Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Штогрин, Критерий вырожденности выпуклого многогранника, *УМН*, 2012, том 67, выпуск 5, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9494>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 14:44:40

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Критерий вырожденности выпуклого многогранника

М. И. Штогрин

Для любой 2-мерной полиэдральной поверхности неотрицательной кривизны, гомеоморфной сфере $\mathbb{S}^2$, в $\mathbb{R}^3$ существует выпуклый многогранник, чья поверхность изометрична ей, см. [1]. Не исключено, что многогранник будет *вырожден*, т. е. его объем равен 0. В этом случае его поверхность состоит из двух расположенных в $\mathbb{R}^2$ идентичных выпуклых 2-мерных многоугольников с отождествленными контурами.

Ниже дан критерий, с помощью которого по заданной абстрактной сфере можно узнать, будет соответствующий ей выпуклый многогранник вырожден или нет.

Абстрактная 2-мерная поверхность склеивается из конечного числа выпуклых евклидовых многоугольников. Склеиваются стороны многоугольников одинаковой длины. Если поверхность гомеоморфна сфере $\mathbb{S}^2$, то назовем ее *абстрактной сферой*. Число ее вершин v , ребер e , граней f связывает формула Эйлера $v - e + f = 2$.

Неотрицательность кривизны $\omega = 2\pi - \sum \alpha$ абстрактной сферы в ее вершине означает, что сумма плоских углов, сходящихся в этой вершине, не превышает 2π , т. е. $\sum \alpha \leq 2\pi$. В силу формулы Эйлера полная кривизна $\Omega = \sum \omega$ абстрактной сферы равна 4π . Следовательно, ее кривизна не менее чем в трех вершинах положительна.

Сохранив выпуклость поверхности с твердыми гранями, изменить двугранные углы невозможно — она останется прежней или скачком будет вывернута наизнанку¹:

ТЕОРЕМА КОШИ. Если замкнутые выпуклые многогранные поверхности изометричны и эта изометрия каждую грань переводит в грань, то они конгруэнтны.

ТЕОРЕМА АЛЕКСАНДРОВА. (i) Любые две выпуклые замкнутые многогранные 2-мерные поверхности в $\mathbb{R}^3$ конгруэнтны, если и только если они изометричны.

(ii) Пусть кривизна абстрактной 2-мерной сферы в ее вершинах положительна. Тогда в $\mathbb{R}^3$ существует выпуклый многогранник, чья поверхность изометрична ей.

ТЕОРЕМА ОЛОВЯНИШНИКОВА. Если поверхность компактного выпуклого тела и поверхность выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^3$ изометричны, то они конгруэнтны.

В теореме Коши не исключено существование неконгруэнтных выпуклых многогранников в $\mathbb{R}^3$ с изометричными поверхностями. Однако так не бывает, что доказано методом Коши в теореме Александрова (i). В теореме Оловянишникова доказана единственность поверхности выпуклого многогранника среди изометричных ей поверхностей в более широком классе — в классе всех выпуклых тел, имеющих в $\mathbb{R}^3$.

Работа выполнена при поддержке Правительства РФ (договор № 11.Г34.31.0053), программы “Ведущие научные школы” (проект НШ-4995.2012.1) и РФФИ (проект 11-01-00633).

¹Эта многогранная поверхность зеркально симметрична исходной, т. е. конгруэнтна ей.

Если в теореме Александрова (ii) многогранник вырожден, то он состоит из двух равных выпуклых многоугольников с общим краем. Его ребра являются однократными кратчайшими между вершинами. Все они составляют простой реберный цикл.

Критерий. Пусть при условиях теоремы Александрова (ii) существует простой реберный цикл C , состоящий из всех однократных кратчайших между вершинами положительной кривизны абстрактной сферы², а для любых двух вершин положительной кривизны, не связанных ребром³ из цикла C , имеются двукратные кратчайшие между ними. Тогда выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^3$, существующий по утверждению теоремы (ii), вырожден – две его грани имеют общий край C . Он расположен в $\mathbb{R}^2$.

