightarrow \infty$, в силу замкнутости множества Λ_{k-1} имеем: $|\hat{y}^*| \leq d$, $\hat{y}^* \in C^0$,

$$\lambda = (\lambda^0, y^*) \in \Lambda_{k-1}(C) \quad \text{при} \quad \lambda^0 = (1 + |\hat{y}^*|^2)^{-1/2}, \quad y^* = \lambda^0 \hat{y}^*, \\ \lambda^0 \inf\{q_0(x) + d|Q(x) - \eta - y|, x \in X, \eta \in C\} + \langle y^*, y \rangle \geq 0.$$

Из последнего неравенства имеем $\lambda^0 q_0(x) + \langle y^*, y \rangle \geq 0 \quad \forall x: Q(x) - y \in C \Rightarrow \lambda^0 \omega(y) + \langle y^*, y \rangle \geq 0$. Положим $\varepsilon = (1 + d^2)^{-1/2}$. Тогда $\lambda^0 \geq \varepsilon$, так как $|\hat{y}^*| \leq d$. Теорема доказана.

Приведенное доказательство теоремы 5.1 основывается на исследовании задачи

$$f(x, \eta) = q_0(x) + d|Q(x) - \eta - y| \rightarrow \inf, \quad x \in X, \quad \eta \in C, \quad (5.15)$$

в которой инфимум в силу леммы 5.1 конечен для любого y . Если бы при каждом y инфимум в (5.15) достигался, то в доказательстве теоремы не возникло бы необходимости рассмотрения семейства i -задач и было бы достаточно проанализировать точки минимума функции f . Если форма q_0 положительна на K , то, увеличив, если надо, d , из леммы 5.1 несложно получить, что любая минимизирующая последовательность задачи (5.15) ограничена и, значит, инфимум в ней достигается. Однако даже при $k = 1$ без дополнительного предположения положительности q_0 на K это уже не так. Действительно, пусть $C = \{0\}$, $q_0(x) = x_1^2$, $Q(x) = q_1(x) = x_1 x_2$. Тогда для любых $d > 0$ и $y \in Y \setminus \{0\}$ инфимум в (5.15) равен нулю, однако он не достигается.

Примеры, приведенные в [32], показывают, что даже при $C = \{0\}$ возможны следующие ситуации: выполнены все предположения теоремы 5.1, однако инфимум в задаче (5.4) не достигается ни при каком $y \neq 0$; для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ существует такое $y = y(\alpha)$, что в (5.4) инфимум равен α , но не достигается;

квадратичное отображение Q сюръективно, и каждое $y \neq 0$ является для него регулярным значением, но все нетривиальные нули Q нерегулярны и q_0 обращается на K в нуль, в то же время $\omega(y) = -\infty \forall y \neq 0$.

Из теоремы 5.1 вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $q_0(x) > 0 \forall x \in K$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\Lambda = \Lambda_{k-1}^{\varepsilon\varepsilon}(C) \neq \emptyset, \quad \max_{\lambda \in \Lambda} (\lambda^0 q_0(x) + y^* Q(x)) \geq \varepsilon |x|^2 \quad \forall x \in X.$$

Здесь множество $\Lambda_s^{\varepsilon\varepsilon}(C)$ состоит из $\lambda = (\lambda^0, y^*)$ таких, что $|\lambda| = 1$, $\lambda^0 \geq \varepsilon$, $y^* \in C^0$ и существует линейное подпространство

$$\Pi \subset X: \text{codim } \Pi \leq s, \quad \lambda^0 q_0(x) + y^* Q(x) \geq \varepsilon |x|^2 \quad \forall x \in \Pi.$$

Теоремы 5.1 и 5.2 дают необходимые условия неотрицательной и положительной определенности соответственно формы q_0 на конусе K . Достаточность их очевидна.

К сожалению, теоремы 5.1 и 5.2 существенно конечномерны и при $\dim X = \infty$ их утверждения могут не выполняться. Вот соответствующий пример.

ПРИМЕР 5.1. Пусть X – бесконечномерное гильбертово пространство, $Y = \mathbb{R}$, $C = \{0\}$, $A: X \rightarrow X$ – линейный, симметричный, компактный, положительно определенный оператор, $q_0(x) = -|x|^2$, $q_1(x) = \langle Ax, x \rangle$. Тогда $K = \emptyset$, но в то же время $\Lambda_0^\varepsilon = \emptyset \forall \varepsilon > 0$, так как индекс лежандровой квадратичной формы $(-q_0/2 + \lambda_1 q_1)$ конечен для любого λ_1 (см. [1; § 6.2]) и, значит, $\text{ind}(q_0 + \lambda_1 q_1) = \infty \forall \lambda_1$.

ПРИМЕР 5.2 (см. [32; пример 3]). Пусть $n = 4$, $k = 2$, $C = \{0\}$, $q_0(x) = x_2 x_4$, $q_1(x) = x_1 x_2$, $q_2(x) = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Непосредственно проверяется, что нерегулярные нули имеют вид $x = (0, 0, 0, x_4)$, а все остальные нетривиальные нули регулярны. Кроме того, если $Q(x) = 0$, то $x_2 = 0 \Rightarrow q_0(x) = 0$. В то же время $\omega((0, 1)) = -\infty$, и, значит, не выполняется ни утверждение леммы 5.1, ни неравенство (5.7) теоремы 5.1.

Рассмотренный пример показывает, что даже при $C = \{0\}$, если выполняется (5.1), но квадратичное отображение Q имеет хотя бы один нерегулярный нетривиальный нуль h , для которого $q_0(h) = 0$, то утверждение теоремы 5.1 может нарушаться. Тем не менее из теоремы 5.2 вытекает следующее следствие.

Для $\varepsilon > 0$ через $\tilde{\Lambda}(\varepsilon)$ обозначим множество тех $\lambda = (\lambda^0, y^*)$, для которых $|\lambda| = 1$, $\lambda^0 > 0$, $y^* \in C^0$ и существует линейное подпространство

$$\Pi \subset X: \text{codim } \Pi \leq k - 1, \quad \lambda^0 q_0(x) + y^* Q(x) + \varepsilon \lambda^0 |x|^2 > 0 \quad \forall x \in \Pi \setminus \{0\}.$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть выполняется (5.5). Тогда для любого $x \in X \setminus \{0\}$ выполняется

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \lambda = \lambda(\varepsilon) = (\lambda^0, y^*) \in \tilde{\Lambda}(\varepsilon): \lambda^0 q_0(x) + y^* Q(x) + \varepsilon \lambda^0 |x|^2 > 0. \quad (5.16)$$

Справедливость этого утверждения вытекает из теоремы 5.2, примененной к квадратичной форме $q_{0,\varepsilon} = q_0(x) + \varepsilon |x|^2$.

Обозначим через $\tilde{\Lambda}_{k-1}(C) = \text{Ls}\{\tilde{\Lambda}(1/i)\}$ верхний топологический предел последовательности множеств $\{\tilde{\Lambda}(1/i)\}$. Тогда, если выполняется (5.5), то

$$\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}_{k-1}(C) \neq \emptyset, \quad \max_{\lambda \in \tilde{\Lambda}} (\lambda^0 \omega(y) + \langle y^*, y \rangle) \geq 0 \quad \forall y. \quad (5.17)$$

Справедливость этого утверждения вытекает из семейства условий (5.16), так как любая предельная точка последовательности $\{\lambda_i\}$: $\lambda_i \in \tilde{\Lambda}(1/i) \forall i$ принадлежит $\tilde{\Lambda}_{k-1}(C)$.

В свою очередь из (5.17) вытекает условие (5.3) (в котором при ненулевом конусе C множество Λ_{k-1} следует заменить на $\Lambda_{k-1}(C)$), поскольку, очевидно, $\tilde{\Lambda}_{k-1}(C) \subseteq \Lambda_{k-1}(C)$. Обратное, вообще говоря, неверно. Это показывает пример: $n = 2$, $k = 1$, $C = \{0\}$, $q_0(x) = -|x|^2$, $q_1(x) = x_1^2$. Для него (5.3) выполняется, а (5.17) – нет, так как, очевидно, $\tilde{\Lambda}(\varepsilon) = \emptyset \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \tilde{\Lambda}_{k-1}(C) = \emptyset$. Таким образом, условие (5.3), необходимое для неотрицательности квадратичной формы на конусе K , вообще говоря, слабее условия (5.17) и, тем более, семейства условий (5.16).

Приложение к теории экстремальных задач. Вернемся к задаче (3.1), предполагая, что $X = \mathbb{R}^n$. Приведем условия, при которых в (2.18) можно обойтись только множителями Лагранжа, для которых $\lambda^0 > 0$.

ЛЕММА 5.3. Пусть точка x_0 аномальна и отображение F является 2-регулярным в ней, выполняется классический принцип Лагранжа (3.13) и условие квадратичного роста:

$$\exists \delta_1, \delta_2 > 0: f_0(x) - f_0(x_0) \geq \delta_1 |x - x_0|^2 \quad \forall x: F(x) = 0, \quad |x - x_0| \leq \delta_2.$$

Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\Lambda = \{\lambda \in \Lambda_{k-1}(x_0): \lambda^0 \geq \varepsilon\} \neq \emptyset, \\ \max_{\lambda \in \Lambda} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x, x] \geq 0 \quad \forall x \in \ker F'(x_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (3.13) будем, не теряя общности, считать, что $f'_0(x_0) = 0$. По теореме 1 из [28] в силу 2-регулярности отображения F в точке x_0 в ее окрестности множество $\{x: F(x) = 0\}$ локально диффеоморфно конусу $H(x_0)$ в окрестности нуля. Отсюда, используя последнее предположение леммы, имеем $f''_0(x_0)[x, x] > 0 \forall x \in H(x_0): x \neq 0$. Применяя теорему 5.2, завершаем доказательство леммы.

Вернемся к достаточным условиям экстремума (4.1). Сравнивая их с необходимыми условиями (2.18), видим, что в них присутствуют различные множества множителей Лагранжа: $\Lambda(x_0)$ и $\Lambda_{k-1}(x_0)$. Это несоответствие представляется неестественным. Однако заменять в необходимых условиях множество $\Lambda_{k-1}(x_0)$ на большее – $\Lambda(x_0)$ нецелесообразно, так как это ослабление необходимых условий приводит к тому, что для аномальных задач они просто автоматически выполняются.

