Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Дубинин, Методы геометрической теории функций
в классических и современных задачах для полиномов,
УМН, 2012, том 67, выпуск 4, 3–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9488>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 12:32:33

УДК 517.5

Методы геометрической теории функций в классических и современных задачах для полиномов

В. Н. Дубинин

Статья представляет собой обзор классических и современных теорем для полиномов, доказанных методами геометрической теории функций. Основное содержание статьи составляют результаты автора и его учеников, установленные с помощью принципов мажорации для голоморфных функций, теории однолистных функций, теории емкостей и симметризации. Приводятся вспомогательные утверждения и доказательства некоторых теорем.

Библиография: 124 названия.

Ключевые слова: принципы мажорации, лемма Шварца, однолистные функции, емкости, симметризация, неравенства, полиномы, критические точки, критические значения, рациональные функции.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Глава 1. Принципы мажорации	5
1.1. Принцип максимума модуля	5
1.2. Обобщения и дополнения леммы Шварца	11
1.3. Применение леммы Шварца к неравенствам для полиномов	13
1.4. О целых функциях экспоненциального типа	18
1.5. Дополнение к принципу Линделёфа с приложениями к полино- мам и рациональным функциям	22
Глава 2. Однолистные функции	29
2.1. Построение однолистных функций	29
2.2. Теоремы покрытия для полиномов	32
2.3. Неравенства с участием производных	37
2.4. Неравенства для коэффициентов	44
2.5. Полиномы с критическими значениями на отрезке	48
2.6. О полиномах с криволинейной мажорантой	52

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00038) и ДВО РАН (грант № 12-I-ОМН-02).

© В. Н. Дубинин, 2012

Глава 3. Емкости конденсаторов и симметризация	57
3.1. Обобщенные конденсаторы и асимптотика их емкости при вы- рождении пластин	57
3.2. Простейшие применения конформной емкости	60
3.3. Круговая симметризация	66
3.4. К теоремам о конечном приращении	67
3.5. О свойствах полиномов внутри лемнискаты	70
3.6. Неравенства для критических значений полиномов	74
Список литературы	81

Введение

Неравенства для полиномов и их производных имеют богатую историю и многочисленные приложения (см., например, [1]–[6]). Вместе с тем применение методов геометрической теории функций к получению этих неравенств (для простейших аналитических функций) осуществляется в меньшей степени, чем можно было бы ожидать. В серии работ автора и его учеников была сделана попытка частично устранить указанный пробел [7]–[36]. Цель данной статьи – дать краткий обзор полученных при этом результатов и показать на примерах простых доказательств классических и современных теорем о полиномах суть новых подходов по применению некоторых методов теории функций комплексного переменного. Всюду ниже приняты следующие обозначения:

$$P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n, \quad c_n \neq 0, \quad n \geq 1,$$

– алгебраический полином степени n с комплексными коэффициентами c_k , $k = 0, 1, \dots, n$;

$$\begin{aligned} L(P) &= \min\{\operatorname{Re} P(z) : |z| = 1\}, & H(P) &= \max\{\operatorname{Re} P(z) : |z| = 1\}, \\ m(P) &= \min\{|P(z)| : |z| = 1\}, & M(P) &= \max\{|P(z)| : |z| = 1\}; \end{aligned}$$

величины $\overline{L}(P)$, $\overline{H}(P)$, $\overline{m}(P)$ и $\overline{M}(P)$ определяются так же, как соответствующие величины выше, но с заменой окружности $|z| = 1$ на отрезок $[-1, 1]$. Многие результаты данной статьи состоят в оценках для полиномов P в зависимости от выписанных выше величин. Обсуждаются также неравенства для критических точек и критических значений полиномов P . В роли экстремальных полиномов выступают, как правило, полиномы вида $c_0 + c_n z^n$, $c_1 z + c_n z^n$ при некоторых c_0 , c_1 , c_n либо полиномы вида $aT_n(z) + b$, где a и b – постоянные, а $T_n(z)$ означает, как обычно, полином Чебышёва первого рода. Напомним, что в терминах конформных отображений полином $T_n(z) = 2^{n-1}z^n + \dots$ можно определить как суперпозицию обратной функции Жуковского, степенной функции и функции Жуковского:

$$T_n(z) = \frac{1}{2} \left((z + \sqrt{z^2 - 1})^n + (z - \sqrt{z^2 - 1})^n \right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Материал статьи группируется по методам геометрической теории функций, применение которых раскрывается в процессе решения типичных задач для полиномов. В случае сложных доказательств мы приводим лишь результаты и некоторые комментарии к ним. В первой главе приводятся новые применения

классической леммы Шварца и ее современных версий. Кроме того, мы дополняем ее обобщение – принцип Линделёфа и даем приложения этого принципа не только к полиномам, но и к рациональным функциям с предписанными полюсами, а также к некоторым целым функциям экспоненциального типа. Во второй главе развивается методика построения по заданному алгебраическому полиному конформного и однолистного отображения некоторого класса с последующим применением теории однолистных функций. Ограничиваясь лишь небольшим числом утверждений этой теории, мы надеемся показать эффективность предлагаемого подхода к неравенствам для полиномов. Наконец, в третьей главе собраны результаты, полученные методами теории потенциала и симметризации [37], [38]. Для удобства чтения введены разделы 3.1 и 3.3, которые носят вспомогательный характер. С применением симметризации связаны особые надежды, так как экстремальные полиномы в известных открытых гипотезах о полиномах обладают той или иной симметрией.

Автор не претендует на полноту изложения затронутых здесь вопросов. Основное содержание статьи обсуждалось в разное время на семинарах А. А. Гончара в МИ РАН, Г. В. Кузьминой в ПОМИ РАН и О. Мартио и М. Vuorinen в Хельсинкском университете (Финляндия), а также доказывалось с разной степенью полноты на международных конференциях в городах Халле (Германия, 2002), Макао (Китай, 2010) и Вюрцбурге (Германия, 2010).

Глава 1. Принципы мажорации

Принципы мажорации и их приложения играют существенную роль в геометрической теории функций комплексного переменного (см. [39; гл. VIII]). В настоящей главе рассматриваются простые применения принципа максимума модуля, классических и современных версий леммы Шварца, а также дополнения к принципу Линделёфа. Указанные принципы содержат довольно общие неравенства для полиномов и рациональных функций с предписанными полюсами. Успех в применении этих принципов зависит от удачного построения аналитических функций, к которым они применяются.

1.1. Принцип максимума модуля. Хорошо известно, что если функция f голоморфна и отлична от постоянной в данной области комплексной плоскости, то ее модуль не может достигать локального максимума в какой-либо точке этой области. Удивительно, что этот простой факт теории аналитических функций не использовался в должной мере при доказательстве классических неравенств для алгебраических полиномов. Рассмотрим применение принципа максимума модуля на примере следующего результата К. Дочева [40].

ТЕОРЕМА 1.1. *Если полином $P(z) = c_0 + \dots + c_n z^n$, $c_n \neq 0$, с вещественными коэффициентами c_k , $k = 0, 1, \dots, n$, нормирован условием $\overline{M}(P) = 1$, то для любого $\rho > 1$ образ эллипса $|z - 1| + |z + 1| = \rho + 1/\rho$ при отображении $w = P(z)$ лежит внутри эллипса $|w - 1| + |w + 1| = \rho^n + 1/\rho^n$. Здесь экстремальным является случай, когда $P(z)$ совпадает с полиномом Чебышёва первого рода $T_n(z)$, который n -кратно покрывает второй эллипс первым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\eta = \Phi(w)$ функцию, конформно и однолистно отображающую внешность отрезка $[-1, 1]$ на круг $|\eta| < 1$ так, что

$\Phi(\infty) = 0$ и $\Phi(1) = 1$. По принципу максимума модуля аналитической функции, примененному в каждой связной компоненте открытого множества

$$\left\{ \zeta : |\zeta| < 1, P\left(\frac{\zeta + 1/\zeta}{2}\right) \notin [-1, 1] \right\},$$

закключаем, что модуль функции

$$\zeta^n \left[\Phi\left(P\left(\frac{\zeta + 1/\zeta}{2}\right)\right) \right]^{-1}$$

не превосходит на этом множестве единицы. Используя представление полинома Чебышёва

$$T_n(z) = \frac{1}{2}[\Phi^n(z) + \Phi^{-n}(z)],$$

получаем неравенство

$$\left| \Phi\left(P\left(\frac{\zeta + 1/\zeta}{2}\right)\right) \right| \geq |\zeta^n| = \left| \Phi\left(T_n\left(\frac{\zeta + 1/\zeta}{2}\right)\right) \right|,$$

которое равносильно утверждению теоремы 1.1. Теорема доказана.

К. Дочев получил указанный результат путем оригинального исследования соответствующих тригонометрических полиномов. В работе [8] приводится усиление этого геометрического факта с учетом старшего коэффициента c_n . Теорема 1.1 содержит ранний результат Бернштейна, состоящий в том, что для любой точки z внутри эллипса $|z - 1| + |z + 1| = \rho + 1/\rho$ выполняется неравенство

$$|P(z)| \leq \rho^n$$

(см. [1; с. 448]). Кроме того, эта теорема содержит точную оценку Р. ДUFFина и А. Шеффера [41]:

$$|P(z)| \leq \frac{1}{2} \left(\rho^n + \frac{1}{\rho^n} \right),$$

справедливую для тех же точек z . При достаточно больших значениях ρ теорема 1.1 дает оценку

$$|c_n| \leq 2^{n-1},$$

которая равносильна классическому свойству монома Чебышёва $2^{1-n}T_n$ наименее уклоняться от нуля на отрезке $[-1, 1]$. Непосредственно из теоремы 1.1 вытекает неравенство Чебышёва

$$|P(x)| \leq |T_n(x)| \overline{M}(P),$$

справедливое для любых вещественных полиномов P степени n и любых $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ (см. [2; с. 235]). Устремляя параметр ρ в теореме 1.1 к единице, приходим к неравенству Бернштейна–Сегё

$$|P'(x)\sqrt{1-x^2}| \leq n\sqrt{1-P^2(x)}, \quad x \in [-1, 1],$$

содержащему классическое неравенство Бернштейна

$$|P'(x)| \leq \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [-1, 1]$$

(см., например, [2; с. 233]). Можно показать, что теорема 1.1 содержит также неравенство Маркова

$$|P'(x)| \leq n^2, \quad x \in [-1, 1]$$

(см. [8; лемма 4.1]).

В качестве другого использования принципа максимума модуля приведем доказательство следующей теоремы искажения для полиномов на окружности.

ТЕОРЕМА 1.2. *Для любого полинома P степени n и любой точки z , лежащей на окружности $|z| = 1$, и такой, что $P(z) \neq 0$, справедливо неравенство*

$$\left| \operatorname{Im} \frac{zP'(z)}{P(z)} \right| \leq \frac{n}{2} \sqrt{\frac{M^2(P)}{|P(z)|^2} - 1}. \quad (1.1)$$

Равенство в (1.1) достигается в случае $P(z) = c_0 + c_n z^n$ для любых точек z таких, что $|z| = 1$, $z^n \neq -c_0/c_n$, где c_0 и c_n – произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию $|c_0| = |c_n| \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $M(P) = 1$ и $P(0) \neq 0$. Обозначим через $\zeta = \Phi(w)$ функцию, конформно и однолистно отображающую внешность отрезка $\gamma := [0, 1]$ на круг $|\zeta| < 1$ так, что $\Phi(\infty) = 0$ и $\Phi(0) = -1$. Тогда функция

$$f(z) = \Phi(\overline{P(\bar{z})})P\left(\frac{1}{z}\right)$$

голоморфна на множестве

$$G = \left\{ z: |z| < 1, \overline{P(\bar{z})}P\left(\frac{1}{z}\right) \notin \gamma \right\}$$

и аналитически продолжима на множество

$$E = \{z: |z| = 1, |P(\bar{z})| \neq 0, |P(\bar{z})| \neq 1\}.$$

Кроме того, $f(z) \neq 0$ в $G \setminus \{0\}$ и в некоторой окрестности начала координат имеет место разложение

$$f(z) = \frac{1}{4\bar{c}_0 c_n} z^n + \dots,$$

где c_0 – свободный, а c_n – старший коэффициент полинома P . Поэтому функция

$$\frac{z^n}{f(z)}$$

голоморфна на открытом множестве G . В точках границы этого множества модуль указанной функции не превосходит единицы. По принципу максимума модуля заключаем отсюда, что неравенство

$$|f(z)| \geq |z^n| \quad (1.2)$$

выполняется всюду на множестве G . Пусть теперь z – произвольная фиксированная точка множества E . Учитывая неравенство (1.2), имеем

$$|f'(z)| = \frac{\partial |f(z)|}{\partial |z|} = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{|f(z)| - |f(rz)|}{1 - r} \leq \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1 - r^n}{1 - r} = n. \quad (1.3)$$

Элементарные вычисления показывают, что

$$|f'(z)| = 2|P(\bar{z})| \left| \operatorname{Im} \frac{\bar{z}P'(\bar{z})}{P(\bar{z})} \right| \left(1 - |P(\bar{z})|^2 \right)^{-1/2}.$$

Таким образом, из (1.3) вытекает неравенство (1.1) для любых точек z на окружности $|z| = 1$. Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Перепишем неравенство (1.1) в виде

$$|(|P(z)|^2)'_{\varphi}| \leq n \sqrt{|P(z)|^2 (M^2(P) - |P(z)|^2)}, \quad z = e^{i\varphi}.$$

Интегрируя последнее неравенство по дуге окружности $|z| = 1$ длины не большей π/N , приходим к следующему соотношению между дискретной и равномерной нормой полинома на окружности:

$$\max_{\omega^N=1} |P(\omega)| \geq \cos \frac{\pi n}{2N} \max_{|z|=1} |P(z)|, \quad (1.4)$$

где N – натуральное число, большее степени n . В случае $N = 2n$ неравенство (1.4) совпадает с оценкой Шейл–Смолла [42]:

$$\max_{\omega^N=1} |P(\omega)| \geq \sqrt{\frac{N-n}{N}} \max_{|z|=1} |P(z)|. \quad (1.5)$$

При $N > 2n$ неравенство (1.4) усиливает оценку (1.5), а также оценку Е. Рахманова и Б. Шехтмана, полученную ранее в работе [43]. Более того, для любого N , кратного n , неравенство (1.4) точное. Знак равенства достигается в случае $P(z) = (z \exp(i\pi/N))^n + 1$ (см. [20]). Неравенство (1.4) можно усилить с учетом старшего и свободного коэффициентов полинома P (см. следствие 1.6 настоящей статьи).

В заключение рассмотрим применение принципа максимума модуля к неравенствам для рациональных функций с предписанными полюсами [9]. Следуя работам [2], [44]–[50], введем класс $\mathcal{R}_m(a_1, \dots, a_n)$, состоящий из рациональных функций вида

$$R(z) = \frac{P(z)}{\prod_{k=1}^n (z - a_k)},$$

где $P(z)$ – алгебраический полином степени m и $|a_k| > 1$, $k = 1, \dots, n$. Экстремальная функция связана с произведением Бляшке

$$B(z) = \prod_{k=1}^n \frac{1 - \bar{a}_k z}{z - a_k},$$

определенным в общем случае для любой совокупности полюсов $(a_1, \dots, a_n)$, $|a_k| \neq 1$, $k = 1, \dots, n$. Наконец, обозначения $L(R)$, $H(R)$ и $M(R)$ возьмем из введения данной статьи, где вместо полинома P рассматривается рациональная функция R .

ТЕОРЕМА 1.3. *Для любой функции R класса $\mathcal{R}_m(a_1, \dots, a_n)$, $m \geq n$, и любой точки z на окружности $|z| = 1$ справедливо неравенство*

$$|\operatorname{Im}(zR'(z))| \leq |(z^{m-n}B(z))'| \sqrt{(\operatorname{Re} R(z) - L(R))(H(R) - \operatorname{Re} R(z))}. \quad (1.6)$$

Равенство в (1.6) достигается для функций вида $R(z) = \alpha + \beta z^{m-n}B(z)$, где α и β – произвольные комплексные числа, $\beta \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\omega = \Phi(w)$ функцию, конформно и однолистно отображающую внешность отрезка $\gamma := [2L(R), 2H(R)]$ на внешность единичного круга $|\omega| > 1$ так, что $\Phi(\infty) = \infty$ и $\Phi(2L(R)) = -1$. Пусть G – открытое множество $\{\zeta : |\zeta| < 1, R(1/\zeta) + \overline{R(\bar{\zeta})} \notin \gamma\}$, и пусть

$$f(\zeta) = \Phi\left(R\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \overline{R(\bar{\zeta})}\right), \quad \zeta \in G.$$

Тогда функция

$$F(\zeta) = f(\zeta)\zeta^{m-n} \prod_{k=1}^n \frac{1 - a_k \zeta}{\zeta - \bar{a}_k},$$

доопределенная по непрерывности в точках $\zeta = 0, 1/a_k, k = 1, \dots, n$, является голоморфной на множестве G . При приближении ζ к границе этого множества функция $F(\zeta)$ имеет предельные значения, не превосходящие по модулю единицы. Следовательно, по принципу максимума модуля, примененному в каждой подобласти множества G , всюду в G имеем оценку $|F(\zeta)| \leq 1$, т.е.

$$|f(\zeta)| \leq \left| \zeta^{n-m} \prod_{k=1}^n \frac{\zeta - \bar{a}_k}{1 - a_k \zeta} \right|. \quad (1.7)$$

Поскольку функция f переводит единичную окружность $|\zeta| = 1$ в окружность $|\omega| = 1$, то в тех точках окружности $|\zeta| = 1$, где существует производная, из неравенства (1.7) следует, что

$$\frac{\partial |f|}{\partial |\zeta|} \geq \frac{\partial}{\partial |\zeta|} \left| \zeta^{n-m} \prod_{k=1}^n \frac{\zeta - \bar{a}_k}{1 - a_k \zeta} \right| = -\frac{\partial}{\partial |z|} \left| z^{m-n} \prod_{k=1}^n \frac{1 - \bar{a}_k z}{z - a_k} \right| = -|(z^{m-n} B(z))'|,$$

где $z = 1/\zeta, |z| = 1$. Нетрудно вычислить также производную в левой части этого неравенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial |f|}{\partial |\zeta|} &= -\frac{\partial |f|}{\partial |z|} = -\left| \frac{d\Phi(R(z) + \overline{R(1/\bar{z})})}{dz} \right| \\ &= -\frac{|\operatorname{Im}(zR'(z))|}{\sqrt{(\operatorname{Re} R(z) - L(R))(H(R) - \operatorname{Re} R(z))}}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Заменяя в неравенстве (1.6) среднее геометрическое на среднее арифметическое, получаем

$$|\operatorname{Im}(zR'(z))| \leq |(z^{m-n} B(z))'| \frac{H(R) - L(R)}{2} \leq |(z^{m-n} B(z))'| M(R)$$

для любых функций $R \in \mathcal{R}_m(a_1, \dots, a_n)$. Отсюда при $m = n$ легко вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Если функция R принадлежит классу $\mathcal{R}_n(a_1, \dots, a_n)$, то

$$|R'(z)| \leq |B'(z)| M(R) \quad (1.8)$$

для любых точек z на окружности $|z| = 1$.

По-видимому, впервые неравенство (1.8) встречается в работах В. Н. Русака (см. [51]). Позднее оно с некоторыми уточнениями было доказано П. Борвейном, Т. Эрдели [45] и, независимо, С. Ли, Р. Мохпатрой, Р. Родригесом [46] с помощью специальных интерполяционных формул (см. также [2], [48], [52]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Приведенное выше доказательство неравенства (1.6) справедливо также для рациональных функций $R(z)$ вида

$$P(z) / \left[z^s \prod_{k=1}^{n+l} (z - a_k) \right],$$

где P – полином степени $m \geq n + l + 2s$, $l \leq n$, $|a_k| > 1$, $k = 1, \dots, n$, а каждая из точек a_j , $j = n + 1, \dots, n + l$, симметрична относительно окружности $|z| = 1$ некоторой точке a_k , $1 \leq k \leq n$. Поэтому для этих функций также имеет место неравенство (1.6), где $B(z)$ остается прежним, а z^{m-n} необходимо заменить на $z^{m-n-l-s}$. В частности, если вновь P – полином степени n , а точки a_k , $|a_k| \neq 1$, $k = 1, \dots, n$, расположены произвольным образом (не обязательно по одну сторону от окружности), то, применяя сказанное к рациональной функции

$R(z) + \overline{R(1/\bar{z})}$, где $R(z) = P(z) / \prod_{k=1}^n (z - a_k)$, и переходя от вещественной части

к модулю, получим ослабленный вариант неравенства П. Борвейна и Т. Эрдели (см. [2; с. 324], [45]), где вместо максимума берется сумма соответствующих чисел.

Неравенства бернштейновского типа на окружности и на отрезке тесно связаны между собой [2]. Отметим известные результаты, вытекающие из неравенства (1.6). Пусть точки $a_k \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, $k = 1, \dots, n$, и невещественные числа a_k этой совокупности образуют сопряженные пары. Следуя [2], [50], определим числа c_k , $k = 1, \dots, n$, соотношениями

$$a_k := \frac{c_k + c_k^{-1}}{2}, \quad |c_k| < 1, \quad k = 1, \dots, n,$$

так что

$$c_k = a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}, \quad k = 1, \dots, n,$$

где под корнем понимается подходящая ветвь. В этом случае положительная величина

$$B_n(x) := \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - x} = \sum_{k=1}^n \frac{1 - |c_k|^2}{|\zeta - c_k|^2}, \quad x \in [-1, 1]$$

($x = (\zeta + 1/\bar{\zeta})/2$), называется *бернштейновским фактором* и играет важную роль в указанных работах.

Пусть

$$R(z) = P(z) / \prod_{k=1}^n (z - a_k),$$

где $P(z)$ – полином с вещественными коэффициентами степени $m \geq n$. Тогда функция $Q(\zeta) := R((\zeta + 1/\bar{\zeta})/2)$ имеет вид

$$\tilde{P}(\zeta) / \left[\zeta^{m-n} \prod_{k=1}^n (\zeta - c_k) \left(\zeta - \frac{1}{\bar{c}_k} \right) \right],$$

где $\tilde{P}(\zeta)$ – полином степени $2m$. С учетом замечания 1.1 из неравенства (1.6) получим

$$|\operatorname{Im}(\zeta Q'(\zeta))| \leq [m - n + |B'(\zeta)|] \sqrt{(Q(\zeta) - L(Q))(H(Q) - Q(\zeta))},$$

где $B(\zeta) = \prod_{k=1}^n [(1 - \zeta/c_k)/(\zeta - 1/\bar{c}_k)]$, $|\zeta| = 1$. После несложных вычислений приходим к неравенству

$$|R'(x)|\sqrt{1-x^2} \leq [m - n + B_n(x)] \sqrt{\left(R(x) - \min_{[-1,1]} R(x)\right) \left(\max_{[-1,1]} R(x) - R(x)\right)},$$

где $x \in (-1, 1)$.

При $n = 1$, $a_1 = a > 1$ и $|R(x)| \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$, имеем неравенство В. С. Виденского [52]

$$|R'(x)|\sqrt{1-x^2} \leq m - 1 + \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a - x}, \quad -1 < x < 1.$$

Легко видеть также, что при $n = m$ полученное неравенство эквивалентно одному из результатов, установленных в работе [44], обобщающему на случай рациональных функций известное неравенство Бернштейна–Сегё для тригонометрических полиномов (о других многочисленных обобщениях см. [2; ч. 7]).

1.2. Обобщения и дополнения леммы Шварца. Пусть функция f голоморфна в круге $U := \{z: |z| < 1\}$, $f(0) = 0$ и $|f| < 1$ в U . Согласно классической лемме Шварца, для любой точки z из круга U справедливо неравенство

$$|f(z)| \leq |z|.$$

Следовательно, имеем неравенство

$$|f'(0)| \leq 1.$$

Знаки равенства (в первом неравенстве при $z \neq 0$) будут здесь иметь место только в случае, когда $f(z) \equiv cz$, $|c| = 1$ [39]. Нам понадобятся следующие обобщения и дополнения выписанных неравенств. Если функция f голоморфна в U и $|f| < 1$ в U , то в круге U имеем точную оценку

$$|f'(z)|(1 - |z|^2) \leq 1 - |f(z)|^2, \quad (1.9)$$

причем знак равенства будет только в случае функции $f(z) = c(z + a)/(1 + \bar{a}z)$, $|c| = 1$, $|a| < 1$ (см. [39; гл. 8, § 1]). Выписывая неравенство (5) из книги [39; гл. 8, § 1] для функции $f(z)/z$, получаем обобщение леммы Шварца:

$$|f(z)| \leq |z| \frac{|z| + |f'(0)|}{1 + |f'(0)||z|}, \quad z \in U, \quad (1.10)$$

справедливое для всех голоморфных в круге U функций f , $f(0) = 0$, $|f| < 1$ в U [53]. Если, дополнительно, функция f продолжается по непрерывности в точку b , $|b| = 1$, так, что $|f(b)| = 1$ и существует производная $f'(b)$, то предельным переходом из (1.10) приходим к граничной лемме Шварца:

$$|f'(b)| \geq \frac{2}{1 + |f'(0)|} \geq 1 \quad (1.11)$$

[53; с. 3514–3515]. Равенство в (1.10) для вещественных положительных z и в левой части неравенства (1.11) для $b = 1$ достигается при $f(z) = z(z+a)/(1+az)$, $0 \leq a \leq 1$.

В случае дополнительного условия однолистности функции f справедлива более сильная, чем (1.11), оценка

$$|f'(b)| \geq \sqrt{\frac{1}{|f'(0)|}} \geq 1, \quad (1.12)$$

вытекающая из различных результатов теории функций (см. об этом [54; комментарий после теоремы 2], а также статью А.Ю. Солянина [55; неравенство (2.15)]). В приложениях конформных отображений к неравенствам для полиномов и рациональных функций, как правило, фигурирует обратная к f функция $z = F(w)$, для которой неравенство (1.12) дает

$$|F'(c)| \leq \sqrt{\frac{1}{|F'(0)|}}, \quad c = f(b). \quad (1.13)$$

Можно предположить, что искусственное построение однолистной функции F (по заданному “неоднолистному” полиному) ведет к более слабым неравенствам, чем те, которые могут быть получены с учетом неоднолистности. В общем случае функция F не имеет однозначной обратной функции f и, следовательно, мы не можем воспользоваться неравенствами (1.11), (1.12). Сказанное выше приводит к необходимости получения теорем искажения для произвольных голоморфных функций F , заданных на некотором подмножестве круга $|w| < 1$ и отображающих его на круг $|z| < 1$. В этой связи представляет интерес следующий простой результат [10]. Пусть функция F голоморфна на открытом множестве G , $0 \in G \subset \{w : |w| < 1\}$, $F(w) \neq 0$, когда $w \in G \setminus \{0\}$; $|F(w)| < 1$ при $w \in G$, и пусть в окрестности начала координат справедливо разложение

$$F(w) = d_n w^n + \dots, \quad d_n \neq 0.$$

Предположим, что все предельные граничные значения $|F(w)|$ в G равны единице. Тогда

$$|F(w)| \geq |w|^n, \quad w \in G.$$

Если к тому же область G имеет на своей границе некоторую дугу γ окружности $|w| = 1$, а функция F отображает эту дугу на дугу окружности $|w| = 1$, то для любой внутренней точки c дуги γ справедливо неравенство

$$|F'(c)| \leq \frac{n^2(|d_n| + 1)}{(n+1)|d_n| + n - 1} \leq n. \quad (1.14)$$

Равенство в (1.14) достигается для функции $F(w) = d_n w^n$, $|d_n| = 1$, и области $G = \{w : |w| < 1\}$.

В условиях неравенства (1.14) рассмотрим множество $\tilde{G} := \{w : w \in G, |\tilde{F}(w)| \neq 1\}$, где $\tilde{F}(w) = F(w)/w^{n-1}$. Открытое множество $\tilde{G}$ является объединением непересекающихся областей, совокупность которых обозначим через $\{D\}$. Функция $z = \tilde{F}(w)$ голоморфна в каждой области D из $\{D\}$. Предельные граничные значения модуля этой функции в D не меньше единицы.

Кроме того, $\tilde{F}(0) = 0$, $\tilde{F}'(0) = d_n \neq 0$ и $\tilde{F}(w) \neq 0$ при $w \in \tilde{G} \setminus \{0\}$. Используя принцип аргумента, легко заключить, что каждая область D совокупности $\{D\}$ либо отображается функцией $z = \tilde{F}(w)$ в $|z| > 1$, либо конформно и однолистно отображается этой функцией на круг $|z| < 1$ (ср. [8; лемма 2.1]). Пусть точка $c \in \gamma$ определена выше. Если $c \in \partial D$ и $\tilde{F}(D) \subset \{z: |z| > 1\}$, то в этой точке

$$0 \geq \frac{\partial |\tilde{F}|}{\partial |w|} = \frac{\partial |F|}{\partial |w|} - (n-1) = |F'(c)| - (n-1).$$

В случае $c \in \partial D$ и $\tilde{F}(D) = \{z: |z| < 1\}$ из неравенства (1.13), примененного к функции $\tilde{F}$, следует, что

$$|F'(c)| \leq n-1 + \sqrt{\frac{1}{|d_n|}}. \quad (1.15)$$

Таким образом, в любом случае выполняется неравенство (1.15). Сравнивая это неравенство с неравенством (1.14), элементарно заключаем, что при $|d_n| < (n-1)^2$ оно слабее (1.14), а при $|d_n| > (n-1)^2$ оно сильнее этого неравенства. Приложения неравенств (1.12) и (1.15) будут даны во второй главе данного обзора.

В качестве дополнения к граничной лемме Шварца (1.11) приведем следующий результат [54; теорема 2]. Пусть функция f голоморфна в U , $|f| < 1$ в U , и пусть эта функция и ее производная определены также в граничных точках z_k таких, что точки $f(z_k)$ расположены на единичной окружности под равными углами, $k = 1, \dots, m$, $m \geq 2$. Тогда справедливо неравенство

$$\left| \prod_{k=1}^m f'(z_k) \right| \geq 1 \quad (1.16)$$

с равенством для функции $f(z) \equiv cz$, $|c| = 1$.

Другие обобщения и дополнения леммы Шварца представлены в недавних обзорах [56], [57], а также в статьях [11], [54].

1.3. Применение леммы Шварца к неравенствам для полиномов.

Прямое применение неравенств (1.9)–(1.11), (1.16) к специально построенным произведениям Бляшке приводит к новым результатам для некоторых классов целых функций. Рассмотрим этот подход в случае полиномов с нулями в единичном круге [15]. Обозначим через $\mathcal{P}_n$ класс всех полиномов вида

$$P(z) = c_n \prod_{k=1}^n (z - \alpha_k),$$

для которых $c_n \neq 0$ и $|\alpha_k| \leq 1$, $k = 1, \dots, n$, $n \geq 2$. Всюду ниже в этом разделе

$$B(z) = \frac{P(z)}{z^{n-1} \overline{P(1/\bar{z})}} = \frac{c_n}{\bar{c}_n} z \prod_{k=1}^n \frac{z - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_k z}.$$

Непосредственно из неравенства (1.10), примененного к функции $B(z)$, вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.4. Если полином $P(z) = c_0 + \dots + c_n z^n$ принадлежит классу $\mathcal{P}_n$, то для любой точки z из круга U справедливо неравенство

$$\left| \frac{P(z)}{P(1/\bar{z})} \right| \leq |z|^n \frac{|z||c_n| + |c_0|}{|c_n| + |z||c_0|}.$$

Равенство достигается, например, для полиномов P с нулями на единичной окружности $|z| = 1$.

Пусть теперь полином $P(z) = c_0 + \dots + c_n z^n$ не имеет нулей в круге U . Тогда полином $Q(z) := z^n P(1/z) = c_n + \dots + c_0 z^n$ принадлежит классу $\mathcal{P}_n$. Из теоремы 1.4 следует, что для любой точки z с $|z| > 1$ выполняется неравенство

$$\left| P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) \right| \geq |P(z)| \frac{1}{|z|^n} \frac{|z||c_0| + |c_n|}{|c_0| + |z||c_n|}.$$

Предположим дополнительно, что $M(P) = 1$. Тогда

$$|P(z)| + |z|^n \left| P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) \right| \leq 1 + |z|^n$$

(см., например, [58; с. 550]). Вместе с предыдущим неравенством это дает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Если полином $P(z) = c_0 + \dots + c_n z^n$, $n \geq 2$, не имеет нулей в круге U и $M(P) = 1$, то для любого $r > 1$ справедливо неравенство

$$\max\{|P(z)| : |z| = r\} \leq \frac{(1 + r^n)(|c_0| + r|c_n|)}{(1 + r)(|c_0| + |c_n|)}$$

с равенством для полиномов $P(z) = (\mu + \nu z^n)/2$, $|\mu| = |\nu| = 1$.

Поскольку правая часть последнего неравенства не превосходит $(1 + r^n)/2$, то мы имеем уточнение классического неравенства Н. Энкени и Т. Ривлина [59].

ТЕОРЕМА 1.5. Для полиномов $P(z) = c_0 + \dots + c_n z^n$ класса $\mathcal{P}_n$ в каждой точке z окружности $|z| = 1$, где $P(z) \neq 0$, выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} \frac{zP'(z)}{P(z)} \geq \frac{n-1}{2} + \frac{|c_n|}{|c_0| + |c_n|}. \quad (1.17)$$

Равенство в (1.17) имеет место для полиномов P с нулями на единичной окружности $|z| = 1$ для любых z , $|z| = 1$, $P(z) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применение неравенства (1.11) к функции $B(z)$ дает

$$|B'(z)| \geq \frac{2}{1 + |c_0/c_n|}$$

для любых точек z на окружности $|z| = 1$. С другой стороны, для таких точек z при $P(z) \neq 0$ имеем

$$|B'(z)| = \frac{zB'(z)}{B(z)} = 2 \operatorname{Re} \frac{zP'(z)}{P(z)} - n + 1,$$

что приводит к неравенству (1.17). Если теперь все нули полинома P расположены на единичной окружности, то $|c_0| = |c_n|$ и $B(z) \equiv cz$, $|c| = 1$. Поэтому в последнем неравенстве и, следовательно, в неравенстве (1.17) имеет место знак равенства. Теорема доказана.

