Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, В. З. Энольский, Матричная реализация гиперэллиптических многообразий Куммера, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 2, 147–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm949>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 03:15:48

МАТРИЧНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ КУММЕРА

В. М. БУХШТАБЕР, Д. В. ЛЕЙКИН, В. З. ЭНОЛЬСКИЙ

Современный интерес к классической проблеме гиперэллиптических якобианов $\text{Jac}(V)$ и их многообразий Куммера $\text{Kum}(V) = \text{Jac}/\pm$ вызван замечательными приложениями в теории интегрируемых систем [1], [2]. Наш подход основан на теории гиперэллиптических функций Клейна [3], [4], в рамках которой удастся получить новые реализации многообразий $\text{Jac}(V)$ и $\text{Kum}(V)$ [5], [6].

Рассмотрим пространство $\mathcal{H}$ комплексных симметрических $(g+2) \times (g+2)$ -матриц $H = \{h_{k,s}\}$, у которых $h_{g+2,g+2} = 0$ и $h_{g+1,g+2} = 2$. Обозначим через $H \begin{bmatrix} j_1, \dots, j_s \\ i_1, \dots, i_s \end{bmatrix}$ минор матрицы H , соответствующий строкам с номерами $i_1, \dots, i_s$ и столбцам с номерами $j_1, \dots, j_s$. Сопоставим $H \in \mathcal{H}$ симметрическую $g \times g$ -матрицу $A(H) = \{a_{k,s}\}$, где $a_{k,s} = H \begin{bmatrix} k, g+1, g+2 \\ s, g+1, g+2 \end{bmatrix}$.

ЛЕММА 1. Ранг матрицы $H \in \mathcal{H}$ не превосходит 3 тогда и только тогда, когда ранг матрицы $A(H)$ не превосходит 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из тождества Сильвестра (см. [7]):

$$H \begin{bmatrix} i, g+1, g+2 \\ k, g+1, g+2 \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} j, g+1, g+2 \\ s, g+1, g+2 \end{bmatrix} - H \begin{bmatrix} i, g+1, g+2 \\ s, g+1, g+2 \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} j, g+1, g+2 \\ k, g+1, g+2 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} i, j, g+1, g+2 \\ k, s, g+1, g+2 \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} g+1, g+2 \\ g+1, g+2 \end{bmatrix}.$$

Положим $K\mathcal{H} = \{H \in \mathcal{H} : \text{rank } H \leq 3\}$. Для каждой комплексной симметрической $g \times g$ -матрицы $A = \{a_{k,s}\}$ ранга не более 1 существует определенный с точностью до знака g -мерный вектор-столбец $Z = Z(A)$ такой, что $A = -4Z \cdot Z^T$, где T – символ транспонирования.

Введем вектора $H_k = \{h_{k,s}; s = 1, \dots, g\} \in \mathbb{C}^g$.

ЛЕММА 2. *Отображение*

$$\gamma: K\mathcal{H} \rightarrow (\mathbb{C}^g/\pm) \times \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^1, \quad \gamma(H) = (Z(A(H)), H_{g+1}, H_{g+2}, h_{g+1,g+1}),$$

является гомеоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из соотношения:

$$4\hat{H} = 4Z \cdot Z^T + 2(H_{g+2}H_{g+1}^T + H_{g+1}H_{g+2}^T) - h_{g+1,g+1}H_{g+2}H_{g+2}^T,$$

где $\hat{H}$ – матрица, составленная из векторов-столбцов H_k , $k = 1, \dots, g$, а $Z = (Z(A(H)))$.

Введем двулистное разветвленное накрытие $\pi: J\mathcal{H} \rightarrow K\mathcal{H}$, индуцированное накрытием $\mathbb{C}^g \rightarrow (\mathbb{C}^g/\pm)$ при помощи отображения γ .

СЛЕДСТВИЕ. $\hat{\gamma}: J\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^{3g+1}$.

Рассмотрим теперь универсальное пространство W_g g -х симметрических степеней гиперэллиптических кривых вида

$$V = \left\{ (y, x) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = 4x^{2g+1} + \sum_{k=0}^{2g} \lambda_{2g-k} x^{2g-k} \right\}$$

как алгебраическое подмногообразие в $(\mathbb{C}^2)^g \times \mathbb{C}^{2g+1}$ с координатами

$$\{(y_1, x_1), \dots, (y_g, x_g), \lambda_{2g}, \dots, \lambda_0\},$$

где $(\mathbb{C}^2)^g$ есть g -я симметрическая степень пространства $\mathbb{C}^2$.