Опираясь на критерий и (ii), заново докажем теорему 2 из [2], см. также [3]:

ТЕОРЕМА ЗИЛЬБЕРБЕРГ. Если вещественные числа k_i удовлетворяют условиям

$$0 < k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n < 2\pi, \quad k_1 + k_2 + \dots + k_n = 4\pi,$$

где $n \geq 4$, $1 \leq i \leq n$, то в $\mathbb{R}^3$ существует невырожденный выпуклый многогранник с n вершинами, в которых кривизны граничной поверхности равны $k_1, k_2, \dots, k_n$.

Если $k_1 + k_2 = 2\pi$, то $n = 4$, $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = \pi$, следовательно, выпуклым многогранником, фигурирующим в теореме, может служить правильный тетраэдр.

Пусть $k_1 + k_2 < 2\pi$. Отложим одну за другой дуги $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, где $\alpha_i = k_i/2$, на единичной окружности. Касательные к окружности в точках сочленения дуг ограничивают выпуклый многоугольник $A_1 \dots A_n$ с углами $\pi - \alpha_i$ в вершинах A_i . Наложим на него идентичный ему многоугольник и склеим с ним по общему краю. Получим абстрактную сферу S , представленную в виде вырожденного выпуклого многогранника. Ее кривизна в вершине A_i равна $\omega_i = 2\pi - 2(\pi - \alpha_i) = k_i$. Здесь $C = A_1 A_2 \dots A_n A_1$.

Сторона $A_1 A_2$ и продолжения сторон $A_3 A_2$ и $A_n A_1$ составляют треугольник $OA_1 A_2$ с углом $\pi - \alpha_1 - \alpha_2$ в O . Точки касания сторон $A_3 A_2$ и $A_n A_1$ к исходной окружности на обоих многоугольниках соединим дугами окружностей с центром в O . Они составят замкнутую кривую γ . Разрежем S по γ на два куска. Кусок, содержащий A_1 и A_2 , сместим на достаточно малую часть кривой γ при скольжении ее по себе. Получим абстрактную сферу S' с теми же кривизнами в вершинах $A'_1, A'_2, A_3, \dots, A_n$, где A'_1 и A'_2 – новые положения бывших вершин A_1 и A_2 . Иначе говоря, кусок, разрезанный по ребру $A_1 A_2$, и два треугольника $OA_1 A_2$ вместе составляют поверхность, изометричную круговому конусу. Сместим эту поверхность по себе, вращая шкивы⁴ OA_3 и OA_n . Тогда A_1 и A_2 займут новые положения A'_1 и A'_2 , а два кратных отрезка $A_1 A_2$ займут положения кратчайших между A'_1 и A'_2 , перекинутых через шкивы. (Точки A'_1 и A'_2 лежат на концентрических окружностях с центром O ; $A_3 A'_1 < A_3 A_1$, $A_n A'_2 < A_n A_2$; $\angle A_3 O A'_2 = \angle A'_1 O A_n$.) Отождествив эти кратчайшие, вернемся к S' . Для нее критерий не выполнен, так как в A'_1 сходятся по меньшей мере три однократные кратчайшие $A'_1 A'_2, A'_1 A_3, A'_1 A_n$, $n \neq 3$. В силу (ii) сфера S' изометрична поверхности невырожденного выпуклого многогранника с кривизнами $k_1, k_2, \dots, k_n$.

Список литературы

- [1] А. Д. Александров, *Выпуклые многогранники*, Гостехиздат, М.–Л., 1950. [2] А. А. Зильберберг, УМН, 17:4 (1962), 119–126. [3] Д. Зингер, *Исследования по метрической теории поверхностей*, Сб. статей, Математика: новое в зарубежной науке, 18, Мир, М., 1980, 53–59.

М. И. Штогрин (M. I. Shtogrin)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: stogrin@mi.ras.ru

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редакцией
30.08.2012

²В вершине положительной кривизны сходится не менее двух однократных кратчайших.

³Достаточно испытать те пары вершин, которые смежны с каждой вершиной из цикла C .

⁴Здесь шкивы не цилиндры, а круговые конусы нулевого радиуса с осями OA_3 и OA_n .