Полученное неравенство несколько усиливает неравенство (14) работы [7]. Из неравенства (1.17) вытекает также следующее усиление классического неравенства П. Турана [60]:

$$M(P') \geq M(P) \left[\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \frac{|c_n| - |c_0|}{|c_n| + |c_0|} \right].$$

ТЕОРЕМА 1.6. Пусть P – полином класса $\mathcal{P}_n$. Тогда для любых точек z_k , $k = 1, 2, 3$, единичной окружности $|z| = 1$, отличных от нулей полинома P , справедливо неравенство

$$\prod_{k=1}^3 \left(\operatorname{Re} \frac{z_k P'(z_k)}{P(z_k)} - \frac{n}{2} \right) \geq \frac{1}{6\sqrt{3}} \prod_{k=1}^3 \left| \frac{z_k^n \overline{P(z_k)}}{P(z_k)} - \frac{z_{k+1}^n \overline{P(z_{k+1})}}{P(z_{k+1})} \right|,$$

где полагаем $z_4 = z_1$. Равенство достигается для полиномов $P(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n$, все ненулевые корни которых расположены на единичной окружности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из неравенства (1.16), примененного к суперпозиции функции $B(z)/z$ и подходящего дробно-линейного автоморфизма единичного круга (см. [27; теорема 12]).

ТЕОРЕМА 1.7. Пусть $P(z) = \prod_{k=1}^n (z - \alpha_k)$, $|\alpha_k| \leq 1$, $k = 1, \dots, n$, $n \geq 2$, и пусть β_k , $k = 1, \dots, n-1$, – критические точки полинома P . Тогда справедливо неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_k \prod_{k=1}^n \alpha_k - n \prod_{k=1}^{n-1} \beta_k \right| \leq 1 - \left| \prod_{k=1}^n \alpha_k^2 \right| \leq 1.$$

Равенство достигается в случае $P(z) = c_1 z + z^n$, $|c_1| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{n-1} z^{n-1} + z^n$. Непосредственными вычислениями получаем

$$f(z) := \frac{B(z)}{z} = \frac{P(z)}{z^n \overline{P(1/\bar{z})}} = c_0 + (c_1 - c_0 \bar{c}_{n-1})z + \dots$$

Неравенство (1.9) при $z = 0$ дает

$$|c_1 - c_0 \bar{c}_{n-1}| \leq 1 - |c_0|^2.$$

Осталось воспользоваться формулами Виета:

$$c_0 = (-1)^n \prod_{k=1}^n \alpha_k, \quad c_1 = (-1)^{n-1} n \prod_{k=1}^{n-1} \beta_k \quad \text{и} \quad c_{n-1} = - \sum_{k=1}^n \alpha_k.$$

Случай равенства виден из приведенного доказательства. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.3. Если полином $P(z) = \prod_{k=1}^n (z - \alpha_k)$ принадлежит классу $\mathcal{P}_n$

и $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 0$, то $|P'(0)| \leq 1 - |P(0)|^2 \leq 1$.

Неравенство $|P'(0)| \leq 1$ в условиях следствия 1.3 получено ранее П. Павловским другим путем (ср. [61; с. 4463–4464]).

СЛЕДСТВИЕ 1.4. Если полином $P(z) = \prod_{k=1}^n (z - \alpha_k)$ принадлежит классу $\mathcal{P}_n$ и если $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 0$, либо $\prod_{k=1}^n \alpha_k = 0$, то для критических точек β_k , $k = 1, \dots, n-1$, этого полинома, выполняется неравенство

$$\min_{1 \leq k \leq n-1} |\beta_k| \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{1/(n-1)}.$$

Равенство достигается в случае $P(z) = -z + z^n$.

В [13; теорема 3] показано, что если β_k , $k = 1, \dots, n-1$, – критические точки полинома $P(z) = c_1 z + \dots + z^n$ класса $\mathcal{P}_n$, то

$$n^{-1} \sqrt[n-1]{\prod_{k=1}^{n-1} |P(\beta_k)|} \leq (n-1) \left| \frac{c_1^2}{n^n} \right|^{1/(n-1)}$$

с равенством в случае $P(z) = c_1 z + z^n$, где $|c_1| = 1$. С другой стороны, из теоремы 1.7 следует, что $|c_1| \leq 1$. Отсюда вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1.5. Если β_k , $k = 1, \dots, n-1$, – критические точки полинома $P(z) = c_1 z + \dots + z^n$ класса $\mathcal{P}_n$, то имеют место неравенства

$$\prod_{k=1}^{n-1} |P(\beta_k)| \leq \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}, \quad n^{-1} \sqrt[n-1]{\prod_{k=1}^{n-1} \left| \frac{P(\beta_k)}{\beta_k} \right|} \leq \frac{n-1}{n}.$$

Равенство в обоих случаях достигается для полинома $P(z) = -z + z^n$.

Следующее утверждение усиливает теорему 1.2 данного обзора.

ТЕОРЕМА 1.8 [19]. Для любого полинома $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$, $n \geq 2$, и любой точки z на окружности $|z| = 1$, в которой $|P(z)|$ отличен от $m(P)$ и $M(P)$, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} & \frac{|(|P(z)|^2)'_\varphi|}{\sqrt{(|P(z)|^2 - m^2(P))(M^2(P) - |P(z)|^2)}} \leq \lambda_n \\ & := \frac{n^2(M^2(P) - m^2(P) + 4|c_0 c_n|)}{(n+1)(M^2(P) - m^2(P)) + 4|c_0 c_n|(n-1)} \leq n. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Равенства в левой и правой части (1.18) достигаются в случае $P(z) = c_0 + c_n z^n$ для любых точек z , $|z| = 1$, $z^n \neq \pm c_0/c_n$, где c_0 и c_n – произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию $|c_0| = |c_n| \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $c_0 \neq 0$ и $c_n \neq 0$. В этих условиях $m(P) < M(P)$. Действительно, в противном случае полином P отображает окружность $|z| = 1$ в себя и, ввиду того, что $P(\infty) = \infty$, принцип симметрии дает равенство $P(0) = 0$. Это противоречит допущению $P(0) = c_0 \neq 0$. Обозначим через $\zeta = \Phi(w)$ функцию, которая конформно и однолистно отображает

внешность отрезка $\gamma = [m^2(P), M^2(P)]$ на круг $|\zeta| < 1$ так, что $\Phi(\infty) = 0$ и $\Phi(m^2(P)) = -1$. Тогда функция

$$f(z) = \Phi\left(\overline{P(\bar{z})}P\left(\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{M^2(P) - m^2(P)}{4\bar{c}_0 c_n} z^n + \dots$$

голоморфна на множестве

$$G = \left\{ z: |z| < 1, \overline{P(\bar{z})}P\left(\frac{1}{z}\right) \notin \gamma \right\}$$

и аналитически продолжима на множество

$$E = \{z: |z| = 1, |P(\bar{z})| \neq m(P), |P(\bar{z})| \neq M(P)\}.$$

Кроме того, $f(z) \neq 0$ при $z \in G \setminus \{0\}$ и все предельные граничные значения $|f(z)|$ в G равны единице. Согласно неравенству (1.14), в точках z множества E имеем

$$|f'(z)| \leq \lambda_n \leq n,$$

что равносильно неравенствам (1.18). Случаи равенства проще всего проверить, учитывая равенство в (1.14) (см. [19; доказательство теоремы 1]). Теорема доказана.

Интегрируя левое неравенство в (1.18) на интервале (φ_1, φ_2) , приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 1.9. *Для любого полинома P степени n , удовлетворяющего условию $m(P) \neq M(P)$, и для любых вещественных чисел φ_1, φ_2 справедливо неравенство*

$$\left| \arcsin \sqrt{\frac{|P(e^{i\varphi})|^2 - m^2(P)}{M^2(P) - m^2(P)}} \right|_{\varphi_1}^{\varphi_2} \leq \frac{\lambda_n |\varphi_1 - \varphi_2|}{2},$$

где величина λ_n определена в формулировке теоремы 1.8.

СЛЕДСТВИЕ 1.6 (ср. (1.4)). *Для любого полинома P степени n и любого натурального числа $N \geq n$ выполняется неравенство*

$$\max_{\omega^N=1} |P(\omega)| \geq \cos \frac{\pi \lambda_n}{2N} \max_{|z|=1} |P(z)|.$$

СЛЕДСТВИЕ 1.7 (см. [62; с. 154]). *Предположим, что тригонометрическая сумма*

$$S_n(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta$$

удовлетворяет условиям $|S_n(0)| \leq 1$, $|S_n(\alpha)| \leq 1$ при некотором α , $0 < \alpha < \pi/n$. Если абсолютный максимум M выражения $|S_n(\theta)|$ достигается на интервале $(0, \alpha)$, то

$$M \leq \frac{1}{\cos(n\alpha/2)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из теоремы 1.9, примененной к полиному P степени $2n$, связанному с тригонометрической суммой $S_n(\theta)$ равенством

$$S_n(\theta) = z^{-n} P(z), \quad z = e^{i\theta}.$$

ТЕОРЕМА 1.10. Для любого полинома $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$, $\operatorname{Re} c_n \neq 0$, и любой точки z на отрезке $[-1, 1]$, в которой $\operatorname{Re} P(z)$ отлична от $\bar{L}(P)$ и $\bar{H}(P)$, справедливо неравенство

$$\frac{|\operatorname{Re} P'(z) \sqrt{1 - z^2}|}{\sqrt{(\operatorname{Re} P(z) - \bar{L}(P))(\bar{H}(P) - \operatorname{Re} P(z))}} \leq \frac{n^2 (\bar{H}(P) - \bar{L}(P) + 2^{2-n} |\operatorname{Re} c_n|)}{(n+1)(\bar{H}(P) - \bar{L}(P)) + (n-1) \cdot 2^{2-n} |\operatorname{Re} c_n|} \leq n.$$

Равенство достигается в случае $P(z) = aT_n(z) + b$ для полинома Чебышёва $T_n(z) = 2^{n-1} z^n + \dots$ и любых вещественных $a \neq 0$, комплексных b и $z \in [-1, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $n \geq 2$ и $\bar{L}(P) \neq \bar{H}(P)$. Обозначим через $\zeta = \Phi(\omega)$ функцию, конформно и однолистно отображающую внешность отрезка $[2\bar{L}(P), 2\bar{H}(P)]$ на круг $|\zeta| < 1$ так, что $\Phi(\infty) = 0$, $\Phi(2\bar{L}(P)) = -1$, и применим к функции

$$F(w) := \Phi\left(P\left(\frac{w+1/w}{2}\right) + \overline{P\left(\frac{\bar{w}+1/\bar{w}}{2}\right)}\right)$$

неравенство (1.14) в некоторой точке c , $|c| = 1$. Требуемое неравенство получается отсюда заменой $z = (c + 1/c)/2$. Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Можно показать, что неравенство теоремы 1.10 усиливает классические неравенства Маркова и Бернштейна (см. [8; комментарий после теоремы 4.4]).

1.4. О целых функциях экспоненциального типа. Указанные в заглавии этого раздела функции представляют значительный интерес. К настоящему времени для них получено немало интересных результатов, и исследование этих функций продолжается до сих пор (см., например, [63]–[66]). Целыми функциями экспоненциального типа называются целые функции, порядок которых меньше 1, либо равен 1, но тогда тип конечен. Как обычно, через

$$h_f(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |f(re^{i\theta})|}{r}$$

будем обозначать индикатор роста функции f . Рассмотрим класс $\mathcal{E}$ целых функций экспоненциального типа, удовлетворяющих следующим условиям: $f(z) \neq 0$ в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и $h_f(\pi/2) = h_f(-\pi/2)$. Заметим, что если f – целая функция экспоненциального типа, $f(z) \neq 0$ при $\operatorname{Im} z > 0$ и $h_f(\pi/2) = \tau$, $h_f(-\pi/2) = \sigma$ (т. е. $f \in \mathcal{A}_\sigma^\tau$; см. работы [67], [35]), то функция $g(z) = f(z)e^{i(\tau-\sigma)z/2}$ принадлежит классу $\mathcal{E}$. Применяя к функции g следующие ниже теоремы, получим соответствующие утверждения для функций класса $\mathcal{A}_\sigma^\tau$. Пусть теперь $f \in \mathcal{E}$. Тогда функция $\overline{f(\bar{z})}$ принадлежит известному классу P [63; с. 217]. Из представления функций класса P следует, что функция

$$L(z) := \frac{f(z)}{\overline{f(\bar{z})}} = c \prod_k \frac{1 - z/\alpha_k}{1 - z/\bar{\alpha}_k}, \quad (1.19)$$

где $|c| = 1$, $\operatorname{Im} \alpha_k \leq 0$ и $\sum_k \left| \operatorname{Im} \frac{1}{\alpha_k} \right| < \infty$ [63; с. 219]. Если функция f имеет только вещественные нули, то $L(z) \equiv c$, $|c| = 1$; в общем случае $|L(z)| \leq 1$ при $\operatorname{Im} z < 0$.

Пусть $f \in \mathcal{E}$ и z_0 – фиксированная точка в нижней полуплоскости: $\operatorname{Im} z_0 < 0$. Ввиду (1.19) суперпозиция

$$B(\zeta) = \zeta L(z(\zeta)), \quad \text{где} \quad z(\zeta) = \frac{z_0 + \zeta \bar{z}_0}{1 + \zeta},$$

является произведением Бляшке, переводящим круг $|\zeta| < 1$ в себя. Данная функция использовалась в работе [35] для построения конформного и однолистного отображения в соответствии с предложенным в [8] подходом к получению неравенств для многолистных функций. Однако в ряде частных случаев эффективнее непосредственное применение неравенств (1.9)–(1.11), например, к функциям $L(z(\zeta))$ и $B(\zeta)$. Таким образом, эти два подхода дополняют друг друга. Заметим также, что наряду с функцией $B(\zeta)$ можно рассматривать другое произведение Бляшке

$$\frac{L(z(\zeta)) - L(z_0)}{1 - \overline{L(z_0)} L(z(\zeta))},$$

к которому применены все следующие ниже выкладки для $B(\zeta)$.

ТЕОРЕМА 1.11. *Если $f \in \mathcal{E}$, то для любой точки z , $\operatorname{Im} z < 0$, $f(z) \neq 0$, справедливо неравенство*

$$2|\operatorname{Im} z| \left| \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{\overline{f'(\bar{z})}}{\overline{f(\bar{z})}} \right| \leq \frac{|f^2(\bar{z})| - |f^2(z)|}{|f(z)f(\bar{z})|}.$$

Равенство достигается в том и только том случае, когда все нули функции f , за исключением, может быть, одного, лежат на вещественной оси.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $L(z) \not\equiv \operatorname{const}$, то, применяя неравенство (1.9) к функции $L(z(\zeta))$ в точке $\zeta = 0$, получаем

$$\left| \frac{L'(z_0)}{L(z_0)} \right| |2\operatorname{Im} z_0| \leq \frac{1}{|L(z_0)|} - |L(z_0)|,$$

что дает требуемое неравенство при $z_0 = z$. Равенство имеет место в том и только том случае, когда

$$L(z(\zeta)) = c \frac{\zeta + a}{1 + \bar{a}\zeta}$$

при некоторых c , $|c| = 1$, и a , $|a| < 1$. Ввиду (1.19) это соответствует случаю, когда один нуль функции f лежит в нижней полуплоскости, а все остальные нули (если таковые имеются) – на вещественной оси. Если теперь $L(z) \equiv \operatorname{const}$, то необходимо $|L(z)| \equiv 1$, и мы имеем случай равенства, в котором все нули функции f расположены на вещественной оси. Теорема доказана.

Из неравенства (1.10), примененного к функции $B(\zeta)$, вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.12. Если $f \in \mathcal{E}$, то для любых точек z и ζ в нижней полуплоскости выполняется неравенство

$$|z - \bar{\zeta}|(|f(z)f(\bar{\zeta})| - |f(\bar{z})f(\zeta)|) \leq |z - \zeta|(|f(\bar{z})f(\bar{\zeta})| - |f(z)f(\zeta)|).$$

Равенство достигается, например, для функций f , все нули которых расположены на вещественной оси.

Заметим, что ввиду (1.19) для любой функции f класса $\mathcal{E}$ в точках x на вещественной оси имеет место неравенство

$$\operatorname{Im} \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_k \frac{\operatorname{Im} \alpha_k}{|\alpha_k - x|^2} \leq 0.$$

Отсюда следует, что

$$(\arg f(x))' = \operatorname{Im} \frac{f'(x)}{f(x)} \leq 0. \quad (1.20)$$

Здесь и ниже $(\arg f(x))'$ означает частную производную $\partial \arg f / \partial x$, вычисленную в точке x на вещественной оси. Если дополнительно известны значения функции f в некоторых симметричных точках ζ и $\bar{\zeta}$, то неравенство (1.20) допускает следующее усиление.

ТЕОРЕМА 1.13. Пусть $f \in \mathcal{E}$, и пусть x – вещественное, а ζ – комплексное число в нижней полуплоскости. Тогда

$$(\arg f(x))' \leq \frac{|f(\bar{\zeta})| - |f(\zeta)|}{|f(\bar{\zeta})| + |f(\zeta)|} \frac{\operatorname{Im} \zeta}{|x - \zeta|^2}. \quad (1.21)$$

Равенство в (1.21) имеет место для функций f класса $\mathcal{E}$ с нулями на вещественной оси.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применение неравенства (1.11) к функции

$$B(\zeta) = \zeta L(z(\zeta)) = L(z_0)\zeta + \dots$$

дает

$$|B'(\zeta)| \geq \frac{2}{1 + |L(z_0)|} = 1 + \frac{1 - |L(z_0)|}{1 + |L(z_0)|}$$

для любых ζ , $|\zeta| = 1$, $\zeta \neq -1$. С другой стороны, в точке ζ , для которой $x = z(\zeta)$, имеем

$$|B'(\zeta)| = 1 + \frac{\zeta L'(z(\zeta))z'(\zeta)}{L(z(\zeta))} = 1 + \frac{\zeta(z)L'(z(\zeta))}{\zeta'(z)L(z(\zeta))} = 1 + \frac{|x - z_0|^2}{\operatorname{Im} z_0} \operatorname{Im} \frac{f'(x)}{f(x)},$$

где $\zeta(z) = (z_0 - z)/(z - \bar{z}_0)$ – функция, обратная к $z = z(\zeta)$. Неравенство (1.21) доказано (при $\zeta = z_0$). В случае, когда все нули функции f расположены на вещественной оси, мы имеем $L(z) \equiv c$, $|c| = 1$ (см. (1.19)). Поэтому $B(\zeta) = c\zeta$ и в неравенствах (1.11) и (1.21) имеет место знак равенства. Теорема доказана.

Теоремы 1.11 и 1.13 дают усиление соответственно теорем 5 и 3 работы [35], полученных другим путем. Сочетание неравенства (1.21) с некоторыми результатами Б. Я. Левина [63] и Т. Г. Генчева [67] для целых функций экспоненциального типа приводит к уточнению классических теорем в разных направлениях (см. применение теоремы 3 в [35; следствия 2–4]).

ТЕОРЕМА 1.14. Если $f \in \mathcal{E}$, то для любых различных точек x_1 и x_2 на вещественной оси справедливо неравенство

$$(\arg f(x_1))'(\arg f(x_2))'|x_1 - x_2|^2 \geq \sin^2 \arg \frac{f(x_1)}{f(x_2)}. \quad (1.22)$$

Равенство в (1.22) достигается для функций f класса $\mathcal{E}$, у которых в нижней полуплоскости имеется только один нуль $z_0 = (x_1 + x_2)/2 - i|x_1 - x_2|/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L(x_1) \neq L(x_2)$, и пусть точки ζ_k таковы, что $x_k = z(\zeta_k)$, $k = 1, 2$. Обозначим через $\Psi(w)$ один из дробно-линейных автоморфизмов круга $|w| < 1$ на себя, переводящих точки $L(x_k)$, $k = 1, 2$, в точки ± 1 . Из неравенства (1.16), примененного к суперпозиции $\Psi(L(z(\zeta)))$, следует, что

$$|\Psi'(L(x_1))\Psi'(L(x_2))L'(x_1)L'(x_2)z'(\zeta_1)z'(\zeta_2)| \geq 1. \quad (1.23)$$

Полагая z_0 в определении функции $z(\zeta)$ равной $(x_1 + x_2)/2 - i|x_1 - x_2|/2$ и используя инвариантность известного функционала при дробно-линейных отображениях, заключаем из (1.23), что

$$|L'(x_1)L'(x_2)||x_1 - x_2|^2 \geq |L(x_1) - L(x_2)|^2.$$

Это же неравенство верно при $L(x_1) = L(x_2)$. После несложных вычислений приходим к неравенству (1.22). Если теперь функция f имеет в нижней полуплоскости только один нуль $z_0 = (x_1 + x_2)/2 - i|x_1 - x_2|/2$, то ввиду (1.19)

$$L(z) \equiv c \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}, \quad |c| = 1.$$

Таким образом, $L(z(\zeta))$ есть поворот вокруг точки $\zeta = 0$. Непосредственно убеждаемся, что $\zeta_1 = -\zeta_2$ и, следовательно, Ψ также является поворотом вокруг начала. Отсюда вытекает равенство в (1.23) и (1.22). Теорема доказана.

Аналогично доказывается “трехточечная” теорема искажения для функций класса $\mathcal{E}$ и для любых различных точек x_1 , x_2 и x_3 на вещественной оси.

В работе [66] установлено замечательное неравенство

$$|f(z)| > \mu \quad \text{при } \operatorname{Im} z > 0,$$

справедливое для всех целых функций f экспоненциального типа, отличных от постоянной, не имеющих нулей в верхней полуплоскости и удовлетворяющих условиям $h_f(\pi/2) = 0$, $|f(x)| \geq \mu > 0$ на вещественной оси. В [66] даны также интересные приложения этого неравенства. Новые приложения можно получить, применяя неравенства (1.9), (1.10) к функции $w = \mu/f(z(\zeta))$, $|\zeta| < 1$, где $z(\zeta)$ определена выше, но с $\operatorname{Im} z_0 > 0$. Например, из неравенства (1.9), аналогично доказательству теоремы 1.11, получаем следующий результат:

$$|f'(z)| \leq \frac{|f^2(z)| - \mu^2}{2\mu \operatorname{Im} z}, \quad \operatorname{Im} z > 0.$$

В заключение отметим, что если все нули полинома P степени n лежат в круге $|z| \leq 1$, то функция $f(z) = e^{inz/2}P(e^{-iz})$ принадлежит классу $\mathcal{E}$. Применение к этой функции предыдущих теорем приводит к некоторым утверждениям для полинома P . Однако более сильные результаты получаются, если повторить предыдущие доказательства теорем, но уже применительно к произведению Бляшке, построенному по полиному P .

1.5. Дополнение к принципу Линделёфа с приложениями к полиномам и рациональным функциям. Функцию Грина $g_D(z, \zeta)$ области D называют *классической*, если она обращается в нуль на границе D . В этом случае доопределим функцию $g_D(z, \zeta)$ нулем в дополнении $\overline{\mathbb{C}_z} \setminus D$. Следующее утверждение принято называть *принципом Линделёфа* [68]. Пусть области D и G расширенной комплексной плоскости имеют классические функции Грина, и пусть функция: $f: D \rightarrow G$ отлична от постоянной и мероморфна в D . Тогда для любой фиксированной конечной точки w_0 , принадлежащей $f(D)$, справедливо неравенство

$$g_G(f(z), w_0) \geq \sum_{k \geq 0} g_D(z, z_k), \quad z \in D, \quad (1.24)$$

где $z_0, z_1, \dots, z_k, \dots$ – нули функции $f - w_0$, причем каждый из них учитывается столько раз, какова его кратность. Равенство в (1.24) в какой-либо точке $z \in D \setminus \bigcup_{k \geq 0} \{z_k\}$ влечет за собой равенство в (1.24) во всей области D . Даже ослабленный вариант этого принципа

$$g_G(f(z), w_0) \geq g_D(z, z_0)$$

является существенным обобщением леммы Шварца и имеет многочисленные приложения в геометрической теории функций (см., например, [41], [68]). Распространение принципа Линделёфа на случай функций Робена вместо функций Грина дано в недавней работе [69]. Обозначим через $r(D, \zeta)$ внутренний радиус области D относительно точки $\zeta \in D$, определяемый соотношением

$$g_D(z, \zeta) = -\log |z - \zeta| + \log r(D, \zeta) + o(1), \quad z \rightarrow \zeta.$$

В работе [70] И. П. Митюк заметил, что из неравенства (1.24) вытекает неравенство

$$r(f(D), w_0) \geq |a_p| r^p(D, z_0) \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} g_D(z_0, z_k) \right\}, \quad (1.25)$$

где $f(z) = w_0 + a_p(z - z_0)^p + \dots$ – голоморфная функция в области D . Более того, И. П. Митюк показал эффективность применения последнего неравенства в сочетании с методами симметризации [70]–[73]. Применение неравенства (1.25) к полиному ($f = P$) дает следующий результат (см. [23; теорема 9]).

ТЕОРЕМА 1.15. *Если P – полином степени n , то для любой точки z , удовлетворяющей условию $\{\zeta: P(\zeta) = P(z)\} \subset U$, справедливо неравенство*

$$M^2(P) - |P(z)|^2 \geq |z|^n \left| P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) - P(z) \right| M(P).$$

Равенство достигается в случае $P(z) = cz^n$, $c \neq 0$.

В пособии [72] впервые указано на необходимость изучения неравенств, обратных (1.24), (1.25). Именно, следуя [72], рассмотрим функцию $f(z) = w_0 + a_p(z - z_0)^p + \dots$, голоморфную в области D , и пусть A – множество предельных точек последовательностей $\{f(z'_\nu)\}$, когда $z'_\nu \in D$, $z'_\nu \rightarrow \partial D$, $\nu \rightarrow \infty$. Фиксируем

конечную точку $w_0 \notin A$ и обозначим через G связную компоненту дополнения множества A , содержащую точку w_0 . Тогда

$$r(G, w_0) \leq |a_p| r^p(D, z_0) \exp \left\{ \sum_{k \geq 1} g_D(z_0, z_k) \right\}, \quad (1.26)$$

причем равенство в (1.26) имеет место в том и только том случае, когда $G = f(D)$ и функция f производит полное n -кратное накрытие области G областью D (здесь n – суммарная кратность нулей функции $f - w_0$). Последнее означает, что при стремлении точки z к границе области D все предельные значения функции $f(z)$ принадлежат границе G и каждой точке $w \in G$ соответствует ровно n прообразов в области D (с учетом кратности) [72; с. 22]. Сказанное выше можно перефразировать следующим образом: если $f(\partial D) \subset \overline{\mathbb{C}_w} \setminus G$, то справедливо неравенство (1.26). Заметим, что неравенство (1.25) выполняется при условии $f(D) \subset G$. Однако для неоднолистной функции f противоположного включения $f(D) \supset G$ недостаточно для выполнения неравенства (1.26), как показывает пример функции $f(z) = z^2$ и областей $D = \mathbb{C}_z \setminus \{z = x + iy : -\infty \leq x \leq -1, y = 0\}$ и $G = \{w : |w| < R\}$ при любом $R > 16$ ($z_0 = w_0 = 0$). Следующее утверждение содержит неравенство (1.26) как следствие при $z \rightarrow z_0$ (см. [16; теорема 1]). Пусть области D и G имеют классические функции Грина, $D \subset \overline{\mathbb{C}_z}$, $G \subset \overline{\mathbb{C}_w}$, и пусть w_0 – фиксированная точка области G . Предположим, что функция f является мероморфной в области D , принимает по меньшей мере один раз значение w_0 в D и удовлетворяет условию $f(\partial D) \subset \overline{\mathbb{C}_w} \setminus G$ (т.е. при стремлении точки z к границе области D все предельные значения функции $f(z)$ лежат в дополнении области G). Тогда для любой точки $z \in D$ справедливо неравенство

$$g_G(f(z), w_0) \leq \sum_{k=0}^m g_D(z, z_k), \quad (1.27)$$

где $z_0, \dots, z_m$ – все нули функции $f - w_0$ в случае $w_0 \neq \infty$ и нули функции $1/f$ при $w_0 = \infty$, причем каждый нуль учитывается столько раз, какова его кратность. Равенство в (1.27) в какой-нибудь точке $z \in D \setminus \bigcup_{k=1}^m \{z_k\}$ влечет за со-

бой равенство в (1.27) во всей области D и выполняется тогда и только тогда, когда $G = f(D)$ и функция f осуществляет полное $(m+1)$ -кратное накрытие области G областью D . Неравенство (1.27) впервые встречается в работе И. П. Митюка [74] при несколько иных ограничениях на функцию f . И. П. Митюк рассматривал (1.27) как вспомогательное неравенство для иного, нежели в [72], варианта доказательства оценки (1.26), дополняющей его ранний результат (1.25). Вместе с тем неравенство (1.27) является важным дополнением к принципу Линделёфа, и, как выяснилось много лет спустя, оно содержит, в частности, многие классические и современные неравенства для полиномов и рациональных функций [25]. Отметим, что из неравенства (1.27) вытекает следующее утверждение (ср. следствие 2 работы [25]). Пусть в предыдущих условиях область D имеет на своей границе открытую аналитическую дугу Жордана γ , $\infty \notin \gamma$, ни одна точка которой не является предельной для граничных точек, не принадлежащих γ , а область G имеет на своей границе такую же дугу Γ . Предположим, что функция f отображает дугу γ на некоторую дугу

$f(\gamma) \subset \Gamma$ так, что положительной ориентации γ соответствует положительная ориентация на Γ .¹ Тогда для любой точки $z \in \gamma$ справедливо неравенство

$$|f'(z)| \frac{\partial g_G(f(z), w_0)}{\partial n} \leq \sum_{k=0}^m \frac{\partial g_D(z, z_k)}{\partial n}, \quad (1.28)$$

где $\partial/\partial n$ означает дифференцирование вдоль внутренней нормали к соответствующей граничной дуге. Равенство в какой-либо точке $z \in \gamma$ достигается лишь в случае, когда выполняется равенство в (1.27) (см. [16; следствие 1]).

Неравенство (1.27) можно трактовать как теорему покрытия [25], являющуюся далеко идущим обобщением теоремы 1.1. Неравенство (1.28) содержит многочисленные неравенства бернштейновского типа. Например, пусть $D = \mathbb{C}_z \setminus E$, $G = \mathbb{C}_w \setminus F$ и $w_0 = \infty$, где E и F – некоторые компактные множества ненулевой емкости на вещественной оси. Предположим, что функция $f = R$ – рациональная функция степени n , являющаяся отношением двух вещественных полиномов, и пусть $R(E) \subset F$. Тогда неравенство (1.28) совпадает с неравенством А. Л. Лукашова (см. [75], [76]):

$$|R'(x)| \tilde{\omega}_F(\infty, f(x)) \leq \sum_{k=1}^n \tilde{\omega}_E(z_k, x), \quad (1.29)$$

справедливого для любой внутренней точки x компакта E . Здесь

$$\tilde{\omega}_E(z, x) = \frac{d}{dx} (\omega(z, [\inf E, x] \cap E, \overline{\mathbb{C}_z} \setminus E)),$$

где $\omega(z, e, \Omega)$ – гармоническая мера множества $e \subset \partial\Omega$ в точке z относительно области Ω ($m = n$). При доказательстве неравенства (1.29) А. Л. Лукашов существенно использует свой предыдущий результат из [75]. В работе [76] приводятся также утверждения, подтверждающие точность неравенства (1.29). Уточнения и дополнения этих результатов А. Л. Лукашова установлены С. И. Калмыковым в работе [32]. Выбирая конкретные компакты E и F в (1.29), получаем ряд известных неравенств С. Н. Бернштейна–Г. Серё, Н. И. Ахиезера, В. С. Виденского, В. Н. Русака, М. Барана–В. Тотика и других математиков (см. [25], [76], а также замечания по истории вопроса в [75; § 5]). В дополнение к этим неравенствам рассмотрим пример применения неравенства (1.28) в случае, когда $f = R$ – рациональная функция с ограничением на окружности. Предположим, что все полюсы a_k , $k = 1, \dots, n$, рациональной функции R конечны и $M(R) = 1$. Применяя неравенство (1.28) к функции $R(z) + \overline{R(1/\bar{z})}$ в области $D = \{z: |z| > 1\}$, приходим к неравенству

$$|R'(z)| \leq \sum_{k=1}^n \frac{|1 - |a_k|^2|}{|a_k - z|^2}, \quad (1.30)$$

справедливому для любых точек z на окружности $|z| = 1$ (см. [25; § 2]). В случае $|a_k| > 1$, $k = 1, \dots, n$, неравенство (1.30) получено В. Н. Русаком (см. (1.8)).

¹Здесь дуги γ и Γ являются граничными кривыми, при обходе которых соответствующая область остается слева, при этом граничные точки считаются различными, если они являются носителями различных достижимых граничных точек, а предельная точка понимается в соответствующей топологии.

Отметим также, что применение неравенства (1.28) к специально подобранным мероморфным функциям ведет к неравенствам бернштейновского типа для полиномов с криволинейной мажорантой [32].

Рассмотрим приложения неравенств (1.26)–(1.28) к оценкам для полиномов с ограничениями на дугах окружности [28]. В последнее время таким полиномам уделяется значительное внимание [34], [77]–[80]. Ранее указанные полиномы изучались в работах [81], [82], причем в случае алгебраических полиномов речь шла об ограничениях на дугах окружности [82], а в эквивалентной задаче для тригонометрических полиномов ограничения приходились на отрезок, меньший чем период [81]. Всюду ниже в этом разделе Γ – объединение конечного числа непересекающихся замкнутых невырожденных дуг единичной окружности $|z| = 1$, $D = \mathbb{C}_z \setminus \Gamma$,

$$m = m(P, \Gamma) = \min\{|P(z)| : z \in \Gamma\},$$

$$M = M(P, \Gamma) = \max\{|P(z)| : z \in \Gamma\}.$$

ТЕОРЕМА 1.16. Пусть P – полином степени n , и пусть $f(z) = P(z)\overline{P(1/\bar{z})}$. Тогда для любой точки z выполняется неравенство

$$|2f(z) - M^2 - m^2 + 2\sqrt{(f(z) - M^2)(f(z) - m^2)}|$$

$$\leq (M^2 - m^2) \exp\left\{n\left(g_D(z, 0) + g_D\left(\frac{1}{\bar{z}}, 0\right)\right)\right\}$$

(при любом выборе значения корня в левой части). Равенство в точке z , $z \neq 0, \infty$ и $z \notin \Gamma$, при некотором значении корня достигается в том и только том случае, когда функция f осуществляет полное $2n$ -кратное накрытие области $\overline{\mathbb{C}_w} \setminus [m^2, M^2]$ областью D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Области D и $G = \overline{\mathbb{C}_w} \setminus [m^2, M^2]$ имеют классические функции Грина. Функция f мероморфна в D и имеет в области D только два полюса: в точке $z = 0$ и точке $z = \infty$, каждый порядка не более n . Кроме того, при стремлении точки z к множеству Γ все предельные граничные значения функции f лежат на отрезке $[m^2, M^2]$. Согласно неравенству (1.27), в точках области D выполняется

$$g_G(f(z), \infty) \leq n(g_D(z, \infty) + g_D(z, 0)),$$

причем равенство в точках $z \neq 0$ и ∞ имеет место тогда и только тогда, когда $G = f(D)$ и функция f осуществляет полное $2n$ -кратное накрытие области $\overline{\mathbb{C}_w} \setminus [m^2, M^2]$ областью D . Из симметрии области D относительно окружности $|z| = 1$ получаем

$$g_D(z, \infty) = g_D\left(\frac{1}{\bar{z}}, 0\right).$$

Осталось заметить, что

$$g_G(w, \infty) = \log \left| \frac{2w - M^2 - m^2}{M^2 - m^2} + \sqrt{\left(\frac{2w - M^2 - m^2}{M^2 - m^2}\right)^2 - 1} \right|.$$

Теорема доказана.