В связи с этим зададимся вопросом: если заменить в (4.1) множество $\Lambda(x_0)$ на меньшее множество $\Lambda_{k-1}(x_0)$, то станут ли достаточные условия (4.1) слабее? Формально это так, но, как показывает следующая лемма, при указанной замене множеств достаточные условия (4.1) слабее не становятся.

ЛЕММА 5.4. *Пусть точка x_0 аномальна и имеет место (4.1). Тогда*

$$\max_{\lambda \in \Lambda} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x, x] > 0 \quad \forall x \in \ker F'(x_0), \quad x \neq 0, \quad \Lambda = \Lambda_{k-1}(x_0).$$

Справедливость леммы вытекает из теоремы 5.2 (подробности см. в [33; с. 35, 36]).

Сюръективность и нетривиальные нули квадратичных отображений. Зададимся вопросом: как связано наличие нетривиальных нулей у квадратичного отображения с его сюръективностью? Как отмечалось, если у квадратичного отображения Q имеется регулярный нуль, то оно сюръективно. В то же время (см. [30]), все находящиеся в общем положении квадратичные отображения регулярны. Поэтому для квадратичных отображений, находящихся в общем положении, из существования нетривиального нуля вытекает сюръективность. Обратное неверно. Простейшим примером сюръективного квадратичного отображения, у которого нет нетривиальных нулей, является отображение

$$Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad Q(x) = (x_1 x_2, x_1^2 - x_2^2). \quad (5.18)$$

Однако при $n \gg k$ подобных примеров уже не существует, а именно, справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 5.5. *Пусть квадратичное отображение Q сюръективно и*

$$n > k^2 - 1. \quad (5.19)$$

Тогда множество его нетривиальных нулей непусто (т.е. $K \neq \emptyset$).

Доказательство леммы, основанное на теореме 5.1, приведено в [32]. Она усиливает предложение 1 из [30], в котором доказано, что если квадратичное отображение Q существенно сюръективно (существенная сюръективность означает, что любое близкое к Q квадратичное отображение также сюръективно) и имеет место (5.19), то множество нетривиальных нулей у Q непусто. В то же время до сих пор не ясно: существует ли сюръективное квадратичное отображение, не являющееся существенно сюръективным?

В лемме 5.5 оценку (5.19) можно улучшить. Например, для $k = 2$ утверждение леммы остается в силе уже при $n \geq 3$. Обсудим еще вопрос: когда образ квадратичного отображения $Q(X)$ является выпуклым или почти выпуклым множеством? При этом множество M называется почти выпуклым [31], если существует такое выпуклое множество C , что $C \subset M \subset \text{cl } C$. Этот вопрос интересен как сам по себе, так и важен для приложений (подробнее см. [31] и библиографию там). Отметим только, что при $k = 2$ множество $Q(X)$ выпукло [29], а уже при $k \geq 3$ оно может не быть даже почти выпуклым множеством. Примером служит отображение

$$Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad Q(x) = (x_1 x_2, x_1 x_3, x_2 x_3).$$

Для него $y_1 y_2 y_3 \geq 0 \forall y = (y_1, y_2, y_3) \in Q(\mathbb{R}^3)$, и в то же время $Q(\mathbb{R}^3)$ содержит три прямые: $y_1 = y_2 = 0$, $y_2 = y_3 = 0$ и $y_1 = y_3 = 0$.

В наиболее распространенной ситуации выпуклость $Q(X)$ гарантируется наличием регулярного нуля, так как в этом случае $Q(X) = Y$. Приведем более слабые условия, гарантирующие почти выпуклость $Q(X)$. Для целых $s \geq 0$ положим

$$\mathcal{Y}_s = \{y^* : y^* \neq 0, \text{ind}(y^* Q) \leq s\}. \quad (5.20)$$

ЛЕММА 5.6. Пусть

$$\exists h \in X : \quad \langle y^*, Q(h) \rangle < 0 \quad \forall y^* \in \mathcal{Y}_{k-1} \setminus \mathcal{Y}_0. \quad (5.21)$$

Тогда

$$\text{int}(\mathcal{Y}_0^*) \subseteq Q(X) \subseteq \mathcal{Y}_0^*.$$

Здесь, как и выше, $\mathcal{Y}_0^*$ – сопряженный конус к конусу $\mathcal{Y}_0$.

СЛЕДСТВИЕ. Если выполняется (5.21), то множество $Q(X)$ почти выпукло, т.е. существует такое выпуклое множество D , что $D \subset Q(X) \subset \text{cl } D$.

Доказательства этих утверждений приведены в [32].

Квадратичные формы, аннулирующие пересечение квадрик. Пусть заданы линейные функционалы a_i , $i = \overline{1, k}$. Если линейный функционал a_0 аннулирует подпространство $\{x : \langle a_i, x \rangle = 0, i = \overline{1, k}\}$, то по лемме об аннуляторе (см. [1]) $\exists \alpha_i : a_0 = \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i$. Исследуем аналогичный вопрос для квадратичных отображений.

Будем говорить, что форма q_0 аннулирует конус $\{x : Q(x) = 0\}$, если $q_0(x) = 0 \forall x : Q(x) = 0$. Спрашивается, верно ли, что тогда

$$\exists y^* \in Y^* : Q_0 = y^* Q? \quad (5.22)$$

Уже при $k = 1$ пример, когда Q_1 – единичная матрица, показывает, что без дополнительных предположений на Q ответ на этот вопрос является отрицательным (так как в этом случае конус $\{x : Q(x) = 0\} = \{0\}$ аннулирует любая форма q_0).

Приведем условия на Q , при которых для любой квадратичной формы q_0 , аннулирующей $\{x : Q(x) = 0\}$, выполняется (5.22). (В [34] рассмотрен конус более общего вида $\{x : Q(x) \in C\}$.)

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть конус $\text{conv } \mathcal{Y}_{2(k-1)}$ является острым (т.е. не содержит ненулевых подпространств) и

$$\exists h \in X : \quad \langle Q(h), y^* \rangle < 0 \quad \forall y^* \in \mathcal{Y}_{k-1}. \quad (5.23)$$

Тогда для любой квадратичной формы q_0 , аннулирующей $\{x : Q(x) = 0\}$, выполняется (5.22).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу доказанной ниже леммы 6.1 (см. также лемму 2 из [35]) и (5.23) отображение Q сюръективно. Из остроты конуса $\text{conv } \mathcal{B}_{2(k-1)}$ вытекает, что внутренность его полярны не пуста. Поэтому

$$\exists \hat{h} \in X: \quad \langle y^*, Q(\hat{h}) \rangle < 0 \quad \forall y^* \in \mathcal{B}_{2(k-1)}. \quad (5.24)$$

В задаче минимизации (5.2) минимум достигается в аномальной точке $x_0 = 0$. Поэтому в силу (2.18) (см. теорему 2.7) существует $\lambda = (\lambda^0, y^*) \in \Lambda_{k-1}$ такое, что $\lambda^0 q_0(\hat{h}) + \langle y^*, Q(\hat{h}) \rangle \geq 0$. Тогда $\lambda^0 > 0$ (так как если $\lambda^0 = 0$, то $y^* \neq 0$, $\text{ind}(y^*Q) \leq (k-1)$, $\langle y^*, Q(\hat{h}) \rangle \geq 0$, что противоречит (5.24)). Поэтому

$$\exists y_1^*: \quad \text{ind}(Q_0 + y_1^*Q) \leq k-1, \quad q_0(\hat{h}) + \langle y_1^*, Q(\hat{h}) \rangle \geq 0.$$

Аналогично, заменяя в рассмотренной выше задаче (5.2) форму q_0 на $(-q_0)$, имеем:

$$\exists y_2^*: \quad \text{ind}(-Q_0 + y_2^*Q) \leq k-1, \quad -q_0(\hat{h}) + \langle y_2^*, Q(\hat{h}) \rangle \geq 0.$$

Покажем, что $y_2^* = -y_1^*$. Предположим противное: $y_1^* + y_2^* \neq 0$. Тогда, учитывая, что индекс суммы квадратичных форм не превосходит суммы их индексов, имеем $(y_1^* + y_2^*) \in \mathcal{B}_{2(k-1)}$, $\langle (y_1^* + y_2^*), Q(\hat{h}) \rangle \geq 0$. Получили противоречие с (5.24). Таким образом, $y_2^* = -y_1^*$. Поэтому, положив $y^* = y_1^*$, $\tilde{Q}_0 = Q_0 + y^*Q$, $\tilde{q}_0(x) = \langle \tilde{Q}_0 x, x \rangle$, имеем:

$$\text{ind } \tilde{Q}_0 \leq k-1, \quad \text{ind}(-\tilde{Q}_0) \leq k-1, \quad \tilde{q}_0(\hat{h}) = 0. \quad (5.25)$$

Докажем, что $\tilde{Q}_0 = 0$. Предположим противное. Тогда $\tilde{q}_0 \neq 0$. Поэтому в силу (5.24) существует $\tilde{h}$ достаточно близкое к $\hat{h}$, для которого

$$\langle \mu^*, Q(\tilde{h}) \rangle < 0 \quad \forall \mu^* \in \mathcal{B}_{2(k-1)}, \quad \tilde{q}_0(\tilde{h}) \neq 0. \quad (5.26)$$

Построенная квадратичная форма $\tilde{q}_0$ также аннулирует $\{x: Q(x) = 0\}$. Поэтому, проводя для нее и для вектора $\tilde{h}$ рассуждения, аналогичные приведенным выше, имеем

$$\begin{aligned} \exists \tilde{y}^*: \quad \text{ind}(\tilde{Q}_0 + \tilde{y}^*Q) \leq k-1, \quad \text{ind}(-(\tilde{Q}_0 + \tilde{y}^*Q)) \leq k-1, \\ \tilde{q}_0(\tilde{h}) + \langle \tilde{y}^*, Q(\tilde{h}) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Из первого неравенства (5.25) и второго неравенства (5.27) имеем

$$\begin{aligned} 2(k-1) &\geq \text{ind}(\tilde{Q}_0 - (\tilde{Q}_0 + \tilde{y}^*Q)) = \text{ind}(-\tilde{y}^*Q) \\ &\Rightarrow \text{ind}(-\tilde{y}^*Q) \leq 2(k-1). \end{aligned}$$

Аналогично из второго неравенства (5.25) и первого неравенства (5.27) получаем $\text{ind}(\tilde{y}^*Q) \leq 2(k-1)$. Таким образом, $\pm \tilde{y}^* \in \mathcal{B}_{2(k-1)} \Rightarrow \tilde{y}^* = 0$, так как конус $\text{conv } \mathcal{B}_{2(k-1)}$ острый. Но из равенства в (5.27), в силу $\tilde{y}^* = 0$, имеем $\tilde{q}_0(\tilde{h}) = 0$. Полученное противоречие с (5.26) доказывает, что $\tilde{Q}_0 = 0 \Rightarrow Q_0 + y^*Q = 0$. Теорема доказана.

