Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, Комплексные кобордизмы и формальные группы, *УМН*, 2012, том 67, выпуск 5, 111–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9496>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 15:28:34

УДК 515.164.24+515.171.36+512.741

Комплексные кобордизмы и формальные группы

В. М. Бухштабер

Обзор посвящен современному состоянию теории кобордизмов. В центре внимания геометрические и универсальные свойства комплексных кобордизмов, алгебра Ландвебера–Новикова и формальная группа геометрических кобордизмов. Описываются связи с K -теорией, теорией алгебраических циклов, теорией формальных групп, теорией действия компактных групп Ли на многообразиях, торической топологией, теорией бесконечномерных алгебр Ли и теорией нильмногообразий. Обсуждаются ключевые результаты и нерешенные задачи.

Библиография: 124 названия.

Ключевые слова: алгебра Ландвебера–Новикова, операции Адамса–Новикова, характер Чженя–Дольда, спектральная последовательность Атья–Хирцебруха, род Хирцебруха.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	112
2. Алгебра операций.....	113
3. Спектральная последовательность Адамса–Новикова.....	115
4. Классы Тома и гомоморфизмы Гизина.....	117
5. Мультипликативные преобразования.....	123
6. Формальная группа геометрических кобордизмов.....	125
7. Операции Адамса–Новикова и степенные системы.....	128
8. Характеры Чженя и Чженя–Дольда.....	131
9. Спектральная последовательность Атья–Хирцебруха.....	137
10. Проекторы в теории кобордизмов.....	141
11. Двухзначные формальные группы.....	145
12. Квантовые группы и операторные дубли.....	148
13. Задачи о действиях групп.....	151
14. Роды Хирцебруха.....	157
15. Эллиптические формальные группы.....	160
16. Общая проблема Милнора–Хирцебруха.....	162
17. Алгебры Ли векторных полей и нильмногообразия.....	164

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00694) и гранта Правительства РФ по постановлению № 220 (договор 11.G34.31.0053).

© В. М. БУХШТАБЕР, 2012

18. Алгебраические кобордизмы	166
Список литературы	167

1. Введение

Настоящий обзор представляет собой современную версию обзора [1].

Рекомендую прочесть энциклопедическую статью С. П. Новикова [2], а также его предисловие [3] к книге [4], содержащие оценки роли теории кобордизмов в современном развитии алгебраической топологии и ее связей с другими разделами математики. В [4] читатель найдет многие статьи, результаты которых обсуждаются в данном обзоре. Основные определения и конструкции можно найти в [5].

Понятие цикла в пространстве X как образа отображения $f: M \rightarrow X$ гладкого замкнутого многообразия содержится в работе А. Пуанкаре [6]. Цикл считается гомологичным нулю, если отображение f продолжается до отображения $W \rightarrow X$, где W – гладкое многообразие с границей $\partial W = M$. Соответствующее понятие коцикла опирается на конструкцию Понтрягина–Тома, сопоставляющую вложению гладких многообразий $i: M_1 \rightarrow M_2$, где $\partial M_1 = \emptyset$ и $i(M_1) \cap \partial M_2 = \emptyset$, отображение $M_2/\partial M_2 \rightarrow T\nu$, где ν – нормальное расслоение вложения i и $T\nu = D\nu/\partial D\nu$ – его пространство Тома, а $D\nu \subset \nu$ – подрасслоение со слоем единичный шар.

На основе этих понятий строятся теории гомологий и когомологий – теории бордизмов и кобордизмов в терминологии М. Атья (см. [7]).

Эти построения существенно опираются на фундаментальное понятие трансверсальной регулярности отображения многообразий [8].

Теории комплексных бордизмов $U_*(\cdot)$ и кобордизмов $U^*(\cdot)$ используют стабильно комплексные многообразия (U -многообразия), т. е. гладкие многообразия, допускающие вложения $M^n \subset \mathbb{R}^N$ с комплексным нормальным расслоением.

Группа $\Omega_U = U^*(\text{pt}) \simeq U_*(\text{pt})$ была независимо вычислена Дж. Милнором в [9] и С. П. Новиковым в [10]. Доказательство *кольцевого* изоморфизма $\Omega_U \simeq \mathbb{Z}[a_1, \dots, a_n, \dots]$, $\deg a_n = -2n$, который известен как теорема Милнора–Новикова, впервые было опубликовано в [11].

В докладе С. П. Новикова на Международном математическом конгрессе (Москва, 1966) была выдвинута программа приложений теории комплексных кобордизмов к актуальным проблемам алгебраической топологии. Подробное изложение и развитие этой программы, использующее введенную А. С. Мищенко и С. П. Новиковым *формальную группу геометрических кобордизмов*, было дано в [12].

В предисловии к [12] говорится: “В процессе работы автору пришлось столкнуться с целым рядом новых и весьма заманчивых алгебраических и топологических ситуаций, аналоги которых в классическом случае либо полностью отсутствуют, либо сильно вырождаются; многие из них пока глубоко не рассмотрены. Все это позволяет высказать надежду на перспективность этого круга идей и методов как в отношении применений к известным классическим

проблемам теории гомологий, так и в постановке и решении новых задач, от которых можно ждать появления нетрадиционных алгебраических связей и понятий”.

Развитие алгебраических понятий, открытых в [12], можно найти в [13]–[17].

Обзор посвящен ключевым объектам программы С.П. Новикова – алгебре всех когомологических операций в теории комплексных кобордизмов и формальной группе геометрических кобордизмов.

В обзоре описано развитие постановок задач, понятий и связей, в которых алгебра всех когомологических операций и формальные группы в кобордизмах играют важную роль. В центре внимания – конструкции и результаты, актуальные:

- для алгебраической топологии, включая теорию родов Хирцебруха и теорию действия групп на многообразиях с приложениями алгебро-числовой теории формальных групп и теории эллиптических функций;
- для алгебры, включая теорию алгебр Хопфа, теорию квантовых групп (см. [18], [19]) и теорию операторных дублей как алгебр дифференциальных операторов (см. [16], [20]);
- для алгебраической геометрии, включая мотивную теорию (см. [21]) прямого образа и алгебраические кобордизмы с аналогом алгебры Ландвебера–Новикова (см. [15]).

2. Алгебра операций

Алгебра всех когомологических операций $\mathcal{A}_U$ в теории комплексных кобордизмов была описана С.П. Новиковым в [12]. В этой алгебре имеется подалгебра S , построенная на основе *характеристических классов Чженя–Коннера–Флойда* $cf_k(\xi)$, $k = 1, 2, \dots$, комплексных векторных расслоений ξ (см. разд. 4 и 5). Алгебра S имеет структуру связной градуированной алгебры Хопфа $S = \sum_{q \geq 0} S_{2q}$, где $S_0 = \mathbb{Z}$. Она была независимо введена С.П. Новиковым в [12] и П. Ландвебером в [22] и получила название алгебры Ландвебера–Новикова.

Единица 1 алгебры S является образующей группы S_0 . Базис группы S_{2q} , $q > 0$, образуют операции s_ω , где ω пробегает все разбиения $\omega = (i_1, \dots, i_k)$ числа q , т. е. $i_l > 0$ и $\sum_{l=1}^k i_l = |\omega| = q$.