В случае, когда множество Γ состоит из одной дуги

$$\Gamma_\alpha := \{z = e^{i\varphi} : -\alpha \leq \varphi \leq \alpha\}, \quad 0 < \alpha \leq \pi,$$

получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1.8 (ср. [34; теорема 1]). *Для любого полинома P степени n и любых точек z имеет место неравенство*

$$\begin{aligned} & \left| 2P(z)\overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} - M^2 - m^2 + 2\sqrt{\left(P(z)\overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} - M^2\right)\left(P(z)\overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} - m^2\right)} \right| \\ & \leq \left(M^2 - m^2 \right) \left| i \cos \frac{\alpha}{2} \Phi\left(i \frac{z - \cos \alpha}{\sin \alpha}\right) + \sin \frac{\alpha}{2} \right|^n \\ & \times \left| i \cos \frac{\alpha}{2} \Phi\left(i \frac{1 - z \cos \alpha}{z \sin \alpha}\right) + \sin \frac{\alpha}{2} \right|^n, \end{aligned}$$

где $m = m(P, \Gamma_\alpha)$, $M = M(P, \Gamma_\alpha)$, а Φ — однозначная ветвь функции

$$\zeta = \omega + \sqrt{\omega^2 - 1}$$

во внешности дуги окружности, соединяющей точки ± 1 и проходящей через точку $i \operatorname{tg}(\alpha/2)$, $\Phi(\infty) = \infty$. Равенство в любой точке z достигается, например, для полинома

$$P_\alpha(z) = \begin{cases} \prod_{k=1}^{n/2} (z^2 - 2a_k z + 1) & \text{при четных } n, \\ (z-1) \prod_{k=1}^{(n-1)/2} (z^2 - 2a_k z + 1) & \text{при нечетных } n, \end{cases}$$

$$\text{где } a_k = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\pi(2k-1)}{n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство следствия 1.8 вытекает из теоремы 1.16 и легко проверяемых соотношений

$$\begin{aligned} g_{\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma_\alpha}(z, \infty) &= \log \left| i \cos \frac{\alpha}{2} \Phi\left(i \frac{z - \cos \alpha}{\sin \alpha}\right) + \sin \frac{\alpha}{2} \right|, \\ g_{\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma_\alpha}(z, 0) &= \log \left| i \cos \frac{\alpha}{2} \Phi\left(i \frac{1 - z \cos \alpha}{z \sin \alpha}\right) + \sin \frac{\alpha}{2} \right|. \end{aligned}$$

Докажем случай равенства. Будем считать, что $M = 1$ и $m = 0$. В силу теоремы 1.16 равенство достигается тогда и только тогда, когда функция $f(z) = P(z)\overline{P(1/\bar{z})}$ осуществляет полное $2n$ -кратное накрытие области $\overline{\mathbb{C}_w} \setminus [0, 1]$ областью D . Легко видеть, что в случае одной дуги такой функцией является, например, суперпозиция следующих отображений:

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad u = -\frac{2\zeta}{1 - \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \quad \text{и} \quad w = \frac{1}{2} (T_n(u) + 1).$$

На дуге Γ_α мы имеем $f(z) \equiv |P(z)|^2$. Нулям экстремального полинома P соответствуют точки u_k такие, что $T_n(u_k) = -1$. Если n четное, скажем, $n =$

$2r$, то $u_k = \cos(\pi(2k-1)/n)$, $k = 1, \dots, r$, а если n нечетное, $n = 2r-1$, то $u_k = \cos(\pi(2k-1)/n)$, $k = 1, \dots, r$, и $u_{r+1} = -1$. Таким образом, корни полинома P суть корни уравнений

$$-\left(z + \frac{1}{z}\right) + 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 2u_k \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

или, что то же самое, уравнений

$$z^2 - 2a_k z + 1 = 0,$$

где

$$a_k = \left(-u_k \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right), \quad k = 1, \dots, r.$$

При нечетных n число k принимает также значение $r+1$. Поскольку неравенство следствия 1.8 не меняется при умножении полинома P на константу, то в качестве экстремального полинома можно взять, например, полином P_α . Следствие доказано.

Впервые экстремальный полином из следствия 1.8 был найден Л. С. Маргойзом и Н. Н. Рыбаковой [78] в связи с решением задачи о наименьшем отклонении от нуля полиномов на дуге окружности. Соответствующие тригонометрические полиномы рассматривались ранее В. С. Виденским [81].

ТЕОРЕМА 1.17. *Для коэффициентов полинома $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$, $c_n \neq 0$, справедливо неравенство*

$$|c_n c_0| \leq \frac{1}{4}(M^2 - m^2)r^{2n}(D, 0).$$

Равенство достигается в том и только том случае, когда функция $f(z) = P(z)\overline{P(1/\bar{z})}$ осуществляет полное $2n$ -кратное накрытие области $\overline{\mathbb{C}_w} \setminus [m^2, M^2]$ областью D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства И. П. Митюка (1.26) следует, что

$$|c_n c_0| \leq \frac{r^n(D, \infty)}{r(G, \infty)} \exp\{ng_D(0, \infty)\},$$

причем равенство выполняется только в случае, указанном в теореме 1.17. Легко видеть, что

$$\log |z| + g_D(z, 0) \equiv g_D(z, \infty).$$

Поэтому

$$\log r(B, 0) = g_D(0, \infty).$$

Наконец, прямые вычисления дают

$$r(\overline{\mathbb{C}_w} \setminus [m^2, M^2], \infty) = \frac{4}{M^2 - m^2}.$$

Теорема доказана.

Если $c_n = 1$ и все нули полинома P расположены на дугах Γ , то $m = 0$, $|c_0| = 1$ и неравенство теоремы 1.17 имеет вид

$$M(P, \Gamma) \geq 2r^{-n}(D, 0)$$

(ср. [77], [79; с. 177–178]).

СЛЕДСТВИЕ 1.9. Для полинома $P(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_nz^n$, $c_n \neq 0$, и $\Gamma = \Gamma_\alpha$ имеет место точная оценка

$$|c_n c_0| \leq \frac{M^2 - m^2}{4 \sin^{2n}(\alpha/2)}.$$

Равенство достигается в том же случае, что и в следствии 1.8.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое неравенство вытекает из теоремы 1.17, если заметить, что

$$r(\overline{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma_\alpha, 0) = r(\overline{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma_\alpha, \infty) = \frac{1}{\sin(\alpha/2)}.$$

Случай равенства следует из соответствующей части следствия 1.8. Следствие доказано.

Если к тому же все нули полинома P лежат на дуге Γ_α , то следствие 1.9 эквивалентно соответствующим утверждениям А. Л. Лукашова, С. В. Тышкевича и Л. С. Маергойза, Н. Н. Рыбаковой о полиноме, наименее уклоняющемся от нуля на дуге окружности с нулями на этой дуге (ср. [77]–[79]).

Пусть $\omega(z, e, \Omega)$ обозначает гармоническую меру множества $e \subset \partial\Omega$ в точке z относительно области Ω . В случае $\Omega = D$ плотность гармонической меры определяется следующим образом:

$$\tilde{\omega}(\zeta, e^{i\varphi}) = \frac{\partial}{\partial\varphi} \omega(\zeta, \Gamma \cap \{e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \varphi\}, D), \quad \zeta \in D, \quad e^{i\varphi} \in \Gamma.$$

ТЕОРЕМА 1.18. Для полинома P степени n имеет место неравенство

$$\left| (|P(z)|^2)'_{\varphi} \right| \leq 2\pi n \tilde{\omega}(\infty, z) \sqrt{(M^2 - |P(z)|^2)(|P(z)|^2 - m^2)}, \quad (1.31)$$

где $z = e^{i\varphi} \in \Gamma$. Равенство в (1.31) достигается тогда и только тогда, когда функция $f(z) = P(z)\overline{P(1/\bar{z})}$ осуществляет полное $2n$ -кратное накрытие области $\overline{\mathbb{C}}_w \setminus [m^2, M^2]$ областью D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно выписать неравенство (1.28) для функции f , указанной в теореме 1.18, и воспользоваться известным соотношением между плотностью гармонической меры и производной по нормали от функции Грина.

В случае одной дуги плотность гармонической меры легко вычисляется и мы приходим к следующему результату.

СЛЕДСТВИЕ 1.10 (ср. [81], а также [34; теорема 2]). Для полинома P степени n и $z \in \Gamma_\alpha$ имеет место неравенство

$$\left| (|P(z)|^2)'_{\varphi} \right| \leq \frac{n|z+1|\sqrt{(M^2 - |P(z)|^2)(|P(z)|^2 - m^2)}}{|\sqrt{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}|}.$$

Равенство достигается в том же случае, что и в следствии 1.8.

Другие применения принципов мажорации к неравенствам для полиномов и рациональных функций представлены в работах [9], [10], [25], [30], [32], [33].

Глава 2. Однолистные функции

Экстремальные задачи в различных классах однолистных функций составляют наиболее изученную часть геометрической теории функций комплексного переменного (см., например, [39], [83]–[86]). В данной главе используются лишь некоторые факты этой теории, относящиеся, главным образом, к однолистным ограниченным в круге функциям. Основное внимание уделяется построению однолистных функций по заданным полиномам и описанию результатов для полиномов, вытекающих из теории однолистных функций.

2.1. Построение однолистных функций. Следующее ниже простое условие однолистности голоморфной функции появилось, по существу, в работе [8; § 2] (см. также [11]).

ЛЕММА 2.1. Пусть функция f голоморфна на открытом множестве $B \subset \mathbb{C}_z$, и пусть при приближении точки z к границе множества B все предельные значения модуля $|f(z)|$ не меньше единицы. Предположим, что функция f отображает некоторую точку z_0 множества B и только ее в начало координат, причем $f'(z_0) \neq 0$. Тогда функция $w = f(z)$ конформно и однолистно отображает связную компоненту множества $G := \{z \in B: |f(z)| \neq 1\}$, содержащую точку z_0 , на круг $|w| < 1$, а для любой другой связной компоненты D множества G справедливо включение $f(D) \subset \{w: |w| > 1\}$.

В дальнейшем в этой главе функцию f , удовлетворяющую условиям леммы 2.1, будем называть *допустимой*. Успех в приложениях леммы 2.1 зависит от удачного выбора допустимой функции. Желая показать широту применения данного условия однолистности, рассмотрим здесь несколько приемов построения допустимой функции по заданной функции из другого класса.

1. *Голоморфные в круге функции, не обращающиеся в нуль.* Пусть функция $w = g(z)$, $z \in B = U$, удовлетворяет всем условиям леммы 2.1, кроме одного – она не обращается в нуль ни в одной точке круга U . Тогда функция

$$f(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} g(z)$$

является допустимой при любой фиксированной точке z_0 из круга U .

2. *Лишние нули.* Пусть функция $w = g(z)$, $z \in B = U$, удовлетворяет всем условиям леммы 2.1, кроме одного – помимо простого нуля z_0 , она имеет еще нули в точках $z_k \in U$ кратности p_k , $k = 1, \dots, n$. Тогда функция

$$f(z) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{1 - \bar{z}_k z}{z - z_k} \right)^{p_k} g(z)$$

допустима.

3. *Ограниченные в круге функции.* Пусть функция $w = g(z)$ голоморфна в круге U и $|g(z)| < 1$ при $z \in U$. Предположим, что точка $z_0 \in U$ является нулем функции $w = g(z)$ кратности n . Тогда функция

$$f(z) = \left(\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right)^{n+1} \frac{1}{g(z)},$$

$z \in B = \{z \in U: g(z) \neq 0\} \cup \{z_0\}$, допустима. Согласно лемме 2.1, она конформно и однолистно отображает связную компоненту множества $B \setminus \{z \in$

$U: |f(z)| = 1\}$, содержащую точку z_0 , на круг $|w| < 1$, а любую другую связную компоненту этого множества она отображает в множество $|w| > 1$.

4. *Случай произвольной односвязной области гиперболического типа.* Если изначально функция $w = g(z)$ задана в односвязной области Δ и если функция $z = z(\zeta)$ конформно и однолистно отображает круг $|\zeta| < 1$ на область Δ , то задача сводится к построению функции в круге $|\zeta| < 1$ по заданной функции $\tilde{g}(z) = g(z(\zeta))$, $|\zeta| < 1$.

5. *Функции с вещественными граничными значениями.* Пусть функция $\omega = g(z)$ мероморфна в некоторой области Δ и имеет в этой области единственный простой полюс в точке z_0 . Предположим, что при приближении точки ζ к границе области Δ все предельные значения функции $g(\zeta)$ лежат на отрезке $[-1, 1]$. Обозначим через

$$\zeta = \Phi(\omega) = \omega + \sqrt{\omega^2 - 1}$$

ту ветвь аналитической функции, обратной функции Жуковского, которая конформно и однолистно отображает внешность отрезка $[-1, 1]$ на круг $|\zeta| < 1$. Суперпозиция

$$f(z) = \Phi(g(z)),$$

заданная на множестве $B = \{z \in \Delta: g(z) \notin [-1, 1]\}$, допустима с данной точкой z_0 .

В отличие от предыдущих пунктов этот случай требует некоторого пояснения. Во-первых, если порядок полюса $z = z_0$ больше единицы либо имеются другие полюсы функции $\omega = g(z)$, то $\Phi(g(z))$, конечно, не является допустимой. Однако в случае $\Delta = U$ “снятие” лишних нулей функции $\Phi(g(z))$ осуществляется с помощью приема п. 2 умножением на произведение Бляшке. В случае, когда область Δ гиперболического типа, привлекаем конформное отображение (п. 4). Функции, указанные в названии п. 5, возникают в задачах о полиномах и рациональных функциях. Например, если R – рациональная функция, то функция $g(z) = R(1/z) + \overline{R(\bar{z})}$ принимает вещественные значения на любой дуге окружности $|z| = 1$ и, кроме того, возможны дальнейшие преобразования этой функции в допустимую, если имеется некоторая информация о нулях либо полюсах функции $R(z)$. Иногда вещественность функции задается априори. Многочисленные примеры использования этого приема даны в работах [8]–[10], [34]–[36]. Ниже приводятся некоторые конкретные примеры однолистных функций.

ЛЕММА 2.2. Пусть P – полином степени n , и пусть $L(P) \neq H(P)$. Обозначим через $\zeta = \Phi(\omega)$ функцию, конформно и однолистно отображающую внешность отрезка $\gamma := [2L(P), 2H(P)]$ на круг $|\zeta| < 1$ так, что $\Phi(\infty) = 0$, $\Phi(2L(P)) = -1$, и положим

$$f(z) := z^{1-n} \Phi\left(P\left(\frac{1}{z}\right) + \overline{P(\bar{z})}\right).$$

Тогда множество $G := \{z: |z| < 1, P(1/z) + \overline{P(\bar{z})} \notin \gamma, |f(z)| \neq 1\}$ состоит из конечного числа областей $\{D\}$, ограниченных конечным числом кусочно гладких кривых и обладающих следующими свойствами. Если D из совокупности $\{D\}$ не содержит начала координат, то образ области D при отображении $w = f(z)$ принадлежит множеству $|w| > 1$. Если область D содержит

точку $z = 0$, то функция f конформно и однолистно отображает область D на круг $|w| < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что функция f является допустимой на множестве $B = \{z: |z| < 1, P(1/z) + \overline{P(\bar{z})} \notin \gamma\}$, и применить лемму 2.1 с $z_0 = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Утверждения леммы 2.2 остаются в силе, если полином P заменить на рациональную функцию $R(z) = z^{-k}P(z)$, где k – целое неотрицательное число, а P – многочлен степени n . В этом случае необходимо также заменить степень $1 - n$ переменной z в определении функции f на $1 + m$, где $m = k - n$, если $k < n/2$, и $m = -k$ в противном случае.

Аналогично доказываются следующие леммы 2.3–2.5.

ЛЕММА 2.3. Пусть $P(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_nz^n$, $\operatorname{Re} c_n \neq 0$, и пусть $\bar{L}(P) \neq \bar{H}(P)$. Обозначим через $\zeta = \Phi(\omega)$ функцию, конформно и однолистно отображающую внешность отрезка $\bar{\gamma} := [2\bar{L}(P), 2\bar{H}(P)]$ на круг $|\zeta| < 1$ так, что $\Phi(\infty) = 0$, $\Phi(2\bar{L}(P)) = -1$, и положим

$$f(z) := z^{1-n} \Phi \left(P \left(\frac{z + 1/z}{2} \right) + \overline{P \left(\frac{\bar{z} + 1/\bar{z}}{2} \right)} \right).$$

Тогда для множества

$$G := \left\{ z: |z| < 1, P \left(\frac{z + 1/z}{2} \right) + \overline{P \left(\frac{\bar{z} + 1/\bar{z}}{2} \right)} \notin \bar{\gamma}, |f(z)| \neq 1 \right\}$$

и функции f справедливы утверждения леммы 2.2.

Заметим, что на самом деле условие $\bar{L}(P) \neq \bar{H}(P)$ для данного полинома P степени $n \geq 1$ всегда выполняется. Это же касается условия $L(P) \neq H(P)$ в лемме 2.2.

ЛЕММА 2.4. Предположим, что все нули полинома $P(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_nz^n$, $c_0 \neq 0$, $c_n \neq 0$, лежат в круге U , и пусть

$$f(z) := z^{n+1} \frac{P(1/z)}{P(\bar{z})}.$$

Тогда множество

$$G := \{z: |z| < 1, f(z) \neq \infty, |f(z)| \neq 1\}$$

состоит из конечного числа областей $\{D\}$, ограниченных конечным числом кусочно гладких кривых (возможно, вырожденных), причем если точка $z = 0$ принадлежит области D из совокупности $\{D\}$, то функция $w = f(z)$ отображает эту область конформно и однолистно на круг $|w| < 1$, а если $z = 0$ не принадлежит D , то образ $f(D)$ лежит вне этого круга.

ЛЕММА 2.5. Предположим, что все нули полинома $P(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_nz^n$, $c_0 \neq 0$, $c_n \neq 0$, лежат в множестве $|z| > 1$, и пусть

$$f(z) := z^{1-n} \frac{\overline{P(\bar{z})}}{P(1/z)}.$$

Тогда множество $G := \{z: |z| < 1, f(z) \neq \infty, |f(z)| \neq 1\}$ обладает свойством, указанным в лемме 2.4.

ЛЕММА 2.6. Пусть G – односвязная область, содержащая точку $z = \infty$, и пусть функция $z = \Psi(w)$ конформно и однолистно отображает круг $|w| < 1$ на область G так, что $\Psi(0) = \infty$. Предположим, что все нули полинома P степени n лежат в дополнении G , и пусть $M := \max\{|P(z)| : z \in \partial G\}$. Тогда функция

$$z = F(w) \equiv \left(\frac{P(\Psi(w))}{M} \right)^{-1/n}, \quad |w| < 1,$$

распадается в круге $|w| < 1$ на n регулярных ветвей, каждая из которых однолистно покрывает круг $|z| < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Регулярность ветвей следует из теоремы о монодромии, а однолистность накрытия – из леммы 2.1.

ЛЕММА 2.7. Пусть P – полином степени n , и пусть все его конечные критические значения лежат в дополнении к некоторой односвязной области G гиперболического типа, содержащей бесконечно удаленную точку. Обозначим через $\zeta = \Phi(w)$ функцию, конформно и однолистно отображающую область G на круг $|\zeta| < 1$ так, что $\Phi(\infty) = 0$, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega \Phi(\omega) > 0$, и положим

$$\zeta = Q(z) \equiv (\Phi(P(z)))^{1/n}, \quad z \in B := \{z : P(z) \in G\}.$$

Тогда функция $\zeta = Q(z)$ распадается в односвязной области B на n регулярных ветвей, каждая из которых однолистно отображает эту область на круг $|\zeta| < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полином P взаимно однозначно отображает z -сферу на некоторую риманову поверхность $\mathcal{R}$, лежащую над w -сферой. Часть поверхности $\mathcal{R}$, лежащая над G , с единственной точкой ветвления в бесконечности, гомеоморфно отображается посредством функции $\zeta = \Phi(w)$ на n -листный единичный круг. Ветви функции $\sqrt[n]{\zeta}$ разворачивают этот круг на круг $|\zeta| < 1$. Таким образом, суперпозиция $\zeta = Q(z)$ конформно и однолистно отображает область B на круг $|\zeta| < 1$. Лемма доказана.

2.2. Теоремы покрытия для полиномов. Термин “теорема покрытия” хорошо известен в геометрической теории функций [39]. Применительно к полиномам $P(z)$ под такой теоремой мы понимаем информацию о геометрии образа заданного множества при отображении $w = P(z)$ либо функциями от $P(z)$. В данном разделе приводятся теоремы из работы [8] о покрытии функциями вида $P(z) + \overline{P(1/\bar{z})}$, $P(z) + \overline{P(\bar{z})}$, $P(z)\overline{P(1/\bar{z})}$ и $P(z)/\overline{P(1/\bar{z})}$. Всюду ниже приняты обозначения из введения. Положим также

$$M(P, r) := \max\{|P(z)| : |z| = r\}, \quad M(P, 1) = M(P).$$

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$, $c_n \neq 0$. Тогда образ окружности $|z| = r$ при отображении $\omega = P(z) + \overline{P(1/\bar{z})}$ в случае $r = 1$ есть отрезок вещественной оси длины

$$2H(P) - 2L(P) \geq 4|c_n|, \quad (2.1)$$

а при $r > 1$ этот образ есть кривая, лежащая внутри эллипса с фокусами в точках $2L(P)$ и $2H(P)$ и большой осью, равной

$$\left(r^{1-n} x_0 + \frac{r^{n-1}}{x_0} \right) (H(P) - L(P)) \leq (r^{-n} + r^n) (H(P) - L(P)), \quad (2.2)$$

где x_0 – корень уравнения

$$2|c_n|(1-r)^2x = r(H(P) - L(P))(1-x)^2, \quad (2.3)$$

принадлежащий промежутку $1/r \leq x < 1$. Для полиномов вида $P(z) = c_0 + c_n z^n$ выполняются равенства в (2.1) и (2.2) и образом окружности $|z| = r$, $r > 1$, является указанный выше эллипс.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $H(P) \neq L(P)$. Обозначим через $z = F(w)$ функцию, заданную в круге $|w| < 1$ и обратную к функции $w = f(z)$ из леммы 2.2. Так как в круге $|w| < 1$ имеет место разложение

$$F(w) = \left[\frac{2c_n}{H(P) - L(P)} \right] w + \dots,$$

то лемма Шварца дает неравенство (2.1). Возьмем произвольную точку z на окружности $|z| = 1/r$, $r > 1$. Имеем либо $|f(z)| \geq 1$, либо $|f(z)| < 1$. В первом случае выполняется

$$\left| \Phi \left(P \left(\frac{1}{z} \right) + \overline{P(\bar{z})} \right) \right| \geq |z|^{n-1} = \left(\frac{1}{r} \right)^{n-1}. \quad (2.4)$$

Во втором по лемме 2.2 заключаем, что точка z является образом некоторой точки w при отображении функцией F . Из теоремы Пика [84; с. 55] следует, что

$$\frac{|w|}{(1-|w|)^2} \geq \frac{r}{|f'(0)|(1-r)^2} \geq \frac{r}{(1-r)^2} = \frac{1/r}{(1-1/r)^2},$$

а это равносильно неравенству

$$|w| \geq x_0 \geq \frac{1}{r},$$

где x_0 – корень уравнения (2.3), $1/r \leq x_0 < 1$. Отсюда вытекает, что

$$\left| \Phi \left(P \left(\frac{1}{z} \right) + \overline{P(\bar{z})} \right) \right| \geq x_0 \left(\frac{1}{r} \right)^{n-1} \geq \left(\frac{1}{r} \right)^n. \quad (2.5)$$

Сравнивая (2.4) и (2.5), получаем, что для любых точек z на окружности $|z| = 1/r$ справедливо неравенство (2.5). Следовательно, точка $P(1/z) + \overline{P(\bar{z})}$ или, что то же самое, точка $P(z) + \overline{P(1/\bar{z})}$ при $|z| = r$ лежит внутри эллипса, указанного в теореме, и имеет место неравенство (2.2). Утверждение об экстремальном полиноме $c_0 + c_n z^n$ проверяется непосредственным вычислением. Теорема доказана.

Неравенство (2.1) восходит к Сегё [87].

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$, $\operatorname{Re} c_n \neq 0$. Тогда образ “эллипса” $|z-1| + |z+1| = r + 1/r$ при отображении $\omega = P(z) + \overline{P(\bar{z})}$ в случае $r = 1$ есть отрезок вещественной оси длины

$$2\overline{H}(P) - 2\overline{L}(P) \geq 2^{3-n} |\operatorname{Re} c_n|, \quad (2.6)$$

а при $r > 1$ этот образ есть кривая, лежащая внутри эллипса с фокусами в точках $2\overline{L}(P)$ и $2\overline{H}(P)$ и большей осью, равной

$$\left(r^{1-n} x_0 + \frac{r^{n-1}}{x_0} \right) (\overline{H}(P) - \overline{L}(P)) \leq (r^{-n} + r^n) (\overline{H}(P) - \overline{L}(P)), \quad (2.7)$$

где x_0 – корень уравнения

$$|\operatorname{Re} c_n|(1-r)^2 x = r \cdot 2^{n-2} (\overline{H}(P) - \overline{L}(P))(1-x)^2 \quad (2.8)$$

на промежутке $1/r \leq x < 1$. Равенство в (2.6) и (2.7) достигается для полинома Чебышёва $T_n(z) = 2^{n-1}z^n + \dots$, который отображает эллипс $|z-1| + |z+1| = r + 1/r$ на эллипс $|w-1| + |w+1| = r^n + 1/r^n$, $r > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $\overline{H}(P) \neq \overline{L}(P)$. Повторяя доказательство теоремы 2.1, но с функцией f из леммы 2.3, получим, согласно (1.12), неравенство (2.6). Далее, как и выше с $|z| = 1/r$, $r > 1$, применяя теорему Пика, приходим к неравенству

$$\left| \Phi \left(P \left(\frac{z+1/z}{2} \right) + \overline{P \left(\frac{\bar{z}+1/\bar{z}}{2} \right)} \right) \right| \geq x_0 \left(\frac{1}{r} \right)^{n-1} \geq \left(\frac{1}{r} \right)^n,$$

аналогичному (2.5). Здесь $\zeta = \Phi(\omega)$ – из леммы 2.3, а x_0 – корень уравнения (2.8), $1/r \leq x_0 < 1$. Отсюда следует утверждение теоремы 2.2 о принадлежности точки $P(z) + \overline{P(\bar{z})}$ внутренности соответствующего эллипса. Случай равенства выводится непосредственно из определения полинома Чебышёва. Теорема доказана.

Неравенство (2.6) совпадает с классическим свойством чебышёвских полиномов наименее отклоняться от нуля. Напомним, что мы получили его из неравенства Шварца. Теорема 2.2 о покрытии при r , близких к единице, приводит к неравенству бернштейновского типа для производной полинома на отрезке. Замечая, что для полинома P с вещественными коэффициентами выполняется $\overline{P(\bar{z})} \equiv P(z)$, получаем из теоремы 2.2 результат К. Дочева [40] и, в частности, неравенство Чебышёва

$$|P(x)| \leq |T_n(x)| \overline{M}(P), \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$$

(см. теорему 1.1 и следующий за ней комментарий). Желая уточнить неравенство Чебышёва для полиномов с критическими точками на отрезке $[-1, 1]$, введем сперва обозначение

$$\delta(P) := \sqrt[n]{\frac{2^{2-n} |\operatorname{Re} c_n|}{\overline{H}(P) - \overline{L}(P)}}, \quad (2.9)$$

где $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$, $c_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \dots, n$, $\operatorname{Re} c_n \neq 0$. Согласно (2.6), для любых полиномов P выполняется $\delta(P) \leq 1$ с равенством в случае $P(z) = aT_n(z) + b$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА 2.3. *Предположим, что все критические точки полинома P степени n с вещественными коэффициентами расположены на отрезке $[-1, 1]$. Тогда для любых вещественных x , $|x| \geq 1$, справедливы неравенства*

$$\frac{2|P(x) - (\overline{L}(P) + \overline{H}(P))/2|}{\overline{H}(P) - \overline{L}(P)} \leq T_n((|x| - 1)\delta(P) + 1) \leq T_n(|x|),$$

а для $|x| \geq (2 - \delta(P))/\delta(P)$ имеет место также неравенство в другую сторону

$$\frac{2|P(x) - (\overline{L}(P) + \overline{H}(P))/2|}{\overline{H}(P) - \overline{L}(P)} \geq T_n((|x| + 1)\delta(P) - 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы вновь опирается на теорему Пика, однако в этом случае необходимо использовать лемму 2.7 (см. [8; теорема 3.3]).

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$, $c_0 \neq 0$, $c_n \neq 0$. Тогда образ окружности $|z| = r$ при отображении $\omega = P(z)\overline{P(1/\bar{z})}$ в случае $r = 1$ есть отрезок вещественной оси длины

$$M^2(P) - m^2(P) \geq 4|c_0 c_n|,$$

а при $r > 1$ этот образ есть кривая, лежащая внутри эллипса с фокусами в точках $m^2(P)$ и $M^2(P)$ и большой осью, равной

$$\frac{1}{2} \left(r^{1-n} x_0 + \frac{r^{n-1}}{x_0} \right) (M^2(P) - m^2(P)) \leq \frac{1}{2} (r^{-n} + r^n) (M^2(P) - m^2(P)),$$

где x_0 – корень уравнения

$$4|c_0 c_n|(1-r)^2 x = r(M^2(P) - m^2(P))(1-x)^2,$$

принадлежащий промежутку $0 < x < 1$. Равенства выполняются для полиномов вида $P(z) = c_0 + c_n z^n$, $|c_0| = |c_n| \neq 0$, при которых соответствующий образ окружности $|z| = r$, $r > 1$, есть указанный выше эллипс.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 2.1, но с привлечением вместо функции из леммы 2.2 функции

$$f(z) = z^{1-n} \Phi \left(P \left(\frac{1}{z} \right) \overline{P(\bar{z})} \right),$$

где $\zeta = \Phi(\omega)$ есть конформное и однолистное отображение внешности отрезка $[m^2(P), M^2(P)]$ на круг $|\zeta| < 1$ такое, что $\Phi(\infty) = 0$ и $\Phi(m^2(P)) = -1$.

С этого момента читатель без труда получит аналог теоремы 2.2, но уже для отображения $\omega = P(z)\overline{P(\bar{z})}$, а также утверждение о покрытии функцией $P^2(z)$, аналогичное теореме 1.1, для полиномов $P(z)$ с вещественными коэффициентами.

При доказательстве полиномиальных неравенств зачастую полезно переходить от заданного полинома $P(z)$ к полиномам $z^n \overline{P(1/\bar{z})}$ либо $z^n P(1/z)$ (см., например, [2], [88], [89]). Отметим, что полиномы, для которых $\bar{c}_n P(z) \equiv c_0 z^n \overline{P(1/\bar{z})}$, характеризуются тем, что множество их корней симметрично относительно окружности $|z| = 1$. Такие полиномы, а также полиномы вида $P(z) \equiv z^n P(1/z)$ изучались отдельно [90]–[92]. Для них теоремы покрытия настоящего раздела приобретают особое звучание. Например, из теоремы 2.4 вытекает следующий факт.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Если корни полинома P степени n симметричны относительно окружности $|z| = 1$, то для любого r , $0 < r \leq 1$, выполняется неравенство

$$M^2(P, r) \leq r^n \left[(r^{n-1} x_0 + r^{1-n} x_0^{-1}) \frac{M^2(P) - m^2(P)}{4} + \frac{M^2(P) + m^2(P)}{2} \right], \quad (2.10)$$

где x_0 из теоремы 2.4, $r \leq x_0 \leq 1$. Равенство достигается в случае $P(z) = c_0 + c_n z^n$, $|c_0| = |c_n| \neq 0$.

Заменяя в (2.10) x_0 на r , легко заключаем, что в условиях следствия 2.1 справедливо неравенство

$$M(P, r) \leq \frac{1+r^n}{2} M(P, 1), \quad r \leq 1.$$

Последнее неравенство справедливо также для $r > 1$, в чем убеждаемся заменой $P(z)$ на $z^n \overline{P(1/\bar{z})}$.

Следующий результат вытекает вновь из теоремы Пика, но с применением функции из леммы 2.4.

ТЕОРЕМА 2.5 (см. теорему 1.4). *Если все нули полинома $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$, $c_0 \neq 0$, $c_n \neq 0$, лежат в круге $|z| \leq 1$, то для любого $r > 1$ и любой точки z на окружности $|z| = r$ выполняется неравенство*

$$\left| \frac{P(1/\bar{z})}{P(z)} \right| \leq x^* r^{-n-1} \leq r^{-n}, \quad (2.11)$$

где $x^* > 1$ – корень уравнения

$$|c_0|(1-r)^2 x = r|c_n|(1-x)^2.$$

Равенство достигается для полиномов $P(z)$ с нулями на единичной окружности $|z| = 1$.

Неравенство (2.11) можно интерпретировать как оценку произведения Бляшке

$$\left| \prod_{k=1}^n \frac{1 - \bar{a}_k z}{z - a_k} \right| \leq \frac{x^*}{|z|} \leq 1$$

при $|z| > 1$ и $|a_k| \leq 1$, $k = 1, \dots, n$. Здесь “итоговое” неравенство есть очевидное следствие свойства дробно-линейного отображения.

ТЕОРЕМА 2.6. *Если полином $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$, $c_n \neq 0$, не имеет нулей в круге $|z| < 1$, то для любого $r > 1$ и любой точки z на окружности $|z| = r$ выполняется неравенство*

$$\left| \frac{P(1/\bar{z})}{P(z)} \right| \geq x_* r^{1-n} \geq r^{-n},$$

где x_* , $0 < x_* < 1$, – корень уравнения

$$|c_n|(1-r)^2 x = r|c_0|(1-x)^2.$$

Равенство достигается для полиномов $P(z)$ с нулями на единичной окружности $|z| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить предыдущую теорему к полиному $z^n P(1/z)$ либо повторить доказательство этой теоремы с заменой леммы 2.4 на лемму 2.5.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *В условиях и обозначениях теоремы 2.6 справедливо неравенство*

$$M(P, r) \leq \frac{1+r^n}{1+x_* r} M(P, 1)$$

с равенством для полиномов $P(z) = c_0 + c_n z^n$, $|c_0| = |c_n| \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что для полиномов P степени n с $M(P, 1) = 1$ на окружности $|z| = r$ выполняется неравенство

$$|P(z)| + r^n \left| P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) \right| \leq r^n + 1$$

(см. [58; с. 550]). Осталось применить теорему 2.6 и перейти к максимуму.