Теория квадратичных отображений находится только в самом начале своего развития. Поэтому мы приведем несколько пока нерешенных задач этой теории.

ЗАДАЧА 1. Пусть заданное квадратичное отображение $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ сюръективно. Спрашивается, будет ли любое достаточно близкое к нему квадратичное отображение также сюръективно? (Близость квадратичных отображений понимается в том очевидном смысле, что определяющие их матрицы попарно близки.) При дополнительном предположении, что конус $\text{conv } \mathcal{Y}_k$ является острым, положительный ответ на этот вопрос дан в [35]. В общем случае ответ пока не известен.

ЗАДАЧА 2. Пусть квадратичное отображение $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ сюръективно. Спрашивается, верно ли, что $0 \in \text{int } Q(B)$? Здесь B – единичный шар в $\mathbb{R}^n$.

ЗАДАЧА 3. Пусть у заданного квадратичного отображения $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ нет нетривиальных нулей. Тогда для него множество $\mathcal{Y}_{k-1}$ непусто. Это вытекает из теоремы 2.7, примененной к задаче (5.2) при $q_0(x) \equiv -|x|^2$.

При $k = 2, 3, 5, 9$ в [36] приведены примеры квадратичных отображений, у которых нет нетривиальных нулей, для которых, однако, $\mathcal{Y}_{k-2} = \emptyset$. Спрашивается, существуют ли примеры таких квадратичных отображений при $k \neq 2, 3, 5, 9$?

6. Теоремы об обратной функции

Индексный подход. Пусть задано отображение $F: X \rightarrow Y$, где X – линейное пространство и $Y = \mathbb{R}^k$. Дана точка $x_0 \in X$ и $y_0 = F(x_0)$. Приведем условия, при которых существует такая окрестность V точки y_0 , что для любого $y \in V$ уравнение (1.6) имеет такое решение $x(y)$, что $x(y_0) = x_0$, отображение $x(\cdot)$ непрерывно в точке y_0 относительно конечной топологии и удовлетворяет априорным оценкам.

ТЕОРЕМА 6.1. *Предположим, что отображение F дважды непрерывно дифференцируемо в окрестности точки x_0 относительно конечной топологии τ . Пусть*

$$\exists h \in X: \quad F'(x_0)h = 0, \quad \langle y^*, F''(x_0)[h, h] \rangle < 0 \quad \forall y^* \in \mathcal{F}_k^2(x_0). \quad (6.1)$$

Тогда существуют такие константа const , окрестность V точки y_0 и линейное конечномерное подпространство $\tilde{\Pi} \subseteq X$, что

$$\begin{aligned} \forall y \in V \quad \exists x(y) \in \tilde{\Pi}: \quad F(x(y)) = y, \\ \|x(y) - x_0\|_{\tilde{\Pi}} \leq \text{const}(|y - y_0| + |\pi(y - y_0)|^{1/2}). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Здесь, как и выше, π – оператор ортогонального проектирования Y на $(\text{im } F'(x_0))^\perp$, а $\mathcal{F}_s^2(x)$ – множество таких $y^* \in Y^*$, что $|y^*| = 1$, $F'(x)^*y^* = 0$ и в X существует подпространство Π , для которого выполняется (2.19).

Кроме того, если $0 \notin \text{conv } \mathcal{F}_k^2(x_0)$ и выполняется (6.2), то имеет место (6.1). Но, как отмечалось в разделе 2 (см. также [5; гл. 1, § 1.9]), при $n \gg k$ для

отображений общего положения $0 \notin \operatorname{conv} \mathcal{F}_k^2(x) \forall x$ и, значит, для них теорема 6.1 дает не только достаточные, но и необходимые условия существования обратной функции $x(\cdot)$.

Если точка x_0 нормальна, то $\mathcal{F}_k^2(x_0) = \emptyset$, $\pi = 0$ и теорема 6.1 по существу превращается в классическую теорему об обратной функции (при этом возможность выбора гладкого отображения $x(\cdot)$ доказывается отдельно и несложно). Если же точка x_0 аномальна, то $\pi \neq 0$ и оценка на решение (6.2) является всего лишь “линейно-корневой”, в отличие от линейной оценки, как в классическом случае.

Доказательство приведенных утверждений в общем случае, основанное на необходимых условиях второго порядка из раздела 2, приведено в [35]. Чтобы продемонстрировать основную идею доказательства теоремы, докажем следующую лемму, из которой теорема 6.1 вытекает в частном случае, когда $x_0 = 0$, а F – квадратичное отображение.

ЛЕММА 6.1. Пусть задано квадратичное отображение $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow Y = \mathbb{R}^k$, $k \geq 2$, u

$$\exists h \in \mathbb{R}^n: \quad \langle Q(h), y^* \rangle < 0 \quad \forall y^* \in \mathcal{Y}_{k-2} \quad (6.3)$$

(см. (5.20)). Тогда существует константа const такая, что

$$\forall y \in Y \quad \exists x(y) \in \mathbb{R}^n: \quad Q(x(y)) = y, \quad |x(y)| \leq \operatorname{const} |y|^{1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда, как несложно видеть, для любого i существует $y_i \in Y$ такое, что $|y_i| = 1$ и в задаче минимизации

$$|x|^2 - i\chi \rightarrow \min, \quad Q(x) - \chi y_i = 0, \quad (x, \chi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

точка $x = 0$, $\chi = 0$ является решением. В силу необходимых условий второго порядка (2.18) для этой задачи существуют $\lambda_i^0 \geq 0$, $y_i^* \in Y: \lambda_i^0 + |y_i^*| = 1$ и линейное подпространство $\tilde{\Pi}_i \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ такие, что

$$\begin{aligned} \operatorname{codim} \tilde{\Pi}_i &\leq k-1, \quad \chi = 0 \quad \forall (x, \chi) \in \tilde{\Pi}_i, \quad i\lambda_i^0 + \langle y_i^*, y_i \rangle = 0, \\ \langle y_i^*, Q(x) \rangle + \lambda_i^0 |x|^2 &\geq 0 \quad \forall x \in \Pi_i = \{x \in \mathbb{R}^n: (x, \chi) \in \tilde{\Pi}_i\}, \\ \langle y_i^*, Q(h) \rangle + \lambda_i^0 |h|^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Тогда $\operatorname{codim} \Pi_i \leq k-2 \Rightarrow \operatorname{ind}(y_i^* Q + \lambda_i^0 I) \leq k-2$ (I – единичная матрица). Кроме того, $\lambda_i^0 \rightarrow 0 \Rightarrow |y_i^*| \rightarrow 1$. Переходя к подпоследовательности, будем считать, что $y_i^* \rightarrow y^*$, $|y^*| = 1$. Переходя к пределу при $i \rightarrow \infty$, имеем $\langle y^*, Q(h) \rangle \geq 0$, и в силу теоремы 2.3 $y^* \in \mathcal{Y}_{k-2}$. Получили противоречие с (6.3). Лемма доказана.

При $k = 1$ (6.3) надо заменить на (5.23) или на $\mathcal{Y}_0 = \emptyset$, что при $k = 1$ эквивалентно.

Лемма 6.1 дает достаточные условия сюръективности квадратичных отображений. Важно отметить, что с учетом примера 4 из [37] пример отображения (5.18) показывает, что в утверждении леммы 6.1 непрерывного отображения $x(\cdot)$ может не быть.

2-регулярность. В приложениях нередко бывает недостаточно просто решить уравнение (1.6), а нужно найти такие его решения x , что $x \in K$, где K – заданное подмножество Y . Естественно, наряду с аномальностью, ограничение $x \in K$ привносит в эту задачу дополнительные сложности.

Будем рассматривать следующую, более общую, чем (1.6), задачу нахождения решения уравнения

$$F(x, \sigma) = 0, \quad x \in K. \quad (6.4)$$

Здесь X, Y – банаховы пространства, Σ – топологическое пространство, $K \subseteq X$ – выпуклый замкнутый конус, а $F: X \times \Sigma \rightarrow Y$ – заданное отображение. Пусть имеются $x_0 \in K, \sigma_0 \in \Sigma$, для которых $F(x_0, \sigma_0) = 0$.

В предположении гладкости F из теоремы об устойчивости Робинсона [16], [14] вытекает, что если выполнено условие регулярности Робинсона

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, \sigma_0)(K + \text{span}\{x_0\}) = Y \quad (6.5)$$

(при $K = X$ условие Робинсона – это условие нормальности), то существует такая окрестность O точки σ_0 , что $\forall \sigma \in O \exists x(\sigma) \in K$:

$$F(x(\sigma), \sigma) \equiv 0, \quad \|x(\sigma) - x_0\| \leq \text{const} \|F(x_0, \sigma)\| \quad \forall \sigma \in O. \quad (6.6)$$

Правда, вопрос о возможности выбора отображения $x(\cdot)$ непрерывным в цитированных работах не обсуждался. Тем не менее справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6.2 (классическая теорема о неявной функции). *Предположим, что отображение $F: X \times \Sigma \rightarrow Y$ непрерывно в окрестности точки (x_0, σ_0) , строго дифференцируемо по x в этой точке равномерно по σ , а также что выполнено условие Робинсона (6.5). Тогда существуют окрестность O точки σ_0 и непрерывное отображение $x(\cdot): O \rightarrow K$ такие, что имеет место (6.6).*

Перейдем к теоремам о неявной функции без априорных предположений условия Робинсона. Относительно F будем предполагать, что в окрестности точки (x_0, σ_0) оно дважды непрерывно дифференцируемо по x равномерно по σ и при каждом фиксированном σ его вторая частная производная $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\cdot, \sigma)$, рассматриваемая как симметричное билинейное отображение, удовлетворяет условию Липшица по переменной x с одной и той же константой Липшица, не зависящей от σ . (Подробнее см. [38].) Отображения $F(x_0, \cdot)$, $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, \cdot)$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, \cdot)$ предполагаются непрерывными в окрестности точки σ_0 .

