Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Булинский, Алгебраические K -системы и полупотоки сдвигов Пауэрса,
УМН, 1996, том 51, выпуск 2, 145–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm948>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 10:40:41

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ K -СИСТЕМЫ И ПОЛУПОТОКИ СДВИГОВ ПАУЭРСА

А. В. Булинский

Некоммутативные (или квантовые) K -системы были введены в 70-е гг. Ж. Эмхом [1] как обобщение классических динамических систем (ДС), изучавшихся А. Н. Колмогоровым и Я. Г. Синаем. Тогда же и позднее были предложены различные концепции некоммутативной динамической энтропии, см., например, [2]. Теперь различают понятие алгебраической K -системы [3], восходящее к [1], и энтропийной K -системы, совпадение которых установлено при дополнительных свойствах динамики. Имея в виду проблему исследования инвариантов ДС, ограничимся здесь рассмотрением простых алгебраических характеристик. В данной работе, продолжающей [4], указано соответствие между K -системами Эмха и введенными Р. Пауэрсом в середине 80-х гг. полупотоками сдвигов операторных алгебр, см. [5].

Нам понадобится ряд определений. Пусть ДС $(M, (\beta_t)_{t \in T})$ образована W^* -алгеброй M с единицей 1 и (полу)группой вполне положительных нормальных отображений $\beta_t \in \mathcal{L}(M)$; параметр (время) $t \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{R}_+$) и $\beta_s \beta_t = \beta_{s+t}$ при $s, t \in T$; $\beta_0 = \text{Id}_M$. При $T = \mathbb{R}$ все $\beta_t \in \text{Aut}(M)$ и ДС обратима во времени. Динамика (σ -слабо) непрерывна, если непрерывны все функции $t \mapsto \varphi(\beta_t a)$, $\varphi \in M_*$, $a \in M$. Непрерывную полугруппу $(\beta_t)_{t \geq 0} \subset \text{End}(M)$, следуя [5], именуем E_0 -полугруппой, а $\beta \in \text{End}(M)$ назовем сдвигом Пауэрса, если $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \beta^n \mu = \mathbb{C}1$. Непрерывным полупотоком сдвигов назовем E_0 -полугруппу, которая при $t > 0$ состоит из сдвигов (термин Пауэрса – “поток сдвигов”), и рассмотрим далее дилатации (продолжения) такого полупотока до обратимого потока на объемлющей алгебре. Назовем $\beta \in \mathcal{L}(M)$ совместимым с точным нормальным состоянием (т.н.с.) $\omega \in M_*$, если (I) $\omega \circ \beta = \omega$ (инвариантность ω), и вполне совместимым, если также (II) $\sigma_t^\omega \beta = \beta \sigma_t^\omega$, $t \in \mathbb{R}$, где (σ_t^ω) – группа модулярных автоморфизмов (ГМА), отвечающих ω .

Алгебраическая K -система Эмха $(\mathfrak{M}, (\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}}, \varphi; \mathfrak{N})$ характеризуется наличием W^* -подалгебры $\mathfrak{N}$ (K -подалгебры), такой, что 1) $\alpha_t \mathfrak{N} \supset \mathfrak{N}$, $t > 0$, 2) $\bigvee_{t \geq 0} \alpha_t \mathfrak{N} = \mathfrak{M}$, 3) $\bigcap_{t < 0} \alpha_t \mathfrak{N} = \mathbb{C}1$, 4) для ГМА $\sigma_t^\varphi \mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}$, $t \in \mathbb{R}$. Эквивалентность ДС $(M^{(k)}, (\beta_t^{(k)})_{t \in T}, \omega^{(k)})$, $k = 1, 2$, подразумевает сопряженность посредством W^* -изоморфизма $\gamma: M^{(1)} \rightarrow M^{(2)}$, сплетающего динамики $(\gamma \beta_t^{(1)} = \beta_t^{(2)} \gamma, t \in T)$ и сохраняющего т.н.с. $(\omega^{(2)} \circ \gamma = \omega^{(1)})$; последнее условие излишне для полупотоков сдвигов. От эквивалентных K -систем из-за неединственности K -подалгебр требуем еще, чтобы $\gamma \mathfrak{N}^{(1)} = \mathfrak{N}^{(2)}$ для выделенных подалгебр. ДС $(\mathfrak{M}, (\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}}, \varphi)$ является дилатацией $(M, (\beta_t)_{t \geq 0}, \omega)$, если существуют нормальные вложения $j: M \rightarrow \mathfrak{M}$ и проекция $p: \mathfrak{M} \rightarrow M$ такие, что $\varphi \circ j = \omega$, $\omega \circ p = \varphi$, $p \circ j = \text{Id}_M$ и $\beta_t = p \alpha_t j$, $t \geq 0$. Дилатация минимальна, если $\alpha_t j M$ порождают $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M} = \bigvee_t \alpha_t j M$). Марковость дилатации понимаем в смысле [6].