В аддитивном базисе $\{s_\omega\}$ диагональ в алгебре Хопфа S задается формулой

$$\Delta s_\omega = \sum_{(\omega', \omega'')=\omega} s_{\omega'} \otimes s_{\omega''}. \quad (1)$$

Следовательно, в каждой группе S_{2q} , $q > 0$, имеется в точности один примитивный элемент s_q , соответствующий разбиению (q) .

Имеет место изоморфизм $S_* = \text{Hom}(S, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[m_1, \dots, m_n, \dots]$, где m_n – элемент двойственный операции s_q в аддитивном базисе $\{s_\omega\}$. Каноническое

вложение $\Omega_U \subset S_*$ задается формулой $\langle \sigma, s_\omega \rangle = \varepsilon s_\omega(\sigma)$, $\sigma \in \Omega_U$, где $\varepsilon: \Omega_U \rightarrow \Omega_U^0 = \mathbb{Z}$ аугментация кольца Ω_U . Класс кобордизмов $[M^{2n}]$ мультипликативно неразложим в кольце Ω_U тогда и только тогда, когда $s_n([M^{2n}]) \neq 0$.

Для любого клеточного пространства X действие алгебры Хопфа S на кольце $U^*(X)$ является милноровским (в терминологии работы [23]), т. е.

$$s_\omega(a \cdot b) = \sum_{(\omega', \omega'')=\omega} s_{\omega'}(a) s_{\omega''}(b). \quad (2)$$

В частности, операторы s_q являются дифференцированиями колец $U^*(X)$.

Рассмотрим универсальное комплексное линейное расслоение $\eta \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$, где $\mathbb{C}P^\infty$ – прямой предел комплексных проективных пространств $\mathbb{C}P^n$. Имеем $U^*(\mathbb{C}P^\infty) = \Omega_U[[u]]$, где $u = cf_1(\eta)$. Действие алгебры Хопфа S на $U^*(\mathbb{C}P^\infty)$ задает ее милноровское действие на кольце $\mathbb{Z}[[u]]$ такое, что

$$s_\omega u = \begin{cases} u^{q+1}, & \text{если } \omega = (q); \\ 0, & \text{если } \omega \neq (q), q > 0. \end{cases} \quad (3)$$

Умножение в алгебре S однозначно определяется тем, что ее соответствующее милноровское действие на $\mathbb{Z}[[u_1, \dots, u_N]]$ индуцирует точное представление группы $\sum_{q=0}^m S_{2q}$ для любого $m \leq N$. Из этого свойства и формулы (3) следует, что операция s_ω , $\omega = (i_1, \dots, i_k)$, определяется формулой

$$s_\omega u(N) = u(N) c_\omega, \quad (4)$$

где $u(N) = u_1 \cdots u_N$, $N \geq |\omega|$ и $c_\omega = c_\omega(u_1, \dots, u_N)$ – симметрическая функция, соответствующая моному $u_1^{i_1} \cdots u_k^{i_k}$. Например,

$$s_q u(N) = u(N) \sum u_1^q; \quad s_{(1,1)} u(N) = u(N) \sum u_1 u_2.$$

Из формулы (4) выводятся формулы для композиции $s_{\omega_1} \cdot s_{\omega_2}$ операций s_{ω_1} и s_{ω_2} , а также их коммутатора $[s_{\omega_1}, s_{\omega_2}]$. Например,

$$s_1^2 = 2(s_2 + s_{(1,1)}). \quad (5)$$

Важной является формула

$$[s_{q_1}, s_{q_2}] = (q_2 - q_1) s_{q_1+q_2}, \quad (6)$$

из которой, в частности, следует, что

$$s_{2q+1} = [s_q, s_{q+1}], \quad q \geq 1; \quad 2s_{2q} = [s_{q-1}, s_{q+1}], \quad q \geq 2. \quad (7)$$

Алгебра Хопфа, порожденная примитивными элементами, называется алгеброй Хопфа–Ли.

Ясно, что свободная градуированная алгебра $\mathcal{F} = \mathbb{Z}\langle s_1, \dots, s_n, \dots \rangle$, $\deg s_n = 2n$, с диагональю $\Delta s_n = s_n \otimes 1 + 1 \otimes s_n$ является универсальной алгеброй

Хопфа–Ли в категории алгебр Хопфа–Ли со счетным числом мультипликативных образующих.

Обозначим через $\hat{S} \subset S$ образ канонического гомоморфизма алгебр Хопфа $\mathcal{F} \rightarrow S$. Имеем $S \otimes \mathbb{Q} = \hat{S} \otimes \mathbb{Q}$ и $\hat{S} \left[\frac{1}{2} \right] \simeq \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \langle s_1, s_2 \rangle / J_2$, где J_2 – ядро гомоморфизма $\mathbb{Z} \langle s_1, s_2 \rangle \rightarrow \hat{S}$. Алгебра Хопфа $\hat{S}$ определяет алгебру Ли с аддитивным базисом s_q , $q = 1, 2, \dots$, и скобкой Ли (6).

Положим

$$s_1(1) = [s_1, s_2] \quad \text{и} \quad s_2(1) = [s_2, s_1] = -s_1(1)$$

и для $k > 1$ введем индуктивно в свободной алгебре $\mathbb{Z} \langle s_1, s_2 \rangle$ элементы

$$s_1(k) = [s_1, s_1(k-1)] \quad \text{и} \quad s_2(k) = [s_2, s_2(k-1)].$$

Идеал $J_2 \otimes \mathbb{Q}$ имеет две образующие

$$s_1(3) + 6s_2(2) \quad \text{и} \quad s_1(5) + 40s_2(3).$$

Алгебра $\mathcal{A}_U$ содержит также подкольцо Ω_U – алгебру операторов умножения на скаляры. Представление алгебры S на кольце Ω_U , соответствующее милноровскому действию кохомологических операций на кольце кохомологий точки, называется *каноническим*. В подходе С.П.Новикова большую роль играет *точность* этого представления, что принципиально отличает алгебру S от классической алгебры Стиррода кохомологических операций.

Операции из подалгебр S и Ω_U алгебры $\mathcal{A}_U$ не коммутируют. Из (2) вытекает *правило коммутации*

$$s\sigma = \sum s'(\sigma)s''. \quad (8)$$

В [12] алгебра $\mathcal{A}_U$ описана как свободный левый Ω_U -подмодуль с базисом $\{s_\omega\}$, т. е. $\mathcal{A}_U \cong \Omega_U S$ с правилом коммутации (8) операций $\sigma \in \Omega_U$ и $s \in S$.

Алгебра $\mathcal{A}_U$ обладает антиавтоморфизмом $\chi_U = \chi: \mathcal{A}_U \rightarrow \mathcal{A}_U$, т. е. $\chi(a \cdot b) = \chi(b) \cdot \chi(a)$ для любых элементов a, b из $\mathcal{A}_U$, который однозначно задается свойствами: $\chi(\sigma) = \sigma$, $\sigma \in \Omega_U$, и $\chi(s_q) = -s_q$. Следовательно, для любых градуированных $\mathcal{A}_U$ -модулей M_1 и M_2 определены градуированные $\mathbb{Z}$ -модули $\text{Ext}_{\mathcal{A}_U}^{*,*}(M_1, M_2)$ и $\text{Tor}_{\mathcal{A}_U}^{*,*}(M_1, M_2)$.