Положим

$$\mathcal{K} = K + \text{span}\{x_0\}, \quad C = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, \sigma_0)(\mathcal{K}).$$

Будем предполагать, что линейная оболочка $\text{span } C$ конуса C замкнута и это подпространство топологически дополняемо. Через π обозначим линейный непрерывный оператор, проектирующий Y на какое-нибудь подпространство, дополняющее $\text{span } C$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть

$$h \in \mathcal{K}, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, \sigma_0)h = 0, \quad -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, \sigma_0)[h, h] \in C. \quad (6.7)$$

Тогда отображение F называется 2-регулярным в точке (x_0, σ_0) относительно K по направлению h , если имеет место равенство

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, \sigma_0)(\mathcal{K}) + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, \sigma_0) \left[h, \mathcal{K} \cap \ker \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, \sigma_0) \right] = Y. \quad (6.8)$$

В предположении $\text{ri } C \neq \emptyset$ другое, но эквивалентное введенному определению 2-регулярности приведено в [39], и оба они при $K = X$ превращаются в условие 2-регулярности, рассматривавшееся в предыдущих разделах.

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть $\text{ri } C \neq \emptyset$ и существует такое $h \in X$, что отображение F является 2-регулярным в точке (x_0, σ_0) относительно K по направлению h (т.е. выполняется (6.7), (6.8)). Тогда для любого $l \in \text{ri } C$ существуют окрестность O точки σ_0 , $\delta > 0$ и непрерывное отображение $x(\cdot): O \rightarrow K$ такие, что

$$F(x(\sigma), \sigma) = 0 \quad \forall \sigma \in O, \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} \|x(\sigma) - x_0\| \leq \text{const}(\Delta_1(\sigma) + \Delta_2(\sigma) + \|F(x_0, \sigma)\| \\ + \rho(-F(x_0, \sigma), C_\delta)^{1/2}) \quad \forall \sigma \in O. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta_1(\sigma) &= \sup \left\{ \left\| \pi \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, \sigma)x \right\|, x \in \text{span } K, \|x\| \leq 1 \right\}, \\ \Delta_2(\sigma) &= \sup \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, \sigma)x \right\|, x \in \ker \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, \sigma_0) \cap \mathcal{K}, \|x\| \leq 1 \right\}, \end{aligned}$$

$C_\delta = \text{cone}(B_\delta(l)) \cap \text{span } C$, а cone обозначает коническую оболочку множества.

При дополнительном предположении:

$$\text{конус } \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, \sigma_0)(K) \text{ является подпространством} \quad (6.11)$$

оценку (6.10) в теореме 6.3 можно усилить, опустив в ней слагаемое $\Delta_2(\sigma)$. А именно, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6.4. Пусть выполнены все предположения теоремы 6.3, а также условие (6.11). Тогда существуют окрестность O точки σ_0 и непрерывное отображение $x(\cdot): O \rightarrow K$ такие, что выполняются (6.9) и оценка

$$\|x(\sigma) - x_0\| \leq \text{const}(\Delta_1(\sigma) + \|F(x_0, \sigma)\| + \|\pi F(x_0, \sigma)\|^{1/2}) \quad \forall \sigma \in O. \quad (6.12)$$

Классическая теорема о неявной функции является следствием теоремы 6.4 (так как если выполняется условие Робинсона, то $\pi = 0$). Из теоремы 6.4

получается также обобщенная теорема о неявной функции, обусловленная решением уравнения $F(x, \sigma) = y$ относительно неизвестного $x \in K$ (подробнее см. теорему 5 из [38]).

Из теоремы 6.4 и результатов работы [24] можно вывести теорему 6.1, даже усилив ее в аномальном случае. А именно, пусть точка x_0 аномальна и

$$\exists h \in X: \quad F'(x_0)h = 0, \quad \langle y^*, F''(x_0)[h, h] \rangle < 0 \quad \forall y^* \in \mathcal{F}_{k-1}^2(x_0). \quad (6.13)$$

Тогда существуют окрестность V точки y_0 , линейное конечномерное подпространство $\tilde{P} \subseteq X$ и непрерывное отображение $x(\cdot): V \rightarrow \tilde{P}$, для которых имеет место (6.2).

Действительно, в силу (6.13) и [23; теорема 2] существует направление $h \in X$, вдоль которого отображение F является 2-регулярным в точке x_0 . Поэтому искомое утверждение вытекает из теоремы 6.4 при $K = X$, так как в предположениях теоремы 6.1 отображение F линейно по переменной σ и, значит, при $K = X$ в (6.12) слагаемое Δ_1 равно нулю.

Теоремы 6.3 и 6.4 справедливы лишь в предположении непустоты конуса $\text{ri } C$. Однако, если пространство Y бесконечномерно, то относительно лежащего в нем выпуклого конуса C может быть пусто. Поэтому приведем теорему о неявной функции, справедливую без априорного предположения непустоты $\text{ri } C$.

ТЕОРЕМА 6.5. Пусть отображение F является 2-регулярным в точке (x_0, σ_0) относительно K по некоторому направлению $h \in X$ (т.е. имеет место (6.7), (6.8)). Тогда существует окрестность O точки σ_0 и непрерывное отображение $x(\cdot): O \rightarrow K$ такие, что выполняются (6.9) и оценка

$$\|x(\sigma) - x_0\| \leq \text{const}(\Delta_1(\sigma) + \Delta_2(\sigma) + \|F(x_0, \sigma)\|^{1/2}) \quad \forall \sigma \in O.$$

Эти теоремы получены в [38], [40] и там же приведены иллюстрирующие их примеры. Отметим, что в этих теоремах оценки на $\|x(\sigma) - x_0\|$ лишь линейно-корневые, а не линейные, как в классической теореме о неявной функции.

Теорема о неявной функции в аномальной точке при $K = X$ получена в [41], где в предположении 2-регулярности F по некоторому направлению доказано существование отображения $x(\cdot)$, удовлетворяющего (6.9) и оценке (6.12) при $\Delta_1 = 0$. Вопрос непрерывности отображения $x(\cdot)$ в [41] не рассматривался.

Уравнения с незамкнутым образом. Вернемся к уравнению (1.6), предполагая, что X и Y – банаховы пространства. Теоремы 6.3–6.5 применимы и к уравнению (1.6), но в предположении, что образ $\text{im } F'(x_0)$ замкнут. Однако, если точка x_0 аномальна, а пространство Y бесконечномерно, то это предположение может оказаться обременительным. Приведем теорему об обратной функции, в которой предположение замкнутости $\text{im } F'(x_0)$ отсутствует. Будем считать, что отображение F дважды непрерывно дифференцируемо и его вторая производная липшицева в окрестности x_0 .

ТЕОРЕМА 6.6. Пусть отображение F является 2-регулярным по некоторому направлению h , удовлетворяющему условиям (3.15). Тогда найдутся такие $r, c, c_1 > 0$, что для любого $l \in \text{im } F'(x_0)$ и любого $y \in B_Y(y_0, r(l))$ существует $x(y) \in B_X(x_0, r)$ такое, что

$$F(x(y)) = y, \quad \|x(y) - x_0\| \leq c_1 (b(l)\|y - y_0\| + \|y - y_0\|^{1/2} \|\theta(y - y_0) - \theta(l)\|^{1/2}).$$

Здесь $y_0 = F(x_0)$, $B_X(x, \rho)$ – шар в X радиуса ρ с центром в точке x и использованы обозначения: $\theta(y) = y/\|y\|$ при $y \neq 0$ и $\theta(0) = 0$, $b(y) = \inf\{\|x\| : F'(x_0)x = \theta(y)\}$ для $y \in \text{im } F'(x_0)$, $r(l) = \min\{cr/b(l), cr^2\}$. Из этой теоремы при $l = 0$ вытекает важное следствие.

СЛЕДСТВИЕ. В предположениях теоремы 6.6 существуют такие $r, c > 0$, что

$$\forall y \in B_Y(y_0, r) \quad \exists x(y): \quad F(x(y)) = y, \quad \|x(y) - x_0\| \leq c\|y - y_0\|^{1/2}.$$

ТЕОРЕМА 6.7. Пусть отображение F является 2-регулярным по некоторому направлению $h \in H(x_0)$ (см. (3.2)). Тогда существуют такие константы $r, c, c_1, c_2 > 0$, что для любого $l \in \text{im } F'(x_0)$ и любого $y \in B_Y(y_0, r(l))$ выполняется

$$\exists x(y) \in B_X(x_0, r): \quad F(x(y)) = y, \quad x(y) = x_0 + t(y)(h + \xi + \chi_1) + O(t^2(y)).$$

Здесь $r(l)$ определено выше и

$$t(y) = \max\left\{c_1\|y - y_0\|b(l)r^{-1}, c_2\|y - y_0\|^{1/2}\|\theta(y - y_0) - \theta(l)\|^{1/2}r^{-1/2}\right\},$$

а ξ, χ_1 – произвольные решения некоторой линейно-квадратичной системы уравнений (ее явный вид приведен в теореме 2 из [22]).

Теорема включает в себя утверждение о существовании указанных ξ и χ_1 . Доказательства обеих теорем и иллюстрирующие их примеры приведены в [22].

7. Необходимые условия второго порядка в задачах оптимального управления

Задача Лагранжа. В качестве одного из приложений результатов раздела 2 получим для задач оптимального управления необходимые условия слабого минимума. Вначале рассмотрим задачу Лагранжа, т.е. задачу без ограничений на управления:

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad t \in [t_1, t_2], \quad (7.1)$$

$$K_1(p) \leq 0, \quad K_2(p) = 0, \quad \text{где } p = (x_1, x_2), \quad x_1 = x(t_1), \quad x_2 = x(t_2), \quad (7.2)$$

$$J = J(p, u) = K_0(p) + \int_{t_1}^{t_2} f^0(x, u, t) dt \rightarrow \min. \quad (7.3)$$

Здесь $t \in [t_1, t_2]$ – время, причем моменты $t_1 < t_2$ фиксированы, $x \in \mathbb{R}^n$ – фазовая переменная, а $u \in \mathbb{R}^m$ – управляющий параметр; f – заданная n -мерная

вектор-функция, а K_0 и f^0 – скалярные функции. Вектор-функции K_1 и K_2 принимают значения в арифметических пространствах размерностей $d(K_1)$ и $d(K_2)$ соответственно. Здесь и ниже $d(z)$ – размерность вектора z .

