Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, Асимптотика полиномов Эрмита–Паде I рода для пары функций, образующих систему Никишина, *УМН*, 2012, том 67, выпуск 5, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9493>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 13:12:22

Асимптотика полиномов Эрмита–Паде I рода для пары функций, образующей систему Никишина

Е. А. Рахманов, С. П. Суетин

1. Пусть $E = \bigsqcup_{j=1}^p [\alpha_{2j-1}, \alpha_{2j}]$ – система из p , $p \geq 1$, непересекающихся отрезков на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Положим $w_\alpha(z) = \sqrt{(z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_{2p})}$; $w_\alpha(z) \sim z^p$ при $z \rightarrow \infty$ в области $D := \mathbb{C} \setminus E$. Через $w_\alpha^\pm(x)$, $x \in E$, обозначим предельные значения функции $w_\alpha(x + iy)$ при $y \rightarrow +0$. Пусть $\Sigma_\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_q\} \subset D$, $q \geq 2$, – конечное множество и задана функция $h: E \rightarrow \mathbb{R}$, голоморфная на E ($h \in \mathcal{H}(E)$) и такая, что h продолжается с E по любому пути, лежащему в области $\Omega_\beta := \mathbb{C} \setminus \Sigma_\beta$, как многозначная аналитическая функция и $h \notin \mathcal{H}(\Omega_\beta)$; класс таких функций будем обозначать через $\mathcal{H}_E^\circ(\Omega_\beta)$.

Пусть $K \subset D$ – произвольный компакт, не разбивающий комплексную плоскость, $D(K) = \mathbb{C} \setminus K$; область $D(K)$ будем считать регулярной относительно решения задачи Дирихле. Для заданной функции $h \in \mathcal{H}_E^\circ(\Omega_\beta)$ через $\mathfrak{K}_h = \mathfrak{K}_h(E)$ будем обозначать класс всех компактов $K \subset D$ таких, что функция h продолжается с E в $D(K)$ как голоморфная (однозначная аналитическая) функция.

2. Через $M_1(K)$ обозначим множество всех единичных (положительных борелевских) мер с носителями на K . Пусть $g_E(z, \zeta)$ – функция Грина для области D , $V^\mu(z) = -\int \log |z - \zeta| d\mu(\zeta)$ – логарифмический, а $G_E^\mu(z) = \int g_E(z, \zeta) d\mu(\zeta)$ – гринов потенциалы меры $\mu \in M_1(K)$, $\psi(z) = 3g_E(z, \infty)$,

$$J(K; \mu) = \iint_{K \times K} \left(3 \log \frac{1}{|z - \zeta|} + g_E(z, \zeta) + \psi(z) + \psi(\zeta) \right) d\mu(z) d\mu(\zeta) \quad (1)$$

– (удвоенная) энергия меры $\mu \in M_1(K)$,

$$3V^\mu(z) + G_E^\mu(z) + \psi(z) \quad (2)$$

– потенциал меры μ с внешним полем $\psi(z)$. Существует единственная *экстремальная* мера $\lambda_K \in M_1(K)$, для которой выполняется равенство $J(K; \lambda_K) = \inf_{\mu \in M_1(K)} J(K; \mu)$; мера λ_K является (единственной) *равновесной* мерой для потенциала (2): $3V^{\lambda_K}(z) + G_E^{\lambda_K}(z) + \psi(z) \equiv w$, $z \in K$, w – постоянная равновесия (см. [5], [6], [7], [9]).

3. Пусть $h \in \mathcal{H}_E^\circ(\Omega_\beta)$. Компакт $F \in \mathfrak{K}_h$ назовем *стационарным* (в классе $\mathfrak{K}_h$) для функционала энергии (1), если для этого компакта выполняется равенство

$$J(F; \lambda_F) = \sup_{K \in \mathfrak{K}_h} J(K; \lambda_K) = \sup_{K \in \mathfrak{K}_h} \inf_{\mu \in M_1(K)} J(K; \mu). \quad (3)$$

Будем говорить, что допустимый компакт $\Gamma \in \mathfrak{K}_h$ обладает *S-свойством* (или является *S-компактом*) относительно потенциала (2), если выполняются следующие условия: Γ не разбивает плоскость, т. е. $\Omega(\Gamma) = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ – область; Γ состоит из конечного числа аналитических дуг и выполняется равенство

$$\frac{\partial(3V^{\lambda_F} + G_E^{\lambda_F} + \psi)}{\partial n^+}(z) = \frac{\partial(3V^{\lambda_F} + G_E^{\lambda_F} + \psi)}{\partial n^-}(z), \quad z \in \Gamma^0, \quad (4)$$

где Γ^0 – совокупность открытых дуг, составляющих Γ , $\partial/\partial n^\pm$ – нормальные производные, взятые с противоположных сторон Γ ; для такого компакта $\Gamma = \Gamma(h)$ будем писать $\Gamma \in \mathcal{S} = \mathcal{S}(h)$.