В [12] показано, что $\text{Ext}_{\mathcal{A}_U}^{0,*}(\Omega_U, \Omega_U) = \text{Ext}_{\mathcal{A}_U}^{0,0}(\Omega_U, \Omega_U) = \mathbb{Z}$, и дано полное вычисление группы $\text{Ext}_{\mathcal{A}_U}^{1,*}(\Omega_U, \Omega_U)$.

При помощи антиавтоморфизма χ из формулы (8) извлекается (см. [24]), что $\text{Tor}_{\mathcal{A}_U}^{*,*}(\Omega_U, \Omega_U) = \Omega_U \otimes_{\mathcal{A}_U} \Omega_U = 0$.

3. Спектральная последовательность Адамса–Новикова

В работе [12] для широкого класса теорий кохомологий и двойственных им теорий гомотопий дана конструкция фильтраций и доказана сходимость соответствующих им спектральных последовательностей, которые получили название спектральных последовательностей Адамса–Новикова.

В случае, когда X и Y – конечные комплексы или прямые пределы конечных комплексов без кручения в обычных гомотопиях, имеет место следующая теорема (см. [12]).

Для теории комплексных кобордизмов $U^*(\cdot)$ существует функториальная по X и Y спектральная последовательность Адамса–Новикова $\{E_r^{s,*}, d_r, s \geq 0, r \geq 2\}$, где $d_r: E_r^{s,t} \rightarrow E_r^{s+r,t+r-1}$. В этой спектральной последовательности $E_2^{s,t} = \text{Ext}_{\mathcal{A}U}^{s,t}(U^*(Y), U^*(X))$ и группы $\sum_{t-s=m} E_\infty^{s,t}$ связаны с группами стабильных гомотопических классов отображений с отмеченными точками $[X, Y]^m = \varinjlim_n [\Sigma^{n+m} X, \Sigma^n Y]$ гомоморфизмами

$$\begin{aligned} q_0^m: [X, Y]^m &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}U}^m(U^*(Y), U^*(X)), \\ q_i^m: \ker q_{i-1} &\rightarrow E_\infty^{i,m}, \quad i > 0. \end{aligned}$$

Гомоморфизм

$$q_1^m: \ker q_0^m \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}U}^{1,1+m}$$

называется U -инвариантом Хопфа.

Далее, говоря о спектральной последовательности Адамса–Новикова, мы будем иметь в виду описанную выше спектральную последовательность. Для $X = Y = S^0$ получается спектральная последовательность, сходящаяся к стабильным гомотопическим группам сфер π_*^s . В этом случае

$$E_2^{*,*} = \text{Ext}_S^{*,*}(\mathbb{Z}, \Omega_U),$$

причем

$$E_2^{0,*} = \text{Hom}_S^*(\mathbb{Z}, \Omega_U) = \text{Hom}_S^0(\mathbb{Z}, \Omega_U) \simeq \mathbb{Z}.$$

Таким образом,

$$E_\infty^{2,*} \subset \text{Ext}_S^{2,*}(\mathbb{Z}, \Omega_U).$$

Следовательно, гомоморфизм q_2^m задает гомоморфизм

$$q_2^m: \ker q_1^m \rightarrow \text{Ext}_S^{2,2+m}(\mathbb{Z}, \Omega_U).$$

В [12] показано, что группы $E_r^{1,t}$, $r \geq 2$, являются циклическими и $E_4^{1,t} = E_\infty^{1,t}$. Образующие $\alpha_t \in E_2^{1,t}$ являются циклами всех дифференциалов при $t = 2$, $t = 4s$, $t = 4s + 1$, $s \geq 0$. Имеет место формула $d_3 \alpha_t = h^3 \alpha_{t-2}$ при $t = 4s - 1$ и $4s - 2$, $s \geq 1$, где $h = \alpha_1 \in E_2^{1,2} = \mathbb{Z}/2$. Элементы $2\alpha_t$ являются циклами всех дифференциалов. Образ U -инварианта Хопфа q_1 является эпиморфизмом при $t = 4$, $t = 8s + 1$ и $t = 8s + 2$, $s \geq 1$, и подгруппа $\text{Im } q_1$ имеет индекс 2 при $t = 8s + 6$, $s \geq 0$, и $t = 8s + 4$, $s \geq 1$. Для $i \leq 3$ определены гомоморфизмы

$$q_i^m: \ker q_{i-1}^m \rightarrow \text{Ext}_S^{i,i+m}(\mathbb{Z}, \Omega_U),$$

где $\ker q_{i-1}^m \subset [S^0, S^0]^m = \pi_m^s$. Их называют инвариантами Новикова–Хопфа. Для вычисления этих инвариантов важно, что они согласованы с умножением в кольце $\text{Ext}_S(\mathbb{Z}, \Omega_U)$ и умножением Масси в нем. Отсюда сразу вытекает, что если $q_1^m(\alpha) \neq 0$, где $\alpha \in \pi_m^s$, то α мультипликативно неразложим в кольце π_*^s .

В [25] при помощи инварианта q_2 построено семейство нетривиальных произведений Масси в кольце π_*^s .

Спектральная последовательность Адамса–Новикова является основным инструментом для изучения стабильных гомотопических групп сфер (см. [26]). Среди важнейших достижений в этом направлении отметим результат по известной проблеме арф-инварианта Кервера

$$k: \pi_{4n+2}^s \rightarrow \mathbb{Z}/2 \subset E_2^{2,4(n+1)}.$$

Согласно теореме Ревенеля–Хилла–Хопкинса (2009 г.) этот инвариант тривиален во всех размерностях, за исключением только $n = 0, 1, 3, 7, 15$ и, возможно, 31 (см. обзор [27]).

4. Классы Тома и гомоморфизмы Гизина

Пусть $h^*(\cdot)$ – некоторая мультипликативная теория когомологий. Обозначим через $\Omega_h = \sum \Omega_h^i$ кольцо скаляров $h^*(\text{pt})$. Будем считать, что Ω_h – кольцо с единицей $1 \in \Omega_h^0$.

Рассмотрим векторное n -мерное расслоение $\zeta \rightarrow X$ над связным клеточным комплексом X . Вложение слоя $i_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \zeta$ над точкой $x \in X$ задает отображение пространств Тома $T_{i_x}: S^n = T\mathbb{R}^n \rightarrow T\zeta$.

Расслоение ζ называется *ориентируемым в теории $h^*(\cdot)$ (h -ориентируемым)*, если гомоморфизм $(T_{i_x})^*: \tilde{h}^n(T\zeta) \rightarrow \tilde{h}^n(S^n)$ является эпиморфизмом. Элемент $a \in \tilde{h}^n(T\zeta)$ такой, что $(T_{i_x})^*a = \Sigma^n \cdot 1$, называется *ориентацией* расслоения ζ в теории $h^*(\cdot)$. Здесь $\Sigma^n: \Omega_h^0 \rightarrow \tilde{h}^n(S^n)$ – изоморфизм надстройки. Ориентация a расслоения ζ называется также *классом Тома* этого расслоения в теории $h^*(\cdot)$ и обозначается $u_h(\zeta)$ (объяснение см. в этом разделе ниже).