Относительно функций K_0 , K_1 и K_2 предполагается, что они дважды непрерывно дифференцируемы. Функции f^0 , f предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми по (x, u) для почти всех t . Кроме того, эти функции вместе со всеми своими частными производными по (x, u) до второго порядка включительно измеримы по t при любых фиксированных (x, u) , и на любом ограниченном множестве они ограничены и непрерывны по (x, u) равномерно по x , u , t . В качестве класса допустимых управлений рассматривается пространство функций $u = u(\cdot) \in L_\infty^m[t_1, t_2]$.

Относительно ограничений (7.2), называемых концевыми, предполагается выполненным следующее условие регулярности: для любого p , удовлетворяющего (7.2), имеет место

$$\begin{aligned} \operatorname{rank} \frac{\partial K_2}{\partial p}(p) &= d(K_2); \\ \exists \tilde{p} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathbb{R}^{2n}: \quad \tilde{p} \frac{\partial K_2}{\partial p}(p) &= 0, \quad \left\langle \frac{\partial K_{1,j}}{\partial p}(p), \tilde{p} \right\rangle < 0 \\ \forall j: \quad K_{1,j}(p) &= 0, \quad j = \overline{1, d(K_1)}. \end{aligned}$$

Пара вектор-функций $(x(t), u(t))$, $t \in [t_1, t_2]$, называется допустимым процессом, если $u(\cdot)$ – допустимое управление, а $x(\cdot)$ – соответствующее ему решение уравнения (7.1), которое удовлетворяет концевым ограничениям (7.2). Исходная задача заключается в нахождении минимума функционала J на множестве допустимых процессов.

Положим $K = (K_1, K_2)$. Определим функцию Понтрягина $H: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и малый лагранжиан $l: \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{1+d(K)} \rightarrow \mathbb{R}$ по формулам

$$\begin{aligned} H(x, u, t, \psi, \lambda^0) &= \langle f(x, u, t), \psi \rangle - \lambda^0 f^0(x, u, t), \\ l(p, \lambda) &= \lambda^0 K_0(p) + \langle \lambda^1, K_1(p) \rangle + \langle \lambda^2, K_2(p) \rangle; \quad \lambda = (\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2) \in \mathbb{R}^{1+d(K)}. \end{aligned}$$

Здесь $\lambda^0 \in \mathbb{R}$, $\lambda^s \in \mathbb{R}^{d(K_s)}$, $s = 1, 2$, а ψ – это n -мерный вектор-столбец.

Будем говорить, что допустимый процесс $(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$ удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа, если существует такой вектор λ , удовлетворяющий условиям

$$|\lambda| = 1, \quad \lambda^0 \geq 0, \quad \lambda^1 \geq 0, \quad \langle \lambda^1, K_1(p_0) \rangle = 0, \quad (7.4)$$

что для вектор-функции ψ , являющейся решением задачи Коши

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x_0(t), u_0(t), t, \psi, \lambda^0), \quad \psi(t_1) = \frac{\partial l}{\partial x_1}(p_0, \lambda), \quad (7.5)$$

имеет место

$$\psi(t_2) = -\frac{\partial l}{\partial x_2}(p_0, \lambda), \quad \text{где } p_0 = (x_0(t_1), x_0(t_2)), \quad (7.6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x_0(t), u_0(t), t, \psi(t), \lambda^0) = 0 \quad \forall t. \quad (7.7)$$

Здесь $\forall t$ означает “для почти всех t ”. Отметим, что в силу регулярности конечных ограничений $\lambda^0 + |\psi(t)| > 0 \forall t$.

Обозначим через $\Lambda(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$ множество векторов λ , отвечающих допустимому процессу $(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$ в силу уравнения Эйлера–Лагранжа, дающее необходимые условия экстремума первого порядка, вообще говоря, более слабые, чем принцип максимума Понтрягина и эквивалентные ему для задач, линейных по управлению. Процесс, удовлетворяющий уравнению Эйлера–Лагранжа, называется экстремалью.

Будем рассматривать экстремаль $(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$. В дальнейшем, снова для удобства удаляя из конечных ограничений (7.2) все ограничения типа неравенств, отвечающие неактивным индексам, будем считать, что $K_1(p_0) = 0$. Система уравнений в вариациях, отвечающая этой экстремали, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta x &= \delta x \frac{\partial f}{\partial x}(x_0(t), u_0(t), t) + \delta u(t) \frac{\partial f}{\partial u}(x_0(t), u_0(t), t), \\ \delta u &\in L_\infty^m[t_1, t_2]. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Рассмотрим пространство $X = \mathbb{R}^n \times L_\infty^m[t_1, t_2]$, а также лежащий в нем конус $\mathcal{K}(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$ – конус критических направлений, состоящий из таких пар $(\xi, \delta u)$, что

$$(\delta x(t_1), \delta x(t_2)) \frac{\partial K_1}{\partial p}(p_0) \leq 0, \quad (\delta x(t_1), \delta x(t_2)) \frac{\partial K_2}{\partial p}(p_0) = 0. \quad (7.9)$$

Здесь и ниже δx – соответствующее δu решение системы уравнений в вариациях (7.8) с начальным условием $\delta x(t_1) = \xi$. Положим

$$\mathcal{N}_K = \left\{ (\xi, \delta u) \in X : (\delta x(t_1), \delta x(t_2)) \frac{\partial K}{\partial p}(p_0) = 0 \right\}.$$

Очевидно, что $\mathcal{N}_K$ – это максимальное линейное подпространство, содержащееся в $\mathcal{K}(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$.

Для $\lambda \in \Lambda(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$ на пространстве X определим квадратичную форму $\Gamma(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \Gamma(\xi, \delta u; \lambda) &= \frac{\partial^2 l}{\partial p^2}(p_0, \lambda) [(\delta x(t_1), \delta x(t_2)), (\delta x(t_1), \delta x(t_2))] \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 H}{\partial (x, u)^2}(x_0(t), u_0(t), t, \psi(t), \lambda^0) [(\delta x(t), \delta u(t)), (\delta x(t), \delta u(t))] dt. \end{aligned}$$

Пусть Φ – фундаментальная матрица системы уравнений в вариациях (7.8), т.е. Φ – решение линейной однородной системы $\frac{d}{dt} \Phi = \Phi \frac{\partial f}{\partial x}(x_0(t), u_0(t), t)$, $\Phi(t_1) = I$, где I – единичная матрица. Положим

$$A = \frac{\partial K}{\partial x_1}(p_0) + \Phi(t_2) \frac{\partial K}{\partial x_2}(p_0), \quad B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0(t), u_0(t), t) \Phi^{-1}(t) \Phi(t_2) \frac{\partial K}{\partial x_2}(p_0)$$

и введем в рассмотрение *расширенную матрицу управляемости*

$$D = A^* A + \int_{t_1}^{t_2} B^*(t) B(t) dt \quad (7.10)$$

(размера $d(K) \times d(K)$). Через d обозначим размерность ядра матрицы D . Наконец через $\Lambda_\theta = \Lambda_\theta(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$ обозначим множество тех $\lambda \in \Lambda(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$, для которых индекс сужения формы $\Gamma(\lambda)$ на подпространство $\mathcal{N}_K$ не превышает числа $\theta = \min(d, 2n)$.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть допустимый процесс $(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$ является слабым минимумом в задаче (7.1)–(7.3). Тогда $\Lambda_\theta \neq \emptyset$ и для произвольных $(\xi, \delta u) \in \mathcal{K}$, удовлетворяющих

$$\left\langle (\delta x(t_1), \delta x(t_2)), \frac{\partial K_0}{\partial p}(p_0) \right\rangle + \int_{t_1}^{t_2} \left\langle (\delta x(t), \delta u(t)), \frac{\partial f^0}{\partial(x, u)}(x_0(t), u_0(t), t) \right\rangle dt \leq 0, \quad (7.11)$$

имеет место неравенство

$$\max_{\lambda \in \Lambda_\theta} \Gamma(\xi, \delta u; \lambda) \geq 0. \quad (7.12)$$

Доказательство теоремы заключается в том, чтобы переформулировать задачу оптимального управления (7.1)–(7.3) в абстрактном виде (2.1) и применить к ней теорему 2.1 с последующей расшифровкой. А именно, в силу стандартных теорем существования и единственности для произвольных $(x_1, u(\cdot)) \in X$, достаточно близких к $(x_0(t_1), u_0(\cdot))$, существует и единственно решение задачи Коши

$$\dot{x} = f(x, u(t), t), \quad x(t_1) = x_1, \quad t \in [t_1, t_2],$$

которое обозначим через $x(\cdot)$. Для указанных $(x_1, u(\cdot))$ положим

$$F_s(x_1, u(\cdot)) = K_s(x_1, x(t_2)), \quad s = 1, 2;$$

$$f_0(x_1, u(\cdot)) = K_0(x_1, x(t_2)) + \int_{t_1}^{t_2} f^0(x(t), u(t), t) dt.$$

Рассмотрим задачу

$$f_0(x_1, u(\cdot)) \rightarrow \min, \quad F_1(x_1, u(\cdot)) \leq 0, \quad F_2(x_1, u(\cdot)) = 0. \quad (7.13)$$

Точка $(x_0(t_1), u_0(\cdot))$ является в ней минимумом, локальным относительно конечной топологии. Поэтому к ней применимы необходимые условия первого и второго порядка теоремы 2.1. При этом принцип Лагранжа (2.2) после стандартных преобразований (подробности см. в [3; § 4.1]) дает условия Эйлера–Лагранжа, а (2.4), после таких же преобразований, дает (7.12). При этом используется, что коразмерность подпространства $\mathcal{N}_K \subseteq X$ равна $d(K) - d$ (см. предложение 1 из [42]) и $\mathcal{N}_K$ совпадает с ядром производной отображения $F = (F_1, F_2): X \rightarrow \mathbb{R}^{d(K)}$ в точке $(x_0(t_1), u_0(\cdot))$.

Обсудим теорему. Как известно, для экстремали $(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$ условие $d = 0$ равносильно управляемости системы уравнений в вариациях (7.8) (условие нормальности), из которой вытекает локальная управляемость системы (7.1) в окрестности $(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$. Если хотя бы один из концов траектории x_1 или x_2 свободен (т. е. отображение K от соответствующей переменной x_1 или x_2 не зависит), то $d = 0$. Если же хотя бы один из концов траектории x_1 или x_2 заранее фиксирован, то можно взять $\theta = \min(d, n)$.