Примеры [5] полупотоков сдвигов на факторах типа I_∞ и II_1 получены поднятием полупотоков сдвигов в гильбертовом пространстве на C^* -алгебру антикоммутирующих соотношений и отвечают представлениям алгебры по (неточному) фоковскому состоянию и следу (с тривиальной ГМА). Обобщение конструкции (сравн. с [7]) дает нам модельные примеры связи сдвиговых систем.

ТЕОРЕМА 1. *Непрерывный квазисвободный полупоток сдвигов Пауэрса, вполне совместимый с т.н.с., существует на каждом гиперконечном факторе типа III_λ , $0 < \lambda < 1$. Такая ДС имеет минимальную марковскую дилатацию до квазисвободной K -системы Эмха, которая остается K -системой при обращении времени.*

Заметим, что конструкция теоремы 1 дает два однопараметрических семейства ДС $(M^{(\nu)}, (\beta_t^{(\nu)})_{t \geq 0}, \omega^{(\nu)})$, где $\nu \in (0, 1/2)$ или $\nu \in (1/2, 1)$. При этом $\lambda = \nu(1 - \nu)^{-1}$, $\nu \in (0, 1/2)$ и $\lambda = \nu^{-1}(1 - \nu)$, $\nu \in (1/2, 1)$. Такие полупотоки сдвигов эквивалентны при условии $\nu_2 = 1 - \nu_1$, $0 < \nu_1 < 1/2$, т.е. когда действуют на изоморфных факторах типа III_λ .

Разумеется, для обратной динамики K -подалгебра будет другой. В общем случае неквазисвободных ДС инвариантность K -свойства при обращении времени не имеет места, однако справедлива

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда и Правительства России (грант № J6M100).

ЛЕММА 1. K -система $(\mathfrak{M}, (\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}}, \varphi; \mathfrak{N})$ порождает непрерывный полупоток сдвигов $\beta_t = \alpha_{-t}|_{\mathfrak{N}}, t \geq 0$, вполне совместимый с $\omega = \varphi|_{\mathfrak{N}}$.

K -подалгебра $\mathfrak{N}$ инвариантна относительно $\alpha_{-t}, t \geq 0$, и неинвариантна относительно $\alpha_t, t > 0$. В [3] рассмотрена “срезка” на $\mathfrak{N}$ динамики K -системы $(\alpha_t)_{t \geq 0}$, порождающая полугруппу $(\tau_t)_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(\mathfrak{N})$. Рассмотрим связь (τ_t) со сдвигами (β_t) . ДС $(M, (\tau_t^+)_{t \in T}, \omega)$ назовем ко-системой для $(M, (\tau_t)_{t \in T}, \omega)$, если (полу)группы (τ_t^+) и (τ_t) сопряжены относительно ω , т.е. $\omega(\tau_t(a)b) = \omega(a\tau_t^+(b))$ при всех $a, b \in M, t \in T$ [6]. Полная совместимость $(\tau_t)_{t \in T}$ с т.н.с. ω является критерием существования ко-(полу)группы $(\tau_t^+)_{t \in T}$.