Например, любое векторное расслоение ориентируемо в обычных когомологиях $H^*(\cdot; \mathbb{Z}/2)$ и имеет единственную ориентацию, так как $H^*(\text{pt}; \mathbb{Z}/2) = H^0(\text{pt}; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$. Любое векторное расслоение ориентируемо и в теории неориентированных кобордизмов $O^*(\cdot)$, но уже может иметь много ориентаций, так как $O^*(\text{pt}) = \Omega_O$ имеет нетривиальные элементы отрицательной размерности. Векторное расслоение является ориентируемым в классическом смысле тогда и только тогда, когда его первый класс Штифеля–Уитни $w_1(\zeta)$ равен нулю. Такие расслоения ориентируемы в классических когомологиях $H^*(\cdot, \mathbb{Z})$ и имеют только две ориентации, так как $H^*(\text{pt}; \mathbb{Z}) = H^0(\text{pt}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Они ориентируемы в теории ориентированных кобордизмов $SO^*(\cdot)$ и имеют много ориентаций, так как кольцо $SO^*(\text{pt}) = \Omega_{SO}$ имеет нетривиальные элементы отрицательной размерности.

Существует понятие h^* -ориентации, универсальной для определенного класса расслоений. Опишем необходимую нам U^* -ориентацию, универсальную для комплексных расслоений.

Теория комплексных кобордизмов $U^*(\cdot)$ задается *спектром Тома*

$$MU = \{T_n; \varepsilon_n: \Sigma T_n \rightarrow T_{n+1}, n \geq 0\}, \quad \text{т. е.} \quad U^k(X) = \varinjlim_n [\Sigma^n X, T_{n+k}],$$

где $T_{2n} = T\xi_n = MU(n)$ – пространство Тома универсального n -мерного комплексного расслоения $\xi_n \rightarrow BU(n)$ и $BU(n)$ – прямой предел многообразий

Грассмана $\mathbb{C}G_{N,n}$ комплексных n -мерных подпространств в $\mathbb{C}^N$. По определению, $T_{2n+1} = \Sigma T_{2n}$ и ε_{2n} – тождественное отображение, а $\varepsilon_{2n+1}: \Sigma^2 T_{2n} \rightarrow T_{2(n+1)}$ соответствует отображению

$$\Sigma^2 MU(n) = T(\xi_n \oplus 1) \rightarrow T(\xi_{n+1}) = MU(n+1),$$

где 1 – одномерное комплексное тривиальное расслоение. Отметим, что $BU(0) = \text{pt}$, $\xi_0 = \text{pt}$, $T_0 = MU(0) = S^0$ – нульмерная сфера, $T_2 = MU(1) = \mathbb{C}P^\infty$ и $\varepsilon_2: S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ – стандартное вложение.

Имеем $\Omega_U = \pi_*(MU)$, единица $1 \in \Omega_U$ соответствует тождественному отображению $T_0 \rightarrow T_0$ и порождает каноническое отображение спектров $i_a^U: S \rightarrow MU$, где $S = \{S^n, n \geq 0\}$ – спектр сфер, $i^U = \{i_n^U = \Sigma^n \varepsilon_0: S^n \rightarrow T_n\}$ и $i_2^U = \varepsilon_2$.

Каждое комплексное n -мерное расслоение $\zeta \rightarrow X$ над клеточным пространством классифицируется отображением $f_\zeta: X \rightarrow BU(n)$, которое задает отображение пространств Тома $T_{f_\zeta}: T\zeta \rightarrow MU(n)$ и, следовательно, класс кобордизмов $u(\zeta) \in U^{2n}(T\zeta)$. По построению, класс $u(\zeta)$ является U^* -ориентацией (классом Тома) расслоения ζ .

Совершенно аналогично строятся h^* -ориентации, универсальные для всех векторных расслоений, когда $h^*(\cdot) = O^*(\cdot)$, ориентированных векторных расслоений, когда $h^*(\cdot) = SO^*(\cdot)$, комплексных векторных расслоений с нулевым первым классом Чжэня, когда $h^*(\cdot) = SU^*(\cdot)$, комплексных расслоений с кватернионной структурой, когда $h^*(\cdot) = Sp^*(\cdot)$, где $O^*(\cdot)$, $SO^*(\cdot)$, $SU^*(\cdot)$, $Sp^*(\cdot)$ – теории кобордизмов, задаваемые спектрами Тома $MO = \{MO(n)\}$, $MSO = \{MSO(n)\}$, $MSU = \{MSU(n)\}$ и $MSp = \{MSp(n)\}$ соответственно (см. [11], [28]).

В теориях $O^*(\cdot)$ и $Sp^*(\cdot)$ на основе универсальных ориентаций и соответствующих характеристических классов так же, как в теории комплексных кобордизмов, строятся аналоги алгебры операций Ландвебера–Новикова.

Вернемся к общему случаю.

Классы Тома обладают функториальными свойствами:

1. Пусть $f: X_1 \rightarrow X_2$ – непрерывное отображение и $\zeta \rightarrow X_2$ – расслоение с классом Тома $u_h(\zeta)$. Тогда класс $f^*(u_h(\zeta))$ является классом Тома индуцированного расслоения $f^*\zeta$, т. е. $f^*(u_h(\zeta)) = u_h(f^*\zeta)$.

2. Пусть $\mu: h_1^*(\cdot) \rightarrow h_2^*(\cdot)$ – преобразование теорий когомологий и $u_{h_1}(\zeta)$ – класс Тома расслоения $\zeta \rightarrow X$. Тогда класс $\mu u_{h_1}(\zeta)$ является классом Тома в теории h_2 , т. е. $\mu u_{h_1}(\zeta) = u_{h_2}(\zeta)$.

Далее, если будет понятно, о какой теории $h^*(\cdot)$ идет речь, мы будем писать u вместо u_h .

Пусть $\zeta_k \rightarrow X_k$, $k = 1, 2$, – векторные расслоения. Для расслоения $\zeta_1 \times \zeta_2 \rightarrow X_1 \times X_2$ имеет место гомеоморфизм

$$T(\zeta_1 \times \zeta_2) \cong T(\zeta_1) \wedge T(\zeta_2).$$

Тогда, если u_k , $k = 1, 2$, – h -ориентации расслоений ζ_k , то класс $u_1 \otimes u_2$ является h -ориентацией расслоения $\zeta_1 \times \zeta_2$. В случае $X_1 = X_2 = X$ при помощи диагонального отображения $\Delta: X \rightarrow X \times X$ мы получаем h -ориентацию суммы Уитни $\zeta_1 \oplus \zeta_2 \rightarrow X$ расслоений ζ_1 и ζ_2 .

В зависимости от задачи возникают разные конструкции классов Тома $u_h(\zeta)$ расслоений. Конструкция называется *мультипликативной*, если $u_h(\zeta_1 \times \zeta_2) = u_h(\zeta_1) \otimes u_h(\zeta_2)$. Теория комплексных кобордизмов $U^*(\cdot)$ является мультипликативной. Умножение задается отображением спектров Тома $MU \wedge MU \rightarrow MU$ при помощи отображений пространств Тома $MU(n_1) \wedge MU(n_2) \rightarrow MU(n_1 + n_2)$, соответствующих отображениям $BU(n_1) \times BU(n_2) \rightarrow BU(n_1 + n_2)$, классифицирующим расслоения $\xi_{n_1} \times \xi_{n_2} \rightarrow BU(n_1) \times BU(n_2)$. Приведенная выше конструкция U^* -ориентации, универсальной для комплексных векторных расслоений, является мультипликативной, что непосредственно вытекает из конструкции умножения в теории комплексных кобордизмов.