Заменяя в данном следствии $x_* r$ на единицу, вновь получаем неравенство Н. Энкени и Т. Ривлина [59]. Другое усиление этого неравенства можно получить, комбинируя теоремы 2.4 и 2.5.

2.3. Неравенства с участием производных. Теоремы теории однолистных функций в сочетании с леммами из раздела 2.1 либо их модификациями дают целый ряд неравенств с участием производных от полиномов. Ниже приводятся типичные результаты с небольшими комментариями.

ТЕОРЕМА 2.7. Пусть $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$, и пусть k – целое неотрицательное число. Тогда для любых точек z на окружности $|z| = 1$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |zP'(z) - kP(z)| &\leq (n - k - 1)M(P) + \sqrt{|c_n|M(P)}, & \text{если } k < \frac{n}{2}, \\ |zP'(z) - kP(z)| &\leq \left(\frac{n}{2} - 1\right)M(P) + \sqrt{(|c_n| + |c_0|)M(P)}, & \text{если } k = \frac{n}{2}, \\ |zP'(z) - kP(z)| &\leq (k - 1)M(P) + \sqrt{|c_0|M(P)}, & \text{если } k > \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Равенство в первом и во втором случаях достигается, например, при $P(z) = c_n z^n$, а в третьем неравенстве – при $P(z) = c_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случаи равенства проверяются непосредственно. При доказательстве неравенств можно считать, что $c_0 \neq 0$, $c_n \neq 0$, $|c_n + \bar{c}_0| \neq 0$, а точки z не принимают некоторое конечное число значений на окружности $|z| = 1$. Введем следующие обозначения:

$$R(z) = z^{-k} P(z);$$

$\zeta = \Phi(\omega)$ – конформное и однолистное отображение внешности отрезка $\gamma := [2L(R), 2H(R)]$ на круг $|\zeta| < 1$ такое, что $\Phi(\infty) = 0$, $\Phi(2L(R)) = -1$;

$m = k - n$, если $k < n/2$, и $m = -k$ – в противном случае;

$$f(z) = z^{m+1} \Phi\left(R\left(\frac{1}{z}\right) + \overline{R(\bar{z})}\right), \quad |z| < 1, \quad R\left(\frac{1}{z}\right) + \overline{R(\bar{z})} \notin \gamma.$$

Согласно замечанию 2.1, множество $\{z: |z| < 1, R(1/z) + \overline{R(\bar{z})} \notin \gamma, |f(z)| \neq 1\}$ состоит из конечного числа областей $\{D\}$ с кусочно гладкими границами, причем если область D не содержит начало, то $f(D)$ лежит вне единичного круга, а если $0 \in D$, то $w = f(z)$ конформно и однолистно отображает область D на круг U_w . Если теперь $1/z$ – регулярная для f точка окружности $|z| = 1$ и в то же время $f(D)$ лежит вне круга U_w , то необходимо в этой точке

$$\frac{\partial |f|}{\partial |z|} \leq 0. \quad (2.12)$$

В противном случае неравенство (1.12) (примененное к обратной функции) дает

$$\frac{\partial|f|}{\partial|z|} \leq \sqrt{\frac{1}{|f'(0)|}} \leq 1, \quad (2.13)$$

где

$$\frac{1}{|f'(0)|} = \begin{cases} \frac{2|c_n|}{H(R) - L(R)}, & \text{если } k < n/2, \\ \frac{2|c_n + \bar{c}_0|}{H(R) - L(R)}, & \text{если } k = n/2, \\ \frac{2|c_0|}{H(R) - L(R)}, & \text{если } k > n/2. \end{cases}$$

Сравнивая (2.12) и (2.13), заключаем, что всегда выполняется (2.13). Для вычисления производной слева представим функцию $\zeta = \Phi(\omega)$ в виде суперпозиции

$$\zeta = \eta + \sqrt{\eta^2 - 1}, \quad \eta = \frac{\omega - H(R) - L(R)}{H(R) - L(R)},$$

где ветвь корня выбрана подходящим образом. Заметим, что при $|z| = 1$ точка $\omega = R(1/z) + \bar{R}(\bar{z})$ принадлежит γ и $\eta := u + iv \in [-1, 1]$. Поэтому

$$|\zeta'(\eta)| = \left| 1 \pm \frac{ui}{\sqrt{1-u^2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1-u)(1+u)}}, \quad -1 < u < 1.$$

Учитывая последнее замечание, имеем

$$\frac{\partial|f|}{\partial|z|} = m + 1 + \frac{|\operatorname{Im}(zR'(z))|}{\sqrt{(\operatorname{Re} R(z) - L(R))(H(R) - \operatorname{Re} R(z))}} \geq m + 1 + \frac{2|\operatorname{Im}(zR'(z))|}{H(R) - L(R)}.$$

Пусть для определенности $k < n/2$. Тогда из неравенства (2.13) следует, что

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im}(zR'(z))| &\leq \frac{1}{2}(n - k - 1)(H(R) - L(R)) + \frac{1}{2}\sqrt{|c_n|(H(R) - L(R))} \\ &\leq (n - k - 1)M(P) + \sqrt{|c_n|M(P)}. \end{aligned}$$

Заменяя при необходимости $P(z)$ на $e^{i\theta}P(z)$ с подходящим θ , имеем $|R'(z)|$ в левой части последнего неравенства, и, следовательно, утверждение теоремы 2.7 доказано при $k < n/2$. Аналогично рассматриваются случаи $k = n/2$ и $k > n/2$. Теорема доказана.

Отметим, что промежуточное неравенство в доказательстве теоремы 2.7 при $k = 0$ восходит к Сегё:

$$|P'(z)| \leq n \max\{|\operatorname{Re} P(z)| : |z| = 1\}, \quad |z| = 1$$

(см. также [93]). Итоговое неравенство для этого же значения k усиливает классическое неравенство Бернштейна:

$$|P'(z)| \leq nM(P), \quad |z| = 1.$$

Желая иметь в правой части первой оценки теоремы 2.7 только геометрические характеристики, воспользуемся известным неравенством $S \geq \pi|c_n|^2$ для

площади S образа круга U при отображении $w = P(z)$ [94; отдел 3, задача 124]. Указанная оценка дает

$$|zP'(z) - kP(z)| \leq (n - k - 1)R + \sqrt{R\sqrt{\frac{S}{\pi}}}, \quad k < \frac{n}{2},$$

где z – произвольная точка круга U , R – радиус круга с центром в начале, содержащего множество $P(U)$, а S – площадь $P(U)$ без учета листности накрытия. Равенство достигается в точках z , $|z| = 1$, для полинома $P(z) = c_n z^n$ и любого целого k , $0 \leq k < n/2$.

Ввиду (2.13) при четном n ($k = n/2$) имеем уточнение следующего неравенства В. И. Смирнова [95]:

$$\left| zP'(z) - \frac{n}{2}P(z) \right| \leq \frac{n}{2}M(P)$$

(см. также [96]). Из более поздних результатов В. И. Смирнова [97] вытекает неравенство

$$|zP'(z) - \alpha P(z)| \leq |n - \alpha|M(P),$$

справедливое для всех точек z , $|z| = 1$, и комплексных чисел α , $\operatorname{Re} \alpha \leq n/2$. Теорема 2.7 дает уточнения этого неравенства в случае любых вещественных α (см. [10; теоремы 4, 5]).

Заменяя модуль в левой части неравенств теоремы 2.7 на разность модулей, легко приходим к следующему утверждению.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Для любого полинома $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$ четной степени $n \geq 2$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} 0 &\leq M(P) - \min(\sqrt{|c_0|M(P)}, \sqrt{(|c_0| + |c_n|)M(P)}) \leq M(P') \\ &\leq (n - 1)M(P) + \min(\sqrt{(|c_0| + |c_n|)M(P)}, \sqrt{|c_n|M(P)}) \end{aligned}$$

с равенством, например, при $P(z) = c_0$ для нижней оценки и $P(z) = c_n z^n$ для верхней.

Следующее утверждение содержит классическое неравенство Бернштейна для полиномов на отрезке.

ТЕОРЕМА 2.8. Для любого полинома $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$, $\operatorname{Re} c_n \neq 0$, и любой точки x на отрезке $[-1, 1]$ справедливо неравенство

$$|\operatorname{Re} P'(x)|\sqrt{1 - x^2} \leq (n - 1 + \sqrt{\delta^n(P)})\sqrt{(\operatorname{Re} P(x) - \bar{L}(P))(H(P) - \operatorname{Re} P(x))}. \quad (2.14)$$

Равенство в (2.14) достигается в случае $P(z) = aT_n(z) + b$ для любых вещественных $a \neq 0$, комплексных b и $x \in [-1, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Величина $\delta(P)$ определена равенством (2.9). Повторим схему доказательства теоремы 2.7, но с другими вспомогательными функциями. Именно, пусть функции $\zeta = \Phi(\omega)$ и $w = f(z)$ из леммы 2.3. Как и выше, лемма 2.3 и неравенство (1.12) дают в точках регулярности $1/z$ на окружности $|z| = 1$ неравенство

$$\frac{\partial|f|}{\partial|z|} \leq (\delta(P))^{n/2} \leq 1 \quad (2.15)$$

(ср. (2.13)). Осталось подсчитать производную в левой части неравенства (2.15), что с учетом вычислений в доказательстве теоремы 2.7 является простым упражнением. Случай равенства проверяется непосредственно в (2.14) либо в (2.15). Теорема доказана.

Следующая цепочка неравенств с учетом (2.15) показывает, что (2.14) действительно является усилением неравенства Бернштейна [2; с. 233]:

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} P'(z)| \sqrt{1-x^2} &\leq n \sqrt{(\operatorname{Re} P(x) - \bar{L}(P))(\overline{H}(P) - \operatorname{Re} P(x))} \\ &\leq \frac{n}{2} (\overline{H}(P) - \bar{L}(P)) \leq n \overline{M}(P). \end{aligned}$$

Аналогично, из (2.14) получаем для $x \in [-1, 1]$ неравенство

$$|P'(x)| \sqrt{1-x^2} \leq (n-1) \overline{M}(P) + \sqrt{2^{1-n} |\operatorname{Re} c_n| \overline{M}(P)} \leq n \overline{M}(P).$$

Отсюда вытекает также известное неравенство Маркова:

$$|P'(x)| \leq n^2 \overline{M}(P), \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Заменяя в доказательстве теоремы 2.8 неравенство (1.12) на неравенство Н. А. Лебедева [98; с. 9, 12]):

$$|f'(z)| \geq \exp \left(\left| \arg \frac{f(z)}{z} \right| \right),$$

приходим к следующему результату [23; теорема 2].

ТЕОРЕМА 2.9. *Для полинома P степени n с вещественными коэффициентами, удовлетворяющего условию $M(P) \leq 1$, справедливо неравенство*

$$\frac{|P'(x)| \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-P^2(x)}} \leq n-1 + \exp(-|\arccos P(x) - \arccos T_n(x)|),$$

с равенством при любых $x \in (-1, 1)$ для полинома Чебышёва T_n .

Доказательства следующих ниже теорем 2.10–2.14 опираются на неравенство (1.12). Отличия заключаются только в выборе функций, к которым оно применяется (точнее, обратных функций). Например, функция из леммы 2.7 приводит к следующему утверждению [8].

ТЕОРЕМА 2.10. *Для любого полинома $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$ с коэффициентами $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \dots, n$, $c_n \neq 0$, и с критическими точками на отрезке $[-1, 1]$ выполняется неравенство*

$$|P'(x)| \sqrt{1-x^2} \leq n \sqrt{\delta(P)} \sqrt{(P(x) - \bar{L}(P))(\overline{H}(P) - P(x))}, \quad x \in [-1, 1].$$

Равенство достигается для полиномов $aT_n(z) + b$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. *В условиях предыдущей теоремы имеем*

$$|P'(x)| \leq n^2 \overline{M}(P) \left| \frac{2^{1-n} c_n}{\overline{M}(P)} \right|^{1/n}, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

с равенством для полиномов Чебышёва T_n .

Функция из леммы 2.2 дает следующую теорему (см. [7]).

ТЕОРЕМА 2.11. *Для любого полинома $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$ и любой точки $z = e^{i\varphi}$ на окружности $|z| = 1$, в которой $\operatorname{Re} P(z)$ отлична от $L(P)$ и $H(P)$, справедливо неравенство*

$$\frac{|(\operatorname{Re} P(z))'_\varphi|}{\sqrt{(\operatorname{Re} P(z) - L(P))(H(P) - \operatorname{Re} P(z))}} \leq n - 1 + \sqrt{\frac{2|c_n|}{H(P) - L(P)}}. \quad (2.16)$$

Равенство в (2.16) достигается в случае $P(z) = c_0 + c_n z^n$ для любых точек z , $|z| = 1$, $z^n \neq \pm |c_n|/c_n$, где c_0 и c_n – произвольные комплексные числа, $c_n \neq 0$.

Рассмотрим несколько следствий теоремы 2.11. Прежде всего заметим, что произвольный тригонометрический полином с вещественными коэффициентами

$$T_n(\varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), \quad a_n^2 + b_n^2 \neq 0,$$

можно рассматривать как действительную часть алгебраического полинома $P(z)$ на окружности $|z| = 1$:

$$P(z) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k - ib_k) z^k.$$

Неравенство (2.16) в терминах таких полиномов примет вид

$$\frac{|T'_n(\varphi)|}{\sqrt{(T_n(\varphi) - L(T_n))(H(T_n) - T_n(\varphi))}} \leq n - 1 + \sqrt{\frac{2\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{H(T_n) - L(T_n)}},$$

$-\infty < \varphi < \infty$, где $L(T_n) = \min_{[0, 2\pi]} T_n(\varphi)$, $H(T_n) = \max_{[0, 2\pi]} T_n(\varphi)$. Подставляя в последнее неравенство вместо $T_n(\varphi)$ полином $T_{nl}(\varphi) \equiv T_n(l\varphi)$, $l = 1, 2, \dots$, деля обе части неравенства на l и устремляя l к бесконечности, получим в итоге

$$\frac{|T'_n(\varphi)|}{\sqrt{(T_n(\varphi) - L(T_n))(H(T_n) - T_n(\varphi))}} \leq n.$$

Данное неравенство равносильно неравенству Бернштейна–Сегё [2; с. 232]:

$$(T'_n(\varphi))^2 + n^2(T_n(\varphi))^2 \leq n^2 \left(\max_{[0, 2\pi]} |T_n(\varphi)| \right)^2.$$

Отсюда приходим к первоначальному неравенству Бернштейна

$$|T'_n(\varphi)| \leq n \max_{[0, 2\pi]} |T_n(\varphi)|, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

справедливому для любых тригонометрических полиномов $T_n(\varphi)$ [99; гл. I, п. 10]. Далее, замена среднего геометрического на среднее арифметическое в неравенстве (2.16) дает точную оценку для алгебраических полиномов:

$$|\operatorname{Im}(zP'(z))| \leq (n-1) \frac{H(P) - L(P)}{2} + \sqrt{|c_n|} \frac{H(P) - L(P)}{2}$$

с равенством для $P(z) = c_0 + c_n z^n$ и некоторых z . Можно показать, что эта оценка не выполняется, если мнимую часть слева заменить на модуль. Учитывая соотношения

$$H(P) - L(P) \leq |H(P)| + |L(P)| \leq 2M(P)$$

и пользуясь тем, что при вращении полинома $P(z) \rightarrow e^{i\theta}P(z)$ величина $M(P)$ не меняется, получим из последней оценки неравенство

$$|P'(z)| \leq (n-1)M(P) + \sqrt{|c_n|M(P)}, \quad (2.17)$$

справедливое для любого полинома $P(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_nz^n$ и любых точек z на окружности $|z| = 1$. Равенство в (2.17) достигается в случае $P(z) = c_nz^n$. Заметим, что в силу неравенства Коши $|c_n| \leq M(P)$, так что неравенство (2.17) и предыдущие неравенства усиливают неравенство Бернштейна:

$$M(P') \leq nM(P).$$

Функция из доказательства теоремы 2.4 приводит к теореме 2.12 (ср. с теоремой 1.8).

ТЕОРЕМА 2.12. *Для любого полинома $P(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_nz^n$ и любой точки $z = e^{i\varphi}$ на окружности $|z| = 1$, в которой модуль $|P(z)|$ отличен от $m(P)$ и $M(P)$, справедливо неравенство*

$$\begin{aligned} & \frac{|(|P(z)|^2)'_{\varphi}|}{\sqrt{(|P(z)|^2 - (m(P))^2)((M(P))^2 - |P(z)|^2)}} \\ & \leq n - 1 + 2\sqrt{\frac{|c_0c_n|}{(M(P))^2 - (m(P))^2}}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Равенство в (2.18) достигается в случае $P(z) = c_0 + c_nz^n$ для любых точек z , $|z| = 1$, $z^n \neq \pm c_0/c_n$, где c_0 и c_n – произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию $|c_0| = |c_n| \neq 0$.

Отметим точное неравенство

$$|(|P(z)|^2)'_{\varphi}| \leq n \frac{(M(P))^2 - (m(P))^2}{2},$$

которое получается из (2.18) заменой среднего геометрического на среднее арифметическое, а также заменой полинома $P(z)$ на $P(z^l)$ с последующим делением на l и переходом к пределу при $l \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 2.13. *Если полином $P(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_nz^n$ не имеет нулей в круге $|z| < 1$, то для любой точки $z = e^{i\varphi}$ на окружности $|z| = 1$ выполняется неравенство*

$$(\arg P(z))'_{\varphi} \leq \frac{n-1}{2} + \sqrt{\frac{|c_n/c_0|}{4}}. \quad (2.19)$$

Равенство достигается для полинома $P(z) = c_0 + c_nz^n$ и любых точек z на окружности $|z| = 1$, где c_0 и c_n – произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию $|c_0| = |c_n| \neq 0$.

Доказательство содержит функцию из леммы 2.5.

Поскольку в теореме 2.13 нули полинома P расположены на множестве $|z| \geq 1$, то $|c_0/c_n| \geq 1$ и неравенство (2.19) дает хорошо известное неравенство

$$(\arg P(z))'_{\varphi} = \operatorname{Re} \frac{zP'(z)}{P(z)} \leq \frac{n}{2}.$$

Отметим, что без ограничения на нули полинома P величина $\operatorname{Re}(zP'(z)/P(z))$ может принимать на окружности $|z| = 1$ сколь угодно большие значения. Однако для некоторых точек на этой окружности существует верхняя граница. Например, в точках z , где достигается максимум модуля $M(P)$, необходимо выполняется $\operatorname{Im}(zP'(z)/P(z)) = 0$ и, следовательно, $|\operatorname{Re}(zP'(z)/P(z))| = |P'(z)|/M(P)$. Из неравенства (2.17) для таких точек вытекает, что

$$\left| \operatorname{Re} \frac{zP'(z)}{P(z)} \right| \leq n - 1 + \sqrt{\frac{|c_n|}{M(P)}}.$$

Равенство достигается для полиномов $P(z) = c_n z^n$.

Функция из леммы 2.4 приводит к следующему результату.

ТЕОРЕМА 2.14. *Если все нули полинома $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$, $c_n \neq 0$, лежат в круге $|z| \leq 1$, то для любой точки $z = e^{i\varphi}$ на окружности $|z| = 1$ выполняется неравенство*

$$(\arg P(z))'_\varphi \geq \frac{n+1}{2} - \sqrt{\frac{|c_0/c_n|}{4}}. \quad (2.20)$$

Равенство достигается для полиномов из теоремы (2.13).

Левая часть неравенства (2.20) не превосходит $|zP'(z)/P(z)|$, и, следовательно, в условиях теоремы 2.14 на окружности $|z| = 1$ выполняется

$$|P'(z)| \geq |P(z)| \frac{n+1 - \sqrt{|c_0/c_n|}}{2}.$$

Равенство достигается для полинома $P(z) = c_0 + c_n z^n$ в точках z , для которых $z^n = c_0/c_n$, где $|c_0| = |c_n| \neq 0$. Переходя в последнем неравенстве к максимуму, получим следующий результат:

$$M(P') \geq M(P) \frac{n+1 - \sqrt{|c_0/c_n|}}{2},$$

что усиливает классическое неравенство П. Турана [100]:

$$M(P') \geq \frac{n}{2} M(P),$$

с равенством для полиномов $P(z) = c_0 + c_n z^n$, $|c_0| = |c_n| \neq 0$.

Предложенный метод доказательства позволяет выявить все случаи равенства в теоремах 2.7–2.14. Вместе с тем в известной нам литературе авторы ограничиваются указанием точности оценки и полинома, для которого выполняется равенство. Следуя “традиции” и не желая увеличивать объем статьи, затушевывая тем самым суть вопроса, отметим лишь, что равенство в теоремах 2.13 и 2.14 достигается для “*self-inversive*” полиномов, т. е. полиномов вида $P(z) = \alpha Q(z)$, где $Q(z) = z^n P(1/\bar{z})$ и $|\alpha| = 1$.

Итак, лишь один только факт из теории однолистных функций (неравенство (1.12)) дает серию дифференциальных неравенств для полиномов. Приведем два примера применения других неравенств. Так, неравенство З. Неха-ри [101; с. 258] и лемма 2.4 дают следующее утверждение [23; теорема 3].

ТЕОРЕМА 2.15. Для полинома

$$P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n, \quad c_n \neq 0, \quad c_0 \neq 0,$$

с вещественными коэффициентами c_k , $k = 0, 1, \dots, n$, нули которого лежат в круге $|z| \leq 1$, и для точек z окружности $|z| = 1$, $z \neq \pm 1$, справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} \frac{zP'(z)}{P(z)} \geq \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2} \min \left\{ \left| \frac{c_0}{c_n} \right| \left| \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Im}(z^{-n-1} P(z)/\overline{P(z)})} \right|, \left| \frac{\operatorname{Im}(z^{-n-1} P(z)/\overline{P(z)})}{\operatorname{Im} z} \right| \right\}.$$

Равенство достигается для полиномов $P(z)$ с нулями на окружности $|z| = 1$.

Неравенство (1.16) и функция

$$f(z) = z^{-n} \frac{\overline{P(\bar{z})}}{P(1/z)}, \quad |z| < 1,$$

приводят к теореме 2.16 (см. [8; теорема 4.3]).

ТЕОРЕМА 2.16. Предположим, что полином P степени n имеет в круге $|z| < 1$ только один нуль первой кратности, и пусть точки z_k , $k = 1, \dots, m$, $m \geq 2$, расположены на окружности $|z| = 1$ симметричным образом. Тогда справедливо неравенство

$$\prod_{k=1}^m \max \left\{ 2 \operatorname{Re} \frac{z_k P'(z_k)}{P(z_k)} - n, 0 \right\} \leq 1.$$

Равенство достигается для полиномов P с одним нулем в начале и остальными на окружности $|z| = 1$.

Предложенный подход позволяет получить теоремы, аналогичные приведенным выше, но уже для рациональных функций с предписанными полюсами (см. [9]).

2.4. Неравенства для коэффициентов. Пусть f — одна из функций, указанных в леммах 2.2–2.5, построенная по заданному полиному P , $f(0) = 0$. Обозначим через

$$z = F(w) = \alpha w + \alpha_1 w^2 + \dots, \quad |w| < 1,$$

обратную функцию для $w = f(z)$. Тогда функция

$$\tilde{F}(w) = \frac{F(w)}{\alpha} = w + \frac{\alpha_1}{\alpha} w^2 + \dots$$

принадлежит известному классу S_M регулярных и однолистных в круге $|w| < 1$ функций, удовлетворяющих условиям $\tilde{F}(0) = 0$, $\tilde{F}'(0) = 1$ и $|\tilde{F}(w)| < M$ при $|w| < 1$ ($M = 1/|\alpha|$). К настоящему времени доказано немало теорем для функций данного класса (см., например, [84], [98], [102], [103]). В частности, известно немало оценок коэффициентов функции $\tilde{F}(z)$. Из этих оценок вытекают некоторые оценки для коэффициентов исходного полинома P . Не рассматривая

данный вопрос подробно, ограничимся, в основном, примерами оценок, вытекающих из известного неравенства

$$\left| \frac{\alpha_1}{\alpha} \right| \leq 2(1 - |\alpha|)$$

[102; с. 94]. Если функция f имеет в окрестности начала координат разложение

$$f(z) = \frac{1}{\alpha} z + \beta z^2 + \dots,$$

то указанное неравенство запишется в виде

$$|\alpha^2 \beta| \leq 2(1 - |\alpha|). \quad (2.21)$$

Равенство достигается, например, в случае $f(z) \equiv z/\alpha$, $|\alpha| = 1$.

ТЕОРЕМА 2.17. *Для любого полинома $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{n-1} z^{n-1} + c_n z^n$ справедливо неравенство*

$$|c_{n-1}| + 2|c_n| \leq H(P) - L(P).$$

Равенство достигается в случае $P(z) = c_0 + c_n z^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что для функции f из леммы 2.2

$$\alpha = \frac{2c_n}{H(P) - L(P)}, \quad \alpha^2 \beta = -\frac{2c_{n-1}}{H(P) - L(P)},$$

и применить неравенство (2.21).

Заметим, что полученное неравенство содержит классическую оценку

$$|c_n| \leq \frac{1}{2}(H(P) - L(P)),$$

которая вытекает также из леммы Шварца: $|\alpha| \leq 1$.

ТЕОРЕМА 2.18. *Если все нули полинома $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{n-1} z^{n-1} + c_n z^n$ лежат в круге $|z| \leq 1$, то справедливо неравенство*

$$|c_{n-1} \bar{c}_0 - c_n \bar{c}_1| \leq 2|c_n|(|c_n| - |c_0|).$$

В случае, когда все нули полинома $P(z)$ расположены на множестве $|z| \geq 1$, имеет место неравенство

$$|c_{n-1} \bar{c}_0 - c_n \bar{c}_1| \leq 2|c_0|(|c_0| - |c_n|).$$

Равенство в обоих случаях достигается для полиномов $P(z)$ с нулями на единичной окружности $|z| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим первое неравенство. Можно считать, что все нули полинома $P(z)$ лежат в открытом круге $|z| < 1$ и $c_0 \neq 0$, $c_n \neq 0$. Введем функцию из леммы 2.4:

$$f(z) = z^{n+1} \frac{P(1/z)}{P(\bar{z})} = \frac{1}{\alpha} z + \beta z^2 + \dots$$

Простые вычисления показывают, что на этот раз

$$\alpha = \frac{\bar{c}_0}{c_n} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{c_{n-1}}{\bar{c}_0} - \frac{c_n \bar{c}_1}{(\bar{c}_0)^2}.$$

Осталось применить неравенство (2.21). Для доказательства второго неравенства достаточно применить первое неравенство к полиному $\tilde{P}(z) = z^n P(1/z)$, либо аналогично предыдущему воспользоваться леммой 2.5. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.19. Пусть $P(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_{n-1}z^{n-1} + c_nz^n$. Тогда

$$2|c_{n-1}\bar{c}_0 + c_n\bar{c}_1| \leq M^2(P) - m^2(P) - 4|c_0c_n|$$

с равенством для полиномов $P(z) = c_0 + c_nz^n$, $|c_0| = |c_n|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $c_0 \neq 0$ и $c_n \neq 0$. Рассмотрим функцию

$$w = f(z) = z^{1-n} \Phi \left(P \left(\frac{1}{z} \right) \overline{P(\bar{z})} \right) = \frac{1}{\alpha} z + \beta z^2 + \dots$$

из доказательства теоремы 2.4. Для начальных коэффициентов этой функции выполняются равенства

$$\alpha = \frac{4c_n\bar{c}_0}{M^2(P) - m^2(P)}, \quad \alpha^2\beta = -\frac{4(c_{n-1}\bar{c}_0 + c_n\bar{c}_1)}{M^2(P) - m^2(P)}.$$

Осталось применить неравенство (2.21). В случае $P(z) = c_0 + c_nz^n$, $|c_0| = |c_n|$, имеем $|\alpha| = 1$, и, следовательно, правая часть неравенства теоремы 2.19 равна нулю. Значит, левая часть также равна нулю, и мы имеем равенство. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.20. Для полинома $P(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_{n-1}z^{n-1} + c_nz^n$ с вещественными коэффициентами c_k , $k = 0, 1, \dots, n$, и с критическими точками на отрезке $[-1, 1]$ выполняется неравенство

$$\left(\frac{|c_{n-1}|}{n} + |c_n| \right)^n \leq 2^{n-2} |c_n|^{n-1} (\overline{H}(P) - \overline{L}(P)). \quad (2.22)$$

Равенство достигается для полиномов $P(z) = aT_n(z) + b$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО осуществляется так же, как выше, но с применением функции из леммы 2.7. Случай равенства проверяется непосредственно.

Предположим, что в условиях теоремы 2.20 выполняется

$$|P(z)| \leq 1, \quad \text{когда } z \in [-1, 1].$$

Из неравенства (2.22) в этом случае следует, что

$$\left(\frac{|c_{n-1}|}{n} + |c_n| \right)^n \leq (2|c_n|)^{n-1}. \quad (2.23)$$

Как впервые замечено А. В. Олесовым [34], неравенство (2.21), примененное к функции f из леммы 2.3, дает

$$|c_{n-1}| + |c_n| \leq 2^{n-1}. \quad (2.24)$$

Легко видеть, что неравенство (2.24) слабее (2.23), но оно справедливо без каких-либо ограничений на критические точки полинома P . Ранее В. А. Марковым было показано, что

$$\frac{|c_{n-1}|}{n} + |c_n| \leq 2^{n-1}$$

с равенством для полинома Чебышёва T_n [104].

ТЕОРЕМА 2.21. В условиях предыдущей теоремы справедливы неравенства

$$|c_n| \geq \left(\frac{|c_1|}{n} \right)^{2n} \frac{2^{3n-2}}{(\overline{H}(P) - \overline{L}(P))^{2n-1}}, \quad |c_1| \leq \frac{n}{2} (\overline{H}(P) - \overline{L}(P))$$

с равенством для полинома Чебышёва T_n при нечетном n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое неравенство вытекает из теоремы 2.10, где необходимо положить $x = 0$. Второе неравенство следует из первого, если воспользоваться классической оценкой

$$|c_n| \leq 2^{n-2} (\overline{H}(P) - \overline{L}(P)).$$

Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Пусть P – полином степени n с нулями на отрезке $[-1, 1]$, удовлетворяющий условию $\overline{M}(P) = 1$. Из следствия 2.4 и неравенства П. Турана [100] имеем другую оценку снизу модуля старшего коэффициента:

$$|c_n| \geq (2(3n^{3/2})^n)^{-1}.$$

Эту оценку можно улучшить, применяя вместо неравенства П. Турана результат работы [105]. Интересно было бы знать точную нижнюю оценку $|c_n|$ в данных условиях, не зависящую от других коэффициентов полинома P .

Итак, мы рассмотрели некоторые применения лишь одного классического неравенства для коэффициентов однолистных функций. Построение однолистных функций с помощью леммы 2.1 и применение других оценок коэффициентов в различных классах однолистных функций ведет к многочисленным неравенствам для полиномов. В качестве примера приведем два утверждения, вытекающие из оценок Х. Сайджека и О. Тамми [106] (см. [11; § 3]).

ТЕОРЕМА 2.22. Если полином $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{n-1} z^{n-1} + c_n z^n$ с вещественными коэффициентами c_k , $k = 0, 1, \dots, n$, $c_n \neq 0$, $n \geq 4$, удовлетворяет условию $|P(z)| \leq 1$ при $z \in [-1, 1]$ и если $\lambda = \lambda(P) := |c_n|/2^{n-1}$, то справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \lambda &\leq 1, \\ |c_{n-1}| &\leq 2^{n-1}(1 - \lambda), \\ |nc_n + 4c_{n-2}| &\leq 2^{n-1}(\lambda^{-1} - \lambda), \\ |(n-1)c_{n-1} + 4c_{n-3}| &\leq 2^{n-1}(\lambda^{-2} - \lambda^{-1}), \\ |n(n-1)c_n + 8(n-2)c_{n-2} + 32c_{n-4}| &\leq 2^n(5\lambda^{-3} - 8\lambda^{-2} + 3\lambda^{-1}). \end{aligned}$$

Равенство во всех случаях достигается для полинома Чебышёва

$$T_n(z) = 2^{n-1} z^n + \dots$$

Первое неравенство в данной теореме классическое. Второе и третье получены А. В. Олесовым по существу тем же путем [34].

ТЕОРЕМА 2.23. Для полинома $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{n-1} z^{n-1} + c_n z^n$, $c_n \neq 0$, удовлетворяющего условию $|\operatorname{Re} P(z)| \leq 1$ при $|z| = 1$, имеют место оценки

$$\begin{aligned} |c_n| &\leq 1, & n &\geq 1, \\ |c_{n-1}| &\leq 2(1 - |c_n|), & n &\geq 2, \\ |c_{n-2} c_n| &\leq 1 - |c_n|^2, & n &\geq 3, \\ |c_{n-k-1} c_n^k| &\leq \sum_{\nu=0}^{k-1} \gamma_{k\nu} |c_n|^\nu, & k &= 2, 3, \dots, n-2, \quad n \geq 4, \\ |\operatorname{Re} c_0| &\leq 1 - |c_n|, & n &= 1, \\ |2 \operatorname{Re} c_0| |c_n| &\leq 1 - |c_n|^2, & n &= 2, \\ |2 \operatorname{Re} c_0| |c_n|^{n-1} &\leq \sum_{\nu=0}^{n-2} \gamma_{n-1\nu} |c_n|^\nu, & n &\geq 3, \end{aligned}$$

где

$$\gamma_{k\nu} = (-1)^\nu \frac{2}{\nu!} \frac{k-\nu}{k-\nu+1} \frac{(2k-\nu-1)!}{[(k-\nu)!]^2}, \quad \nu = 0, \dots, k-1.$$

Равенство во всех оценках достигается в случае $P(z) = c_n z^n$, $|c_n| = 1$.