Пусть концевые ограничения типа неравенств отсутствуют (т. е. $d(K_1) = 0$). Тогда предположение (7.11) в формулировке теоремы можно опустить. Если при этом $d = 0$, то $\Lambda(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$ состоит из единственной точки λ и теорема гарантирует неотрицательность формы $\Gamma(\lambda)$ на $\mathcal{K}$, а это классические необходимые условия второго порядка. Если же экстремаль, являющаяся слабым минимумом, аномальна, (т. е. $d \neq 0$), то может не существовать такого $\lambda \in \Lambda(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$, что форма $\Gamma(\lambda)$ неотрицательна на $\mathcal{K}$. Соответствующий пример был предложен Э. Дж. Макшейном еще в 1941 г. (см. [11]).

Задачи со смешанными ограничениями. Рассмотрим задачу оптимального управления со смешанными ограничениями

$$R_1(x, u, t) \leq 0, \quad R_2(x, u, t) = 0. \quad (7.14)$$

Здесь $R_s: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{d(R_s)}$, $s = 1, 2$, – заданные отображения, удовлетворяющие тем же предположениям гладкости, что и f . В этой задаче допустимым процессом называется пара вектор-функций $(x(t), u(t))$, $t \in [t_1, t_2]$, в которой $u(\cdot)$ – допустимое управление, а соответствующее ему решение $x(\cdot)$ уравнения (7.1) удовлетворяет концевым ограничениям (7.2) и смешанным ограничениям $R_1(x(t), u(t), t) \leq 0$, $R_2(x(t), u(t), t) = 0 \quad \forall t$.

Рассмотрим допустимый процесс $(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$. Будем предполагать, что смешанные ограничения регулярны вдоль этого процесса, т. е. существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для почти всех $t \in [t_1, t_2]$ у матрицы $\frac{\partial R}{\partial u}(t)$ найдется минор порядка $|I_{\varepsilon_0}(t)|$, стоящий в последних $d(R_2)$ столбцах, а также в столбцах с номерами $i \in I_{\varepsilon_0}(t)$, модуль которого не меньше ε_0 . Здесь $R = (R_1, R_2)$, $|I|$ – количество элементов множества I и для $\varepsilon \geq 0$

$$I_\varepsilon(t) := \{i: 1 \leq i \leq d(R_1), R_{1,i}(t) \geq -\varepsilon\},$$

а также используются обозначения

$$R_1(t) := R_1(x_0(t), u_0(t), t), \quad \frac{\partial R}{\partial u}(t) := \frac{\partial R}{\partial u}(x_0(t), u_0(t), t) \quad \text{и т. д.}$$

Будем говорить, что допустимый процесс $(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$ удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа в задаче со смешанными ограничениями, если существуют вектор λ , удовлетворяющий (7.4), и вектор-функция

$$\begin{aligned} \eta &= (\eta_1, \eta_2): \eta_s \in L_\infty^{d(R_s)}[t_1, t_2], \quad s = 1, 2; \\ \eta_1(t) &\geq 0, \quad \langle \eta_1(t), R_1(t) \rangle = 0 \quad \forall t \end{aligned}$$

такие, что вектор-функция ψ , являющаяся решением задачи Коши

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x_0(t), u_0(t), t, \psi, \lambda^0) + \eta(t) \frac{\partial R}{\partial x}(t)^*, \quad \psi(t_1) = \frac{\partial l}{\partial x_1}(p_0, \lambda),$$

удовлетворяет условиям (7.6) и

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x_0(t), u_0(t), t, \psi(t), \lambda^0) - \eta(t) \frac{\partial R}{\partial u}(t)^* = 0 \quad \forall t.$$

Используя регулярность смешанных ограничений и неравенство Гронвуолла, получаем, что каждому вектору λ в силу условий Эйлера–Лагранжа отвечает единственная пара $(\psi(\cdot), \eta(\cdot))$. Через $\Lambda_R(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$ обозначим множество таких λ , что пара (λ, η) для некоторой вектор-функции η отвечает процессу $(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$ в силу уравнения Эйлера–Лагранжа в задаче со смешанными ограничениями.

Через $\mathcal{K}_R$ обозначим множество пар $(\xi, \delta u) \in X$, удовлетворяющих условиям (7.9) и

$$\begin{aligned} \left\langle \delta x(t), \frac{\partial R_{1,i}}{\partial x}(t) \right\rangle + \left\langle \delta u(t), \frac{\partial R_{1,i}}{\partial u}(t) \right\rangle &\leq 0 \quad \forall i \in I_0(t), \\ \delta x(t) \frac{\partial R_2}{\partial x}(t) + \delta u(t) \frac{\partial R_2}{\partial u}(t) &= 0 \quad \forall t. \end{aligned}$$

В X рассмотрим подпространство $\mathcal{N}_R$, состоящее из всех $(\xi, \delta u)$, для которых

$$\begin{aligned} \left\langle \delta x(t), \frac{\partial R_{1,i}}{\partial x}(t) \right\rangle + \left\langle \delta u(t), \frac{\partial R_{1,i}}{\partial u}(t) \right\rangle &= 0 \quad \forall i \in I_0(t), \\ \delta x(t) \frac{\partial R_2}{\partial x}(t) + \delta u(t) \frac{\partial R_2}{\partial u}(t) &= 0 \quad \forall t. \end{aligned}$$

Для $\lambda \in \Lambda_R(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$ на X определим квадратичную форму $\Gamma_R(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \Gamma_R(\xi, \delta u; \lambda) &= \Gamma(\xi, \delta u; \lambda) \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \left\langle \eta(t), \frac{\partial^2 R}{\partial(x, u)^2}(x_0(t), u_0(t), t) [(\delta x(t), \delta u(t)), (\delta x(t), \delta u(t))] \right\rangle dt. \end{aligned}$$

Через $\Lambda_{\theta_R} = \Lambda_{\theta_R}(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$ обозначим множество тех $\lambda \in \Lambda_R(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$, для которых индекс сужения формы $\Gamma_R(\lambda)$ на подпространство $\mathcal{N}_K \cap \mathcal{N}_R$ не превышает числа $\theta_R = \min(d_R, 2n)$. Здесь d_R размерность ядра расширенной матрицы управляемости D_R , явный вид которой приведен в [42]. В частном случае, когда отображение R от переменной x не зависит, D_R вычисляется по формуле (7.10), в которой матрица $B(t)$ заменена на $B_R(t) = P(t)B(t)$. Здесь $P(t)$ – оператор ортогонального проектирования $\mathbb{R}^m$ на подпространство

$$\left\{ u \in \mathbb{R}^m : \left\langle \frac{\partial R_{1,i}}{\partial u}(t), u \right\rangle = 0 \quad \forall i \in I_0(t), \quad u \frac{\partial R_2}{\partial u}(t) = 0 \right\}.$$

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть допустимый процесс $(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$ является слабым минимумом в задаче со смешанными ограничениями (7.1)–(7.3), (7.14). Тогда $\Lambda_{\theta_R} \neq \emptyset$ и для произвольных $(\xi, \delta u) \in \mathcal{K}_R$, удовлетворяющих (7.11), имеет место неравенство

$$\max_{\lambda \in \Lambda_{\theta_R}} \Gamma_R(\xi, \delta u; \lambda) \geq 0. \quad (7.15)$$

Вот суть доказательства теоремы 7.2. Вначале, вводя дополнительное управление $v \in \mathbb{R}^{d(R_1)}$, рассмотрим задачу (7.1)–(7.3) со смешанными ограничениями

$$R_1(x, u, t) - v = 0, \quad R_2(x, u, t) = 0, \quad v \leq 0,$$

которая, очевидно, эквивалентна исходной задаче (7.1)–(7.3), (7.14). Используя регулярность смешанных ограничений (7.14), разрешая локально систему уравнений $R_1(x, u, t) - v = 0$, $R_2(x, u, t) = 0$ относительно части переменных, сведем исходную задачу к задаче, в которой вместо смешанных ограничений имеются лишь геометрические ограничения на управления $v \leq 0$ (подробности см. в [42]).

Переформулировав рассматриваемую задачу как задачу минимизации в банаховом пространстве $\mathbb{R}^n \times L_\infty^m[t_1, t_2]$, получаем задачу (7.13), но с дополнительным ограничением на управление: $v(\cdot) \in C$, где $C = \{v(\cdot) \in L_\infty^{d(R_1)} : v(t) \leq 0 \forall t\}$. Применяя к этой задаче теорему 2.4 (подробности см. в [43]), получаем, что $\Lambda_{\theta_R} \neq \emptyset$, и для произвольных $(\xi, \delta u) \in \widetilde{\mathcal{K}}$ имеет место (7.15). Здесь $\widetilde{\mathcal{K}}$ состоит из тех $(\xi, \delta u) \in X$, для которых выполняются условия (7.9), (7.11) и $\delta v \in C + \text{span}\{v_0\}$, где δv и v_0 – первые $d(R_1)$ координат вектор-функций δu и u_0 соответственно. Но по теореме 2 из [12] замыкание множества $\widetilde{\mathcal{K}}$ совпадает с множеством тех $(\xi, \delta u) \in \mathcal{K}_R$, для которых выполняется (7.11). Кроме того, как отмечалось в разделе 2 (см. также лемму 1 из [12]), множество Λ_{θ_R} компактно и, значит, функция максимума $\gamma(\xi, \delta u) = \max_{\lambda \in \Lambda_{\theta_R}} \Gamma(\xi, \delta u; \lambda)$ непрерывна.

Искомое утверждение вытекает из неотрицательности функции γ на $\widetilde{\mathcal{K}}$.

В задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями и с нефиксированным временем необходимые условия второго порядка, заключающиеся в непустоте множества множителей Лагранжа Λ_s , при соответствующем выборе числа s были получены в [9]–[11]. В указанных работах необходимые условия первого порядка брались в форме принципа максимума Понтрягина, а не уравнения Эйлера–Лагранжа.

8. Некоторые приложения

Теория бифуркаций. Пусть X , Σ , Y – банаховы пространства и задано отображение $F: X \times \Sigma \rightarrow Y$, которое дважды непрерывно дифференцируемо в окрестности точки (x_0, σ_0) . Будем предполагать, что подпространство $\ker \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, \sigma_0)$ топологически дополняемо, а коразмерность подпространства $\text{im} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, \sigma_0)$ конечна (тогда оно замкнуто). Пусть $F(x_0, \sigma) = 0$ для всех σ из некоторой окрестности точки σ_0 .