Имеем $T\zeta = D\zeta/\partial D\zeta$. Пространство единичных шаров $D\zeta$ гомотопически эквивалентно пространству X , поэтому диагональное отображение $\Delta: D\zeta \rightarrow D\zeta \times D\zeta$ задает отображение $\Delta_T: X \rightarrow X \wedge T\zeta$ и, следовательно, индуцирует гомоморфизм $\Delta_T^*: h^*(X) \otimes h^*(T\zeta) \rightarrow h^*(T\zeta)$.

Для любого класса Тома $u(\zeta)$ векторного расслоения $\zeta \rightarrow X$ над клеточным пространством X гомоморфизм Δ_T^* задает *изоморфизм Тома*:

$$T_{u(\zeta)}: h^k(X) \rightarrow \tilde{h}^{k+n}(T\zeta): T_{u(\zeta)}x = u(\zeta)x,$$

где $n = \dim_{\mathbb{R}} \zeta$ и $x \in h^k(X)$.

Как и в случае классических когомологий, ориентация $u(\zeta)$ задает *эйлеров класс* $\chi(\zeta) \in \tilde{h}^n(X)$ по формуле $\chi(\zeta) = i^*u(\zeta)$, где $i: X \rightarrow T\zeta$ – вложение, определяемое нулевым сечением расслоения ζ . Если расслоение $\zeta \rightarrow X$ обладает сечением $s: X \rightarrow \zeta$ таким, что $\|s(x)\| \neq 0$ для всех $x \in X$, то $\chi(\zeta) = 0$.

Пусть $u_1(\zeta)$ и $u_2(\zeta)$ – две h -ориентации n -мерного расслоения $\zeta \rightarrow X$. Тогда определен класс $\rho(u_1(\zeta), u_2(\zeta)) \in h^0(X)$ такой, что

$$T_{u_2(\zeta)}\rho(u_1(\zeta), u_2(\zeta)) = u_1(\zeta),$$

различающий эти ориентации. Из функториальности изоморфизма Тома следует, что этот класс функториален, т.е.

$$f^*\rho(u_1(\zeta), u_2(\zeta)) = \rho(u_1(f^*\zeta), u_2(f^*\zeta)), \quad (9)$$

где $f: X_1 \rightarrow X_2$ – непрерывное отображение и $\zeta \rightarrow X_2$ – расслоение над X_2 . Напомним конструкцию характеристических классов расслоений как различающих классов специально подобранных универсальных ориентаций.

Пусть $h_1(\cdot)$ и $h_2(\cdot)$ – мультипликативные теории когомологий, обладающие универсальными ориентациями $u_1(\zeta)$ и $u_2(\zeta)$ для данного класса расслоений. Далее без ограничения общности мы будем рассматривать класс комплексных расслоений.

Возьмем некоторое мультипликативное преобразование $\mu: h_1(\cdot) \rightarrow h_2(\cdot)$ и сопоставим комплексному расслоению $\zeta \rightarrow X$ класс $\chi_\mu(\zeta) = \chi_\mu(\zeta; h_1, h_2) \in h_2^0(X)$ по формуле

$$u_2(\zeta)\chi_\mu(\zeta) = \mu u_1(\zeta),$$

т.е. $\chi_\mu(\zeta) = \rho(\mu u_1(\zeta), u_2(\zeta))$.

Непосредственно из конструкции следует, что мы получаем характеристический класс комплексных расслоений такой, что $\chi_\mu(1) = 1$ и $\chi_\mu(\zeta_1 \oplus \zeta_2) = \chi_\mu(\zeta_1)\chi_\mu(\zeta_2)$. Из универсальности ориентаций $u_1(\zeta)$ и $u_2(\zeta)$ следует, что этот характеристический класс однозначно определяется условием

$$u_2(\eta)\chi_\mu(\eta) = \mu u_1(\eta),$$

где $\eta \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ – универсальное одномерное комплексное расслоение.

ПРИМЕР. Пусть $h_1^*(\cdot) = U^*(\cdot)$ и $h_2^*(\cdot) = U^*(\cdot)[[\beta]]$, где $\deg \beta = -2$. Возьмем в качестве u_1 описанную выше универсальную U^* -ориентацию и в качестве u_2 ее же для теории $U^*(\cdot)[[\beta]]$. Тогда для мультипликативного преобразования

$$\mu: U^*(\cdot) \rightarrow U^*(\cdot)[[\beta]]$$

такого, что $\mu u_1(\eta) = u_1(\eta) + u_1(\eta)^2\beta$, мы получаем

$$\chi_\mu(\eta) = 1 + u_1(\eta)\beta,$$

и, следовательно, для любого комплексного n -мерного расслоения $\zeta \rightarrow X$ мы получаем

$$\chi_\mu(\zeta) = 1 + c_1(\zeta)\beta + \dots + c_n(\zeta)\beta^n,$$

где $c_k(\zeta) = cf_k(\zeta)$, $k = 1, \dots, n$, – характеристические классы Чженя–Коннера–Флойда.

Говоря о многообразиях и их отображениях, мы предполагаем, что они обладают необходимой гладкостью. Рассмотрим замкнутое многообразие M^m и многообразие W^l , быть может с непустой границей ∂W^l . Будем рассматривать отображения $f: M^m \rightarrow W^l$ с условием $f(M) \cap \partial W = \emptyset$. Такое отображение называется h -ориентируемым, если существует вложение $j: M^m \rightarrow \mathbb{R}^{q+m}$ такое, что n -мерное нормальное расслоение $\zeta \rightarrow M$, $n = q + l$ вложения $f \times j: M^m \rightarrow W^l \times \mathbb{R}^{q+m}$ является h -ориентируемым. Имеем отображение Понтрягина–Тома $PT: \Sigma^{q+m}(W/\partial W) \rightarrow T\zeta$.

Для любого h -ориентированного отображения $f: M \rightarrow W$ с h -ориентацией $u(\zeta)$ определен гомоморфизм Гизина (прямой образ) в теории $h^*(\cdot)$

$$f_! = (f_{u(\zeta)})_!: h^k(M^m) \rightarrow h^{k+l-m}(W^l, \partial W^l)$$

по формуле

$$\Sigma^{q+m} f_! x = (PT)^*(u(\zeta)x). \quad (10)$$

Здесь Σ – изоморфизм надстройки.

По построению, гомоморфизм Гизина зависит от выбора h -ориентации $u(\zeta)$ нормального расслоения $\zeta \rightarrow M$ вложения $M^m \rightarrow W^l \times \mathbb{R}^{q+m}$.

Отображение пар $f: (M, \emptyset) \rightarrow (W, \partial W)$ индуцирует кольцевой гомоморфизм $f^*: h^*(W, \partial W) \rightarrow h^*(M)$ и, следовательно, структуру $h^*(W, \partial W)$ -модуля в кольце $h^*(M)$. Имеет место формула:

$$f_!(x \cdot f^*(y)) = f_!(x) \cdot y, \quad x \in h^*(M), \quad y \in h^*(W, \partial W), \quad (11)$$

т. е. гомоморфизм $f_!$ является гомоморфизмом $h^*(W, \partial W)$ -модулей.