Зададим отображение $\lambda: J\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^{3g+1} \rightarrow (\mathbb{C}^2)^g \times \mathbb{C}^{2g+1}$ следующим образом: для $G = (Z, H_{g+1}, H_{g+2}, h_{g+1,g+1}) \in \mathbb{C}^{3g+1}$ построим согласно лемме 2 матрицу $\pi(G) = H = \{h_{k,s}\} \in K\mathcal{H}$ и положим $\lambda(G) = \{(y_k, x_k), \lambda_q; k = 1, \dots, g, q = 0, \dots, 2g\}$, где $x_1, \dots, x_g$ – набор корней уравнения $2x^g + H_{g+2}^T X = 0$, а $y_k = Z^T X_k$, $\lambda_q = \sum_{i+j=q+2} h_{i,j}$. Здесь $X_k = (1, x_k, \dots, x_k^{g-1})^T$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 94-01-01444), Международного научного фонда (гранты № M3Z000(ВМБ), № U44000(ВЗЭ)), INTAS 93-1324 (ВЗЭ и ДВЛ).

ТЕОРЕМА 1. *Отображение λ индуцирует отображение $J\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^{3g+1} \rightarrow W_g$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверка показывает, что имеет место тождество

$$X_k^T A X_s + 4 \sum_{i,j=1}^{g+2} h_{i,j} x_k^{i-1} x_s^{j-1} = 0,$$

где $A = A(H)$ и $H = \pi(G)$. Полагая $k = s$ и используя соотношение $A = -4Z \cdot Z^T$, получаем $y_k^2 = 4x_k^{2g+1} + \sum_{s=0}^{2g} \lambda_{2g-s} x_k^{2g-s}$.

Теперь все готово для описания нашей реализации многообразий

$$T^g = \text{Jac}(V) \quad \text{и} \quad K^g = \text{Kum}(V)$$

для гиперэллиптических кривых в терминах σ -функций Клейна [3].

Имеем: $\wp_{pq} = -\frac{\partial^2 \ln \sigma(u)}{\partial u_p \partial u_q}$, $\wp_{pqr} = -\frac{\partial^3 \ln \sigma(u)}{\partial u_p \partial u_q \partial u_r}$, $p, q, r = 1, \dots, g$, где $u = (u_1, \dots, u_g)$ и $u_k = \sum_{j=1}^g \int_{x_0}^{x_i} \frac{x^{k-1} dx}{y}$ (см. [3], [4], а также [5], [6]).

Для каждой неособой кривой $V = \{(y, x), y^2 = 4x^{2g+1} + \sum_{s=0}^{2g} \lambda_{2g-s} x^{2g-s}\}$ зададим следующее отображение $\gamma: T^g \setminus (\Theta) \rightarrow \mathcal{H}$: $\gamma(u) = H = \{h_{k,s}\}$, где $h_{k,s} = 4\wp_{k-1,s-1} - 2(\wp_{s,k-2} + \wp_{s-2,k}) + \frac{1}{2}[\delta_{ks}(\lambda_{2s-2} + \lambda_{2k-2}) + \delta_{k+1,s}\lambda_{2k-1} + \delta_{k,s+1}\lambda_{2s-1}]$. Здесь (Θ) – тета дивизор и $\delta_{k,s}$ – символ Кронекера.

ТЕОРЕМА 2. *Отображение γ индуцирует отображение $T^g \setminus (\Theta) \rightarrow K\mathcal{H}$ такое, что $\wp_{ggk}\wp_{ggs} = -\frac{1}{4}a_{ks}(\gamma(u))$, т.е. γ поднимается до отображения*

$$\tilde{\gamma}: T^g \setminus (\Theta) \rightarrow J\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^{3g+1} \quad \text{с} \quad Z = (\wp_{gg1}, \dots, \wp_{ggg})^T.$$

Композиция отображений $\lambda\tilde{\gamma}: T^g \setminus (\Theta) \rightarrow W_g$ определяет обращение отображения Абеля $A: (V)^g \rightarrow T^g$ в форме Клейна (см. [3], [5]), и, следовательно, отображение $\tilde{\gamma}$ является вложением.

Таким образом, получена явная реализация многообразия Куммера $T^g \setminus (\Theta)/\pm$ гиперэллиптической кривой V рода g в виде подмногообразия в многообразии матриц $K\mathcal{H}$. Следствием теоремы 2 является, в частности, новое доказательство теоремы Б. А. Дубровина и С. П. Новикова о рациональности универсального пространства якобианов гиперэллиптических кривых V рода g с выделенной точкой ветвления $E_{2g+2} = \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. // УМН. 1976. Т. 31. №1. С. 55–135. [2] Мамфорд Д. Лекции о тэта-функциях. М.: Мир, 1988. [3] Klein F. // Math. Ann. 1888. V. 32. P. 351–380. [4] Baker H. F. // Amer. Journ. Math. 1898. V. 20. P. 301–384. [5] Бухштабер В. М., Энцольский В. З. // Функци. анализ и его прилож. 1996. Т. 30. №1. [6] Лейкин Д. В. // УМН. 1995. Т. 50. №6. С. 191–192. [7] Хорн Ч., Джонсон Р. Матричный анализ. М.: Мир, 1990. [8] Дубровин Б. А., Новиков С. П. // ДАН СССР. 1974. Т. 219. №3. С. 531–534.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова, Москва;
Институт магнетизма НАН Украины, Киев

Принято редколлегией
23.01.1996