ЛЕММА 2. Для обратимой динамики $\alpha_t^+ = \alpha_{-t} \in \text{Aut}(M)$ при всех $t \in \mathbb{R}$, а для необратимой $\tau_t^+ = \tau_t'', t \geq 0$, т.е. ко-полугруппа совпадает с бидуальной полугруппой $(\tau_t'')_{t \geq 0}$, введенной в [8] при условии совместимости $(\tau_t)_{t \geq 0}$ с т.н.с. ω , задающим стандартное представление M .

Теорема 3 [4] и следствие 3.2.9 [6] показывают, что для существования у ДС $(M, (\tau_t)_{t \geq 0}, \omega)$ минимальной дилатации до K -системы Эмха необходимо и достаточно, чтобы ее ко-система была полупотоком сдвигов Пауэрса.

ЛЕММА 3. Дилатация Арвесона–Кишимото [9], примененная к E_0 -полугруппе $(\beta_t)_{t \geq 0} \subset \text{End}(M)$, вполне совместимой с т.н.с. $\omega \in M_*$, определяет минимальную марковскую дилатацию $(M, (\beta_t), \omega)$ до обратимой ДС $(\mathfrak{M}, (\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}}, \varphi)$. При этом ко-ДС $(\mathfrak{M}, (\alpha_{-t})_{t \in \mathbb{R}}, \varphi)$ есть минимальная марковская дилатация для $(M, (\beta_t^+)_{t \geq 0}, \omega)$.

Пусть j – вложение M в $\mathfrak{M}$, определяющее продолжение, упомянутое в лемме 3.

ЛЕММА 4. В условиях леммы 3, если $(\beta_t)_{t \geq 0}$ есть полупоток сдвигов Пауэрса, то $(\mathfrak{M}, (\alpha_{-t})_{t \geq 0}, \varphi; \mathfrak{N})$ есть K -система Эмха с K -подалгеброй $\mathfrak{N} = j(M)$.

Отсюда выводим утверждение, анонсированное в [10]: между классом K -систем и классом полупотоков сдвигов, вполне совместимых с т.н.с. W^* -алгебры, существует каноническое соответствие.

ТЕОРЕМА 2. Эквивалентные K -системы Эмха определяют эквивалентные непрерывные полупотоки сдвигов Пауэрса посредством обращения времени и сужения возникшей обратной динамики на K -подалгебру. Наоборот, для эквивалентных полупотоков сдвигов минимальная марковская дилатация определяет ДС, которые после обращения времени оказываются эквивалентными K -системами.

Такого рода соответствие выступает как аналог между непрерывными односторонними и двусторонними сдвигами в гильбертовом пространстве.

Автор признателен Б.М. Гуревичу и А.С. Холево за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Emch G. G. // Commun. Math. Phys. 1976. V. 49. P. 191–215. [2] Alicki R., Narnhofer H. // Lett. Math. Phys. 1995. V. 20. P. 231–250. [3] Narnhofer H., Thirring W. // Lett. Math. Phys. 1990. V. 20. P. 231–250. [4] Булинский А. В. // Функци. анализ и его прилож. 1995. Т. 29. С. 64–67. [5] Powers R. T. // Canad. J. Math. 1988. V. 40. P. 86–114. [6] Kummerer B. // J. Funct. Anal. 1985. V. 63. P. 139–177. [7] Kummerer B., Shroeder W. // Commun. Math. Phys. 1983. V. 90. P. 251–262. [8] Accardi L., Cecchini C. // J. Funct. Anal. 1982. V. 45. P. 245–273. [9] Arveson W., Kishimoto A. // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 116. P. 769–774. [10] Булинский А. В. // Междунар. конф. “Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ” (посвящ. 90-летию акад. С.М. Никольского). Тезисы докл. М.: Изд-во ПАИМС, 1995. С. 67–68.