Из формулы для $f_!$ выводится правило коммутации стабильных кохомологических операций с гомоморфизмом Гизина в теории $h^*(\cdot)$. Например, для операций s_n и универсального класса Тома $u(\zeta)$ в U^* -теории (см. выше) имеет место формула

$$s_n f_! x = f_! s_n x + f_! (c f_{(n)}(\zeta) x), \quad (12)$$

где $c f_{(n)}(\zeta)$ – характеристический класс, однозначно определяемый тем, что $c f_{(n)}(\zeta_1 \oplus \zeta_2) = c f_{(n)}(\zeta_1) + c f_{(n)}(\zeta_2)$ и $c f_{(n)}(\zeta) = u(\zeta)^n$, если $\dim_{\mathbb{C}} \zeta = 1$.

Пусть u_1 и u_2 – две h -ориентации расслоения ζ . Непосредственно из конструкции гомоморфизма Гизина и класса $\rho(u_1(\zeta), u_2(\zeta)) = \rho(u_1, u_2)$ следует формула

$$f_{u_1, !} x = f_{u_2, !} (\rho(u_1, u_2) x), \quad x \in h^k(M). \quad (13)$$

Пусть теперь даны мультипликативные теории кохомологий $h_1(\cdot)$ и $h_2(\cdot)$ и мультипликативное преобразование $\mu: h_1(\cdot) \rightarrow h_2(\cdot)$. Тогда для любого отображения $f: M \rightarrow W$ с нормальным расслоением ζ такого, что существуют ориентации $u_1(\zeta) \in h_1^{l+q}(T\zeta)$ и $u_2(\zeta) \in h_2^{l+q}(T\zeta)$, имеет место формула

$$\mu f_{!, h_1} x = f_{!, h_2} (\rho(\mu u_{h_1}, u_{h_2}) x). \quad (14)$$

Ясно, что формула (13) является частным случаем формулы (14), когда $h_1 = h_2 = h$ и μ – тождественное преобразование.

Многообразие M^m называется *h -ориентируемым*, если проекция $\pi: M^m \rightarrow \text{pt}$ является h -ориентируемым отображением. *h -ориентированным* многообразием называется пара $(M^m, u(\nu))$, где M^m – h -ориентируемое многообразие и $u(\nu)$ – фиксированная h -ориентация нормального расслоения ν вложения $j: M^m \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$.

Пусть $(M_1, u(\nu_1))$ и $(M_2, u(\nu_2))$ – два замкнутых h -ориентированных многообразия, где ν_k – нормальное расслоение вложения $M_k = M_k^{m_k} \subset \mathbb{R}^{m_k+n_k}$, $k = 1, 2$.

Тогда любое гладкое отображение $f: M_1 \rightarrow M_2$ является h -ориентируемым с h -ориентацией $u(\zeta)$, которая определяется h -ориентациями $u(\nu_1)$ и $u(\nu_2)$ при помощи соотношения

$$\tau_1 \oplus \zeta = f^* \tau_2 + [m_2 + n_1],$$

где ζ , как и выше, нормальное расслоение вложения $M_1 \subset M_2 \times \mathbb{R}^{m_1+n_1}$ и τ_k – касательное расслоение многообразия M_k , $k = 1, 2$.

Пусть дано мультипликативное преобразование $\mu: h_1(\cdot) \rightarrow h_2(\cdot)$.

Сопоставим каждому многообразию M с ориентациями $u_k(\nu)$ в теориях $h_k(\cdot)$ класс $\chi_\mu(M)$ такой, что

$$u_2(\tau(M)) \chi_\mu(M) = \mu u_1(\tau(M)).$$

Рассмотрим теперь гладкое отображение $f: M_1 \rightarrow M_2$ многообразий, каждое из которых имеет ориентации в мультипликативных теориях $h_1(\cdot)$ и $h_2(\cdot)$, тогда для любого мультипликативного преобразования $\mu: h_1(\cdot) \rightarrow h_2(\cdot)$ имеет место формула

$$\mu(f_{!, 1} x) \chi_\mu(M_2) = f_{!, 2} (\mu(x) \chi_\mu(M_1)), \quad (15)$$

где $f_{!, k}: h_k^*(M_1) \rightarrow h_k^*(M_2)$ – гомоморфизм Гизина в теории $h_k^*(\cdot)$, $k = 1, 2$.

В случае, когда $h_1(\cdot)$ – комплексная K -теория, $h_2(\cdot)$ – обычные когомологии $H^*(\cdot, \mathbb{Q})$ и $\mu = \text{ch}: K^*(\cdot) \rightarrow H^*(\cdot, \mathbb{Q})$ – классический характер Чженя, формула (15) является теоремой Римана–Роха–Хирцебруха–Гротендика [29], [30], где $\chi(M) = \text{Td}(M)$ – род Тодда многообразия M . Это топологический аналог знаменитого результата алгебраической геометрии. Напомним, что для алгебраического n -мерного многообразия M имеет место формула

$$\text{Td}(M) = \sum_{i=0}^n (-1)^i g_i,$$

где g_i – комплексная размерность пространства голоморфных дифференциальных i -мерных форм на M . Общий случай изложен в [31].

Пусть M_1 и M_2 – замкнутые многообразия, $f_1: M_1 \rightarrow M_2$ и $f_2: M_2 \rightarrow W$ – отображения с h -ориентациями u_1 и u_2 . Тогда композиция отображений

$$f_2 f_1: M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow W$$

является h -ориентируемой. Более того, можно выбрать h -ориентацию отображения $f_2 f_1$ так, что

$$(f_2 f_1)! = f_{2,!} f_{1,!}.$$

В контексте алгебраической геометрии над произвольными полями теория классов Тома и гомоморфизмов Гизина была систематически развита в работах [32]–[34].

Вложение точки $\text{pt} \rightarrow W^l$ является h -ориентируемым отображением для любой теории $h^*(\cdot)$. Прямой образ в этом случае представляет собой гомоморфизм

$$\Omega_h^k = h^k(\text{pt}) \rightarrow h^{k+l}(W^l, \partial W^l),$$

индуцированный канонической проекцией $W^l / \partial W^l \rightarrow S^l$.

Для h -ориентированного многообразия $(M^m, u(\nu))$ прямой образ для проекции $\pi: M^m \rightarrow \text{pt}$ представляет собой гомоморфизм

$$h^k(M^m) \rightarrow h^{k-m}(\text{pt}) = \Omega_h^{k-m}.$$

Говорят, что многообразие M^m обладает стабильно комплексной структурой, если существует вложение $j: M^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+2n}$ такое, что $2n$ -мерное нормальное расслоение ν допускает структуру n -мерного комплексного расслоения. Такое многообразие вместе с выбранной структурой комплексного расслоения для ν называется стабильно комплексным. Для описанной выше универсальной U^* -ориентации $u(\zeta)$ имеет место формула

$$\pi! 1 = [M^m] \in \Omega_U^{-m}.$$

Рассмотрим композицию

$$\text{pt} \xrightarrow{i} M^m \xrightarrow{\pi} \text{pt},$$

где M^m – замкнутое h -ориентированное многообразие. В этом случае тождественное отображение $\Omega_h^0 \rightarrow \Omega_h^0$ разлагается в композицию

$$\Omega_h^0 \xrightarrow{i_1} h^m(M^m) \xrightarrow{\pi_1} \Omega_h^0.$$

Таким образом, для каждого h -ориентированного многообразия $(M^m, u(\zeta))$ в группе $h^m(M^m)$ имеется прямое слагаемое Ω_h^0 , порожденное элементом $\langle M^m \rangle = i_1 1$, который называется его h -фундаментальным классом. Ясно, что этот класс определяется h -ориентацией $u(\zeta)$.