Напомним, что точка (x_0, σ_0) называется точкой бифуркации, если существует последовательность $\{(x_i, \sigma_i)\}$, $x_i \neq 0 \forall i$, которая сходится к (x_0, σ_0) , и $F(x_i, \sigma_i) = 0 \forall i$. Если точка x_0 нормальна, т.е. $\text{im} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, \sigma_0) = Y$, то бифуркации описываются с помощью ядра $\ker \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, \sigma_0)$. Особый интерес представляют точки бифуркации (x_0, σ_0) , когда x_0 аномальна.

С помощью результатов раздела 2 можно получить достаточные условия бифуркации и в аномальном случае. Рассмотрим описанную выше точку (x_0, σ_0) . Вначале с помощью процедуры Ляпунова–Шмидта сведем задачу

к случаю, когда $Y = \mathbb{R}^k$, $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, \sigma_0) = 0$. Затем рассмотрим задачу минимизации

$$f_0(x, \sigma) := \langle x - x_0, x^* \rangle \rightarrow \min, \quad F(x, \sigma) = 0,$$

где x^* – произвольный ненулевой линейный непрерывный функционал на X . Ясно, что если точка (x_0, σ_0) не является локальным минимумом рассматриваемой задачи, то она является точкой бифуркации. Поэтому, применяя теорему 2.7 (точнее, выписывая отрицание условия (2.18)), получаем достаточные условия бифуркации (см. [44]).

Теория чувствительности. В приложениях нередко приходится исследовать не одну экстремальную задачу, а целое их семейство, например,

$$f_0(x, \sigma) \rightarrow \min, \quad F(x, \sigma) = 0,$$

где $\sigma \in \Sigma$ – параметр. Спрашивается, как зависит от σ точка минимума рассматриваемой задачи, или хотя бы значение этого минимума $\omega(\sigma)$, и даже будет ли непусто множество допустимых точек $\{x: F(x, \sigma) = 0\}$ при всех σ , близких к номинальному значению параметра σ_0 , при котором решение x_0 известно. Например, непрерывность функции минимума ω означает корректность задачи. Если точка x_0 нормальна, то эти вопросы хорошо изучены с помощью классической теоремы о неявной функции (см. [14] и библиографию там). Однако, если точка x_0 аномальна, то эта техника уже неприменима. Но и в этом случае с помощью теорем о неявной функции из раздела 6 и близких к ним утверждений в [45] исследована полунепрерывность сверху и снизу функции ω , для нее получены оценки сверху, снизу и асимптотические разложения. В [46] эти результаты обобщены на задачу с ограничениями $F(x, \sigma) \in C$, где C – выпуклый замкнутый конус.

Теория управляемости. Рассмотрим управляемую систему (7.1) с начальным условием $x(t_1) = x_1$, где x_1 задано. Пусть задан допустимый процесс $(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$. Спрашивается, является ли он локально управляемым, т.е. можно ли с помощью допустимых управлений, достаточно близких к $u_0(\cdot)$, попасть по траектории управляемой системы (7.1) в момент времени t_2 в произвольную точку, лежащую в некоторой окрестности точки $x_0(t_2)$. Если для рассматриваемого процесса линейная система уравнений в вариациях (7.8) управляема, т.е. ядро расширенной матрицы управляемости (7.10) является нулевым, то утвердительный ответ на этот вопрос дает классическая теорема об обратной функции. Если же это ядро ненулевое, т.е. процесс $(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$ является аномальным, то для исследования локальной управляемости классическая теорема об обратной функции уже неприменима. Но и в этом случае теоремы о неявной и обратной функции из раздела 6 дают достаточные условия локальной управляемости (см. [47]).

Теория квадратичных отображений. В недавней работе [48] среди других сформулированы две открытые проблемы теории квадратичных отображений. Первая из них: для заданного квадратичного отображения $Q = (q_1, \dots, q_k): X = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ найти достаточные условия, сформулированные

в терминах матриц Q_i , при которых множество его нетривиальных нулей $K = \{x: Q(x) = 0, x \neq 0\}$ пусто. Вторая проблема заключается в нахождении достаточных условий, при которых

$$\begin{aligned} \max\{q_1(x), \dots, q_k(x)\} &> 0 \quad \forall x \neq 0 \\ (\text{соответственно } \max\{q_1(x), \dots, q_k(x)\} &\geq 0 \quad \forall x). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Решение этих задач основано на результатах раздела 5. Для целых $s \geq 0$ положим

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_s^+ &= \{y^* \neq 0: \text{ind}^+ y^* Q \leq s\}, \quad \widetilde{\mathcal{Y}}_s = \{y^* \in \mathcal{Y}_s: y^* \geq 0\}, \\ \widetilde{\mathcal{Y}}_s^+ &= \{y^* \in \mathcal{Y}_s^+: y^* \geq 0\}. \end{aligned}$$

Здесь $\text{ind}^+ q$ – неотрицательный индекс квадратичной формы q , т. е. количество неположительных собственных значений матрицы этой формы. Отметим, что, в отличие от конуса $\mathcal{Y}_s$, пересечение конуса $\mathcal{Y}_s^+$ с единичной сферой может оказаться незамкнуто.

ТЕОРЕМА 8.1. *Условие $K = \emptyset$ эквивалентно тому, что*

$$\forall x \in X \setminus \{0\} \quad \exists y^* \in \mathcal{Y}_{k-1}^+: \langle y^*, Q(x) \rangle > 0.$$

Если выполняется (5.19), то условие $K = \emptyset$ эквивалентно тому, что

$$\forall x \in X \setminus \{0\} \quad \exists y^* \in \mathcal{Y}_{k-2}^+: \langle y^*, Q(x) \rangle > 0.$$

ТЕОРЕМА 8.2. *Первое условие из (8.1) эквивалентно тому, что*

$$\forall x \in X \setminus \{0\} \quad \exists y^* \in \widetilde{\mathcal{Y}}_{k-2}^+: \langle y^*, Q(x) \rangle > 0.$$

Второе условие из (8.1) эквивалентно тому, что

$$\forall x \in X \quad \exists y^* \in \widetilde{\mathcal{Y}}_{k-2}^+: \langle y^*, Q(x) \rangle \geq 0.$$

Итак, теорема 8.1 дает решение первой задачи, а теорема 8.2 – второй. Доказательство теоремы 8.1 основано на теореме 5.2, а теорема 8.2 выводится из теоремы 8.1.

Список литературы

- [1] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, М., 1974, 479 с.; англ. пер.: A. D. Ioffe, V. M. Tikhomirov, *Theory of extremal problems*, Stud. Math. Appl., **6**, North-Holland, Amsterdam–New York, 1979, xii+460 pp.
- [2] A. L. Dontchev, R. T. Rockafellar, *Implicit functions and solution mappings. A view from variational analysis*, Springer Monogr. Math., Springer, Dordrecht, 2009, xii+375 pp.
- [3] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979, 430 с.; англ. пер.: V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov, S. V. Fomin, *Optimal control*, Contemp. Soviet Math., Consultants Bureau, New York, 1987, xiv+309 pp.

- [4] А. В. Арутюнов, “Условия второго порядка в экстремальных задачах с конечномерным образом. 2-нормальные отображения”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **60**:1 (1996), 37–62; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “Second-order conditions in extremal problems with finite-dimensional range. 2-normal maps”, *Izv. Math.*, **60**:1 (1996), 39–65.
- [5] А. В. Арутюнов, *Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи*, Изд-во “Факториал”, М., 1997, 255 с.; см. также: A. V. Arutyunov, *Optimality conditions: Abnormal and degenerate problems*, *Math. Appl.*, **526**, Kluwer, Dordrecht, 2000, x+299 pp.
- [6] А. В. Арутюнов, “Необходимые условия экстремума и теорема об обратной функции без априорных предположений нормальности”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко, Тр. МИАН, **236**, Наука, М., 2002, 33–44; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “Necessary conditions for an extremum and an inverse function theorem without a priori normality assumptions”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **236** (2002), 25–36.
- [7] Е. С. Левитин, А. А. Милютин, Н. П. Осмоловский, “Условия высших порядков локального минимума в задачах с ограничениями”, *УМН*, **33**:6(204) (1978), 85–148; англ. пер.: E. S. Levitin, A. A. Milyutin, N. P. Osmolovskii, “Conditions of high order for a local minimum in problems with constraints”, *Russian Math. Surveys*, **33**:6 (1978), 97–168.
- [8] А. А. Милютин, “О квадратичных условиях экстремума в гладких задачах с конечномерным образом”, *Методы теории экстремальных задач в экономике*, Наука, М., 1981, 137–177.
- [9] А. В. Арутюнов, Н. Т. Тынянский, “К необходимым условиям локального минимума в теории оптимального управления”, *Докл. АН СССР*, **275**:2 (1984), 268–272; англ. пер.: A. V. Arutyunov, N. T. Tynyanskiĭ, “On necessary conditions for a local minimum in optimal control theory”, *Soviet Math. Dokl.*, **29**:2 (1984), 176–179.
- [10] А. В. Арутюнов, “К необходимым условиям оптимальности в задаче с фазовыми ограничениями”, *Докл. АН СССР*, **280**:5 (1985), 1033–1037; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “On necessary optimality conditions in a problem with phase constraints”, *Soviet Math. Dokl.*, **31**:1-6 (1985), 174–177.
- [11] А. В. Арутюнов, “Возмущения экстремальных задач с ограничениями и необходимые условия оптимальности”, *Итоги науки и техники. Матем. анализ.*, **27**, ВИНТИ, М., 1989, 147–235; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “Perturbations of extremal problems with constraints, and necessary conditions for optimality”, *J. Soviet Math.*, **54**:6 (1991), 1342–1400.
- [12] А. В. Арутюнов, Н. Ю. Черникова, “Свойства конуса критических направлений в задачах оптимального управления”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. XV. Вычисл. матем. Кибернет.*, 2006, № 2, 15–19; англ. пер.: A. V. Arutyunov, N. Yu. Chernikova, “Critical cone properties in optimal control problems”, *Moscow Univ. Comput. Math. Cybernet.*, 2006, № 2, 13–18.
- [13] A. Arutyunov, F. L. Pereira, “Second-order necessary optimality conditions for problems without a priori normality assumptions”, *Math. Oper. Res.*, **31**:1 (2006), 1–12.
- [14] J. F. Bonnans, A. Shapiro, *Perturbation analysis of optimization problems*, Springer Ser. Oper. Res., Springer-Verlag, New York, 2000, xviii+601 pp.
- [15] J. F. Bonnans, R. Cominetti, A. Shapiro, “Second order optimality conditions based on parabolic second order tangent sets”, *SIAM J. Optim.*, **9**:2 (1999), 466–492.
- [16] S. M. Robinson, “Stability theory for systems of inequalities. Part II: Differentiable nonlinear systems”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **13**:4 (1976), 497–513.