2.5. Полиномы с критическими значениями на отрезке. В данном разделе рассматриваются дополнения и уточнения некоторых результатов из разделов 2.2–2.4 в случае полиномов с фиксированным старшим коэффициентом и с критическими значениями на отрезке [12]. Для фиксированных a , $0 < a < 2^{n-1}$, и $n \geq 2$ обозначим через $\mathcal{P}_n^a$ совокупность всех полиномов $P(z) = az^n + \dots$ степени n с вещественными коэффициентами, удовлетворяющих условию $\overline{M}(P) \leq 1$ и таких, что если в некоторой точке z выполняется равенство $P'(z) = 0$, то необходимо $P(z) \in [-1, 1]$. Ниже будут доказаны теоремы покрытия, неравенство бернштейновского типа и неравенства для коэффициентов полиномов класса $\mathcal{P}_n^a$. Экстремальным в каждом случае будет полином

$$T_n^a(z) := T_n(bz + b - 1) = az^n + \dots,$$

где $b = (a \cdot 2^{1-n})^{1/n} < 1$. Пусть

$$\eta = \Phi(\omega) = \omega + \sqrt{\omega^2 - 1}$$

означает ту ветвь аналитической функции, обратной функции Жуковского, которая конформно и однолистно отображает внешность отрезка $[-1, 1]$ на круг $|\eta| < 1$. Ключевую роль в приведенных ниже доказательствах играет функция

$$w = g(\zeta) := \left[\Phi \left(P \left(\frac{\zeta + 1/\zeta}{2} \right) \right) \right]^{1/n} = \frac{1}{b} \zeta + \dots, \quad (2.25)$$

которая согласно лемме 2.7 конформно и однолистно отображает область $\{\zeta: |\zeta| < 1, P((\zeta + 1/\zeta)/2) \notin [-1, 1]\}$ на круг $|w| < 1$. Здесь $P \in \mathcal{P}_n^a$ и $1^{1/n} = 1$. Соответственно, обратная $w = g(\zeta)$ функция

$$\zeta = h(w) = (a \cdot 2^{1-n})^{1/n} w + \dots$$

принадлежит классу ограниченных однолистных в круге $|w| < 1$ функций, экстремальные свойства которых хорошо изучены в литературе (см., например, [84]).

Обозначим через $\zeta = p(w; b)$ функцию Пика, заданную соотношениями

$$\frac{\zeta}{(1+\zeta)^2} = \frac{bw}{(1+w)^2}, \quad |w| < 1, \quad |\zeta| < 1, \quad \zeta \notin [d, 1],$$

где $d = 2b^{-1} - 1 - 2\sqrt{b^{-1}(b^{-1} - 1)}$, $0 < b < 1$.

ТЕОРЕМА 2.24. *Для любого полинома P класса $\mathcal{P}_n^a$ и любого числа ρ , $0 < \rho < 1$, прообраз эллипса с фокусами в точках ± 1 и большой полуосью $(\rho + 1/\rho)/2$ лежит в кольцевой области $G(n, a, \rho)$, ограниченной двумя эллипсами с фокусами в точках ± 1 и большими полуосями, равными*

$$\frac{1}{2} \left(-p(-\rho^{1/n}; b) - \frac{1}{p(-\rho^{1/n}; b)} \right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} \left(p(\rho^{1/n}; b) + \frac{1}{p(\rho^{1/n}; b)} \right),$$

где $b = (a \cdot 2^{1-n})^{1/n}$. Исключение составляет случай, когда $P(z) \equiv T_n^a(z)$ и, следовательно, прообраз указанного эллипса есть эллипс, все точки которого принадлежат области $G(n, a, \rho)$, кроме точек

$$\frac{1}{2} \left(p(-\rho^{1/n}; b) + \frac{1}{p(-\rho^{1/n}; b)} \right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} \left(p(\rho^{1/n}; b) + \frac{1}{p(\rho^{1/n}; b)} \right),$$

которые лежат на ее границе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По заданному полиному P класса $\mathcal{P}_n^a$ построим функцию $w = g(\zeta)$ из (2.25) и рассмотрим обратное отображение $\zeta = h(w) = bw + \dots$. Для любой точки w на окружности $|w| = \rho^{1/n}$ справедливы неравенства Пика [84; с. 55]

$$p(\rho^{1/n}; b) \leq |h(w)| \leq -p(-\rho^{1/n}; b). \quad (2.26)$$

Это означает, что точка $z = (\zeta + 1/\zeta)/2$, $\zeta = h(w)$, принадлежит замыканию области $G(n, a, \rho)$, в то время как точка $P(z) = (w^n + 1/w^n)/2$ является произвольной точкой эллипса с фокусами в точках ± 1 и большой полуосью $(\rho + 1/\rho)/2$. Принадлежность точки $z = (\zeta + 1/\zeta)/2$ границе области $G(n, a, \rho)$ означает равенство в левом либо правом неравенстве в (2.26) для некоторой точки w . Хорошо известно, что в этом случае $h(w) \equiv \alpha p(\beta w; b)$, где α и β – комплексные числа, удовлетворяющие условию $|\alpha| = |\beta| = 1$. Тогда из представления (2.25) вытекает, что $\alpha = \beta = 1$ и полином P отображает отрезок $[-1, (d+1/d)/2]$ на отрезок $[-1, 1]$, где d – из определения функции Пика. Следовательно, полином $P((z+1-b)/b) = 2^{n-1}z^n + \dots$ отображает отрезок $[-1, 1]$ на себя (т. е. $(d+1/d)/2 = 2b^{-1} - 1$). Отсюда вытекает, что $P((z+1-b)/b) \equiv T_n(z)$ и $P(z) \equiv T_n^a(z)$. Характер отображения, осуществляемого полиномом $T_n^a(z)$, непосредственно виден из его определения. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.25. *Если полином P принадлежит классу $\mathcal{P}_n^a$, то для любого числа t , $0 < t < 1$, образ эллипса с фокусами в точках ± 1 и большой полуосью $(t + 1/t)/2$ при отображении этим полиномом лежит в конечной области, ограниченной эллипсом с фокусами в точках ± 1 и большой полуосью $(\rho + 1/\rho)/2$, где $p(-\rho^{1/n}; b) = -t$, $b = (a \cdot 2^{1-n})^{1/n}$. Исключение составляет случай, когда $P(z) \equiv T_n^a(z)$ и, следовательно, все точки образа эллипса*

принадлежат указанной выше области, кроме точки $-(\rho + 1/\rho)/2$, которая лежит на ее границе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что для любого t , $0 < t < 1$, уравнение

$$p(-\rho^{1/n}; b) = -t$$

имеет единственное решение ρ , $0 < \rho < 1$. Из правого неравенства в (2.26) заключаем, что если точка $z = (\zeta + 1/\zeta)/2$, $\zeta = h(w)$, принадлежит эллипсу с фокусами в точках ± 1 и большой полуосью $(t + 1/t)/2$, т. е. если $|\zeta| = t$, то соответствующая точка $w = g(\zeta)$ удовлетворяет неравенству $|w| \geq \rho^{1/n}$. Это означает принадлежность точки $P(z) = (w^n + 1/w^n)/2$ замыканию области, указанной в формулировке теоремы 2.25, причем если $P(z)$ лежит на границе этой области, то $|w| = \rho^{1/n}$ и в правом неравенстве (2.26) имеет место знак равенства. В случае равенства в (2.26), как и при доказательстве теоремы 2.24, приходим к тождеству $P(z) \equiv T_n^a(z)$. Теорема доказана.

Заметим, что при отображении полиномом T_n^a , $0 < a < 2^{n-1}$, образ эллипса с фокусами в точках ± 1 не является эллипсом (в отличие от случая полинома Чебышёва T_n , т. е. когда $a = 2^{n-1}$). Повторяя доказательство теоремы 2.25, но с привлечением левого неравенства в (2.26), можно получить принадлежность образа эллипса с фокусами в точках ± 1 и большой полуосью $(t + 1/t)/2$ “внешности” некоторого эллипса, но только в случае $t < d$.

ТЕОРЕМА 2.26. Если полином P принадлежит классу $\mathcal{P}_n^a$, то для любого $z \in [-1, 1]$ выполняется неравенство

$$\left| P'(z) \sin\left(\frac{1}{n} \arccos P(z)\right) \right| \leq n(a \cdot 2^{1-n})^{1/n} \sqrt{1 - P^2(z)}. \quad (2.27)$$

Равенство в (2.27) для любого $z \in [-1, 1]$ достигается в случае $P(z) \equiv T_n^a(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По заданному полиному $P \in \mathcal{P}_n^a$ построим функцию $w = g(\zeta)$ из (2.25) и рассмотрим обратную к ней функцию $\zeta = h(w) = (a \times 2^{1-n})^{1/n} w + \dots$. Пусть

$$\zeta_1 = e^{i\theta}, \quad \zeta_2 = e^{-i\theta}, \quad w_k = g(\zeta_k), \quad k = 1, 2, \quad 0 < \theta < \pi,$$

и пусть в точках w_k , $k = 1, 2$, существуют производные $h'(w_k)$, $k = 1, 2$, а в точках ζ_k , $k = 1, 2$, – производные $g'(\zeta_k)$, $k = 1, 2$. Применяя к функции $\zeta = h(w)$ результат Х. Поммеренке и А. Васильева [107; неравенство (1.1)] и выписывая его в терминах функции $w = g(\zeta)$, получаем

$$\left| \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{g(\zeta_1) - g(\zeta_2)} \right| \geq (a \cdot 2^{1-n})^{-1/n} |g'(\zeta_1)g'(\zeta_2)|^{1/2}. \quad (2.28)$$

Положим $z = (\zeta_1 + 1/\zeta_1)/2 = (\zeta_2 + 1/\zeta_2)/2$. Простые вычисления дают

$$\begin{aligned} |\zeta_1 - \zeta_2| &= 2\sqrt{1 - z^2}, & |g(\zeta_1) - g(\zeta_2)| &= 2 \left| \sin\left(\frac{1}{n} \arccos P(z)\right) \right|, \\ |g'(\zeta_k)| &= \frac{d|g|}{d|\zeta|} = \frac{1}{n} |\Phi(P(z))|^{1/n-1} \frac{|P'(z)| |(1 - \zeta_k^{-2})/2|}{\sqrt{1 - P^2(z)}} = \frac{1}{n} \frac{|P'(z)| \sqrt{1 - z^2}}{\sqrt{1 - P^2(z)}}, \\ &k = 1, 2. \end{aligned}$$

Подставляя выписанные соотношения в (2.28), приходим к неравенству (2.27) для всех точек z отрезка $[-1, 1]$ за исключением, быть может, конечного числа таких точек. Предельным переходом убеждаемся в справедливости неравенства (2.27) на всем отрезке $[-1, 1]$. Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Неравенство (2.27) содержит неравенство следствия 2.4. Действительно, обозначим $\cos((1/n) \arccos P(z))$ через ξ , так что $P(z) = T_n(\xi)$. Из неравенства (2.27) с привлечением леммы 4.1 работы [8] имеем последовательно

$$\begin{aligned} |P'(z)| &\leq n(a \cdot 2^{1-n})^{1/n} \frac{\sqrt{1 - (T_n(\xi))^2}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \\ &\leq n(a \cdot 2^{1-n})^{1/n} \max\{\sqrt{|T'_n(\xi)|} : \xi \in [-1, 1]\} = n^2(a \cdot 2^{1-n})^{1/n}. \end{aligned}$$

Пусть, как и выше, $\zeta = h(w)$ — функция, обратная к функции (2.25), где $P \in \mathcal{P}_n^a$. Применяя к функции $\zeta = h(w)$ известные оценки коэффициентов для регулярных и однолистных функций, приходим к некоторым неравенствам для коэффициентов полинома $P(z)$. Ограничимся следующим результатом.

ТЕОРЕМА 2.27. Пусть полином $P(z) = az^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k$ принадлежит классу $\mathcal{P}_n^a$. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned} na + |c_{n-1}| &\leq n(2a)^{(n-1)/n}, \\ n^2 a^2 + |n^2 a^2 + 4na c_{n-2} - 2(n-1)c_{n-1}^2| &\leq n^2(2a)^{2(n-1)/n}. \end{aligned}$$

Равенство в обоих случаях достигается для полинома T_n^a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция

$$w = \frac{(a \cdot 2^{1-n})^{1/n}}{h(1/z)} = z + \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-k}, \quad |z| > 1,$$

принадлежит классу Σ_b , $b = (a \cdot 2^{1-n})^{1/n}$, работы Х. Сайджека и О. Тамми [106]. В [106] получены точные оценки всех коэффициентов в разложении обратной функции

$$z = I(w) = w - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k w^{-k}, \quad |w| > 1.$$

В частности, имеют место неравенства [106; с. 92]

$$|\beta_0| \leq 2(1-b), \quad |\beta_1| \leq 1-b^2. \quad (2.29)$$

Выписанные неравенства относятся к классическим, и они были доказаны также ранее другими авторами различными методами. Элементарные вычисления дают

$$I(w) = \frac{1}{g(b/w)} = w + \frac{2c_{n-1}b}{na} + \left[1 + \frac{4c_{n-2}}{na} - \frac{2(n-1)c_{n-1}^2}{n^2 a^2}\right] \frac{b^2}{w} + \dots,$$

где функция $w = g(\zeta)$ задана соотношением (2.25). Поэтому из неравенств (2.29) вытекают неравенства теоремы 2.27. В случае $P(z) = T_n^a(z)$ функция $\zeta = h(w)$ является функцией Пика, для которой в неравенствах (2.29), как известно, достигается знак равенства. Этим завершается доказательство теоремы 2.27.

Учитывая полученные здесь результаты, можно предположить, что полином T_n^a является экстремальным также в аналогичных задачах для более широкого класса полиномов (без ограничения на критические значения).

2.6. О полиномах с криволинейной мажорантой. Следуя методике, разработанной в разделах 2.1–2.4, рассмотрим здесь точные оценки коэффициентов, теоремы покрытия и неравенства для производных полиномов вида

$$P_n(z) = c_0 + \dots + c_n z^n, \quad c_n \neq 0, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad n \geq 1, \quad (2.30)$$

удовлетворяющих одному из следующих условий:

$$\left| P(z) \sqrt{1 - z^2} \right| \leq 1, \quad z \in [-1, 1], \quad (2.31)$$

$$\left| P(z) \sqrt{\frac{1+z}{2}} \right| \leq 1, \quad z \in [-1, 1], \quad (2.32)$$

$$\left| P(z) \sqrt{\frac{1-z}{2}} \right| \leq 1, \quad z \in [-1, 1]. \quad (2.33)$$

Обозначим через $\mathcal{PU}_n$ класс полиномов вида (2.30), удовлетворяющих условию (2.31), через $\mathcal{PV}_n$ – класс полиномов (2.30), удовлетворяющих условию (2.32), и, наконец, пусть $\mathcal{PW}_n$ означает класс полиномов (2.30), удовлетворяющих условию (2.33). В приведенных ниже результатах полиномы Чебышёва второго, третьего и четвертого рода $U_n(z)$, $V_n(z)$ и $W_n(z)$ являются экстремальными в классах соответственно $\mathcal{PU}_n$, $\mathcal{PV}_n$ и $\mathcal{PW}_n$. Хорошо известны представления этих полиномов:

$$\begin{aligned} U_n(z) &= \frac{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{n+1} - (z - \sqrt{z^2 - 1})^{n+1}}{2\sqrt{z^2 - 1}}, \\ V_n(z) &= \frac{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{n+1/2} + (z - \sqrt{z^2 - 1})^{n+1/2}}{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{1/2} + (z - \sqrt{z^2 - 1})^{1/2}}, \\ W_n(z) &= \frac{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{n+1/2} - (z - \sqrt{z^2 - 1})^{n+1/2}}{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{1/2} - (z - \sqrt{z^2 - 1})^{1/2}} \end{aligned}$$

(см., например, [108], [109]).

Обозначим через

$$\zeta = \Phi(\omega) = \omega - \sqrt{\omega^2 - 1}$$

функцию, конформно и однолистно отображающую внешность отрезка $[-1, 1]$ на круг $|\zeta| < 1$ так, что $\Phi(\infty) = 0$, $\Phi(-1) = -1$. Справедливость следующих двух утверждений проверяется непосредственно.

ЛЕММА 2.8. *Если полином P принадлежит классу $\mathcal{PU}_n$, то функция*

$$w = f_1(z) := z^{-n} \Phi \left[\frac{i}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) P \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right) \right],$$

заданная на множестве

$$B_1 := \left\{ z: |z| < 1, \frac{i}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) P \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right) \notin [-1, 1], |f_1(z)| \neq 1 \right\},$$

удовлетворяет условиям леммы 2.1.

ЛЕММА 2.9. Если полином P принадлежит классу $\mathcal{PV}_n$, то функция

$$w = f_2(z) := z^{-2n} \Phi \left[\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) P \left(\frac{1}{2} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) \right) \right],$$

заданная на множестве

$$B_2 := \left\{ z : |z| < 1, \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) P \left(\frac{1}{2} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) \right) \notin [-1, 1], |f_2(z)| \neq 1 \right\},$$

удовлетворяет условиям леммы 2.1.

Из представлений полиномов Чебышёва, указанных выше, легко заключаем, что если в лемме 2.8 в качестве полинома P взять U_n , то $f_1(z) \equiv iz$, а если в лемме 2.9 положить $P = V_n$, то $f_2(z) \equiv z$.

ТЕОРЕМА 2.28. Для полиномов $P(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$ класса $\mathcal{PU}_n$ имеют место точные оценки

$$|c_{n-1}| + |c_n| \leq 2^n, \quad |c_n|^2 + |(n-1)c_n^2 + 4c_n c_{n-2}| \leq 4^n.$$

Равенство достигается в случае полинома Чебышёва U_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция f_1 из леммы 2.8 имеет в некоторой окрестности начала координат разложение

$$f_1(z) = \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \beta_3 z^3 + \dots$$

Ввиду леммы 2.1 существует функция

$$z = F(w) = \alpha_1 w + \alpha_2 w^2 + \alpha_3 w^3 + \dots$$

такая, что $f_1(F(w)) \equiv w$ в круге U_w . Коэффициенты функций F и f_1 связаны соотношениями

$$\alpha_1 = \frac{1}{\beta_1}, \quad \alpha_2 = -\frac{\beta_2}{\beta_1^3}, \quad \alpha_3 = \frac{2\beta_2^2 - \beta_3\beta_1}{\beta_1^5}. \quad (2.34)$$

С другой стороны, из определения функции f_1 имеем

$$\begin{aligned} \beta_1 z^{n+1} + \beta_2 z^{n+2} + \beta_3 z^{n+3} + \dots &= \Phi \left[\frac{i}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) P \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right) \right] \\ &= \Phi \left[\frac{i}{2} \left(-\frac{c_n}{2^n} \frac{1}{z^{n+1}} - \frac{c_{n-1}}{2^{n-1}} \frac{1}{z^n} + \left((1-n) \frac{c_n}{2^n} - \frac{c_{n-2}}{2^{n-2}} \right) \frac{1}{z^{n-1}} + \dots \right) \right] \end{aligned}$$

в некоторой окрестности начала координат. Отсюда следует, что

$$\beta_1 = i \frac{2^n}{c_n}, \quad \frac{\beta_2}{\beta_1^2} = i \frac{c_{n-1}}{2^{n-1}}, \quad \frac{\beta_2^2 - \beta_3\beta_1}{\beta_1^3} = i \left((1-n) \frac{c_n}{2^n} - \frac{c_{n-2}}{2^{n-2}} \right).$$

Учитывая соотношения (2.34) и классические оценки

$$\left| \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right| \leq 2(1 - |\alpha_1|), \quad \left| \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \right| \leq 1 - |\alpha_1|^2$$

(см., например, [102; с. 94]), получаем требуемый результат. Экстремальность полинома $U_n(z)$ проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Первое неравенство теоремы 2.28 содержит оценку

$$|c_n| \leq 2^n,$$

эквивалентную свойству полинома $U_n(z) \cdot 2^{-n}$ иметь наименьшее отклонение от нуля с весом $\sqrt{1-z^2}$ на отрезке $[-1, 1]$ среди полиномов вида $P(z) = z^n + \dots$ (см. [109]). Таким образом, наши оценки можно рассматривать как уточнения этого классического свойства полинома с участием старших коэффициентов. Аналогично, полином Чебышёва третьего рода является экстремальным в следующей проблеме.

ТЕОРЕМА 2.29. *Для полиномов $P(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$ класса $\mathcal{PV}_n$ имеют место точные оценки*

$$|c_n| \leq 2^n, \quad |c_n|^2 + |c_n^2 + 2c_n c_{n-1}| \leq 4^n.$$

Равенство достигается в случае полинома Чебышёва V_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО дословно повторяет доказательство теоремы 2.28 с заменой функции f_1 из леммы 2.8 на функцию f_2 из леммы 2.9.

Следующие два утверждения вытекают из неравенств Пика, примененных к обратным функциям из лемм 2.8 и 2.9, подобно доказательству теоремы 2.1.

ТЕОРЕМА 2.30. *Пусть полином $P(z) = c_0 + \dots + c_n z^n$ принадлежит классу $\mathcal{PU}_n$, и пусть $r > 1$. Тогда образ эллипса $|z-1| + |z+1| = r + 1/r$ при отображении $\omega = \sqrt{1-z^2} P(z)$ лежит внутри эллипса с фокусами в точках -1 и 1 и большой осью, равной $x_0 r^{-n} + r^n/x_0 \leq r^{-n-1} + r^{n+1}$, где x_0 – корень уравнения*

$$|c_n|(1-r)^2 x = r \cdot 2^n (1-x)^2, \quad (2.35)$$

принадлежащий промежутку $1/r \leq x < 1$. Для полинома $U_n(z)$ имеем $x_0 = 1/r$, и образом указанного выше эллипса при отображении $\omega = \sqrt{1-z^2} U_n(z)$ является эллипс с фокусами в точках -1 и 1 и большой осью величины $r^{-n-1} + r^{n+1}$.

ТЕОРЕМА 2.31. *Пусть полином $P(z) = c_0 + \dots + c_n z^n$ принадлежит классу $\mathcal{PV}_n$, и пусть $r > 1$. Тогда образ эллипса $|z-1| + |z+1| = r^2 + 1/r^2$ при отображении $\omega = \sqrt{(1+z)/2} P(z)$ лежит внутри эллипса с фокусами в точках -1 и 1 и большой осью, равной $x_0 r^{-2n} + r^{2n}/x_0 \leq r^{-2n-1} + r^{2n+1}$, где x_0 – корень уравнения (2.35) на промежутке $1/r \leq x_0 < 1$. Для полинома $V_n(z)$ имеем $x_0 = 1/r$, и образом указанного выше эллипса при отображении $\omega = \sqrt{(1+z)/2} V_n(z)$ является эллипс с фокусами в точках -1 и 1 и большой осью величины $r^{-2n-1} + r^{2n+1}$.*

Доказательство, аналогичное доказательству теоремы 2.7 и использующее неравенства (1.12) и лемму 2.8, дает следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.32. *Если полином $P(z) = c_0 + \dots + c_n z^n$, $c_n \neq 0$, принадлежит классу $\mathcal{PU}_n$, то для любого $x \in [-1, 1]$ справедливо неравенство*

$$|xP(x) - (1-x^2)P'(x)| \leq (n + \sqrt{2^{-n}|c_n|}) \sqrt{1 - (1-x^2)P^2(x)}. \quad (2.36)$$

Равенство в (2.36) для любого $x \in [-1, 1]$ достигается в случае, когда P совпадает с полиномом Чебышёва U_n .

Для сравнения с неравенством (2.36) приведем результат М. Лачанса [110]:

$$(1 - x^2)|P'(x)| \leq 2(n + 1), \quad x \in [-1, 1],$$

и неравенство, вытекающее из теоремы К. И. Рахмана [111]:

$$|2xP(x) - (1 - x^2)P'(x)| \leq 2(n + 1), \quad x \in [-1, 1].$$

Оба неравенства справедливы для полиномов класса $\mathcal{PU}_n$. Легко показать, что из теоремы 2.32 и классического неравенства Шура

$$\max\{|P(x)| : x \in [-1, 1]\} \leq (n + 1) \max\{|P(x)\sqrt{1 - x^2}| : x \in [-1, 1]\} \quad (2.37)$$

следуют усиления этих неравенств. Более того, из теоремы 2.32 вытекает следующее уточнение неравенства (2.37) (см. [23]).

ТЕОРЕМА 2.33. *Предположим, что полином $P(z) = c_0 + \dots + c_n z^n$, $c_n \neq 0$, принадлежит классу $\mathcal{PU}_n$. Тогда для любого $x \in [-1, 1]$ справедливо неравенство*

$$|P(x)| \leq n + \sqrt{\frac{|c_n x^n|}{2^n}} \leq n + 1.$$

Равенство достигается для полинома Чебышёва $U_n(z)$ в точке $x = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для заданного полинома P , удовлетворяющего условию теоремы, и фиксированного $x \in [-1, 1]$ рассмотрим полином

$$Q(y) := P(xy) = c_0 + \dots + c_n x^n y^n.$$

Поскольку для любых $y \in [-1, 1]$ выполняется

$$|Q(y)|\sqrt{1 - y^2} \leq |P(xy)|\sqrt{1 - (xy)^2} \leq 1,$$

то к полиному $Q(y)$ применима теорема 2.32. Согласно этой теореме и неравенству $|c_n| \leq 2^n$, имеем

$$|P(x)| = |Q(1)| \leq n + \sqrt{\frac{|c_n x^n|}{2^n}} \leq n + 1.$$

Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Неравенство Шура (2.37) эквивалентно “итоговому” неравенству в теореме 2.33.

Стандартным путем из неравенства бернштейновского типа (2.14) и уточнения неравенства Шура приходим к следующему усилению классического неравенства Маркова.

ТЕОРЕМА 2.34. *Если полином $P(z) = c_0 + \dots + c_n z^n$, $c_n \neq 0$, с вещественными коэффициентами удовлетворяет условию $\overline{M}(P) \leq 1$, то для любого $x \in [-1, 1]$ справедливо неравенство*

$$|P'(x)| \leq (n - 1) \left(n - 1 + \sqrt{\frac{|c_n|}{2^{n-1}}} \right) + \sqrt{\frac{n|c_n x^{n-1}|}{2^{n-1}}} \sqrt{n - 1 + \sqrt{\frac{|c_n|}{2^{n-1}}}}.$$

Равенство достигается для полинома Чебышёва $T_n(z)$ в точке $x = 1$.

Оценивая правую часть неравенства теоремы 2.34 сверху, получим

$$|P'(x)| \leq \left(n - 1 + \sqrt{\frac{|c_n x^{n-1}|}{2^{n-1}}} \right) n \leq n^2, \quad x \in [-1, 1],$$

где “итоговое” неравенство есть неравенство Маркова.

Следующий результат получается из теоремы 2.31 предельным переходом при $r \rightarrow 1$ (см. [24]).

ТЕОРЕМА 2.35. *Если полином $P(z) = c_0 + \dots + c_n z^n$ принадлежит классу $\mathcal{PV}_n$, то для любого $x \in [-1, 1]$ справедливо неравенство*

$$\sqrt{1-x} |P(x) + 2(x+1)P'(x)| \leq \left(\sqrt{\frac{|c_n|}{2^n}} + 2n \right) \sqrt{2 - (x+1)P^2(x)}.$$

Равенство в каждой точке $x \in [-1, 1]$ достигается для полинома Чебышёва V_n .

Приведем теперь утверждение, содержащее аналог неравенства Шура (2.37).

ТЕОРЕМА 2.36. *Пусть полином $P(z) = c_0 + \dots + c_n z^n$ принадлежит классу $\mathcal{PV}_n$. Тогда для любого $x \in [-1, 1]$ справедливо неравенство*

$$|P(x)| \leq 2n + \sqrt{\frac{|c_n(1-x)^n|}{4^n}} \leq 2n + 1.$$

Равенство достигается для полинома Чебышёва V_n в точке $x = -1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для заданного полинома P класса $\mathcal{PV}_n$ и фиксированного $x \in [-1, 1]$ рассмотрим полином

$$Q(y) := P\left(\frac{1-x}{2}y + \frac{x+1}{2}\right) = c_n \left(\frac{1-x}{2}\right)^n y^n + \dots$$

Так как для любого $y \in [-1, 1]$ справедливы неравенства

$$y \leq \frac{1-x}{2}y + \frac{x+1}{2} \quad \text{и} \quad \left| \frac{1-x}{2}y + \frac{x+1}{2} \right| \leq 1,$$

то

$$|Q(y)\sqrt{1+y}| \leq \left| P\left(\frac{1-x}{2}y + \frac{x+1}{2}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{1-x}{2}y + \frac{x+1}{2}\right)} \right| \leq \sqrt{2}.$$

Таким образом, к полиному $Q(y)$ применимы теоремы 2.35 и 2.29. Согласно этим теоремам, имеем последовательно

$$|P(x)| = |Q(-1)| \leq 2n + \sqrt{\frac{|c_n(1-x)^n|}{4^n}} \leq 2n + 1.$$

Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. *Для полиномов P степени n с вещественными коэффициентами имеет место неравенство*

$$\max\{|P(x)| : x \in [-1, 1]\} \leq (2n + 1) \max\left\{ \left| P(x) \sqrt{\frac{1+x}{2}} \right| : x \in [-1, 1] \right\}.$$

Равенство достигается в случае полиномов Чебышёва третьего рода.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через M максимум в правой части требуемого неравенства. Полином P/M принадлежит классу $\mathcal{PW}_n$. Применяя к нему теорему 2.36, получим указанное неравенство. Для полинома Чебышёва V_n максимум слева достигается в точке -1 , $|V_n(-1)| = 2n+1$, а справа – в точке 1 , $|V_n(1)| = 1$. Следствие доказано.

Полином Чебышёва W_n является экстремальным в рассматриваемых задачах в классе $\mathcal{PW}_n$. Действительно, если полином $P(z)$ принадлежит классу $\mathcal{PW}_n$, то полином $P(-z)$ принадлежит классу $\mathcal{PV}_n$. Применяя к последнему полиному предыдущие теоремы, получим соответствующие результаты в классе $\mathcal{PW}_n$, причем экстремальным будет полином W_n , поскольку $|V_n(z)| = |W_n(-z)|$ для любых n и z . Например, из теоремы 2.29 следует, что в классе $\mathcal{PW}_n$ полиномов $P(z) = c_0 + \dots + c_{n-1}z^{n-1} + c_nz^n$ справедливы точные оценки

$$|c_n| \leq 2^n, \quad |c_n|^2 + |c_n^2 - 2c_n c_{n-1}| \leq 4^n.$$

Равенство достигается в случае полинома Чебышёва W_n .

Теорема 2.32 дает неравенство

$$\sqrt{1+x} |P(x) + 2(x-1)P'(x)| \leq \left(\sqrt{\frac{|c_n|}{2^n}} + 2n \right) \sqrt{2 + (x-1)P^2(x)},$$

справедливое для любых $x \in [-1, 1]$. Равенство вновь достигается в случае полинома W_n .

С другими примерами приложений теории однолистных функций к полиномам можно ознакомиться в работах [31], [34]–[36].

Глава 3. Емкости конденсаторов и симметризация

Исследования симметризационных свойств емкостей различных типов восходят к знаменитой книге Г. Поля и Г. Сегё [112]. Существенные приложения этих свойств в геометрической теории функций комплексного переменного даны В. К. Хейманом [113], Дж. Дженкинсом [83] и другими математиками (см. об этом, например, [37], [38]). В данной главе рассматриваются применения элементарных свойств конформной емкости конденсаторов и круговой симметризации к задачам о комплексных полиномах. Кроме того, мы приводим недавние результаты о полиномах, установленные с помощью различных обобщений и дополнений классических симметризационных принципов.

3.1. Обобщенные конденсаторы и асимптотика их емкости при вырождении пластин. Всюду ниже приняты обозначения из книги [38]. Пусть B – открытое множество на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Обобщенным конденсатором в $\overline{B}$ назовем тройку $C = (B, \mathcal{E}, \Delta)$, где $\mathcal{E} = \{E_k\}_{k=1}^n$ – совокупность замкнутых непустых попарно непересекающихся множеств $E_k \subset \overline{B}$, $k = 1, \dots, n$, а $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ – совокупность вещественных чисел δ_k , $k = 1, \dots, n$, $n \geq 2$.

Открытое в $\overline{B}$ множество $\overline{B} \setminus \bigcup_{k=1}^n E_k$ будем называть *полем* конденсатора C , множества E_k – *пластинами* этого конденсатора, а числа δ_k – *уровнями потенциала* или, короче, *потенциалами пластин* E_k , $k = 1, \dots, n$. Емкость $\text{cap } C$

конденсатора C определяется как точная нижняя граница интегралов Дирихле

$$\iint_{B \setminus \bigcup_{k=1}^n E_k} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

по всем *допустимым функциям* v , т. е. вещественнозначным функциям v , непрерывным в $\overline{B}$, удовлетворяющим условию Липшица внутри множества B и равным δ_k на E_k , $k = 1, \dots, n$. В дальнейшем слово “обобщенный” в названии конденсатора будем опускать.

Одна из разновидностей монотонности емкости конденсатора состоит в следующем. Если для конденсаторов $C_1 = (B_1, \{E_{1k}\}_{k=1}^n, \Delta)$ и $C_2 = (B_2, \{E_{2k}\}_{k=1}^n, \Delta)$ имеют место включения $B_1 \subset B_2$, $E_{1k} \subset E_{2k}$, $k = 1, \dots, n$, то

$$\text{cap } C_1 \leq \text{cap } C_2. \quad (3.1)$$

Из конформной инвариантности интеграла Дирихле и граничных свойств однолистных функций вытекают различные виды конформной инвариантности емкости конденсатора $C = (B, \{E_k\}_{k=1}^n, \Delta)$. На практике в каждом конкретном случае сохранение емкости при конформном и однолистом отображении множества $B \setminus \bigcup_{k=1}^n E_k$ легко устанавливается. Поэтому мы не приводим здесь эти утверждения. Отметим лишь, что если функция f конформна и однолистка на множестве B и доопределена на границе B в смысле граничного соответствия, то

$$\text{cap } C = \text{cap } f(C),$$

где $f(C) := (f(B), \{f(E_k)\}_{k=1}^n, \Delta)$.

Приведем один из принципов композиции конденсаторов [38]. Пусть B_i , $i = 1, \dots, m$, – попарно непересекающиеся открытые подмножества открытого множества $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, и пусть для конденсаторов $C_i = (B_i, \{E_{ij}\}_{j=1}^{n_i}, \{\delta_{ij}\}_{j=1}^{n_i})$, $i = 1, \dots, m$, и $C = (B, \{E_k\}_{k=1}^n, \{\delta_k\}_{k=1}^n)$ выполняется условие: любая пластина E_{ij} , $1 \leq j \leq n_i$, каждого конденсатора C_i , $1 \leq i \leq m$, принадлежит объединению пластин конденсатора C , имеющих тот же потенциал, что и E_{ij} . Тогда

$$\sum_{i=1}^m \text{cap } C_i \leq \text{cap } C. \quad (3.2)$$

Для открытого множества $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ обозначим $B^+ = \{z \in B : \text{Im } z > 0\}$, а в случае замкнутого множества E положим $E^+ = \{z \in E : \text{Im } z \geq 0\}$. Множество A называется симметричным относительно вещественной оси, если $A = \{z : \bar{z} \in A\}$. Конденсатор $C = (B, \mathcal{E}, \Delta)$ назовем симметричным относительно вещественной оси, если множество B и пластины совокупности $\mathcal{E}$ обладают указанной симметрией. Имеет место следующий принцип симметрии. Если конденсатор $C = (B, \{E_k\}_{k=1}^n, \{\delta_k\}_{k=1}^n)$ симметричен относительно вещественной оси, то

$$\text{cap } C = 2 \text{cap } C^+, \quad (3.3)$$

где $C^+ = (B^+, \{E_k^+\}_{k=1}^n, \{\delta_k\}_{k=1}^n)$.