4. Пусть $h \in \mathcal{A}_E^\circ(\Omega_\beta)$, $\rho(x)$ – вещественнозначная функция, заданная и голоморфная на E и такая, что $i\rho(x)/w_\alpha^+(x) > 0$, $x \in E$. Положим

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{1}{x-z} \frac{\rho(x) dx}{w_\alpha^+(x)}, \quad f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{h(x)}{x-z} \frac{\rho(x) dx}{w_\alpha^+(x)}, \quad z \in D. \quad (5)$$

Тогда $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(D)$ и пара функций f_1, f_2 образует систему Никишина (см. [12], [8], [1]): $\Delta f_2(x)/\Delta f_1(x) = h(x)$, $x \in E$, где $\Delta f_j(x) = (f_j^+ - f_j^-)(x)$, $j = 1, 2$. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ полиномы Эрмита–Паде I рода (см. [5], [13], [14], [2], [3], [15], [16]) степени $\leq n$ определяются (неоднозначно) из соотношения

$$(Q_{n,0} + Q_{n,1}f_1 + Q_{n,2}f_2)(z) = O(z^{-2n-2}), \quad z \rightarrow \infty.$$

Пусть $Q_{n,j}^*$ – монические полиномы, соответствующие $Q_{n,j}$, $j = 1, 2$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть f_1 и f_2 заданы формулами (5), где $h \in \mathcal{A}_E^\circ(\Omega_\beta)$ и существует S -компакт $\Gamma = \Gamma(h)$, принадлежащий $\mathcal{S} \cap \mathfrak{K}_h$. Тогда существуют пределы

$$|Q_{n,j}^*(z)|^{1/n} \xrightarrow{\text{cap}} \exp(-V^{\lambda_\Gamma}(z)), \quad n \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2, \quad z \in \Omega(\Gamma), \quad (6)$$

$$\frac{Q_{n,1}}{Q_{n,2}}(z) \xrightarrow{\text{cap}} -h(z), \quad n \rightarrow \infty, \quad z \in \Omega(\Gamma). \quad (7)$$

Доказательство теоремы 1 основано на общем методе Гончара–Рахманова, разработанном в [7] при решении “задачи об $1/9$ ” (ср. [14], [1], [4]).

5. Пусть $\hat{E}_\rho$, $\rho > 1$, – семейство эллипсов, канонических относительно $\hat{E} = [\alpha_1, \alpha_{2p}]$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $h \in \mathcal{A}_E^\circ(\Omega_\beta)$ такова, что $h \in \mathcal{H}(\hat{E}_\rho)$, где $\rho > \sqrt{2}$. Тогда в классе $\mathfrak{K}_h$ существует компакт $F \in \mathfrak{K}_h$, стационарный для функционала энергии (1); F является S -компактом относительно потенциала (2), $F \in \mathcal{S}(h)$.

Доказательство теоремы 2 проводится по следующей схеме (см. [11]): сначала устанавливается существование стационарного компакта, затем вариационным методом исследуются его структурные свойства (ср. [10], [11], [9]).

Список литературы

- [1] А. И. Аптекарев, Докл. РАН, **422**:4 (2008), 443–445. [2] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, Матем. сб., **201**:2 (2010), 29–78. [3] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, Д. Н. Туляков, Матем. сб., **202**:2 (2011), 3–56. [4] А. И. Аптекарев, А. Э. Койэлаарс, УМН, **66**:6(402) (2011), 123–190. [5] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, Тр. МИАН СССР, **157** (1981), 31–48. [6] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, Матем. сб., **125**(167):1(9) (1984), 117–127. [7] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, Матем. сб., **134**(176):3(11) (1987), 306–352. [8] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, В. Н. Сорокин, Матем. сб., **188**:5 (1997), 33–58. [9] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, УМН, **66**:6(402) (2011), 3–36. [10] A. Martínez-Finkelshtein, E. A. Rakhmanov, Comm. Math. Phys., **302**:1 (2011), 53–111. [11] А. Мартинес-Финкельштейн, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, Матем. сб., **202**:12 (2011), 113–136. [12] Е. М. Никишин, Матем. сб., **113**(155):4(12) (1980), 499–519. [13] J. Nuttall, J. Approx. Theory, **42**:4 (1984), 299–386. [14] J. Nuttall, G. M. Trojan, Constr. Approx., **3**:1 (1987), 13–29. [15] Е. А. Рахманов, Матем. сб., **202**:1 (2011), 133–140. [16] В. Н. Сорокин, Матем. сб., **201**:10 (2010), 137–160.

Е. А. Рахманов (E. A. Rakhmanov)
University of South Florida,
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: rakhmano@shell.cas.usf.edu

Представлено С. Ю. Немировским
Принято редколлегией
10.01.2012

С. П. Суетин (S. P. Suetin)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: suetin@mi.ras.ru