Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Лапик, Равновесная мера во внешнем поле для векторного потенциала с матрицей взаимодействия Ни-кишина, *УМН*, 2012, том 67, выпуск 3, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9486>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 10:07:45

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Равновесная мера во внешнем поле для векторного потенциала
с матрицей взаимодействия Никишина

М. А. Лапик

1. Векторные задачи равновесия логарифмического потенциала с различным взаимодействием между компонентами (задаваемым матрицей взаимодействия) были впервые сформулированы и исследованы А. А. Гончаром и Е. А. Рахмановым (см. [1]–[5]) в связи с изучением сходимости аппроксимаций Эрмита–Паде. С тех пор область применения векторных задач равновесия существенно расширилась. Одно из современных приложений – распределение собственных значений ансамблей случайных матриц, а именно так называемых ансамблей совместно ортогональных многочленов (см. [6]). Для этих приложений векторная задача равновесия рассматривается в присутствии внешнего поля. Дадим необходимые определения, ограничиваясь упрощающим обозначением частным случаем размерности 2 и с так называемой матрицей взаимодействия Никишина (см. детали в [7]).

Пусть $\Gamma = \{\Gamma_i\}_{i=1}^2$ – непересекающиеся регулярные [7] компакты в $\overline{\mathbb{C}}$ с непустой внутренностью $\Gamma_i^\circ \neq \emptyset$, $\mathcal{M}^x$ – множество векторных борелевских мер: $\bar{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$, $S_{\mu_i} \subseteq \Gamma_i$, $i = 1, 2$; $\mu_1(\Gamma_1) = 2x$, $\mu_2(\Gamma_2) = x$. Внешним полем будем называть непрерывную вектор-функцию $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2)$, $Q_i: \Gamma_i \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $i = 1, 2$. Если компакт Γ_i является неограниченным, то мы дополнительно требуем, чтобы поле на нем росло достаточно быстро: $\lim_{|z| \rightarrow +\infty, z \in \Gamma_i} \frac{Q_i(z)}{\log |z|} = +\infty$.

Вектор-функцию $\mathbf{W}_{\mathbf{Q}}^{\bar{\mu}} = (W_{\mathbf{Q},1}^{\bar{\mu}}, W_{\mathbf{Q},2}^{\bar{\mu}})$ такую, что

$$W_{\mathbf{Q},1}^{\bar{\mu}}(z) = 2U^{\mu_1}(z) - U^{\mu_2}(z) + Q_1(z), \quad W_{\mathbf{Q},2}^{\bar{\mu}}(z) = -U^{\mu_1}(z) + 2U^{\mu_2}(z) + Q_2(z),$$

$$U^{\mu}(z) = \int \log \frac{1}{|z-y|} d\mu(y),$$

называют векторным логарифмическим потенциалом меры $\bar{\mu} \in \mathcal{M}^x$ во внешнем поле $\mathbf{Q}$ с матрицей взаимодействия Никишина. Энергия во внешнем поле для векторных мер задается функционалом

$$I^{\mathbf{Q}}(\bar{\mu}) = I_1^{\mathbf{Q}}(\bar{\mu}) + I_2^{\mathbf{Q}}(\bar{\mu}), \quad I_i^{\mathbf{Q}}(\bar{\mu}) = \int (W_{\mathbf{Q},i}^{\bar{\mu}}(z) + Q_i(z)) d\mu_i(z). \quad (1)$$

Аналогично скалярному случаю (см. [3]) ставится экстремальная задача во внешнем поле: найти меру $\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x \in \mathcal{M}^x$ такую, что

$$I^{\mathbf{Q}}(\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x) = \mathcal{J}_{\mathbf{Q}}^x := \inf_{\bar{\mu} \in \mathcal{M}^x} I^{\mathbf{Q}}(\bar{\mu}). \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 11-01-00245, 11-01-12045), программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-4664.2012.1) и программы № 1 ОМН РАН.