Для гладкого многообразия W^l с границей ∂W^l группа комплексных кобордизмов $U^k(W^l, \partial W^l)$ определяется геометрически (см. детали в [35]) как группа классов эквивалентности U -ориентированных отображений

$$f: M^{l-k} \rightarrow W, \quad \partial M^{l-k} = \emptyset, \quad f(M^{l-k}) \cap \partial W = \emptyset.$$

Пусть теперь W обладает вложением $i_W: W \subset \mathbb{R}^{N_1}$ с комплексным нормальным расслоением ν_W , т. е. W является U -многообразием. Тогда любому U -ориентированному отображению $f: M^{l-k} \rightarrow W$, т. е. отображению с комплексным нормальным расслоением ν_f вложения $f \times i_M: M^{l-k} \subset W \times \mathbb{R}^{N_2}$ отвечает комплексное нормальное расслоение вложения

$$(i_W \times 1)(f \times i_M): M^{l-k} \subset \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2},$$

т. е. структура U -многообразия на M^{l-k} .

В этом случае определен геометрический оператор двойственности Пуанкаре в комплексных кобордизмах, который сопоставляет k -мерному U -циклу $[f] \in U^k(W^l, \partial W^l)$ класс эквивалентности отображения $f: M^{l-k} \rightarrow W$ относительно индуцированной U -структуры на M^{l-k} , т. е. $(l-k)$ -мерный цикл $\mathcal{D}[f] \in U_{l-k}(W^l)$.

Описанный оператор $\mathcal{D}$ задает изоморфизм групп

$$\mathcal{D}: U^k(W^l, \partial W^l) \rightarrow U_{l-k}(W^l)$$

и изоморфизм Ω_U -модулей

$$\mathcal{D}: U^*(W^l, \partial W^l) \rightarrow U_{l-*}(W^l).$$

В случае $W^l = \text{pt}$ это – изоморфизм

$$\mathcal{D}: \Omega_U^{-2n} = U^{-2n}(\text{pt}) \rightarrow U_{2n}(\text{pt}) = \Omega_{2n}^U.$$

5. Мультипликативные преобразования

Теория когомологий $h^*(\cdot)$ называется $\mathbb{C}$ -ориентируемой, если универсальное комплексное линейное расслоение $\xi \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ является ориентируемым в теории $h^*(\cdot)$. Используя гомотопическую эквивалентность $\mathbb{C}P^\infty \cong T\xi$, можно дать следующее определение.

$\mathbb{C}$ -ориентированной теорией называется пара $(h^*(\cdot), u_h)$, где $h^*(\cdot)$ – некоторая $\mathbb{C}$ -ориентируемая теория и $u_h \in \tilde{h}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ – фиксированная ориентация.

В любой $\mathbb{C}$ -ориентированной теории $(h^*(\cdot), u)$ существуют характеристические классы Чженя–Коннера–Флойда $cf_k^h(\zeta)$, $k = 0, 1, \dots$, комплексных векторных расслоений ζ . Эти классы однозначно определяются условиями: $cf_1^h(\xi) = u$, $cf_k^h(\zeta) = 0$, если $k > \dim_{\mathbb{C}} \zeta$,

$$cf_k^h(\zeta_1 + \zeta_2) = \sum_{k_1 + k_2 = k} cf_{k_1}^h(\zeta_1) cf_{k_2}^h(\zeta_2).$$

Далее, если будет понятно о какой теории $h^*(\cdot)$ идет речь, мы будем писать $cf_k(\zeta)$ вместо $cf_k^h(\zeta)$.

Основные $\mathbb{C}$ -ориентируемые теории в нашем изложении таковы: классические когомологии $H^*(\cdot, \mathbb{Z})$, комплексная K -теория $K^*(\cdot)$, теория комплексных кобордизмов $U^*(\cdot)$ и теория удвоенных комплексных кобордизмов $DU^*(\cdot)$. О теории $DU^*(\cdot)$ см. разд. 12.

В теории $U^*(\cdot)$ канонической считается $\mathbb{C}$ -ориентация, задаваемая описанной выше универсальной U^* -ориентацией расслоения $\xi = \xi_1$.

Теория $DU^*(\cdot)$ имеет две канонические ориентации, левую u_l , соответствующую вложению $\mathbb{C}P^\infty \times S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$, и правую u_r , соответствующую вложению $S^2 \times \mathbb{C}P^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$ (детали см. в [17] и [36]).

В теории $H^*(\cdot, \mathbb{Z})$ канонической ориентацией считается $\mathbb{C}$ -ориентация, задаваемая классом $u_H \in H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$ таким, что $i_N^* u_H = \mathcal{D}\langle \mathbb{C}P^{N-1} \rangle$, где $\langle \mathbb{C}P^{N-1} \rangle \in H_{2N-2}(\mathbb{C}P^N)$ – класс гомологий, реализуемый вложением $\mathbb{C}P^{N-1} \subset \mathbb{C}P^N$, и $\mathcal{D}$ – классический оператор двойственности Пуанкаре.

В теории $K^*(\cdot)$ с кольцом скаляров $K^*(\text{pt}) = \mathbb{Z}[\beta^{-1}, \beta]$, $\deg \beta = -2$, в качестве канонической $\mathbb{C}$ -ориентации мы берем класс $u_K = (1 - [\bar{\xi}])\beta^{-1} \in \tilde{K}^2(\mathbb{C}P^\infty)$, где $\bar{\xi}$ – расслоение, сопряженное универсальному расслоению ξ . Такой выбор класса u_K мы объясним ниже.

Далеко не каждая мультипликативная теория когомологий является $\mathbb{C}$ -ориентируемой. Например, не имеют $\mathbb{C}$ -ориентаций: вещественная K -теория; теория кобордизмов $Sp^*(\cdot)$; теория когомотопий $S^*(\cdot)$, задаваемая спектром сфер $S = \{S^n\}$.

Теория $(U^*(\cdot), u)$ является универсальной $\mathbb{C}$ -ориентированной теорией когомологий, т. е. для любой $\mathbb{C}$ -ориентированной теории $(h^*(\cdot), u_h)$ существует единственное мультипликативное преобразование

$$\mu_h: U^*(\cdot) \rightarrow h^*(\cdot)$$

такое, что $\mu_h u = u_h$.

Для любой $\mathbb{C}$ -ориентированной теории $(h^*(\cdot), u_h)$ множество всех мультипликативных преобразований $U^*(\cdot) \rightarrow h^*(\cdot)$ можно отождествить с множеством всех формальных рядов $\varphi(u_h) \in \Omega_h[[u_h]]$ вида $\varphi(u_h) = u_h + (u_h^2)$ и, следовательно, с множеством всех $\mathbb{C}$ -ориентаций расслоения $\eta \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ в теории $(h^*(\cdot), u_h)$, а также с множеством всех мультипликативных преобразований $\mu_h^D: DU^*(\cdot) \rightarrow h^*(\cdot)$ таких, что $\mu_h^D u_l = u_h$ и $\mu_h^D u_r = \varphi(u_h)$.