Рассмотрим теперь асимптотические формулы для емкости конденсатора при вырождении некоторых из его пластин в двух важных частных случаях [38; гл. 2]. Пусть $U(z_0, r) = \{z: |z - z_0| < r\}$ в случае конечной точки z_0 и $U(\infty, r) = \{z: |z| > 1/r\}$. Параметрическое семейство областей $D(z_0, r)$, $0 < r < r_0$, назовем *асимптотически круговым*, если выполняются включения

$$U(z_0, s(r)) \subset D(z_0, r) \subset U(z_0, t(r))$$

для некоторых положительных функций $s(r)$ и $t(r)$, $0 < r < r_0$, удовлетворяющих условиям $s(r) \sim t(r) \sim r$, $r \rightarrow 0$. Элемент асимптотически кругового семейства $D(z_0, r)$ будем называть *почти кругом* с центром в точке z_0 и радиусом r . Пусть B – открытое множество на $\mathbb{C}$, $B \neq \mathbb{C}$; $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$ – совокупность различных точек множества B ; $\Delta = \{\delta_k\}_{k=0}^n$ – совокупность вещественных чисел, $\delta_0 = 0$; и пусть $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^n$, где $\psi_k = \psi_k(r) \equiv \mu_k r^{\nu_k}$, μ_k, ν_k , $k = 1, \dots, n$, – произвольные положительные числа. Пусть $D(z_k, \psi_k(r))$, $0 < r < r_0$, $k = 1, \dots, n$, – асимптотически круговые семейства областей. При достаточно малом $r > 0$ определен конденсатор

$$C(r; B, \partial B, Z, \Delta, \Psi) = (B, \{E_k\}_{k=0}^n, \Delta),$$

где $E_0 = \partial B$, $E_k = \overline{D(z_k, \psi_k(r))}$, $k = 1, \dots, n$. Рассмотрим асимптотику емкости этого конденсатора при $r \rightarrow 0$, т.е. когда одна пластина, E_0 , фиксирована, а другие, E_k , вырождаются в точки соответственно z_k , $k = 1, \dots, n$. Известно, что емкость конденсатора $C(r; B, \partial B, Z, \Delta, \Psi)$ равна

$$Q \frac{1}{\log r} + R \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 + o \left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right), \quad r \rightarrow 0,$$

где вещественные постоянные Q и R не зависят от r и не зависят от выбора почти кругов. Точнее, если связные компоненты открытого множества B имеют функцию Грина, то справедлива асимптотическая формула [114]:

$$\begin{aligned} \text{cap } C(r; B, \partial B, Z, \Delta, \Psi) &= -2\pi \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2}{\nu_k \log r} \\ &+ R(B, \partial B, Z, \Delta, \Psi) \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 + o \left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right), \quad r \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$R(B, \partial B, Z, \Delta, \Psi) = -2\pi \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2}{\nu_k^2} \log \frac{r(B, z_k)}{\mu_k} + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \frac{\delta_k \delta_l}{\nu_k \nu_l} g_B(z_k, z_l) \right\},$$

$r(B, z_k)$ – внутренний радиус связной компоненты множества B , содержащей точку z_k , относительно этой точки, а $g_B(z, z_k)$ – функция Грина этой компоненты с полюсом в точке z_k , $k = 1, \dots, n$. В случае, когда множество B совпадает

со всей комплексной плоскостью $\overline{\mathbb{C}}$, пусть $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$ – совокупность различных точек $\overline{\mathbb{C}}$, $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ – совокупность вещественных чисел и $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^n$, $\psi_k = \psi_k(r) \equiv \mu_k r^{\nu_k}$, $\mu_k, \nu_k, k = 1, \dots, n$, – положительные числа. Тогда

$$\begin{aligned} \text{cap } C(r; \overline{\mathbb{C}}, \emptyset, Z, \Delta, \Psi) &= \text{cap} \left(B, \{E_k\}_{k=1}^n, \Delta \right) = -2\pi \sum_{k=1}^n \frac{(\delta_k - \delta)^2}{\nu_k \log r} \\ &+ R(\overline{\mathbb{C}}, \emptyset, Z, \Delta, \Psi) \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 + o \left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right), \quad r \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\left(\sum_{k=1}^n \delta_k / \nu_k \right)}{\sum_{k=1}^n 1 / \nu_k}, \\ R(\mathbb{C}, \emptyset, Z, \Delta, \Psi) &= 2\pi \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{(\delta_k - \delta)^2}{\nu_k^2} \log \mu_k \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \frac{(\delta_k - \delta)(\delta_l - \delta)}{\nu_k \nu_l} \log |z_k - z_l| \right\} \end{aligned}$$

и штрих у знака суммы означает, что при $z_k = \infty$ ($z_l = \infty$) под соответствующим слагаемым понимается нуль [115].

3.2. Простейшие применения конформной емкости. Следующее ниже утверждение можно получить с помощью элементарных преобразований. Вместе с тем представляет интерес емкостная интерпретация этого факта.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для любой рациональной функции R степени n справедливо равенство*

$$\prod_{k=1}^n |R'(a_k) R'(b_k)| = \frac{\prod_{k=1}^n \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n |a_k - a_l| |b_k - b_l|}{\prod_{k=1}^n \prod_{l=1}^n |a_k - b_l|^2},$$

где $a_k, k = 1, \dots, n$, – корни уравнения $R(z) = 0$, а $b_k, k = 1, \dots, n$, – корни уравнения $R(z) = 1$, каждый из которых считается столько раз, какова его кратность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что числа $a_k, b_k, k = 1, \dots, n$, попарно различны. Положим

$$\begin{aligned} Z &= \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}, \quad \Delta = \{1, \dots, 1, -1, \dots, -1\}, \quad \Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{2n}, \\ \psi_k(r) &= \frac{r}{|R'(a_k)|}, \quad \psi_{k+n}(r) = \frac{r}{|R'(b_k)|}, \quad k = 1, \dots, n, \\ W &= \{0, 1\}, \quad \Delta_w = \{1, -1\}, \quad \Psi_w = \{r, r\}. \end{aligned}$$

Так как отображение $w = R(z)$ осуществляет полное n -кратное накрытие сферы $\overline{\mathbb{C}}_w$ сферой $\overline{\mathbb{C}}_z$, то конформная инвариантность емкости дает

$$\text{cap } C(r; \overline{\mathbb{C}}_z, \emptyset, Z, \Delta, \Psi) = n \text{cap } C(r; \overline{\mathbb{C}}_w, \emptyset, W, \Delta_w, \Psi_w).$$

Осталось воспользоваться формулой (3.5) для емкости слева и справа, где в обоих случаях $\delta = 0$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.2 [22]. Пусть B_1 и B_2 – открытые непересекающиеся множества на сфере $\overline{\mathbb{C}}_z$, и пусть P, Q – два полинома степени n , причем нули полинома P (обозначим их $z_1, \dots, z_n$) попарно различны и лежат в B_1 , а нули полинома Q (обозначим их $\zeta_1, \dots, \zeta_n$) также различны и принадлежат множеству B_2 . Тогда справедливо неравенство

$$\left| \prod_{k=1}^n \frac{P'(z_k)Q'(\zeta_k)}{P(\zeta_k)Q(z_k)} \right| \leq \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} [R(B_1, \partial B_1, Z_1, \Delta_1, \Psi_1) + R(B_2, \partial B_2, Z_2, \Delta_2, \Psi_2)] \right\},$$

где $Z_1 = \{z_k\}_{k=1}^n$, $Z_2 = \{\zeta_k\}_{k=1}^n$, $\Delta_1 = \{1, \dots, 1\}$, $\Delta_2 = \{-1, \dots, -1\}$, $\Psi_1 = \Psi_2 = \{r, \dots, r\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, то с учетом монотонности (3.1) имеем

$$\begin{aligned} & \text{cap } C(r; B_1, \partial B_1, Z_1, \Delta_1, \Psi_1) + \text{cap } C(r; B_2, \partial B_2, Z_2, \Delta_2, \Psi_2) \\ &= \text{cap } C(r; B_1 \cup B_2, \partial(B_1 \cup B_2), Z_1 \cup Z_2, \Delta_1 \cup \Delta_2, \Psi_1 \cup \Psi_2) \\ &\geq \text{cap } C(r; \overline{\mathbb{C}}_z, \emptyset, Z_1 \cup Z_2, \Delta_1 \cup \Delta_2, \Psi_1 \cup \Psi_2). \end{aligned}$$

Применение формул (3.4) и (3.5) дает

$$\begin{aligned} & R(B_1, \partial B_1, Z_1, \Delta_1, \Psi_1) + R(B_2, \partial B_2, Z_2, \Delta_2, \Psi_2) \\ &\geq 2\pi \log \frac{\prod_{k=1}^n \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n |z_k - z_l| |\zeta_k - \zeta_l|}{\prod_{k=1}^n \prod_{l=1}^n |z_k - \zeta_l|^2}. \end{aligned}$$

Заметим, что для полиномов $P(z) = \alpha \prod_{k=1}^n (z - z_k)$ и $Q(z) = \beta \prod_{k=1}^n (z - \zeta_k)$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=1}^n P(\zeta_k) \right| &= |\alpha|^n \prod_{k=1}^n \prod_{l=1}^n |\zeta_k - z_l|, & \left| \prod_{k=1}^n Q(z_k) \right| &= |\beta|^n \prod_{k=1}^n \prod_{l=1}^n |z_k - \zeta_l|, \\ \left| \prod_{k=1}^n P'(z_k) \right| &= |\alpha|^n \prod_{k=1}^n \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n |z_k - z_l|, & \left| \prod_{k=1}^n Q'(\zeta_k) \right| &= |\beta|^n \prod_{k=1}^n \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n |\zeta_k - \zeta_l|. \end{aligned}$$

Поэтому последнее неравенство равносильно неравенству теоремы 3.2. Теорема доказана.

Выбирая в теореме 3.2 различным образом множества B_1, B_2 и полиномы P, Q , получаем различные оценки для полиномов и их производных. Например, в случае, когда $B_1 = \{z: |z| < 1\}$ и $B_2 = \{z: |z| > 1\}$, величины $R(B_k, \partial B_k, Z_k, \Delta_k, \Psi_k)$, $k = 1, 2$, легко считаются. Поэтому из теоремы 3.2 вытекают следующие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Если нули полинома $P(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k)$ отличны от начала

координат и лежат в круге $|z| < 1$, а нули полинома $Q(z) = \prod_{k=1}^n (z - \zeta_k)$ лежат

в области $|z| > 1$, то

$$\left| \prod_{k=1}^n z_k^n \zeta_k^n P\left(\frac{1}{\bar{z}_k}\right) Q\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_k}\right) \right| \leq \left| \prod_{k=1}^n P(\zeta_k) Q(z_k) \right|.$$

Равенство достигается для произвольных полиномов P и Q с симметричными нулями: $\zeta_k = 1/\bar{z}_k$, $k = 1, \dots, n$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Если окружность $|z| = 1$ отделяет нули $z_1, \dots, z_n$ полинома $P(z) = z + c_2 z^2 + \dots + c_{n+1} z^{n+1}$, $c_{n+1} \neq 0$, отличные от начала, от нулей его производной $\zeta_1, \dots, \zeta_n$, то

$$\left| \prod_{k=1}^n P\left(\frac{1}{\bar{z}_k}\right) P'\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_k}\right) \right| \leq \left[(n+1) |c_{n+1}^2| \right]^{n+1} \left| \prod_{k=1}^n P(\zeta_k) P'(z_k) \right|.$$

Равенство достигается для полинома $P(z) = z - \sqrt{1/(n+1)} z^{n+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. К полиномам $P'(z)/(c_{n+1}(n+1))$ и $P(z)/(c_{n+1}z)$ применимо предыдущее утверждение, из которого вытекает требуемое неравенство. Утверждение о равенстве проверяется непосредственно.

В работе [116; с. 444] установлено, что если все нули полинома $P(z) = c_1 z + \dots + z^n$, отличные от $z = 0$, имеют одинаковый модуль, то для критических точек ζ_ν , $\nu = 1, \dots, n-1$, выполняется неравенство

$$\sqrt[n-1]{\prod_{\nu=1}^{n-1} \left| \frac{P(\zeta_\nu)}{\zeta_\nu} \right|} \leq |c_1| \frac{n-1}{n}. \quad (3.6)$$

Равенство достигается для полиномов вида $P(z) = c_1 z + z^n$, где c_1 — произвольное комплексное число. Ввиду (3.6) можно было бы выдвинуть более сильную гипотезу, чем следующее предположение С. Смейла [117]:

$$\min_{1 \leq \nu \leq n-1} \left| \frac{P(\zeta_\nu)}{\zeta_\nu} \right| \leq |c_1| \frac{n-1}{n}$$

независимо от расположения нулей полинома P . Однако имеет место следующий результат [13].

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть ζ_ν , $\nu = 1, \dots, n-1$, — критические точки полинома $P(z) = c_1 z + \dots + z^n$, и пусть все нули этого полинома, отличные от $z = 0$, расположены на $n-1$ лучах, выходящих из точки $z = 0$ под равными углами величины $2\pi/(n-1)$ так, что каждый луч содержит один и только один нуль. Тогда

$$\sqrt[n-1]{\prod_{\nu=1}^{n-1} |P(\zeta_\nu)|} \geq (n-1) \left| \frac{c_1}{n} \right|^{n/(n-1)}.$$

Равенство достигается для полиномов вида $P(z) = c_1 z + z^n$, где c_1 — произвольное комплексное число, отличное от нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через z_μ , $\mu = 1, \dots, n-1$, нули полинома P , отличные от $z = 0$. Так как

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} |P(\zeta_\nu)| = n^{-n} |c_1|^n \left(\prod_{\mu=1}^{n-1} |z_\mu|^{2-n} \right) \prod_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n-1} |z_\nu - z_\mu|,$$

то доказательство теоремы 3.3 сводится к установлению неравенства

$$\prod_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n-1} |z_\nu - z_\mu| \geq (n-1)^{n-1} \prod_{\mu=1}^{n-1} |z_\mu|^{n-2}. \quad (3.7)$$

Можно считать, что $\arg z_\mu = 2\pi(\mu-1)/(n-1)$, $\mu = 1, \dots, n-1$. Рассмотрим конденсаторы

$$\begin{aligned} C(r) &= C(r; \overline{\mathbb{C}}_z, \emptyset, \{0, z_1, \dots, z_{n-1}\}, \{-n+1, 1, \dots, 1\}, \{r, r, \dots, r\}) \\ &\equiv (\overline{\mathbb{C}}_z, \{E_\mu\}_{\mu=0}^{n-1}, \{-n+1, 1, \dots, 1\}), \\ C_\mu(r) &= (B_\mu, \{\overline{B}_\mu \cap E_0, \overline{B}_\mu \cap E_\mu, \overline{B}_\mu \cap E_{\mu+1}\}, \{-n+1, 1, 1\}), \end{aligned}$$

где $B_\mu = \{z : 2\pi(\mu-1)/(n-1) \leq \arg z \leq 2\pi\mu/(n-1)\}$, $\mu = 1, \dots, n-1$ ($E_n = E_1$). По принципу композиции (3.2)

$$\text{cap } C(r) \geq \sum_{\mu=1}^{n-1} \text{cap } C_\mu(r).$$

Пусть $\zeta = f_\mu(z)$ – та ветвь функции $z^{(n-1)/2}$, которая отображает область B_μ на верхнюю полуплоскость, и пусть $C_\mu^*(r)$ – симметричный относительно вещественной оси конденсатор, для которого $(C_\mu^*(r))^+ = f(C_\mu(r))$. Тогда

$$\begin{aligned} C_\mu^*(r) &= C(r; \overline{\mathbb{C}}_\zeta, \emptyset, \{0, f_\mu(z_\mu), f_\mu(z_{\mu+1})\}, \{-n+1, 1, 1\}, \\ &\quad \{r^{(n-1)/2}, r|f'_\mu(z_\mu)|, r|f'_\mu(z_{\mu+1})|\}), \quad \mu = 1, \dots, n-1 \quad (z_n = z_1). \end{aligned}$$

Конформная инвариантность емкости и принцип симметрии (3.3) дают

$$\text{cap } C_\mu(r) = \text{cap } f(C_\mu(r)) = \frac{1}{2} \text{cap } C_\mu^*(r), \quad \mu = 1, \dots, n-1.$$

Окончательно,

$$\text{cap } C(r) \geq \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{n-1} \text{cap } C_\mu^*(r).$$

Пользуясь формулой (3.5), после несложных преобразований получаем неравенство (3.7) и, следовательно, неравенство теоремы 3.3. Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. В условиях теоремы 3.3 справедливо неравенство

$$\sqrt[n-1]{\prod_{\nu=1}^{n-1} \left| \frac{P(\zeta_\nu)}{\zeta_\nu} \right|} \geq |c_1| \frac{n-1}{n}$$

с равенством для полиномов $P(z) = c_1 z + z^n$, $c_1 \neq 0$.

Следующие два утверждения работы [19] дополняют классическое неравенство Бернштейна [2; с. 233].

ТЕОРЕМА 3.4. Для любого полинома

$$P(z) = c_n \prod_{k=1}^n (z - z_k), \quad c_n \neq 0,$$

с нулями $z_k \in [-1, 1]$, $k = 1, \dots, n$, справедливо неравенство

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left| P'(z_k) \sqrt{1 - z_k^2} \right|} \leq n \cdot 2^{1-n} |c_n|.$$

Равенство достигается в случае полинома Чебышёва T_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что все нули полинома P попарно различны и принадлежат интервалу $(-1, 1)$. В книге [38; с. 150] в качестве приложения свойств емкостей конденсаторов был предложен следующий аналог классического неравенства Шура:

$$\left(\prod_{k=1}^n \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n |z_k - z_l| \right) \prod_{k=1}^n \sqrt{1 - z_k^2} \leq n^n \cdot 2^{n-n^2}.$$

Остается заметить, что для любого $k = 1, \dots, n$

$$|P'(z_k)| = |c_n| \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n |z_k - z_l|$$

и, следовательно,

$$\prod_{k=1}^n |P'(z_k)| = |c_n|^n \prod_{k=1}^n \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n |z_k - z_l|.$$

Случай равенства проверяется непосредственным вычислением. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.5. *Предположим, что полином P степени n удовлетворяет следующим условиям: все нули z_k , $k = 1, \dots, n$, полинома P лежат на отрезке $[-1, 1]$, а все критические значения и значения в точках $z = \pm 1$ лежат на вещественной оси вне интервала $(-1, 1)$. Тогда*

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left| P'(z_k) \sqrt{1 - z_k^2} \right|} \geq n.$$

Знак равенства выполняется в случае $P = T_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем следующие обозначения:

$$B = \mathbb{C}_w \setminus \{w : \operatorname{Im} w = 0, |\operatorname{Re} w| \geq 1\},$$

$\mathcal{R}$ – риманова поверхность функции, обратной к полиному P , лежащая над w -плоскостью,

$\mathcal{P}$ – соответствующее P отображение сферы $\overline{\mathbb{C}}_z$ на $\mathcal{R}$ (проекция $\mathcal{P}(z)$ равна $P(z)$),

W_k – образы точек z_k на поверхности $\mathcal{R}$ при отображении $\mathcal{P}$,

$\mathcal{B}_k$, $k = 1, \dots, n$, – копии области B , лежащие на $\mathcal{R}$ над областью B .

Мы считаем точки z_k , $k = 1, \dots, n$, различными и лежащими на интервале $(-1, 1)$. Из условий теоремы следует, что области

$$D_k := \mathcal{P}^{-1}(\mathcal{B}_k), \quad k = 1, \dots, n,$$

являются односвязными, попарно непересекающимися и не содержащими точек $z = \pm 1$. Следовательно, дополнение

$$\overline{\mathbb{C}}_z \setminus \bigcup_{k=1}^n D_k$$

содержит некоторый континуум, соединяющий точки $z = \pm 1$. По теореме 6.18 из книги [38] справедлива оценка

$$\prod_{k=1}^n \frac{r(D_k, z_k)}{\left| \sqrt{1 - z_k^2} \right|} \leq \left(\frac{2}{n} \right)^n, \quad (3.8)$$

где $r(D, z)$ означает внутренний радиус области D относительно точки z [38; с. 30]. С другой стороны,

$$r(D_k, z_k) = r(\mathcal{B}_k, W_k) \frac{1}{|P'(z_k)|} = r(B, 0) \frac{1}{|P'(z_k)|} = \frac{2}{|P'(z_k)|},$$

$k = 1, \dots, n$. Осталось подставить эти соотношения в неравенство (3.8). Случай равенства проверяется непосредственным вычислением. Теорема доказана.

Неравенства для полиномов можно получить, комбинируя емкостной подход с приемами, изложенными во второй главе данного обзора. Например, исключительно из монотонности емкости (3.1) и формулы (3.4) вытекают следующие два неравенства для шварциана $S_f(z)$ ограниченной однолистной функции $f(z) = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \dots$:

$$|S_f(0)| \leq 6(1 - |\alpha_1|^2), \quad (3.9)$$

$$|S_f''(0) - S_f^2(0)| \leq 60(1 - |\alpha_1|^4 - 2|\alpha_2|^2). \quad (3.10)$$

Первое неравенство восходит к З. Нехари, а второе получено в работе [21]. Следуя главе 2, получаем теоремы 3.6 и 3.7.

ТЕОРЕМА 3.6. Для любых полиномов $P(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$ степени n имеют место точные оценки

$$\begin{aligned} |c_n|^2 + |c_n c_{n-2}| &\leq \left(\frac{H(P) - L(P)}{2} \right)^2, \\ |c_n|^2 (|c_n|^2 + 2|c_{n-1}|^2) &\leq \left(\frac{H(P) - L(P)}{2} \right)^4. \end{aligned}$$

Равенство достигается для полиномов вида $P(z) = c_0 + c_n z^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственным вычислением убеждаемся, что первое неравенство вытекает из неравенства (3.9), примененного к функции, обратной функции f из леммы 2.2. Второе неравенство следует из оценки (3.10), примененной к той же функции. Случай равенства очевиден. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.7. Для любых полиномов $P(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$ степени n с вещественными коэффициентами c_k , $k = 0, 1, \dots, n$, имеет место точная оценка

$$c_n^2 (c_n^2 + 8c_{n-1}^2) \leq 2^{4n-8} (\overline{H}(P) - \overline{L}(P))^4.$$

Равенство достигается для полинома Чебышёва первого рода.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из леммы 2.3 и оценки (3.10).

3.3. Круговая симметризация. Наиболее распространенным способом симметризации множеств и конденсаторов является круговая симметризация (см., например, [83], [113], [37], [38]). Напомним определение этой симметризации открытых множеств B , лежащих на сфере $\overline{\mathbb{C}}_w$. Обозначим через $\gamma(r)$ окружность $|w| = r$ в случае $0 < r < \infty$ и положим по определению окружность $\gamma(0)$ равной точке $w = 0$ и $\gamma(\infty) = \infty$. Круговая симметризация относительно луча $\arg w = 0$ ставит в соответствие множеству B кругосимметричное множество B^* , определенное следующим образом. Если при данном r , $0 \leq r \leq \infty$, окружность $\gamma(r)$ не пересекается с множеством B , то она не пересекается и с множеством B^* . Если $\gamma(r) \subset B$, то $\gamma(r) \subset B^*$. В остальных случаях множество B^* пересекается с $\gamma(r)$ по открытой дуге с центром на луче $\arg w = 0$ и линейной меры, равной мере пересечения множества B с $\gamma(r)$. Нетрудно видеть, что множество B^* открыто. Аналогично определяется круговая симметризация замкнутого множества (вместо открытой дуги берем замкнутую дугу) и симметризация конденсатора с двумя пластинами в $\overline{\mathbb{C}}_w$ (пластины разной полярности симметризируются относительно противоположных лучей). Согласно классической теореме Г. Поляна емкость конденсатора не увеличивается при круговой симметризации (см. [112]). Этот “принцип симметризации” в сочетании с конформной инвариантностью емкости конденсатора дает многочисленные приложения в геометрической теории функций (см. [83], [113], [37]). Указанный подход распространяется на случай множеств, расположенных на некоторых римановых поверхностях [83]. Обозначим через $\mathcal{R}(z^p)$ риманову поверхность функции, обратной степенной функции $w = z^p$, где p – целое число, $p > 1$, и пусть $\mathcal{L}$ – один из лучей на $\mathcal{R}(z^p)$, лежащий над лучом $\arg w = 0$. Рассмотрим произвольную компактную риманову поверхность с краем $\mathcal{R}$, лежащую над сферой $\overline{\mathbb{C}}_w$ и покрывающую каждую точку w не более чем p раз. Наконец, пусть $\mathcal{B}$ – открытое множество на поверхности $\mathcal{R}$, удовлетворяющее условию: ни для какого r , $0 < r < \infty$, не существует замкнутой жордановой кривой в $\mathcal{B}$, лежащей над окружностью $\gamma(r)$ и не покрывающей ее p -кратно. Круговая симметризация относительно луча $\mathcal{L}$ ставит в соответствие множеству $\mathcal{B}$ кругосимметричное множество $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{R}(z^p)$, определенное следующим образом. Если при данном r , $0 \leq r \leq \infty$, над окружностью $\gamma(r)$ нет точек множества $\mathcal{B}$, то над ней нет также и точек множества $\mathcal{B}^*$. Если множество $\mathcal{B}$ содержит замкнутую кривую, p -кратно лежащую над $\gamma(r)$, то $\mathcal{B}^*$ содержит замкнутую жорданову кривую, p -кратно лежащую над $\gamma(r)$. В остальных случаях часть множества $\mathcal{B}^*$, лежащая над $\gamma(r)$, представляет собой открытую жорданову дугу на $\mathcal{R}(z^p)$, симметричную относительно луча $\mathcal{L}$ (с центром на $\mathcal{L}$) и линейной меры, равной суммарной мере всех дуг на $\mathcal{B}$, лежащих над $\gamma(r)$. Определяя аналогично симметризацию замкнутых множеств на поверхности $\mathcal{R}$ и конденсаторов и следуя технике доказательств, развитой в монографии [113; гл. 4], можно получить принцип круговой симметризации Г. Поляна для емкостей конденсаторов на римановых поверхностях. Этот фундаментальный факт стандартным путем ведет к ряду утверждений в теории p -листных функций. Например, из принципа симметризации вытекает следующий результат (см. [113; теорема 5.1]). Предположим, что голоморфная и p -листная в круге $|z| < 1$ функция

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots$$

не принимает значение $w = 0$ в этом круге. Тогда

$$|a_1| \leq 4p|a_0|. \quad (3.11)$$

В тех случаях, когда задачу о полиномах удастся свести к задаче для однолистных функций, возможны прямые применения круговой симметризации (см., например, доказательство теоремы 3.15). В произвольном случае требуется модификация этой симметризации для множеств, лежащих на римановых поверхностях. Заметим, что прямое применение теорем из монографий [113], [83] к полиномам степени n (как к n -листным функциям) дает неточные либо тривиальные оценки. Вместе с тем, совершенствуя технику симметризации и диссимметризации множеств на римановых поверхностях, можно получить существенные результаты для полиномов. В разделах 3.4–3.6 приводятся теоремы, доказанные таким путем. Ввиду сложности некоторых доказательств мы опускаем их в данной обзорной статье. Круговая симметризация допускает также модификацию, когда результат симметризации расположен на римановой поверхности функции, обратной полиному Чебышёва первого рода [21].

3.4. К теоремам о конечном приращении. Общая теорема о конечном приращении дифференцируемых отображений в случае комплексных полиномов имеет вид

$$|P(z_1) - P(z_2)| \leq |P'(\xi)| |z_1 - z_2|, \quad (3.12)$$

где z_1 и z_2 – произвольные комплексные числа, а ξ – некоторая точка отрезка $[z_1, z_2]$. Естественно поставить вопрос об уточнении и дополнении неравенства (3.12) с использованием специфики отображения, осуществляемого полиномом P . В частности, для каких точек z_1 и z_2 справедливо неравенство (3.12) с возможным положительным множителем в правой части, зависящим только от степени n , если точка ξ является концом отрезка $[z_1, z_2]$? Имеет ли место неравенство, противоположное неравенству (3.12) и также с некоторым положительным множителем в правой части? Несмотря на обилие литературы по полиномам, указанный вопрос мало изучен (см., например, [1]–[3]). Отметим аналог неравенства (3.12) в случае, когда одна из точек z_k является критической:

$$|P(z) - P(\zeta)| \leq 4|P'(z)| |z - \zeta|.$$

Здесь z – произвольная некритическая точка полинома P , а ζ – некоторая его критическая точка. Доказательство выписанного неравенства получено С. Смейлом [117], который предположил также, что константу 4 можно заменить на 1 либо $1 - 1/n$ [3; § 7.2]. В работе [26] поставлен вопрос о получении противоположного неравенства (с другой константой) и, в частности, установлено, что для некоторой критической точки ζ справедлива оценка

$$|P(z) - P(\zeta)| \geq \left| \frac{P'(z)}{n \cdot 4^n} \right| |z - \zeta|. \quad (3.13)$$

В [26] выдвигается гипотеза, что константу $n \cdot 4^n$ в неравенстве (3.13) можно заменить на n .

Следующее утверждение рассматривается как первый шаг в получении нижних оценок модуля приращения полинома для произвольных точек комплексной плоскости (не обязательно критических).

ТЕОРЕМА 3.8. Для любого полинома P степени не выше n и любых точек z_1 и z_2 комплексной плоскости $\mathbb{C}$ существует точка $\zeta \in \mathbb{C}$ такая, что $P(\zeta) = P(z_2)$ и выполняется неравенство

$$|P(z_1) - P(z_2)| \geq \frac{4^{1/n-1}}{n} |P'(z_1)| |z_1 - \zeta|. \quad (3.14)$$

В общем случае точку ζ в неравенстве (3.14) нельзя заменить на z_2 . Например, для полинома

$$P(z) = \frac{1 - (1 - z)^n}{n} = z + c_2 z^2 + \dots,$$

точки $z_1 = 0$ и для точек z_2 , достаточно близких к корням P , отличным от z_1 , величина $|P(z_2)/z_2|$ принимает сколь угодно малые значения ($< 4^{1/n-1}/n$). Доказательство теоремы 3.8 опирается на неравенство (3.11) и свойства диссимметризации областей [37]. Ранее диссимметризацию в оценках для полиномов применяли в работе [118]. Интересно отметить, что для полинома P степени n и произвольных точек z_1, z_2 легко устанавливается существование точки ζ такой, что $P(\zeta) = P(z_1)$ и выполняется неравенство

$$|P(z_1) - P(z_2)| \geq \left| \frac{P'(\zeta)}{n} \right| |\zeta - z_2|.$$

Действительно, считая корни $\zeta_k, k = 1, \dots, n$, уравнения $P(\zeta) = P(z_1)$ различными, имеем для любых $z \in \mathbb{C}$

$$1 = \left| \sum_{k=1}^n \frac{P(z) - P(z_1)}{P'(\zeta_k)(z - \zeta_k)} \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{P(z) - P(z_1)}{P'(\zeta_k)(z - \zeta_k)} \right|,$$

что дает требуемое неравенство при некотором $\zeta = \zeta_k, 1 \leq k \leq n$. Равенство достигается в случае полинома $P(z) = 1 + z^n$ и точек $\zeta = z_1 = 1, z_2 = 0$.

Известная теорема покрытия Кёбе–Бибераха утверждает, что если функция $f(z) = z + c_2 z^2 + \dots$ голоморфна и однолистка в круге $|z| < 1$, то образ круга $|z| < 1$ при отображении этой функцией целиком покрывает круг $|w| < 1/4$, т. е. круг один и тот же для всех функций такого рода. Соответствующая теорема для всего класса функций $f(z) = z + c_2 z^2 + \dots$, голоморфных в $|z| < 1$, не верна, т. е. нельзя указать круга абсолютного радиуса и с центром в начале, который покрывался бы целиком образом круга $|z| < 1$ при отображении каждой такой функцией. Тем не менее из теоремы 3.8 непосредственно вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Для любого вещественного числа $R > 0$ образ круга $|z| < R$ при отображении полиномом $P(z) = z + c_2 z^2 + \dots$ степени не выше n целиком покрывает круг $|w| < R \cdot 4^{1/n-1}/n$.

Как показывает пример приведенного выше полинома P , указанное в следствии 3.4 покрытие не обязано быть n -кратным. Интересно было бы найти радиус наибольшего круга в следствии 3.4, покрываемого кругом $|z| < R$ при отображении P .

ТЕОРЕМА 3.9. Пусть P – полином степени не выше n , z_1 и z_2 – произвольные точки комплексной плоскости $\mathbb{C}$, и пусть γ – связная компонента

прообраза отрезка $[P(z_1), P(z_2)]$ при отображении P , содержащая точку z_1 . Тогда для любой точки $\zeta \in \gamma$ выполняется неравенство

$$|P(z_1) - P(z_2)| \geq \frac{1}{n^2} |P'(z_1)| |z_1 - \zeta|. \quad (3.15)$$

Равенство в (3.15) достигается для полинома Чебышёва T_n и точек $z_1 = 1$, $\zeta = -1$ и для произвольной точки z_2 , удовлетворяющей условию $T_n(z_2) = -1$.