Известно (см. [1], [7], [4]), что если $\mathcal{J}_{\mathbf{Q}}^x < +\infty$, то существует единственная мера $\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x \in \mathcal{M}^x$ такая, что $I^{\mathbf{Q}}(\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x) = \mathcal{J}_{\mathbf{Q}}^x$. Кроме того, справедливы условия равновесия для векторной задачи во внешнем поле, однозначно характеризующие экстремальную меру $\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x$. Точнее, существуют и единственны такие константы w_i^x , $i = 1, 2$, что

$$W_{\mathbf{Q},i}^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x}(z) \begin{cases} = w_i^x & \text{на } S^{\lambda_{\mathbf{Q},i}^x} \supset S_{\lambda_{\mathbf{Q},i}^x}, \\ > w_i^x & \text{на } \Gamma_i \setminus S^{\lambda_{\mathbf{Q},i}^x}. \end{cases} \quad (3)$$

Поэтому экстремальную меру $\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x \in \mathcal{M}^x$ также называют *равновесной мерой*. Нашей целью является получение явного выражения для равновесной в поле $\mathbf{Q}$ меры $\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x$ с помощью информации о ее носителе при меньших значениях параметра x .

2. Впервые семейства (по x) равновесных мер для скалярной задачи равновесия во внешнем поле были изучены В. С. Буяровым и Е. А. Рахмановым в [8]. В основном мы следуем их подходу, распространяя его на векторный случай. В [9] было показано, что для векторной задачи равновесия экстремальные меры растут относительно параметра x . Здесь мы приведем явные формулы для них. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Семейство равновесных мер $\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x$ монотонно возрастает и дифференцируемо почти всюду. Существуют левые и правые производные:

$$\frac{\partial_+}{\partial x} \bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x = \bar{\omega}^x, \quad \frac{\partial_-}{\partial x} \bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x = \bar{\omega}_x,$$

где $\bar{\omega}_x = \bar{\lambda}_0^1$ – робеновское распределение на носителе экстремальной меры $\Gamma = S_{\lambda_{\mathbf{Q}}^x}$, а $\bar{\omega}^x = \bar{\lambda}_0^1$ – робеновское распределение на множестве равновесия $\Gamma = S^{\lambda_{\mathbf{Q}}^x}$ (там, где в условиях равновесия (3) достигается равенство). Для экстремальной меры справедливо представление

$$\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x = \int_0^x \bar{\omega}_\tau d\tau.$$

Список литературы

- [1] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Тр. МИАН СССР, **157**, 1981, 31–48; англ. пер.: А. А. Gonchar, E. A. Rakhmanov, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **157** (1983), 31–50. [2] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, *Матем. сб.*, **125**(167):1(9) (1984), 117–127; англ. пер.: А. А. Gonchar, E. A. Rakhmanov, *Math. USSR-Sb.*, **53**:1 (1986), 119–130. [3] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, *УМН*, **40**:4(244) (1985), 155–156; англ. пер.: А. А. Gonchar, E. A. Rakhmanov, *Russian Math. Surveys*, **40**:4 (1985), 183–184. [4] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, В. Н. Сорокин, *Матем. сб.*, **188**:5 (1997), 33–58; англ. пер.: А. А. Gonchar, E. A. Rakhmanov, V. N. Sorokin, *Sb. Math.*, **188**:5 (1997), 671–696. [5] А. И. Аптекарев, В. И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С. П. Суетин, *УМН*, **66**:6(402) (2011), 37–122; англ. пер.: А. И. Aptekarev, V. I. Buslaev, A. Martínez-Finkelshtein, S. P. Suetin, *Russian Math. Surveys*, **66**:6 (2011), 1049–1131. [6] А. И. Аптекарев, А. Э. Койэлаарс, *УМН*, **66**:6(402) (2011), 123–190; англ. пер.: А. И. Aptekarev, A. Kuijlaars, *Russian Math. Surveys*, **66**:6 (2011), 1133–1199. [7] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, М., 1988, 256 с. [8] В. С. Буяров, Е. А. Рахманов, *Матем. сб.*, **190**:6 (1999), 11–22; англ. пер.: V. S. Buyarov, E. A. Rakhmanov, *Sb. Math.*, **190**:6 (1999), 791–802. [9] М. А. Лапик, *Матем. сб.*, **197**:8 (2006), 101–118; англ. пер.: M. A. Lapik, *Sb. Math.*, **197**:8 (2006), 1205–1221.