Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Володин, Геометрическая реализация γ -векторов
2-усеченных кубов, *УМН*, 2012, том 67, выпуск 3, 181–
182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9482>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 14:55:20

Геометрическая реализация γ -векторов 2-усеченных кубов

В. Д. Володин

Пусть f_i – количество i -мерных граней простого n -многогранника P . Набор чисел $(f_0, \dots, f_n)$ называется его f -вектором. Полином $F(P)(\alpha, t) = \alpha^n + f_{n-1}\alpha^{n-1}t + \dots + f_1\alpha t^{n-1} + f_0 t^n$ называется F -полиномом, а полином $H(P)(\alpha, t) = h_0\alpha^n + h_1\alpha^{n-1}t + \dots + h_{n-1}\alpha t^{n-1} + h_n t^n = F(P)(\alpha - t, t)$ называется H -полиномом.

Соотношения Дена–Соммервилля (см. [9]) эквивалентны симметричности $H(P)$ для простых многогранников, следовательно, $H(P)$ может быть представлен в виде

$$H(P) = \sum_{i=0}^{[n/2]} \gamma_i(\alpha t)^i (\alpha + t)^{n-2i}.$$

Набор коэффициентов $(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{[n/2]})$ называется γ -вектором. Полином $\gamma(P)(\tau) = \gamma_0 + \gamma_1\tau + \dots + \gamma_{[n/2]}\tau^{[n/2]}$ называется γ -полиномом.

Симплициальный комплекс называется *флаговым*, если любой набор его попарно инцидентных вершин образует симплекс. Простой многогранник называется *флаговым*, если граница его двойственного многогранника является флаговым симплициальным комплексом, т.е. любой набор его попарно пересекающихся граней имеет непустое пересечение. Гипотеза Гала (см. [6]) в случае выпуклых многогранников утверждает, что простой флаговый многогранник имеет неотрицательный γ -вектор.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Простой многогранник P^n называется 2-усеченным кубом, если он может быть получен из куба I^n последовательностью срезов граней коразмерности 2 (граница двойственного многогранника получается из кросс-политопла последовательностью звездных подразделений вдоль ребер).

Класс 2-усеченных кубов введен в работе [2], одним из результатов которой является доказательство гипотезы Гала для этого класса. В [3] было показано, что известные классы простых многогранников (граф-ассоциэдры, граф-кубиэдры, флаговые нестоэдры) являются 2-усеченными кубами. Классу флаговых нестоэдров принадлежат обобщенные ассоциэдры серии A (многогранники Сташефа) и серии B (многогранники Ботта–Таубса). В [7] показано, что обобщенные ассоциэдры серии D не являются флаговыми нестоэдрами, но тем не менее являются 2-усеченными кубами. В [1] для каждого флагового нестоэдра P построен флаговый симплициальный комплекс Δ_P такой, что $\gamma(P) = f(\Delta_P)$. Ранее такой комплекс был построен для многогранников Сташефа, многогранников Ботта–Таубса и пермutoэдров (см. [8]). Центральным результатом настоящей работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Для любого 2-усеченного куба P^n существует флаговый симплициальный комплекс Δ_P такой, что $\gamma(P) = f(\Delta_P)$. Здесь $f(K)(t) = 1 + f_0 t + f_1 t^2 + \dots + f_d t^{d+1}$, где d – размерность комплекса K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим 2-усеченный куб P^n и множество $W(P)$ всех его гиперграней, полученных в результате последовательности срезов граней. Для каждой грани $G \subset P$, в том числе и для $G = P$, построим флаговый симплициальный комплекс Δ_G на множестве вершин $W(P)$ такой, что $f(\Delta_G)(t) = \gamma(G)(t)$ и если $G_1 \subset G_2$, то $\Delta_{G_1} \subset \Delta_{G_2}$.

Пусть $P = I^n$, тогда $W(P) = \emptyset$. В этом случае положим $\Delta_G = \emptyset$ для всех граней.

