Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Тихонов, Типичность кратного перемешивания,
УМН, 2012, том 67, выпуск 4, 187–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9484>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 06:40:03

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Типичность кратного перемешивания

С. В. Тихонов

Пусть $\mathcal{A}$ – группа всех обратимых измеримых преобразований пространства Лебега (X, μ) , сохраняющих меру. Два преобразования отождествляются, если они совпадают с точностью до множества меры нуль. $\mathcal{A}$ – полное сепарабельное метрическое пространство относительно метрики d , задающей слабую топологию (см. [1]).

Рассмотрим бесконечную абелеву группу Γ с конечным набором образующих и выделенной образующей γ бесконечного порядка. Отображение $T: \Gamma \rightarrow \mathcal{A}$, сохраняющее групповые операции, называется Γ -действием.

Через $\mathcal{A}_\Gamma$ обозначим множество всех Γ -действий. На $\mathcal{A}_\Gamma$ можно ввести метрику слабой топологии d , при этом получится полное сепарабельное метрическое пространство. Действие $T \in \mathcal{A}_\Gamma$ называется *перемешиванием*, если для любых измеримых множеств A, B имеем

$$\mu(T^g A \cap B) \rightarrow \mu(A)\mu(B)$$

при $|g| \rightarrow \infty$ ($|g|$ – длина элемента g в кратчайшей записи через образующие). Действие называется *двукратно перемешивающим*, если для любых измеримых множеств A, B имеем

$$\mu(T^g A \cap T^h B \cap C) \rightarrow \mu(A)\mu(B)\mu(C)$$

при $|g|, |h|, |g^{-1}h| \rightarrow \infty$. В. А. Рохлин поставил вопрос о существовании в случае $\Gamma = \mathbb{Z}$ перемешивающих, но не двукратно перемешивающих Γ -действий, и этот вопрос до сих пор не решен. В случае $\Gamma = \mathbb{Z}^n$, $n > 1$, примеры таких действий построил Ф. Ледрапье [2]. Мы покажем, в частности, что действия, построенные Ледрапье, нетипичны.

На $\mathcal{A}_\Gamma$ также можно ввести поводок-метрику m , относительно которой множество перемешиваний $\mathcal{M}_\Gamma$ образует полное сепарабельное пространство [3]. Если $\{A_i\}$ – счетный плотный набор измеримых множеств, то метрика m задается формулой

$$m(T, Q) = d(T, Q) + \sup_{g \in \Gamma} \sum_{i, j \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{i+j}} |\mu(T^g A_i \cap A_j) - \mu(Q^g A_i \cap A_j)|.$$

Подмножество метрического пространства называется *массивным*, если оно является счетным пересечением открытых всюду плотных множеств. Если свойством обладают элементы массивного множества, то такое свойство называется *типичным*.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{V}$ – массивное подмножество $\mathcal{A}_\Gamma$ и замыкание $\mathcal{V}$ в поводок-метрике содержит $\mathcal{M}_\Gamma$. Тогда $\mathcal{V} \cap \mathcal{M}_\Gamma$ – массивное подмножество $\mathcal{M}_\Gamma$.

Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-5998.2012.1).

С каждым сохраняющим меру преобразованием S связан унитарный оператор $f \mapsto f \circ S$, действующий на пространстве L_2 функций с интегрируемым квадратом. Мы будем обозначать этот оператор той же буквой S . Оператор $P = P(S)$ назовем $\varkappa$ -полиномом, если $P(S) = \alpha\Theta + \alpha_0I + \dots + \alpha_g S^g$, причем $\sum_h \alpha_h = 1 - \alpha \leq \varkappa$ (здесь

Θ – ортопроектор на подпространство констант в L_2). Пусть $\{P_i\}_{i \leq t}$ – конечный упорядоченный набор $\varkappa$ -полиномов. Будем говорить, что преобразование S обладает $\{P_i\}_{i \leq t}$ -пределом (по некоторой последовательности $\{n_i\}$), если $S^{n_i} \rightarrow P_1$, $S^{2n_i} \rightarrow P_2$, $\dots$, $S^{tn_i} \rightarrow P_t$.

Исторически, исследование подобных предельных операторов началось с $\varkappa$ -перемешиваний (преобразований, имеющих предельный оператор вида $P = \alpha\Theta + (1 - \alpha)I$, $\alpha \in (0, 1)$). Существование и типичность $\varkappa$ -перемешиваний были установлены в [4] в связи с вопросом о групповом свойстве (относительно свертки) спектров эргодических динамических систем.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $\Delta > \varkappa > 0$. Если $\{P_i\}_{i \leq t}$ – конечный набор $\varkappa$ -полиномов и $t < 1/(2\varkappa)$, то в (t, Δ) -окрестности любого перемешивания $T \in \mathcal{M}_T$ найдется Γ -действие Q , для которого Q^γ имеет $\{P_i\}_{i \leq t}$ -предел.

Обозначим через σ_T максимальный спектральный тип оператора S в подпространстве, ортогональном константам, а свертку максимальных спектральных типов будем обозначать звездочкой.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Множество $\mathcal{V}$, состоящее из тех Γ -действий T , для которых максимальные спектральные типы $\sigma_{T^\gamma} * \sigma_{T^\gamma}$ и σ_{T^γ} взаимно сингулярны, имеет тип G_δ , и его замыкание в поводок-метрике содержит $\mathcal{M}_\Gamma$.

Заметим, что для $T \in \mathcal{V}$ преобразование T^γ имеет сингулярный спектр. Согласно [5], перемешивающие Γ -действия, имеющие элемент с сингулярным спектром, обладают кратным перемешиванием.

ТЕОРЕМА 2. Перемешивание всех кратностей типично в $\mathcal{M}_\Gamma$.

Список литературы

- [1] П. Р. Халмош, *Лекции по эргодической теории*, ИЛ, М., 1959, 147 с.; пер. с англ.: P. R. Halmos, *Lectures on ergodic theory*, Publ. Math. Soc. Japan, **3**, Math. Soc. Japan, 1956, vii+99 pp. [2] F. Ledrappier, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B*, **287**:7 (1978), A561–A563. [3] С. В. Тихонов, *Матем. сб.*, **198**:4 (2007), 135–158; англ. пер.: S. V. Tikhonov, *Sb. Math.*, **198**:3–4 (2007), 575–596. [4] A. M. Stepin, *Actes du Congrès international des mathématiciens*, v. 2 (Nice, 1970), Gauthier-Villars, Paris, 1971, 941–946. [5] В. В. Рыжиков, *Матем. заметки*, **83**:5 (2008), 792–795; англ. пер.: V. V. Ryzhikov, *Math. Notes*, **83**:5–6 (2008), 723–726.

С. В. Тихонов (S. V. Tikhonov)
Российский государственный торгово-экономический
университет
E-mail: tikhonov@mail.ru

Представлено Д. В. Аносовым
Принято редакцией
16.04.2012