Из определения полинома T_n легко следует равенство в соотношении (3.15) для этого полинома и точек, указанных в теореме 3.9. Доказательство теоремы 3.9 получено методом симметризации [18] и восходит в идейном плане к доказательству гипотезы В. К. Хеймана о покрытии вертикальных отрезков при конформном отображении круга (см. [119]). В случае, когда континуум γ в теореме 3.9 есть отрезок, неравенство (3.15) вытекает из классического неравенства Маркова. Немного сложнее увидеть, что неравенство Маркова содержится в теореме 3.9. Действительно, можно считать, что полином P имеет вещественные коэффициенты, $P([-1, 1]) = [-1, 1]$ и $P(\pm 1) = \pm 1$. Применяя теорему 3.9 к подходящему континууму из $P^{-1}([-1, P(x)])$ либо $P^{-1}([P(x), 1])$, получим неравенство Маркова

$$|P'(x)| \leq n^2,$$

где $|P'(x)| = \max\{|P'(z)| : z \in [-1, 1]\}$, $-1 \leq x \leq 1$. Можно показать, что из теоремы 3.9 следует усиление неравенства (3.13) с заменой константы $n \cdot 4^n$ на n^2 . Сравнительно недавно А. Еременко [120] установил замечательное неравенство марковского типа для произвольного континуума, из которого вытекает, в частности, ослабленная версия неравенства (3.15) с дополнительным множителем $2^{1/n}$ в его левой части, а также неравенство (3.14) теоремы 3.8 с меньшей константой в правой части.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.8. Можно считать, что степень полинома P равна n , $z_1 \neq z_2$ и $P'(z_1) \neq 0$. Линейной заменой общий случай сводится к ситуации, когда $z_2 = P(z_2) = 0$ и, следовательно, неравенство (3.14) имеет вид

$$|P(z_1)| \geq \frac{4^{1/n-1}}{n} |P'(z_1)| |z_1 - \zeta|. \quad (3.14')$$

Предположим, что неравенство (3.14') не выполняется ни при каких ζ , $P(\zeta) = 0$, и пусть $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ – все различные корни полинома P , $m \leq n$. Введем следующие обозначения:

- пусть

$$\alpha = \min_{1 \leq k \leq m} |z_1 - \zeta_k| > \frac{n|P(z_1)|}{4^{1/n-1}|P'(z_1)|}; \quad (3.16)$$

- D – плоскость $\mathbb{C}$ с разрезами вдоль лучей

$$\{z : \arg(z - z_1) = \arg(\zeta_k - z_1), |z - z_1| \geq \alpha\}, \quad k = 1, \dots, m;$$

- φ – функция, конформно и однолистно отображающая круг $|\omega| < 1$ на область D так, что $\varphi(0) = z_1$, $\varphi'(0) > 0$;
- D^* – плоскость $\mathbb{C}$ с разрезами вдоль лучей

$$\left\{ z : \arg(z - z_1) = \frac{2\pi(k-1)}{n}, |z - z_1| \geq \alpha \right\}, \quad k = 1, \dots, n;$$

- φ^* – функция, конформно и однолистно отображающая круг $|\omega| < 1$ на D^* , $\varphi^*(0) = z_1$, $\varphi^{*'}(0) > 0$.

По лемме 1.4 работы [37] существует диссимметризация области D^* в подмножество D . Ввиду следствия 1.4 этой работы, получаем, что

$$|\varphi'(0)| \geq |\varphi^{*'}(0)| = \alpha \cdot 4^{1/n}. \quad (3.17)$$

Из неравенства (3.11), примененного к суперпозиции $P(\varphi(\omega))$, вытекает оценка

$$\left| P'(z_1)\varphi'(0) \right| \leq 4n|P(z_1)|,$$

которая вместе с (3.16) и (3.17) приводит к противоречию. Теорема доказана.

3.5. О свойствах полиномов внутри лемнискаты. Всюду ниже

$$P(z) = \prod_{\mu=1}^n (z - z_\mu), \quad (3.18)$$

где $n \geq 2$ и z_μ , $\mu = 1, \dots, n$, – комплексные числа. Множество

$$E(P) = \{z : |P(z)| \leq 1\}$$

принято называть *лемнискатой* [2]. Метрическим свойствам лемнискаты, а также взаимному расположению нулей z_μ и критических точек полинома P (т. е. точек, где $P' = 0$) посвящено немало работ, а некоторые задачи в данной тематике не решены до сих пор (см., например, [2], [3]). Весьма полезным при изучении свойств лемнискаты является понятие логарифмической емкости континуума (далее – емкости) [121]. Ниже устанавливается емкостное неравенство, характеризующее в некоторой степени разброс нулей и критических точек полинома P внутри лемнискаты $E(P)$. С другой стороны, если лемниската известна, то это неравенство можно трактовать как оценку емкости континуума, проходящего через заданные точки. Предположим, что

$$\max\{|P(\zeta)| : P'(\zeta) = 0\} \leq 1. \quad (3.19)$$

Тогда множество $E(P)$ связно, и поэтому следующее утверждение верно с константой $\sigma = 1$: для любых точек a и b лемнискаты $E(P)$ существует континуум $\gamma \subset E(P)$ емкости $\text{cap } \gamma \leq \sigma$, содержащий точки a , b , а также все нули и все критические точки полинома P . В роли γ в этом случае выступает само множество $E(P)$. Естественно поставить вопрос о наименьшем значении величины σ , при котором указанное выше утверждение имеет место для любых полиномов (3.18). Заметим, что условие (3.19) в такой постановке является необходимым, ибо в противном случае множество $E(P)$ несвязно. Справедлива следующая теорема [14].

ТЕОРЕМА 3.10. Пусть полином (3.18) удовлетворяет условию (3.19), и пусть m – число всех критических точек этого полинома. Тогда для любых $n - m + 1$ точек лемнискаты $E(P)$ существует континуум $\gamma \subset E(P)$ емкости

$$\text{cap } \gamma \leq 2^{-1/n}, \quad (3.20)$$

содержащий эти точки, а также все нули и критические точки полинома P .

Число “свободных” точек лемнискаты $E(P)$ в оценке (3.20) не меньше двух. Поэтому независимо от числа критических точек для любых двух точек лемнискаты всегда найдется континуум $\gamma \subset E(P)$, удовлетворяющий (3.20) и соединяющий эти точки с нулями и критическими точками полинома P . Пример полинома $P(z) = T_n(2^{(1-n)/n}z)$, где $T_n(z) = 2^{n-1}z^n + \dots$ – полином Чебышёва, двух точек $\pm 2^{1-1/n}$ и континуума $\gamma = [-2^{1-1/n}, 2^{1-1/n}]$ показывает, что постоянная в правой части неравенства (3.20) не может быть улучшена. Наибольшее число “свободных” точек равно n , и в этом случае необходимо $m = 1$, а $P(z) = (z + d_1)^n + d_2$, где d_1, d_2 – комплексные числа. Полагая для определенности $d_1 = 0, d_2 = -1$, легко заключаем, что равенство в (3.20) достигается для полинома $P(z) = z^n - 1$, точек $\sqrt[n]{2} \exp(2\pi i j/n), j = 1, \dots, n$, и континуума $\gamma = \{z: |z| \leq \sqrt[n]{2}, \arg z^n = 0\}$ (о вычислении емкости см. [121; гл. II, п. 17]). Этими примерами не исчерпываются все случаи равенства в (3.20). Отметим, что из неравенства (3.20) вытекает известная оценка сверху для диаметра лемнискаты $E(P)$ в случае, когда полином P удовлетворяет условию (3.19):

$$\text{diam } E(P) \leq 2^{2-1/n}$$

(см. [122]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.10. Обозначим через $\zeta_\nu, \nu = 1, \dots, m$, все различные критические точки полинома P , и пусть $a_j, j = 1, \dots, n - m + 1$, – произвольные точки лемнискаты $E(P)$ из условия теоремы. Пусть $\mathcal{P}$ – аналитическая функция, обратная функции $w = P(z)$, и пусть $\mathcal{R}$ – риманова поверхность функции $\mathcal{P}$ [68]. Далее рассматриваем функцию $\mathcal{P}$ как однозначную функцию, заданную на поверхности $\mathcal{R}$. Под проекцией точки $W \in \mathcal{R}$ понимается точка $P(\mathcal{P}(W)) \in \bar{\mathbb{C}}_w$. *Отрезком* на $\mathcal{R}$ назовем любую жорданову кривую на поверхности $\mathcal{R}$, однолистно лежащую над некоторым отрезком w -плоскости. Аналогично определяется луч на $\mathcal{R}$ – как жорданова кривая, однолистно лежащая над некоторым лучом вида $\arg w = \text{const}, \rho \leq |w| \leq \infty$. Обозначим через $\mathcal{L}$ объединение всех отрезков на $\mathcal{R}$, у которых начало расположено над точкой $w = 0$, а конец совпадает с конечной точкой ветвления поверхности $\mathcal{R}$ (т.е. с одной из точек $\mathcal{P}^{-1}(\zeta_\nu), \nu = 1, \dots, m$). В случае нулевых критических значений некоторые из этих отрезков могут оказаться вырожденными. Покажем, что множество $\mathcal{L}$ связно и каждая точка поверхности $\mathcal{R}$, лежащая над $w = 0$, принадлежит $\mathcal{L}$. Для этого разобьем поверхность $\mathcal{R}$ лучами, соединяющими конечные точки ветвления $\mathcal{R}$ с бесконечностью, на n простых листов (далее – листов) $L_k, k = 1, \dots, n$. Каждый лист L_k есть плоскость с одним или, возможно, большим числом разрезов, $k = 1, \dots, n$. Поэтому каждый лист L_k содержит по крайней мере один отрезок (возможно вырожденный), принадлежащий $\mathcal{L} \cap \bar{L}_k$, и, следовательно, множество $\mathcal{L}$ покрывает n -кратно точку $w = 0$. Здесь $\bar{L}_k$ означает замыкание L_k в $\mathcal{R}$. Заметим, что для любого $k, 1 \leq k \leq n$, множество $\mathcal{L} \cap \bar{L}_k$ связно. Склеивая данный лист $L_{k'}$ по одному из берегов разреза с другим листом $L_{k''}$ так, как это было на поверхности $\mathcal{R}$, получаем связное множество $\mathcal{L} \cap (\bar{L}_{k'} \cup \bar{L}_{k''})$. Затем к множеству $\bar{L}_{k'} \cup \bar{L}_{k''}$ приклеиваем другой лист $L_{k'''}$, получая связное множество $\mathcal{L} \cap (\bar{L}_{k'} \cup \bar{L}_{k''} \cup \bar{L}_{k'''})$ и так далее, пока склеенные листы не образуют всю поверхность $\mathcal{R}$. Отсюда вытекает связность множества $\mathcal{L}$ и, как следствие, односвязность области $\mathcal{R} \setminus \mathcal{L}$. Обозначим через f одну из регулярных ветвей аналитической функции

$\omega = (P(z))^{1/n}$ в односвязной области $B := \mathcal{P}(\mathcal{R} \setminus \mathcal{L})$. Функция f конформно и однолистно отображает область B на область $f(B)$, представляющую собой ω -плоскость, разрезанную по прямолинейным отрезкам. Каждый такой отрезок соединяет точку $\omega = 0$ с точкой, модуль которой больше нуля, но не превосходит единицы. Число указанных отрезков не превосходит $n + m - 1$. Действительно, каждая точка ветвления порождает $n_\nu + 1$ отрезок, где n_ν – кратность нуля ζ_ν производной полинома P , и некоторые из этих отрезков вырожденные, а

$$\sum_{\nu=1}^m (n_\nu + 1) = n - 1 + m.$$

Отсюда следует, что континуум

$$\Gamma = (\mathbb{C}_\omega \setminus f(B)) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{n-m+1} [0, f(a_j)] \right)$$

состоит из не более чем $2n$ невырожденных отрезков, выходящих из начала, длины которых не превосходят единицы. Введем также симметричный континуум

$$\Gamma^* = \{\omega : |\omega| \leq 1, \arg \omega^{2n} = 0\},$$

состоящий из $2n$ отрезков. Емкость $\text{cap } \Gamma^*$ равна $2^{-1/n}$ [121; гл. II, п. 17]. Из монотонности емкости и следствия 1.4 работы [37] имеем

$$2^{-1/n} = \text{cap } \Gamma^* \geq \text{cap } \Gamma.$$

Осталось рассмотреть континуум

$$\gamma = \mathcal{P}(\mathcal{L}) \cup f^{-1} \left(\bigcup_{j=1}^{n-m+1} [0, f(a_j)] \right),$$

соединяющий точки a_j , $j = 1, \dots, n - m + 1$, а также все нули и критические точки полинома P . Поскольку

$$f(\overline{\mathbb{C}}_z \setminus \gamma) = \overline{\mathbb{C}}_\omega \setminus \Gamma$$

и разложение функции f в окрестности бесконечности имеет вид

$$f(z) = \alpha z + \dots, \quad |\alpha| = 1,$$

то

$$\text{cap } \Gamma = \text{cap } \gamma.$$

Теорема доказана.

Хорошо известна задача Чеботарёва о континууме $\gamma(c_1, \dots, c_l)$ наименьшей емкости, содержащем заданные точки $c_1, \dots, c_l$ плоскости $\mathbb{C}_z$ [123; §§ 4, 5]. С этой задачей связаны многие экстремальные вопросы теории однолистных функций. Вместе с тем ее решение при $n \geq 4$ до сих пор неизвестно. Даже в случае решения задачи Чеботарёва емкость экстремального континуума наверняка будет иметь сложное аналитическое представление. Неравенство (3.20) позволяет оценить $\text{cap } \gamma(c_1, \dots, c_l)$ сверху в ряде частных случаев. Рассмотрим некоторые из них.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. Для заданных точек $z_\mu \in \mathbb{C}_z$, $\mu = 1, \dots, n$, обозначим через M величину $\max\{|P(\zeta)| : P'(\zeta) = 0\}$, где P – полином (3.18). Тогда для любых двух точек a_1 и a_2 , удовлетворяющих условию $|P(a_j)| \leq M$, $j = 1, 2$, справедливо неравенство

$$\text{cap } \gamma(z_1, \dots, z_n, a_1, a_2) \leq \left(\frac{M}{2}\right)^{1/n}.$$

Равенство достигается, например, в случае, когда $z_\mu \cdot 2^{1/n-1}$, $\mu = 1, \dots, n$, – нули полинома Чебышёва T_n и $a_j = (-1)^j \cdot 2^{1-1/n}$, $j = 1, 2$.

В связи с последним неравенством представляется интересным установить оценку сверху для величины $\max\{|P(\zeta)| : P'(\zeta) = 0\}$ в случае, когда все нули z_μ , $\mu = 1, \dots, n$, полинома $P(z) = z^n + \dots$ лежат в некотором круге $|z| \leq R$. Заметим, что в этом случае из свойств диссимметризации [37] легко следует оценка

$$\text{cap } \gamma(z_1, \dots, z_n) \leq 2^{-2/n} R$$

с равенством для континуума $\gamma(z_1^*, \dots, z_n^*) = \{z : |z| \leq R, \arg z^n = 0\}$, где $z_\mu^* = R \exp(2\pi i \mu/n)$, $\mu = 1, \dots, n$.

Широта применения следствия 3.5 ограничена сложностью вычисления константы M . Однако теорема 3.10 дает также другой подход к оценкам наименьшей емкости.

СЛЕДСТВИЕ 3.6. Для заданных точек $\zeta_\nu \in \mathbb{C}_z$, $\nu = 1, \dots, n-1$, пусть

$$P(z) = n \int_0^z (z - \zeta_1) \cdots (z - \zeta_{n-1}) dz + d_0 = z^n + \dots,$$

где d_0 – некоторое комплексное число. Тогда для любых точек a_1 и a_2 , удовлетворяющих условию

$$|P(a_j)| \leq M := \max_{1 \leq \nu \leq n-1} |P(\zeta_\nu)|,$$

справедливо неравенство

$$\text{cap } \gamma(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}, a_1, a_2) \leq \left(\frac{M}{2}\right)^{1/n}.$$

Равенство имеет место, например, в случае, когда $\zeta_\nu \cdot 2^{1/n-1}$, $\nu = 1, \dots, n-1$, – нули производной полинома Чебышёва T_n , $d_0 = T_n(0)$ и $a_j = (-1)^j \cdot 2^{1-1/n}$, $j = 1, 2$.

Пусть R – рациональная функция степени n , представимая в виде $R = P/Q$, где P и Q – полиномы, не имеющие общих нулей, причем P – полином степени n , а Q – полином степени $< n$, и пусть $R(0) = 0$, $R'(0) \neq 0$. Т. Шейл-Смолл поставил вопрос об определении хотя бы какой-нибудь окрестности точки $w = 0$, в которой можно было бы выделить однозначную ветвь $f(w)$ обратной функции $z = R^{-1}(w)$, $f(0) = 0$, удовлетворяющую неравенству

$$\text{Re } \frac{w f'(w)}{f(w)} \geq \frac{1}{n}$$

(см. [4; п. 10.3.2]). Полученное неравенство представляло бы интерес в связи с изучением формы линий уровня $|R(z)| = \text{const}$ в области однолиственности функции R . Рассмотрим близкую задачу, но только для полиномов P ($Q \equiv 1$).

ТЕОРЕМА 3.11 [17]. Пусть P – полином степени не выше n . Предположим, что связная компонента E лемнискаты $|P(z)| \leq t$, $t > 0$, не содержит критических точек этого полинома, отличных от его нулей. Тогда для любой точки $z \in E \setminus \{a\}$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{(z-a)P'(z)}{P(z)} \right| \leq n, \quad (3.21)$$

где a – нуль полинома P , принадлежащий компоненте E . Равенство в (3.21) для любой точки z достигается в случае $P(z) = cz^n$, $c \neq 0$.

Если компонента E не содержит критических точек, то из (3.21) следует, что для соответствующей ветви f обратной к полиному P функции в круге $|w| < t$ имеет место неравенство

$$\left| \frac{wf'(w)}{f(w)-a} \right| \geq \frac{1}{n}.$$

Это слабее постановки Шейл-Смолла, однако в отличие от [4] мы допускаем наличие критической точки в E . Неравенство (3.21) имеет следующее геометрическое истолкование. Пусть для простоты $a = 0$ и $\log(\cdot)$ означает однозначную ветвь логарифма, отображающую плоскость с разрезом вдоль вещественной положительной полуоси на некоторую полосу ширины 2π . Для любой линии уровня $c(\tau)$ ($|P(z)| = \tau < t$) “кривая” $\gamma(\tau) = \log c(\tau)$ соединяет противоположные стороны указанной полосы, и, следовательно, ее длина не меньше 2π . С другой стороны, образ $\gamma(\tau)$ при отображении $\log P(\exp(\cdot))$ покрывает вертикальный отрезок длины 2π не более чем n раз. Следовательно, на кривой $\gamma(\tau)$ найдется точка ζ , в которой коэффициент растяжения не превосходит n :

$$|[\log P(\exp \zeta)]'| \leq n,$$

что означает неравенство (3.21) в некоторой точке $z = \exp \zeta$ линии уровня $c(\tau)$. Теорема 3.11 утверждает, что на самом деле это неравенство имеет место в любой точке кривой $c(\tau)$. Требование, чтобы множество E не содержало критической точки, отличной от нуля, является существенным. Например, для полинома $P(z) = z^3/2 - 3z^2/4$ лемниската $|P(z)| \leq 1$ содержит обе критические точки $z = 0$ и $z = 1$ и, следовательно, является связной. Точка $z = 2$ принадлежит этой лемнискате, но

$$\frac{2P'(2)}{P(2)} = 6 > 3.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.7. Если в условиях теоремы 3.11 в некоторой точке $z \in E$ выполняется неравенство $P(z) > 0$, то для полярной производной $D_a P$ относительно точки a справедлива оценка

$$\operatorname{Re} D_a P(z) = \operatorname{Re}[nP(z) - (z-a)P'(z)] \geq 0.$$

Доказательство теоремы 3.11 получено методом симметризации (см. [17]).

3.6. Неравенства для критических значений полиномов. Всюду в дальнейшем P означает алгебраический полином степени n , $n \geq 2$. Точка ζ называется критической точкой полинома P , если $P'(\zeta) = 0$. Под критическим значением полинома P понимается величина $P(\zeta)$, где ζ – критическая

точка P . Несмотря на простоту этих понятий имеется много нерешенных проблем, связанных с критическими точками и критическими значениями полиномов (см., например, монографии [1]–[3]). Приведенные ниже точные оценки средних геометрических модулей критических значений полезны при изучении свойств таких значений в зависимости от расположения нулей исходного полинома. Доказательство следующего утверждения можно отнести к фольклору.

ТЕОРЕМА 3.12. *Если все нули полинома $P(z) = c_0 + \dots + z^n$ лежат в единичном круге $|z| \leq 1$, то для критических точек ζ_k , $k = 1, \dots, n-1$, этого полинома (пронумерованных с учетом кратности) справедливо неравенство*

$$\sqrt[n-1]{\prod_{\nu=1}^{n-1} |P(\zeta_\nu)|} \leq 1.$$

Равенство достигается в случае $P(z) = c_0 + z^n$, $|c_0| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через z_μ , $\mu = 1, \dots, n$, нули полинома P , также пронумерованные с учетом их кратности. Сравнивая разложения

$$P(z) = \prod_{\mu=1}^n (z - z_\mu) \quad \text{и} \quad P'(z) = n \prod_{\mu=1}^{n-1} (z - \zeta_\mu)$$

и используя равенство

$$P'(z_\nu) = \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \nu}}^n (z_\nu - z_\mu),$$

приходим к следующим соотношениям:

$$n^n \prod_{\nu=1}^{n-1} |P(\zeta_\nu)| = \prod_{\nu=1}^n |P'(z_\nu)| = \prod_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^n |z_\nu - z_\mu|. \quad (3.22)$$

Осталось исследовать на максимум величину

$$\prod_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^n |z_\mu - z_\nu|$$

при всевозможных значениях z_μ , $|z_\mu| \leq 1$, $\mu = 1, \dots, n$. Из принципа максимума модуля для аналитических функций следует, что этот максимум достигается в случае $|z_\mu| = 1$, $\mu = 1, \dots, n$. Классическое неравенство Шура [124] показывает, что наибольшее значение реализуется в случае n -кратно симметричной системы точек $\{z_\mu\}_{\mu=1}^n$ и равно n^n (этот факт вытекает также из свойств диссимметризации конденсаторов [38]). Сказанное выше ведет к требуемому неравенству. Непосредственно убеждаемся, что равенство достигается для полиномов вида $P(z) = c_0 + z^n$, где c_0 – комплексное число с $|c_0| = 1$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.8. *Если все нули полинома $P(z) = c_0 + \dots + z^n$ лежат в круге $|z| \leq 1$, то существует критическая точка ζ этого полинома такая, что*

$$|P(\zeta)| \leq 1.$$

Равенство достигается для полинома $P(z) = c_0 + z^n$, где $|c_0| = 1$.

Из доказательства теоремы 3.12 видно, что если все нули z_μ , $\mu = 1, \dots, n$, полинома $P(z) = c_0 + \dots + z^n$ лежат в круге $|z| \leq 1$, то справедливо неравенство

$$\sqrt[n]{\prod_{\mu=1}^n |P'(z_\mu)|} \leq n$$

с равенством в случае $P(z) = c_0 + z^n$, $|c_0| = 1$. В частности, существует такой нуль z , что

$$|P'(z)| \leq n.$$

Последнее утверждение, а также следствие 3.8 были предложены автору Благодарением Сендовым как ослабленные варианты известных гипотез.

Следующая теорема присутствует в скрытой форме в работе [116; с. 444], где обсуждается ее частный случай (3.6), а доказательство приводится в несколько усложненном виде (ср. также [3; с. 218–219]).

ТЕОРЕМА 3.13. Пусть ζ_ν , $\nu = 1, \dots, n-1$, – критические точки полинома $P(z) = c_1 z + \dots + z^n$, и пусть все нули этого полинома лежат в круге $|z| \leq 1$. Тогда

$$\sqrt[n-1]{\prod_{\nu=1}^{n-1} |P(\zeta_\nu)|} \leq (n-1) \left| \frac{c_1^2}{n^n} \right|^{1/(n-1)}.$$

Равенство достигается для полинома $P(z) = c_1 z + z^n$, где $|c_1| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через z_μ , $\mu = 1, \dots, n$, нули полинома P , и пусть $z_n = 0$. Равенство (3.22) дает

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} |P(\zeta_\nu)| = n^{-n} \prod_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^n |z_\nu - z_\mu| = n^{-n} \left(\prod_{\mu=1}^{n-1} |z_\mu|^2 \right) \prod_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n-1} |z_\nu - z_\mu|.$$

Как и при доказательстве теоремы 3.12,

$$\prod_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n-1} |z_\nu - z_\mu| \leq (n-1)^{n-1}.$$

Осталось заметить, что $\prod_{\mu=1}^{n-1} |z_\mu| = |c_1|$. Случай равенства проверяется прямым вычислением. Теорема доказана.

В работе [117] в связи с изучением сходимости метода Ньютона вычисления корней полиномов С. Смейл установил неравенства для критических значений и поставил вопрос о точности этих оценок (см. [117; с. 9, 11, 31–33]). В частности, для полиномов $P(z) = c_1 z + \dots + c_n z^n$, $c_1 \neq 0$, он доказал существование критической точки ζ , удовлетворяющей неравенству

$$|P(\zeta)| \left| \frac{c_n}{c_1^n} \right|^{1/(n-1)} \leq \left(2^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdots (n+1)} \right)^{1/(n-1)} \leq 4 \quad (3.23)$$

(см. [117; доказательство теоремы 1, с. 9–11]). В статье [13] с помощью диссимметризации функции, заданной на римановой поверхности, получен следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.14. Если $P(z) = c_1 z + \dots + z^n$, то справедливо неравенство

$$\min\{|P(\zeta)| : P'(\zeta) = 0\} \leq (n-1) \left| \frac{c_1}{n} \right|^{n/(n-1)}. \quad (3.24)$$

Равенство в (3.24) достигается для полиномов вида $P(z) = c_1 z + z^n$, где c_1 – произвольное комплексное число.

Таким образом, оценка (3.23) улучшается с заменой правых частей на $(n-1)(1/n)^{n/(n-1)}$, и новая оценка точная. Заметим, что левая часть неравенства (3.24) неоднократно встречается в работе [117].

СЛЕДСТВИЕ 3.9. Если все критические точки полинома $P(z) = c_1 z + \dots + z^n$ лежат в круге $|z| \leq 1$, то существует критическая точка ζ такая, что

$$|P(\zeta)| \leq n-1.$$

Равенство достигается в случае $P(z) = nz + z^n$.

Пусть теперь P – произвольный полином со старшим коэффициентом c_n , и пусть z – произвольное комплексное число. Тогда полином

$$Q := \frac{1}{c_n}(P(\cdot + z) - P(z))$$

удовлетворяет условиям теоремы 3.14. Отсюда следует существование критической точки ζ (т.е. $P'(\zeta) = 0$) такой, что

$$|P(\zeta) - P(z)| \leq (n-1)|c_n|^{1/(1-n)} \left| \frac{P'(z)}{n} \right|^{n/(n-1)}. \quad (3.25)$$

Далее, обозначим через z_μ , $\mu = 1, \dots, n$, все нули полинома P , и пусть ζ_ν , $\nu = 1, \dots, n-1$, – нули его производной (пронумерованные с учетом кратности). Полагая в (3.25) $z = z_j$, $1 \leq j \leq n$, получаем следующее неравенство между средними геометрическими:

$$\sqrt[n]{\prod_{\mu=1}^n |\zeta - z_\mu|} \leq \sqrt[n]{n-1} \sqrt[n-1]{\prod_{\nu=1}^{n-1} |z_j - \zeta_\nu|},$$

справедливое для некоторой критической точки ζ и любых корней z_j , $j = 1, \dots, n$. В частности, если один из корней (пусть z_n) равен нулю, то имеем точное неравенство

$$\sqrt[n]{\prod_{\mu=1}^n |\zeta - z_\mu|} \leq \frac{(n-1)^{1/n}}{n^{1/(n-1)}} \sqrt[n-1]{\prod_{\mu=1}^{n-1} |z_\mu|}.$$

Равенство достигается для полинома $P(z) = c_1 z + z^n$. Возвращаясь к прежней нормировке полинома $P(z) = c_1 z + \dots + z^n$, сравним неравенство (3.24) с гипотезой С. Смейла “о среднем значении” [117; с. 33]. Неравенство (3.24) дает

$$\min_{1 \leq \nu \leq n-1} |P(\zeta_\nu)| \leq |c_1| \frac{n-1}{n} \sqrt[n-1]{\prod_{\nu=1}^{n-1} |\zeta_\nu|},$$

в то время как указанная гипотеза гласит, что

$$\min_{1 \leq \nu \leq n-1} \left| \frac{P(\zeta_\nu)}{\zeta_\nu} \right| \leq |c_1| \frac{n-1}{n} \quad (3.26)$$

с равенством для того же полинома $P(z) = c_1 z + z^n$, $c_1 \neq 0$. Выписанные неравенства суть близкие, но независимые соотношения. Предположение (3.26) доказано различными методами в ряде частных случаев (см. [3; гл. 7], [116]).

Для произвольного невырожденного континуума γ открытой w -плоскости обозначим через F функцию Римана:

$$F(w) = (d(\gamma))^{-1}w + a_0 + \frac{a_1}{w} + \dots$$

– конформно и однолистно отображающую связную компоненту множества $\overline{\mathbb{C}_w} \setminus \gamma$, содержащую бесконечность, на область $|\zeta| > 1$.

ТЕОРЕМА 3.15 [19]. *Предположим, что все критические значения полинома P степени $n \geq 2$ принадлежат некоторому невырожденному континууму $\gamma \subset \mathbb{C}_w$, и пусть точка z такова, что ее образ $P(z)$ принадлежит связной компоненте множества $\overline{\mathbb{C}_w} \setminus \gamma$, содержащей бесконечно удаленную точку. Тогда выполняются неравенства*

$$|\zeta - z| |P'(z)| \leq \frac{n|F(P(z))|(|F(P(z))|^{1/n} + 1)}{|F'(P(z))|(|F(P(z))|^{1/n} - 1)}, \quad (3.27)$$

$$|\zeta - z| \geq \left(\frac{d(\gamma)}{|c_n|} \right)^{1/n} (|F(P(z))|^{1/(2n)} - |F(P(z))|^{-1/(2n)})^2. \quad (3.28)$$

Если, дополнительно, $P(1)$ не принадлежит указанной выше связной компоненте, то справедливы также неравенства

$$\frac{|F(P(z))|^{1/n} - 1}{|F(P(z))|^{1/n} + 1} \leq \left| \frac{nF(P(z))}{(z-1)P'(z)F'(P(z))} \right| \leq \frac{|F(P(z))|^{1/n} + 1}{|F(P(z))|^{1/n} - 1}. \quad (3.29)$$

Здесь ζ – произвольная критическая точка полинома P , c_n – старший коэффициент этого полинома, F – функция Римана, соответствующая континууму γ , а $d(\gamma)$ – постоянная Чебышёва.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через G связную компоненту множества $\overline{\mathbb{C}_w} \setminus \gamma$, содержащую бесконечно удаленную точку, и пусть $B = \{z : P(z) \in G\}$. Согласно лемме 2.7, функция $\Psi(z) := (F(P(z)))^{1/n}$ распадается в односвязной области B на n регулярных ветвей, каждая из которых однолистно отображает эту область на область $|\zeta| > 1$. Далее Ψ означает одну из этих ветвей.

Начнем с доказательства неравенства (3.27). Пусть z_0 – произвольная фиксированная точка области B , а ζ – произвольная критическая точка полинома P , $\zeta \notin B$. В плоскости $\overline{\mathbb{C}_z}$ рассмотрим конденсатор $C(r; \mathbb{C}_z \setminus \Gamma, \Gamma, \{z_0\}, \{0, 1\}, \{r\})$, где $\Gamma = \{z : z = z_0 + (\zeta - z_0)t, t \geq 1\}$. Обозначим через Γ' связное подмножество $\Gamma \cap B$, соединяющее точку $z = \infty$ с границей ∂B , а через $\text{C}\Gamma$ – круговую симметризацию относительно вещественной отрицательной полуоси. Из монотонности емкости, конформной инвариантности емкости и принципа круговой симметризации Поляна последовательно получаем

$$\text{cap } C(r; \mathbb{C}_z \setminus \Gamma, \Gamma, \{z_0\}, \{0, 1\}, \{r\}) \geq \text{cap } C(r; B \setminus \Gamma', \overline{\Gamma'}, \{z_0\}, \{0, 1\}, \{r\})$$

$$\begin{aligned}
&= \text{cap } C(r; \{\zeta : |\zeta| > 1, \zeta \notin \Psi(\Gamma')\}, \Psi(\overline{\Gamma'}), \{\Psi(z_0)\}, \{0, 1\}, \{|\Psi'(z_0)|r\}) \\
&\geq \text{cap Cr } C(r; \{\zeta : |\zeta| > 1, \zeta \notin \Psi(\Gamma')\}, \Psi(\overline{\Gamma'}), \{\Psi(z_0)\}, \{0, 1\}, \{|\Psi'(z_0)|r\}) \\
&= \text{cap } C(r; \{\zeta : |\zeta| > 1, \zeta \notin [-\infty, -1]\}, [-\infty, -1], \{|\Psi(z_0)|\}, \\
&\quad \{0, 1\}, \{|\Psi'(z_0)|r\}).
\end{aligned}$$

Ввиду симметрии функции Жуковского $\omega = (\zeta + 1/\zeta)/2$, последняя емкость равна емкости конденсатора

$$\begin{aligned}
&C\left(r; \mathbb{C}_\omega \setminus [-\infty, -1], [-\infty, -1], \left\{ \frac{|\Psi(z_0)| + 1/|\Psi(z_0)|}{2} \right\}, \right. \\
&\quad \left. \{0, 1\}, \left\{ \frac{|1 - |\Psi(z_0)|^{-2}|}{2} |\Psi'(z_0)|r \right\} \right).
\end{aligned}$$

Сравнивая асимптотику емкости этого конденсатора с асимптотикой емкости конденсатора $C(r; \mathbb{C}_z \setminus \Gamma, \Gamma, \{z_0\}, \{0, 1\}, \{r\})$ при $r \rightarrow 0$, приходим к неравенству

$$4|\zeta - z_0| \frac{|1 - |\Psi(z_0)|^{-2}|}{2} |\Psi'(z_0)| \leq 4 \left(1 + \frac{|\Psi(z_0)| + 1/|\Psi(z_0)|}{2} \right)$$

(см. формулу (3.4)). Отсюда следует неравенство (3.27) для $z = z_0$.

Для доказательства (3.28) рассмотрим конденсатор $C(r; \overline{\mathbb{C}_z} \setminus [z_0, \zeta], [z_0, \zeta], \{\infty\}, \{0, 1\}, \{r\})$, где z_0 и ζ определены выше. Вновь из монотонности, конформной инвариантности, принципа круговой симметризации и симметрии функции Жуковского получаем

$$\begin{aligned}
&\text{cap } C(r; \overline{\mathbb{C}_z} \setminus L, L, \{\infty\}, \{0, 1\}, \{r\}) \geq \text{cap } C(r; B \setminus L', \overline{L'}, \{\infty\}, \{0, 1\}, \{r\}) \\
&= \text{cap } C\left(r; \{\zeta : |\zeta| > 1, \zeta \notin \Psi(L')\}, \Psi(\overline{L'}), \{\infty\}, \{0, 1\}, \left\{ \left(\frac{d(\gamma)}{|c_n|} \right)^{1/n} r \right\} \right) \\
&\geq \text{cap Cr } C\left(r; \{\zeta : |\zeta| > 1, \zeta \notin \Psi(L')\}, \Psi(\overline{L'}), \{\infty\}, \{0, 1\}, \left\{ \left(\frac{d(\gamma)}{|c_n|} \right)^{1/n} r \right\} \right) \\
&= \text{cap } C\left(r; \{\zeta : |\zeta| > 1, \zeta \notin [-|\Psi(z_0)|, -1]\}, \right. \\
&\quad \left. [-|\Psi(z_0)|, -1], \{\infty\}, \{0, 1\}, \left\{ \left(\frac{d(\gamma)}{|c_n|} \right)^{1/n} r \right\} \right) \\
&= \text{cap } C\left(r; \overline{\mathbb{C}_\omega} \setminus \left[-\frac{|\Psi(z_0)| + 1/|\Psi(z_0)|}{2}, -1 \right], \right. \\
&\quad \left. \left[-\frac{|\Psi(z_0)| + 1/|\Psi(z_0)|}{2}, -1 \right], \{\infty\}, \{0, 1\}, \left\{ 2 \left(\frac{d(\gamma)}{|c_n|} \right)^{1/n} r \right\} \right).
\end{aligned}$$

Здесь $L = [z_0, \zeta]$, а L' — связное подмножество $L \cap B$, соединяющее точку z_0 с границей ∂B .