Допустим, что для многогранника P уже построено семейство требуемых симплицальных комплексов, а многогранник P' получен из P срезкой грани G_0 коразмерности 2. Тогда $W(P') = W(P) \cup \{v(G_0)\}$, где вершина $v(G_0)$ соответствует новой гиперграни многогранника P' . Рассмотрим произвольную грань $G' \subset P'$. Если грань G' получена из некоторой грани G срезкой ее грани F коразмерности 2, то положим $\Delta_{G'} = \Delta_G \cup \text{Cone}(\Delta_F)$. f -полиномы комплексов $\Delta_{G'}$ и Δ_G связаны соотношением

$$f(\Delta_{G'}) = f(\Delta_G) + tf(\Delta_F).$$

Аналогичным соотношением (см. [2]) связаны γ -векторы граней G и G' :

$$\gamma(G') = \gamma(G) + \tau\gamma(F).$$

Следовательно, $f(\Delta_{G'}) = \gamma(G')$. Если грань G' получена из некоторой грани G срезкой грани коразмерности 1 или G' совпадает с G , то положим $\Delta_{G'} = \Delta_G$.

Очевидно, что $f(\Delta_{G'})(t) = \gamma(G')(t)$ и если $G'_1 \subset G'_2$, то $\Delta_{G'_1} \subset \Delta_{G'_2}$.

Комплекс $\Delta_{P'}$ является флаговым – как объединение флаговых комплексов $\Delta_{G'}$ и $\text{Cone}(\Delta_F)$, пересечение которых есть также флаговый комплекс Δ_F .

Обратим внимание, что комплекс Δ_P зависит от выбранной последовательности срезов.

Обозначим через $\binom{n}{k}_r$ число k -клик в графе Турана $T_{n,r}$. Для натуральных чисел m, k и $r \geq k$ однозначно определено разложение $m = \binom{n_k}{k}_r + \dots + \binom{n_{k-s}}{k-s}_{r-s}$, где $n_{k-i} - \left\lfloor \frac{n_{k-i}}{r-i} \right\rfloor > n_{k-i-1}$ для всех $0 \leq i < s$ и $n_{k-s} \geq k-s > 0$. Положим $m^{(k)_r} = \binom{n_k}{k+1}_r + \dots + \binom{n_{k-s}}{k-s+1}_{r-s}$.

Согласно [5], f -вектор флагового симплицального комплекса является f -вектором некоторого сбалансированного симплицального комплекса. Отсюда, используя неравенства Франкла–Фюреди–Калаи (см. [4]) для f -векторов симплицальных комплексов, получаем результат, который в случае флаговых нестоэдров содержится в [1].

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть P^n есть 2-усеченный куб. Тогда: 1) $\gamma_0 = 1$; 2) $0 \leq \gamma_{i+1} \leq \gamma_i^{(i)_r}$, где $r = \lfloor n/2 \rfloor$.

Список литературы

- [1] N. Aisbett, *Frankl–Füredi–Kalai inequalities on the γ -vectors of flag nestohedra*, arXiv: 1203.4715. [2] В. М. Бухштабер, В. Д. Володин, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:6 (2011), 17–46; англ. пер.: V. M. Buchstaber, V. D. Volodin, *Izv. Math.*, **75**:6 (2011), 1107–1133. [3] V. Buchstaber, V. Volodin, “Combinatorial 2-truncated cubes and applications”, *Associahedra, Tamari lattices and related structures. Tamari Memorial Festschrift*, Progr. Math., **299**, eds. F. Müller-Hoissen, J. Pallo, J. Stasheff, Birkhäuser, Boston, MA, 2012, 161–186. [4] P. Frankl, Z. Füredi, G. Kalai, *Math. Scand.*, **63**:2 (1988), 169–178. [5] A. Frohmader, *Face vectors of flag complexes*, arXiv:math/0605673. [6] Š. R. Gal, *Discrete Comput. Geom.*, **34**:2 (2005), 269–284; arXiv:math/0501046. [7] М. А. Горский, *УМН*, **65**:6(396) (2010), 185–186; англ. пер.: M. A. Gorsky, *Russian Math. Surveys*, **65**:6 (2010), 1178–1180. [8] E. Nevo, T. K. Peterson, *Discrete Comput. Geom.*, **45**:3 (2011), 503–521. [9] G. M. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Grad. Texts in Math., **152**, Springer-Verlag, New York, 1995, x+370 pp.

В. Д. Володин (V. D. Volodin)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
Лаборатория дискретной и вычислительной геометрии
им. Б. Н. Делоне, Ярославль
E-mail: volodinvadim@gmail.com

Представлено В. М. Бухштабером

Принято редколлегией

10.04.2012