- [17] А. В. Арутюнов, Д. Ю. Карамзин, “Необходимые условия минимума в аномальных задачах с геометрическими ограничениями”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **47**:3 (2007), 364–375; англ. пер.: A. V. Arutyunov, D. Yu. Karamzin, “Necessary optimality conditions for abnormal problems with geometric constraints”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **47**:3 (2007), 349–360.
- [18] А. В. Арутюнов, Д. Ю. Карамзин, “Необходимые условия экстремума в аномальной задаче с ограничениями типа равенств”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46**:8 (2006), 1363–1368; англ. пер.: A. V. Arutyunov, D. Yu. Karamzin, “Necessary optimality conditions in an abnormal optimization problem with equality constraints”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **46**:8 (2006), 1293–1298.
- [19] М. Хирш, *Дифференциальная топология*, Мир, М., 1979, 279 с.; пер. с англ.: M. W. Hirsch, *Differential topology*, Grad. Texts Math., **33**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1976, x+221 pp.
- [20] Е. Р. Аваков, “Условия экстремума для гладких задач с ограничениями типа равенств”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **25**:5 (1985), 680–693; англ. пер.: E. R. Avakov, “Extremum conditions for smooth problems with equality-type constraints”, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, **25**:3 (1985), 24–32.
- [21] А. Arutyunov, E. Avakov, B. Gel'man, A. Dmitruk, V. Obukhovskii, “Locally covering maps in metric spaces and coincidence points”, *J. Fixed Point Theory Appl.*, **5**:1 (2009), 106–127.
- [22] Е. Р. Аваков, А. В. Арутюнов, “Теорема об обратной функции и условия экстремума для аномальных задач с незамкнутым образом”, *Матем. сб.*, **196**:9 (2005), 3–22; англ. пер.: E. R. Avakov, A. V. Arutyunov, “Inverse function theorem and conditions of extremum for abnormal problems with non-closed range”, *Sb. Math.*, **196**:9 (2005), 1251–1269.
- [23] A. V. Arutyunov, E. R. Avakov, A. F. Izmailov, “Necessary optimality conditions for constrained optimization problems under relaxed constraint qualifications”, *Math. Program.*, **114**:1, Ser. A (2008), 37–68.
- [24] А. В. Арутюнов, Д. Ю. Карамзин, “Регулярные нули квадратичных отображений и их приложение”, *Матем. сб.*, **202**:6 (2011), 3–28; англ. пер.: A. V. Arutyunov, D. Yu. Karamzin, “Regular zeros of quadratic maps and their application”, *Sb. Math.*, **202**:6 (2011), 783–806.
- [25] М. Ф. Сухинин, “Полутейлоровские снизу отображения и достаточные условия экстремума”, *Матем. сб.*, **182**:6 (1991), 877–891; англ. пер.: M. F. Sukhinin, “Lower semi-Taylor mappings and sufficient conditions for an extremum”, *Math. USSR-Sb.*, **73**:1 (1992), 257–271.
- [26] Р. Беллман, *Введение в теорию матриц*, Наука, М., 1969, 367 с.; пер. с англ.: R. Bellman, *Introduction to matrix analysis*, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1960, xx+328 pp.
- [27] А. В. Арутюнов, “О свойствах квадратичных отображений в банаховом пространстве”, *Матем. заметки*, **50**:4 (1991), 10–20; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “Properties of quadratic maps in a Banach space”, *Math. Notes*, **50**:4 (1991), 993–999.
- [28] Е. Р. Аваков, А. А. Аграчев, А. В. Арутюнов, “Множество уровня гладкого отображения в окрестности особой точки и нули квадратичного отображения”, *Матем. сб.*, **182**:8 (1991), 1091–1104; англ. пер.: E. R. Avakov, A. A. Agrachev, A. V. Arutyunov, “The level set of a smooth mapping in a neighborhood of a singular point, and zeros of a quadratic mapping”, *Math. USSR-Sb.*, **73**:2 (1992), 455–466.
- [29] L. L. Dines, “On the mapping of quadratic forms”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **47** (1941), 494–498.
- [30] А. А. Аграчев, “Топология квадратичных отображений и гессианы гладких отображений”, *Итоги науки и техники. Алгебра. Топол. Геом.*, **26**, ВИНТИ, М., 1988,

- 85–124; англ. пер.: A. A. Agrachev, “Topology of quadratic maps and Hessians of smooth maps”, *J. Soviet Math.*, **49**:3 (1990), 990–1013.
- [31] А. С. Матвеев, “О выпуклости образов квадратичных отображений”, *Алгебра и анализ*, **10**:2 (1998), 159–196; англ. пер.: A. S. Matveev, “On the convexity of the images of quadratic mappings”, *St. Petersburg Math. J.*, **10**:2 (1999), 343–372.
- [32] А. В. Арутюнов, “Неотрицательность квадратичных форм на пересечении квадрик и квадратичные отображения”, *Матем. заметки*, **84**:2 (2008), 163–174; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “Nonnegativity of quadratic forms on intersections of quadrics and quadratic maps”, *Math. Notes*, **84**:1–2 (2008), 155–165.
- [33] А. В. Арутюнов, “Положительность квадратичных форм на пересечении квадрик”, *Матем. заметки*, **71**:1 (2002), 27–36; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “Positive quadratic forms on intersections of quadrics”, *Math. Notes*, **71**:1 (2002), 25–33.
- [34] А. В. Арутюнов, “О вещественных квадратичных формах, аннулирующих пересечение квадрик”, *УМН*, **60**:1(361) (2005), 161–162; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “On real quadratic forms annihilating an intersection of quadrics”, *Russian Math. Surveys*, **60**:1 (2005), 157–158.
- [35] А. В. Арутюнов, “Теорема о неявной функции как реализация принципа Лагранжа. Анормальные точки”, *Матем. сб.*, **191**:1 (2000), 3–26; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “Implicit function theorem as a realization of the Lagrange principle. Abnormal points”, *Sb. Math.*, **191**:1 (2000), 1–24.
- [36] А. В. Арутюнов, В. Ячимович, “К теории анормальных экстремальных задач”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. XV. Вычисл. матем. кибернет.*, 2000, № 1, 34–40; англ. пер.: A. V. Arutyunov, V. Yachimovich, “On extremum theory for abnormal problems”, *Moscow Univ. Comput. Math. Cybernet.*, 2000, № 1, 30–37.
- [37] А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский, “Существование обратных отображений и их свойства”, *Дифференциальные уравнения и топология*. II, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Тр. МИАН, **271**, МАИК, М., 2010, 18–28; англ. пер.: A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, “Existence and properties of inverse mappings”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **271** (2010), 12–22.
- [38] А. В. Арутюнов, “Теорема о неявной функции без априорных предположений нормальности”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46**:2 (2006), 205–215; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “Implicit function theorem without a priori assumptions about normality”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **46**:2 (2006), 195–205.
- [39] А. В. Арутюнов, “Накрывание нелинейных отображений на конусе в окрестности анормальной точки”, *Матем. заметки*, **77**:4 (2005), 483–497; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “Covering of nonlinear maps on a cone in neighborhoods of irregular points”, *Math. Notes*, **77**:4 (2005), 447–460.
- [40] А. В. Арутюнов, “К теоремам о неявной функции в анормальных точках”, Тр. ИММ УрО РАН, **16**, 2010, 30–39; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “On implicit function theorems at abnormal points”, *Proc. Inst. Math. Mech.*, **271**:1, suppl. 1 (2010), 18–27.
- [41] Е. Р. Аваков, “Теоремы об оценках в окрестности особой точки отображения”, *Матем. заметки*, **47**:5 (1990), 3–13; англ. пер.: E. R. Avakov, “Theorems on estimates in the neighborhood of a singular point of a mapping”, *Math. Notes*, **47**:5 (1990), 425–432.
- [42] А. В. Арутюнов, Д. Ю. Карамзин, “Необходимые условия слабого минимума в задаче оптимального управления со смешанными ограничениями”, *Дифференц. уравнения*, **41**:11 (2005), 1458–1468; англ. пер.: A. V. Arutyunov, D. Yu. Karamzin, “Necessary conditions for a weak minimum in an optimal control problem with mixed constraints”, *Differ. Equ.*, **41**:11 (2005), 1532–1543.
- [43] А. В. Арутюнов, Ю. С. Верещагина, “О необходимых условиях второго порядка в задачах оптимального управления”, *Дифференц. уравнения*, **38**:11 (2002),

- 1443–1450; англ. пер.: A. V. Arutyunov, Yu. S. Vereshchagina, “On necessary second-order conditions in optimal control problems”, *Differ. Equ.*, **38**:11 (2002), 1531–1540.
- [44] A. V. Arutyunov, A. F. Izmailov, V. Jaćimović, “New bifurcation theorems via the second-order optimality conditions”, *J. Math. Anal. Appl.*, **359**:2 (2009), 752–764.
- [45] А. В. Арутюнов, А. Ф. Измаилов, “Теория чувствительности для аномальных задач оптимизации с ограничениями типа равенств”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **43**:2 (2003), 186–202; англ. пер.: A. V. Arutyunov, A. F. Izmailov, “The sensitivity theory for abnormal optimization problems with equality constraints”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **43**:2 (2003), 178–193.
- [46] A. V. Arutyunov, A. F. Izmailov, “Sensitivity analysis for cone-constrained optimization problems under the relaxed constraint qualifications”, *Math. Oper. Res.*, **30**:2 (2005), 333–353.
- [47] А. В. Арутюнов, В. Ячимович, “2-нормальные процессы управляемых динамических систем”, *Дифференц. уравнения*, **38**:8 (2002), 1017–1029; англ. пер.: A. V. Arutyunov, V. Jaćimović, “2-normal processes in controlled dynamical systems”, *Differ. Equ.*, **38**:8 (2002), 1081–1094.
- [48] J.-B. Hiriart-Urruty, “Potpourri of conjectures and open questions in nonlinear analysis and optimization”, *SIAM Rev.*, **49**:2 (2007), 255–273.

А. В. Арутюнов (A. V. Arutyunov)
Российский университет дружбы народов
E-mail: arutun@orc.ru

Поступила в редакцию
14.06.2011