Сравнение асимптотик первой и последней емкости в выписанных соотношениях при $r \rightarrow 0$ дает неравенство

$$|\zeta - z_0| \geq 2 \left(\frac{d(\gamma)}{|c_n|} \right)^{1/n} \left[\frac{1}{2} \left(|\Psi(z_0)| + \frac{1}{|\Psi(z_0)|} \right) - 1 \right],$$

которое совпадает с неравенством (3.28).

Перейдем теперь к доказательству неравенства (3.29). Из свойств функции Ψ и условия $P(1) \notin G$ следует, что функция $z = f(\omega)$, обратная к суперпозиции

$$\omega = \left(\Psi \left(\left(\frac{d(\gamma)}{c_n} \right)^{1/n} \frac{1}{z} + 1 \right) \right)^{-1},$$

принадлежит известному классу S . Для таких функций справедлива двусторонняя оценка

$$\frac{1 - |\omega|}{1 + |\omega|} \leq \left| \frac{\omega f'(\omega)}{f(\omega)} \right| \leq \frac{1 + |\omega|}{1 - |\omega|},$$

$0 < |\omega| < 1$ (см., например, [85; с. 35]). После простых вычислений убеждаемся, что данная оценка влечет за собой неравенство (3.29). Теорема доказана.

Отметим частные случаи неравенств (3.27) и (3.28), когда все критические значения полинома P принадлежат кругу $|w - w_0| \leq R$. В этом случае $\gamma = \{w: |w - w_0| \leq R\}$, $F(w) = (w - w_0)/R$ и $d(\gamma) = R$. Из неравенства (3.27) вытекает оценка

$$|\zeta - z| |P'(z)| (|P(z) - w_0| - R^{1/n}) \leq n |P(z) - w_0| (|P(z) - w_0| + R^{1/n}),$$

справедливая для любой точки $z \in \mathbb{C}$. Полагая $w_0 = 0$, получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3.10. Если $P(z) = 1 + c_1 z + \dots + c_n z^n$, $n \geq 2$, $c_n \neq 0$, то существует по крайней мере одна критическая точка a , $P'(a) = 0$, такая, что

$$|\zeta P'(0)| (1 - |P(a)|^{1/n}) \leq n (1 + |P(a)|^{1/n})$$

для любых критических точек ζ . Равенство достигается для полинома $P(z) = (1 + tz)^n$, где t — произвольное комплексное число, отличное от нуля.

Неравенство (3.28) дает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3.11. Если $P(z) = 1 + c_1 z + \dots + c_n z^n$, $n \geq 2$, $c_n \neq 0$, то существует по крайней мере одна критическая точка a , $P'(a) = 0$, такая, что либо $|P(a)| \geq 1$, либо

$$|\zeta| \geq \left(\frac{1}{|c_n|} \right)^{1/n} (|P(a)|^{1/n} - 1)^2$$

для любых критических точек ζ . Равенство в последнем соотношении выполняется в случае, когда $P(z) = (1 + tz)^n$, $t \neq 0$.

Рассмотрим также частный случай неравенства (3.29), когда $\gamma = [\bar{L}(P), \bar{H}(P)]$. Функция F конформно и однолистно отображает внешность отрезка γ на область $|\zeta| > 1$, и, следовательно, обратная функция имеет вид

$$F^{-1}(\zeta) = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \frac{\bar{H}(P) - \bar{L}(P)}{2} + \frac{\bar{H}(P) + \bar{L}(P)}{2} = \frac{1}{4} (\bar{H}(P) - \bar{L}(P)) \zeta + \dots,$$

$d(\gamma) = (\bar{H}(P) - \bar{L}(P))/4$. Неравенство (3.29) дает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3.12. Для любого полинома P степени n с вещественными коэффициентами и с критическими точками на отрезке $[-1, 1]$ выполняются неравенства

$$\frac{|F(P(z))|^{1/n} - 1}{|F(P(z))|^{1/n} + 1} \leq \left| \frac{n(\overline{H}(P) - \overline{L}(P))[F^2(P(z)) - 1]}{4(z-1)P'(z)F(P(z))} \right| \leq \frac{|F(P(z))|^{1/n} + 1}{|F(P(z))|^{1/n} - 1}, \quad (3.30)$$

где z – произвольная точка плоскости $\mathbb{C}$, для которой $P(z) \notin [\overline{L}(P), \overline{H}(P)]$. Равенство в левом неравенстве (3.30) достигается для полинома Чебышёва $T_n(z) = 2^{n-1}z^n + \dots$ при $-\infty < z < -1$, а в правом неравенстве (3.30) – для того же полинома и $1 < z < \infty$.

Используя только свойства емкостей конденсаторов (без привлечения симметризации), можно получить следующие два утверждения [22].

ТЕОРЕМА 3.16. Предположим, что все критические значения полинома P степени $n \geq 2$ принадлежат некоторому невырожденному континууму $\gamma \subset \mathbb{C}_w$, и пусть точка z такова, что ее образ $P(z)$ принадлежит связной компоненте $\mathbb{C}_w \setminus \gamma$, содержащей бесконечность. Тогда выполняется неравенство

$$|P'(z)| \leq n \left| \frac{c_n}{d(\gamma)} \right|^{1/n} \frac{|F(P(z))/F'(P(z))|}{|F(P(z))|^{1/n} - |F(P(z))|^{-1/n}},$$

где c_n , F и $d(\gamma)$ из теоремы 3.15.

ТЕОРЕМА 3.17. Если $P(z) = 1 + c_1z + \dots + c_nz^n$, $n \geq 2$, $c_n \neq 0$, то существует по крайней мере одна критическая точка a , $P'(a) = 0$, такая, что

$$|P(a)|^{2/n} \geq 1 - n \frac{|c_n|^{1/n}}{|c_1|}.$$

Равенство достигается для полинома $P(z) = (1 + tz)^n$, где t – произвольное комплексное число, отличное от нуля.

Список литературы

- [1] G. V. Milovanović, D. S. Mitrinović, Th. M. Rassias, *Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1994, xiv+821 pp.
- [2] P. Borwein, T. Erdélyi, *Polynomials and polynomial inequalities*, Grad. Texts in Math., **161**, Springer-Verlag, New York, 1995, x+480 pp.
- [3] Q. I. Rahman, G. Schmeisser, “Analytic theory of polynomials”, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), **26**, The Clarendon Press, Oxford; Oxford Univ. Press, 2002, xiv+742 pp.
- [4] T. Sheil-Small, *Complex polynomials*, Cambridge Stud. Adv. Math., **75**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002, xx+428 pp.
- [5] В. В. Прасолов, *Многочлены*, изд. 3-е, испр., МЦНМО, М., 2003, 336 с.; англ. пер. 2-го изд.: V. V. Prasolov, *Polynomials*, Algorithms Comput. Math., **11**, Springer-Verlag, Berlin, 2004, xiv+301 pp.
- [6] А. Б. Богатырёв, *Экстремальные многочлены и римановы поверхности*, МЦНМО, М., 2005, 173 с.; англ. пер.: A. Bogatyrev, *Extremal polynomials and Riemann surfaces*, Springer Monogr. Math., Springer, Berlin, 2012, xxv+150 pp.

- [7] В. Н. Дубинин, “Теоремы искажения для полиномов на окружности”, *Матем. сб.*, **191**:12 (2000), 51–60; англ. пер.: V.N. Dubinin, “Distortion theorems for polynomials on a circle”, *Sb. Math.*, **191**:12 (2000), 1797–1807.
- [8] В. Н. Дубинин, “Конформные отображения и неравенства для алгебраических полиномов”, *Алгебра и анализ*, **13**:5 (2001), 16–43; англ. пер.: V.N. Dubinin, “Conformal mappings and inequalities for algebraic polynomials”, *St. Petersburg Math. J.*, **13**:5 (2002), 717–737.
- [9] В. Н. Дубинин, “О применении конформных отображений в неравенствах для рациональных функций”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:2 (2002), 67–80; англ. пер.: V.N. Dubinin, “On an application of conformal maps to inequalities for rational functions”, *Izv. Math.*, **66**:2 (2002), 285–297.
- [10] В. Н. Дубинин, “Конформные отображения и неравенства для алгебраических полиномов. II”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 19, Зап. науч. сем. ПОМИ, **302**, ПОМИ, СПб., 2003, 18–37; англ. пер.: V.N. Dubinin, “Conformal mappings and inequalities for algebraic polynomials. II”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **129**:3 (2005), 3823–3834.
- [11] В. Н. Дубинин, “Лемма Шварца и оценки коэффициентов для регулярных функций со свободной областью определения”, *Матем. сб.*, **196**:11 (2005), 53–74; англ. пер.: V.N. Dubinin, “Schwarz’s lemma and estimates of coefficients for regular functions with free domain of definition”, *Sb. Math.*, **196**:11 (2005), 1605–1625.
- [12] В. Н. Дубинин, “О полиномах с критическими значениями на отрезке”, *Матем. заметки*, **78**:6 (2005), 827–832; англ. пер.: V.N. Dubinin, “Polynomials with critical values on intervals”, *Math. Notes*, **78**:6 (2005), 768–772.
- [13] В. Н. Дубинин, “Неравенства для критических значений полиномов”, *Матем. сб.*, **197**:8 (2006), 63–72; англ. пер.: V.N. Dubinin, “Inequalities for critical values of polynomials”, *Sb. Math.*, **197**:8 (2006), 1167–1176.
- [14] В. Н. Дубинин, “Лемниската и неравенства для логарифмической емкости континуума”, *Матем. заметки*, **80**:1 (2006), 33–37; англ. пер.: V.N. Dubinin, “Lemniscates and inequalities for the logarithmic capacities of continua”, *Math. Notes*, **80**:1-2 (2006), 31–35.
- [15] В. Н. Дубинин, “О применении леммы Шварца к неравенствам для целых функций с ограничениями на нули”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 21, Зап. научн. сем. ПОМИ, **337**, ПОМИ, СПб., 2006, 101–112; англ. пер.: V.N. Dubinin, “Applications of the Schwarz lemma to inequalities for entire functions with constraints on zeros”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **143**:3 (2007), 3069–3076.
- [16] В. Н. Дубинин, “О принципах мажорации для мероморфных функций”, *Матем. заметки*, **84**:6 (2008), 803–808; англ. пер.: V.N. Dubinin, “Majorization principles for meromorphic functions”, *Math. Notes*, **84**:5-6 (2008), 751–755.
- [17] В. Н. Дубинин, “О компонентах лемнискаты, не содержащих критических точек полинома, отличных от его нулей”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 25, Зап. научн. сем. ПОМИ, **383**, ПОМИ, СПб., 2010, 77–85; англ. пер.: V.N. Dubinin, “On the lemniscate components containing no critical points of a polynomial except for its zeros”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **178**:2 (2011), 158–162.
- [18] В. Н. Дубинин, “К теореме о конечном приращении для комплексных полиномов”, *Матем. заметки*, **88**:5 (2010), 673–682; англ. пер.: V.N. Dubinin, “On the finite-increment theorem for complex polynomials”, *Math. Notes*, **88**:5-6 (2010), 647–654.
- [19] В. Н. Дубинин, “К теоремам искажения для алгебраических полиномов”, *Дальневост. матем. журн.*, **11**:1 (2011), 28–36.
- [20] В. Н. Дубинин, “Нижняя граница для дискретной нормы полинома на окружности”, *Матем. заметки*, **90**:2 (2011), 306–309; англ. пер.: V.N. Dubinin, “Lower

- bound for the discrete norm of a polynomial on the circle”, *Math. Notes*, **90**:1-2 (2011), 284–287.
- [21] В. Н. Дубинин, “Новая версия круговой симметризации с приложениями к p -листным функциям”, *Матем. сб.*, **203**:7 (2012), 79–94.
- [22] В. Н. Дубинин, В. Ю. Ким, “Приведенные модули и неравенства для полиномов”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 16, Зап. научн. сем. ПОМИ, **263**, ПОМИ, СПб., 2000, 70–83; англ. пер.: V. N. Dubinin, “Reduced modules and inequalities for polynomials”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **110**:6 (2002), 3070–3077.
- [23] В. Н. Дубинин, А. В. Олесов, “О применении конформных отображений к неравенствам для полиномов”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 18, Зап. научн. сем. ПОМИ, **286**, ПОМИ, СПб., 2002, 85–102; англ. пер.: V. N. Dubinin, A. V. Olesov, “Application of conformal mappings to inequalities for polynomials”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **122**:6 (2004), 3630–3640.
- [24] В. Н. Дубинин, С. И. Калмыков, “Экстремальные свойства полиномов Чебышёва”, *Дальневост. матем. журн.*, **5**:2 (2004), 169–177.
- [25] В. Н. Дубинин, С. И. Калмыков, “Принцип мажорации для мероморфных функций”, *Матем. сб.*, **198**:12 (2007), 37–46; англ. пер.: V. N. Dubinin, S. I. Kalmykov, “A majoration principle for meromorphic functions”, *Sb. Math.*, **198**:12 (2007), 1737–1745.
- [26] V. Dubinin, T. Sugawa, “Dual mean value problem for complex polynomials”, *Proc. Japan. Acad. Ser. A Math. Sci.*, **85**:9 (2009), 135–137.
- [27] В. Н. Дубинин, Д. А. Кириллова, “Некоторые применения экстремальных разбиений в геометрической теории функций”, *Дальневост. матем. журн.*, **10**:2 (2010), 130–152.
- [28] В. Н. Дубинин, С. И. Калмыков, “О полиномах с ограничениями на дугах окружностей”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 26, Зап. научн. сем. ПОМИ, **392**, ПОМИ, СПб., 2011, 74–83.
- [29] С. И. Калмыков, “Теоремы покрытия для полиномов, имеющих криволинейную мажоранту на двух отрезках”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 25, Зап. научн. сем. ПОМИ, **383**, ПОМИ, СПб., 2010, 97–109; англ. пер.: S. I. Kalmykov, “Covering theorems for polynomials with curved majorants on two intervals”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **178**:2 (2011), 170–177.
- [30] С. И. Калмыков, “О полиномах, имеющих криволинейную мажоранту на двух отрезках”, *Изв. вузов. Матем.*, 2009, № 10, 72–75; англ. пер.: S. I. Kalmykov, “Polynomials with curved majorants on two segments”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **53**:10 (2009), 64–67.
- [31] С. И. Калмыков, “Об оценке модуля рациональной функции”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 24, Зап. научн. сем. ПОМИ, **371**, ПОМИ, СПб., 2009, 109–116; англ. пер.: S. I. Kalmykov, “An estimate for the modulus of a rational function”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **166**:2 (2010), 186–190.
- [32] С. И. Калмыков, “Принципы мажорации и некоторые неравенства для полиномов и рациональных функций с предписанными полюсами”, Зап. научн. сем. ПОМИ, **357**, ПОМИ, СПб., 2008, 143–157; англ. пер.: S. I. Kalmykov, “Majoration principles and some inequalities for polynomials and rational functions with prescribed poles”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **157**:4 (2009), 623–631.
- [33] А. В. Олесов, “Дифференциальные неравенства для алгебраических полиномов”, *Сиб. матем. журн.*, **51**:4 (2010), 883–889; англ. пер.: A. V. Olesov, “Differential inequalities for algebraic polynomials”, *Siberian Math. J.*, **51**:4 (2010), 706–711.
- [34] А. В. Олесов, “О применении конформных отображений к неравенствам для тригонометрических полиномов”, *Матем. заметки*, **76**:3 (2004), 396–408; англ.

- пер.: A. V. Olesov, "Application of conformal mappings to inequalities for trigonometric polynomials", *Math. Notes*, **76**:3-4 (2004), 368–378.
- [35] А. В. Олесов, "Неравенства для целых функций конечной степени и полиномов", *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 20, Зап. научн. сем. ПОМИ, **314**, ПОМИ, СПб., 2004, 174–195; англ. пер.: A. V. Olesov, "Inequalities for entire functions of finite degree and polynomials", *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **133**:6 (2006), 1704–1717.
- [36] А. В. Олесов, "Неравенства для мажорантных аналитических функций", *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 20, Зап. научн. сем. ПОМИ, **314**, ПОМИ, СПб., 2004, 155–173; англ. пер.: A. V. Olesov, "Inequalities for majorizing analytic functions", *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **133**:6 (2006), 1693–1703.
- [37] В. Н. Дубинин, "Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного", *УМН*, **49**:1(295) (1994), 3–76; англ. пер.: V. N. Dubinin, "Symmetrization in the geometric theory of functions of a complex variable", *Russian Math. Surveys*, **49**:1 (1994), 1–79.
- [38] В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Дальнаука, Владивосток, 2009, 390 с.
- [39] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, 2-е изд., Наука, М., 1966, 628 с.
- [40] К. Дочев, "О некоторых экстремальных свойствах многочленов", *Докл. АН СССР*, **153** (1963), 519–521; англ. пер.: K. Dochev, "Some extremal properties of polynomials", *Soviet Math. Dokl.*, **4** (1963), 1704–1706.
- [41] R. Duffin, A. C. Schaeffer, "Some properties of functions of exponential type", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44**:4 (1938), 236–240.
- [42] T. Sheil-Small, "An inequality for the modulus of a polynomial evaluated at the roots of unity", *Bull. Lond. Math. Soc.*, **40**:6 (2008), 956–964.
- [43] E. Rakhmanov, B. Shekhtman, "On discrete norms of polynomials", *J. Approx. Theory*, **139**:1-2 (2006), 2–7.
- [44] P. Borwein, T. Erdélyi, J. Zhang, "Chebyshev polynomials and Markov–Bernstein type inequalities for rational spaces", *J. London Math. Soc. (2)*, **50**:3 (1994), 501–519.
- [45] P. Borwein, T. Erdélyi, "Sharp extensions of Bernstein's inequality to rational spaces", *Mathematika*, **43**:2 (1996), 413–423.
- [46] X. Li, R. N. Mohapatra, R. S. Rodriguez, "Bernstein-type inequalities for rational functions with prescribed poles", *J. London Math. Soc. (2)*, **51**:3 (1995), 523–531.
- [47] R. Jones, X. Li, R. N. Mohapatra, R. S. Rodrigues, "On the Bernstein inequality for rational functions with a prescribed zero", *J. Approx. Theory*, **95**:3 (1998), 476–496.
- [48] X. Li, "Integral formulas and inequalities for rational functions", *J. Math. Anal. Appl.*, **211**:2 (1997), 386–394.
- [49] A. Aziz, W. M. Shah, "Some refinements of Bernstein-type inequalities for rational functions", *Glas. Mat. Ser. III*, **32(52)**:1 (1997), 29–37.
- [50] G. Min, "Inequalities for rational functions with prescribed poles", *Canad. J. Math.*, **50**:1 (1998), 152–166.
- [51] В. Н. Русак, *Рациональные функции как аппарат приближения*, Изд-во БГУ, Минск, 1979, 174 с.
- [52] В. С. Виденский, "Некоторые оценки производных от рациональных дробей", *Изв. РАН СССР. Сер. матем.*, **26**:3 (1962), 415–426.
- [53] R. Osserman, "A sharp Schwarz inequality on the boundary", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **128**:12 (2000), 3513–3517.

- [54] В. Н. Дубинин, “К неравенству Шварца на границе для регулярных в круге функций”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 18, Зап. научн. сем. ПОМИ, **286**, ПОМИ, СПб., 2002, 74–84; англ. пер.: V. N. Dubinin, “The Schwarz inequality on the boundary for functions regular in the disk”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **122**:6 (2004), 3623–3629.
- [55] А. Ю. Солянин, “Граничное искажение и экстремальные задачи в некоторых классах однолистных функций”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 11, Зап. научн. сем. ПОМИ, **204**, ПОМИ, СПб., 1993, 115–142; англ. пер.: A. Yu. Solynin, “The boundary distortion and extremal problems in certain classes of univalent functions”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **79**:5 (1996), 1341–1358.
- [56] H. P. Boas, “Julius and Julia: mastering the art of the Schwarz lemma”, *Amer. Math. Monthly*, **117**:9 (2010), 770–785.
- [57] S. G. Krantz, “The Schwarz lemma at the boundary”, *Complex Var. Elliptic Equ.*, **56**:5 (2011), 455–468.
- [58] A. Aziz, Q. G. Mohammad, “Growth of polynomials with zeros outside a circle”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **81**:4 (1981), 549–553.
- [59] N. C. Ankeny, T. J. Rivlin, “On a theorem of S. Bernstein”, *Pacific J. Math.*, **5**, Suppl. 2 (1955), 849–852.
- [60] P. Turan, “Über die Ableitung von Polynomen”, *Compositio Math.*, **7** (1939), 89–95.
- [61] P. Pawlowski, “On the zeros of a polynomial and its derivatives”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **350**:11 (1998), 4461–4472.
- [62] С. Н. Бернштейн, *Собрание сочинений*, т. 2: *Конструктивная теория функций* (1931–1953), Из-во АН СССР, М., 1954, 627 с.
- [63] B. Ya. Levin, *Lectures on entire functions*, Transl. Math. Monog., **150**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, xvi+248 pp.
- [64] R. Gardner, N. K. Govil, “Functions of exponential type not vanishing in a half-plane”, *Analysis*, **17**:4 (1997), 395–402.
- [65] N. K. Govil, M. A. Qazi, “On maximum modulus of polynomials and related entire functions with restricted zeros”, *Math. Inequal. Appl.*, **5**:1 (2002), 57–60.
- [66] N. K. Govil, M. A. Qazi, Q. I. Rahman, “A new property of entire functions of exponential type not vanishing in a half-plane and applications”, *Complex Var. Theory Appl.*, **48**:11 (2003), 897–908.
- [67] Т. Г. Генчев, “Неравенства для асимметрических целых функций экспоненциального типа”, *Докл. АН СССР*, **241**:6 (1978), 1261–1264; англ. пер.: T. G. Genchev, “Inequalities for asymmetric entire functions of exponential type”, *Soviet Math. Dokl.*, **19** (1978), 981–985.
- [68] С. Стойлов, *Теория функций комплексного переменного*, т. 2, ИЛ, М., 1962, 413 с.; пер. с рум.: S. Stoilow, *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă*, v. 2: *Funcții armonice. Suprafețe Riemanniene*, Editura Academiei Republicii Populare Romîne, Bucharest, 1958, 378 pp.
- [69] V. N. Dubinin, M. Vuorinen, “Robin functions and distortion theorems for regular mappings”, *Math. Nachr.*, **283**:11 (2010), 1589–1602.
- [70] И. П. Митюк, “Принцип симметризации для многосвязных областей”, *Докл. АН СССР*, **157** (1964), 268–270; англ. пер.: I. P. Mityuk, “The symmetrization principle for multiply connected domains”, *Soviet Math. Dokl.*, **5** (1964), 928–930.
- [71] И. П. Митюк, “Принцип симметризации для многосвязных областей и некоторые его применения”, *Укр. матем. журн.*, **17**:4 (1965), 46–54.
- [72] И. П. Митюк, *Симметризационные методы и их применение в геометрической теории функций. Введение в симметризационные методы*, Изд-во Кубанск. гос. ун-та, Краснодар, 1980, 90 с.
- [73] И. П. Митюк, *Применение симметризационных методов в геометрической теории функций*, Изд-во Кубанск. гос. ун-та, Краснодар, 1985, 94 с.

- [74] И. П. Митюк, “Оценки внутреннего радиуса (емкости) некоторой области (конденсатора)”, *Изв. Северо-Кавказ. научн. центра высш. шк. естеств. наук*, **43**:3 (1983), 36–38.
- [75] А. Л. Лукашов, “Неравенства для производных рациональных функций на нескольких отрезках”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:3 (2004), 115–138; англ. пер.: A. L. Lukashov, “Inequalities for the derivatives of rational functions on several intervals”, *Izv. Math.*, **68**:3 (2004), 543–565.
- [76] А. Л. Лукашов, “Оценки производных рациональных функций и четвертая задача Золотарева”, *Алгебра и анализ*, **19**:2 (2007), 122–130; англ. пер.: A. L. Lukashov, “Estimates for derivatives of rational functions and the fourth Zolotarev problem”, *St. Petersburg Math. J.*, **19**:2 (2008), 253–259.
- [77] С. В. Тышкевич, “О чебышевских полиномах на дугах окружности”, *Матем. заметки*, **81**:6 (2007), 952–954; англ. пер.: S. V. Tyshkevich, “On Chebyshev polynomials on arcs of a circle”, *Math. Notes*, **81**:6 (2007), 851–853.
- [78] Л. С. Маергойз, Н. Н. Рыбакова, “Многочлены Чебышёва с нулевым множеством на дуге окружности”, *Докл. РАН*, **426**:1 (2009), 26–28; англ. пер.: L. S. Maergoiz, N. N. Rybakova, “Chebyshev polynomials with zeros lying on a circular arc”, *Dokl. Math.*, **79**:3 (2009), 319–321.
- [79] А. Л. Лукашов, С. В. Тышкевич, “Экстремальные полиномы на дугах окружности с нулями на этих дугах”, *Изв. НАН Армении. Матем.*, **44**:3 (2009), 41–50; англ. пер.: A. L. Lukashov, S. V. Tyshkevich, “Extremal polynomials on arcs of the circle with zeros on these arcs”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **44**:3 (2009), 172–179.
- [80] В. В. Арестов, А. С. Менделев, “О тригонометрических полиномах, наименее уклоняющихся от нуля”, *Докл. РАН*, **425**:6 (2009), 733–736; англ. пер.: V. V. Arestov, A. S. Mendelev, “On trigonometric polynomials least deviating from zero”, *Dokl. Math.*, **79**:2 (2009), 280–283.
- [81] В. С. Виденский, “Экстремальные оценки производной тригонометрического полинома на отрезке, меньшем чем период”, *Докл. АН СССР*, **130** (1960), 13–16; англ. пер.: V. S. Videnskii, “Extremal estimates for the derivative of a trigonometric polynomial on an interval shorter than its period”, *Soviet Math. Dokl.*, **1** (1960), 5–8.
- [82] J.-P. Thiran, C. Dettaille, “Chebyshev polynomials on circular arcs in the complex plane”, *Progress in approximation theory*, Academic Press, Boston, MA, 1991, 771–786.
- [83] Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, ИЛ, М., 1962, 266 с.; пер. с англ.: J. A. Jenkins, *Univalent functions and conformal mapping*, *Ergeb. Math. Grenzgeb. Neue Folge*, **18**, Reihe: Moderne Funktionentheorie, Springer-Verlag, Berlin–Gottingen–Heidelberg, 1958, vi+169 pp.
- [84] A. W. Goodman, *Univalent functions*, v. I, II, Tampa, FL, Mariner Publishing Co., Inc., 1983, xvii+246; xii+311 pp.
- [85] P. L. Duren, *Univalent functions*, Grundlehren Math. Wiss., **259**, Springer-Verlag, New York, 1983, xiv+382 pp.
- [86] Ch. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps*, Grundlehren Math. Wiss., **299**, Springer-Verlag, Berlin, 1992, x+300 pp.
- [87] G. Szegő, “Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein”, *Schriften Königsberg. Gel. Ges.*, **5** (1928), 59–70.
- [88] V. K. Jain, “Generalization of certain well known inequalities for polynomials”, *Glas. Mat. Ser. III*, **32(52)**:1 (1997), 45–51.
- [89] A. Aziz, W. M. Shah, “Inequalities for the polar derivative of a polynomial”, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **29**:2 (1998), 163–173.
- [90] P. J. O’Hara, R. S. Rodriguez, “Some properties of self-inversive polynomials”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **44**:2 (1974), 331–335.

- [91] A. Aziz, B. A. Zargar, "Some inequalities for self-reciprocal polynomials", *Indian J. Pure Appl. Math.*, **27**:8 (1996), 791–794.
- [92] V. K. Jain, "Inequalities for polynomials satisfying $p(z) \equiv z^n p(1/z)$. III", *J. Indian. Math. Soc. (N.S.)*, **62**:1-4 (1996), 1–4.
- [93] M. A. Malik, "On the derivative of polynomial", *J. London Math. Soc. (2)*, **1** (1969), 57–60.
- [94] Г. Поля, Г. Сеге, *Задачи и теоремы из анализа*, т. I: Ряды. Интегральное исчисление. Теория функций, 3-е рус. изд., Наука, М., 1978, 392 с.; пер. с нем.: G. Pólya, G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, v. I: Reihen, Integralrechnung, Funktionentheorie, Dritte berichtigte Auflage, Grundlehren Math. Wiss., **19**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1964, xvi+338 pp.
- [95] В. И. Смирнов, "Sur quelques polynômes aux propriétés extrémales", *Зан. Харьк. Матем. общ-ва*, **4**:2 (1928), 69–72.
- [96] M. A. Malik, M. C. Vong, "Inequalities concerning the derivative of polynomials", *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, **34**:3 (1985), 422–426.
- [97] В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев, *Конструктивная теория функций комплексного переменного*, Наука, М.–Л., 1964, 438 с.
- [98] Н. А. Лебедев, "Некоторые оценки для функций, регулярных и однолистных в круге", *Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., физ., хим.*, **10**:11 (1955), 3–21.
- [99] С. Н. Бернштейн, *Собрание сочинений*, т. 1: Конструктивная теория функций (1905–1930), Изд-во АН СССР, М., 1952, 581 с.
- [100] P. Turan, "Über die Ableitung von Polynomen", *Compositio Math.*, **7** (1939), 89–95.
- [101] Z. Nehari, "Some inequalities in the theory of functions", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75**:2 (1953), 256–286.
- [102] Н. А. Лебедев, *Принцип площадей в теории однолистных функций*, Наука, М., 1975, 336 с.
- [103] D. V. Prokhorov, *Reachable set methods in extremal problems for univalent functions*, Saratov Univ. Publ. House, Saratov, 1993, 228 pp.
- [104] В. А. Марковъ, *О функцияхъ, наименѣе уклоняющихся отъ нуля въ данномъ промежуткѣ*, СПб., 1892, 117 с.
- [105] J. Erőd, "Bizonyos polinomok maximumának", *Mat. Fiz. Lapok*, **46** (1939), 58–83.
- [106] H. Siejka, O. Tammi, "On estimating the inverse coefficients for meromorphic univalent functions omitting a disk", *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **12**:1 (1987), 85–93.
- [107] Ch. Pommerenke, A. Vasil'ev, "Angular derivatives of bounded univalent functions and extremal partitions of the unit disk", *Pacific J. Math.*, **206**:2 (2002), 425–450.
- [108] Я. Л. Геронимус, *Теория ортогональных многочленов*, ГИТТЛ, М.–Л., 1950, 164 с.
- [109] В. И. Лебедев, *Функциональный анализ и вычислительная математика*, изд. 4-е, испр., Физматлит, М., 2000, 295 с.
- [110] M. A. Lachance, "Bernstein and Markov inequalities for constrained polynomials", *Rational approximation and interpolation* (Tampa, FL, 1983), Lecture Notes in Math., **1105**, Springer, Berlin, 1984, 125–135.
- [111] Q. I. Rahman, "On a problem of Turán about polynomials with curved majorants", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **163** (1972), 447–455.
- [112] Г. Поля, Г. Сеге, *Изопериметрические неравенства в математической физике*, Физматгиз, М., 1962, 336 с.; пер. с англ.: G. Pólya, G. Szegő, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, Annals of Mathematics Studies, **27**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1951.
- [113] W. K. Hayman, *Multivalent functions*, 2nd ed., Cambridge Tracts in Math., **110**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994, xii+263 pp.

- [114] В. Н. Дубинин, “Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 14, Зап. научн. сем. ПОМИ, **237**, ПОМИ, СПб., 1997, 56–73; англ. пер.: V. N. Dubinin, “Asymptotics of the module of a degenerating condenser and some of their applications”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **95**:3 (1999), 2209–2220.
- [115] В. Н. Дубинин, Л. В. Ковалев, “Приведенный модуль комплексной сферы”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 15, Зап. научн. сем. ПОМИ, **254**, ПОМИ, СПб., 1998, 76–94; англ. пер.: V. N. Dubinin, L. V. Kovalev, “The reduced module of the complex sphere”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **105**:4 (2001), 2165–2179.
- [116] D. Tischler, “Critical points and values of complex polynomials”, *J. Complexity*, **5**:4 (1989), 438–456.
- [117] S. Smale, “The fundamental theorem of algebra and complexity theory”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **4**:1 (1981), 1–36.
- [118] A. F. Beardon, D. Minda, T. W. Ng, “Smale’s mean value conjecture and the hyperbolic metric”, *Math. Ann.*, **322**:4 (2002), 623–632.
- [119] В. Н. Дубинин, “О покрытии вертикальных отрезков при конформном отображении”, *Матем. заметки*, **28**:1 (1980), 25–32; англ. пер.: V. N. Dubinin, “Coverings of vertical segments under a conformal mapping”, *Math. Notes*, **28**:1 (1980), 476–480.
- [120] A. Eremenko, “A Markov-type inequality for arbitrary plane continua”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **135**:5 (2007), 1505–1510.
- [121] Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала*, Наука, М., 1966, 515 с.
- [122] G. Pólya, “Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach Zusammenhängende Gebiete”, *S. B. Preuss. Akad. Wiss.*, 1928, 228–232.
- [123] Г. В. Кузьмина, “Методы геометрической теории функций. I”, *Алгебра и анализ*, **9**:3 (1997), 41–103; англ. пер.: G. V. Kuz'mina, “Methods of geometric function theory. I”, *St. Petersburg Math. J.*, **9**:3 (1998), 455–507; Г. В. Кузьмина, “Методы геометрической теории функций. II”, *Алгебра и анализ*, **9**:5 (1997), 1–50; англ. пер.: G. V. Kuz'mina, “Methods of geometric function theory. II”, *St. Petersburg Math. J.*, **9**:5 (1998), 889–930.
- [124] I. Schur, “Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten”, *Math. Z.*, **1**:4 (1918), 377–402.

В. Н. Дубинин (V. N. Dubinin)

Дальневосточный федеральный университет,
Владивосток

E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступила в редакцию

12.09.2011