Пусть $(h^*(\cdot), u_h)$ – некоторая $\mathbb{C}$ -ориентированная теория когомологий и $\mu: U(\cdot) \rightarrow h^*(\cdot)$ – соответствующее мультипликативное преобразование. Тогда

$$\mu_h cf_k(\zeta) = cf_k^h(\zeta).$$

Например, для канонических ориентаций, описанных выше, мы получаем преобразования

$$\mu_H: U^*(\cdot) \rightarrow H^*(\cdot; \mathbb{Z}), \quad \mu_K: U^*(\cdot) \rightarrow K^*(\cdot), \quad \mu_{DU}^l, \mu_{DU}^r: U^*(\cdot) \rightarrow DU^*(\cdot),$$

где μ_H – каноническое преобразование, соответствующее отображению спектра Тома $MU = \{MU(n)\}$ в спектр Эйленберга–Маклейна $K(\mathbb{Z}) = \{K(\mathbb{Z}, n)\}$, μ_K – так называемое преобразование Римана–Роха–Коннера–Флойда (см. [120]), μ_{DU}^l и μ_{DU}^r соответствуют отображениям спектров Тома $MU \wedge S \rightarrow MU \wedge MU$ и $S \wedge MU \rightarrow MU \wedge MU$.

Преобразования μ_H и μ_K переводят характеристические классы Чженя–Коннера–Флойда в комплексных кобордизмах в классические классы Чженя в когомологиях и классы Чженя–Гротендика в K -теории.

На кольцах скаляров мы имеем:

- гомоморфизм $\mu_H: \Omega_U \rightarrow \mathbb{Z}$, где $\mu_H(1) = 1$ и $\mu_H(a) = 0$, $\dim a < 0$, т. е. $\mu_H = \varepsilon$ – аугментация,
- гомоморфизм $\mu_K: \Omega_U \rightarrow \mathbb{Z}[\beta^{-1}, \beta]$ такой, что

$$\mu_K([M^{2n}]) = \text{Td}(M^{2n})\beta^n,$$

где $\text{Td}(M^{2n}) \in \mathbb{Z}$ – род Тодда стабильно комплексного многообразия. Напомним, что классический род Тодда комплексного проективного пространства $\mathbb{C}P^n$ равен 1, $n \geq 0$. Для согласования рассматриваемого рода Тодда с классическим необходимо было выбрать ориентацию $u_K = (1 - [\bar{\eta}])\beta^{-1}$.

Пусть $(h^*(\cdot), u_h)$ – некоторая $\mathbb{C}$ -ориентированная теория когомологий с кольцом скаляров Ω_h . Каждое мультипликативное преобразование $\mu_h: U^*(\cdot) \rightarrow h^*(\cdot)$ задает кольцевой гомоморфизм $\mu: \Omega_U \rightarrow \Omega_h$. Обратное утверждение верно лишь отчасти, так как каждый кольцевой гомоморфизм $\mu: \Omega_U \rightarrow \Omega_h$ задает мультипликативное преобразование $\mu_h: U^*(\cdot) \rightarrow h^*(\cdot) \otimes \Lambda = h_\Lambda^*(\cdot)$ для некоторого кольца Λ , которое в общем случае отлично от кольца $\mathbb{Z}$.

Задачи. 1. Классифицировать кольцевые гомоморфизмы $\Omega_U \rightarrow \Omega_h$, которые индуцированы мультипликативными преобразованиями μ_h .

2. Для данного кольцевого гомоморфизма $\mu: \Omega_U \rightarrow \Omega_U$ найти минимальное кольцо Λ такое, что кольцевой гомоморфизм $\mu \otimes 1: \Omega_U \rightarrow \Omega_U \otimes \Lambda$ поднимается до мультипликативного преобразования $U^*(\cdot) \rightarrow U_\Lambda^*(\cdot)$.

В [12] эти задачи были связаны с важными задачами алгебраической топологии и показано, что эффективное решение их требует формулы для логарифма формальной группы геометрических кобордизмов. Полное решение этих задач дано в [37] (см. разд. 10).

6. Формальная группа геометрических кобордизмов

С. П. Новиков в ходе выполнения работы [12] поставил задачу вычисления первого класса Чженя–Коннера–Флойда $cf_1(\xi_1 \otimes \xi_2) \in U^2(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty)$ в виде ряда $f(u, v) \in \Omega_U[[u, v]]$, где $u = cf_1(\xi_1)$, $v = cf_1(\xi_2)$. Эта задача была тесно связана с построением мультипликативных операций Ψ_U^k в кобордизмах

(см. разд. 7) – аналога важнейших операций Адамса Ψ^k в K -теории и характера Чжэня $\sigma_h: K^*(\cdot) \rightarrow U^*(\cdot) \otimes \mathbb{Q}$ (см. разд. 9). Операции Ψ_U^k , известные теперь как операции Адамса–Новикова, играют существенную роль в методе С. П. Новикова вычисления группы $E_2^{1,*} = \text{Ext}_S^{1,*}(\mathbb{Z}, \Omega_U)$ в спектральной последовательности Адамса–Новикова, а также в задачах о неподвижных точках действия конечных групп на стабильно комплексных многообразиях (см. разд. 13).

Из свойств тензорного произведения комплексных линейных расслоений непосредственно вытекает, что ряд $cf_1(\xi_1 \otimes \xi_2)$ задает формальную группу над кольцом Ω_U , которая была названа *формальной группой геометрических кобордизмов*. Приведем, следуя [12], описание ряда

$$cf_1(\xi_1 \otimes \xi_2) = f(u, v) = u + v + \sum a_{i,j} u^i v^j,$$

объясняющее выбор названия. Пусть M – гладкое замкнутое стабильно комплексное многообразие. Обозначим через $V(M)$ группу классов эквивалентности комплексных линейных расслоений над M с операцией тензорного умножения над $\mathbb{C}$. Рассмотрим отображение $f: M \rightarrow \mathbb{C}P(N)$, $N > \dim M$, классифицирующее некоторое комплексное линейное расслоение $\xi \rightarrow M$. В гомотопическом классе отображения f содержится отображение f_1 , трансверсально регулярное на подмногообразии $\mathbb{C}P(N-1) \subset \mathbb{C}P(N)$. Стабильно комплексное подмногообразие $M_1 = f_1^{-1}(\mathbb{C}P(N-1))$ называется *подмногообразием, двойственным расслоению ξ* . Так как

$$V(M) \cong [M, \mathbb{C}P(\infty)] = H^2(M; \mathbb{Z}),$$

то сопоставление линейному расслоению ξ подмногообразия $i: M_1 \subset M$ с нормальным расслоением $i^*\xi$ индуцирует взаимно однозначное соответствие между множеством $V(M)$ и подмножеством в $U^2(M) \cong U_{m-2}(M)$, $m = \dim M$, классов комплексных кобордизмов подмногообразий в M коразмерности 2, где изоморфизм устанавливается оператором двойственности Пуанкаре–Атья. Пусть $\{M_1\}$ и $\{M_2\}$ – некоторые элементы группы $V(M)$ и $\{M_1\} \oplus \{M_2\}$ – их сумма в группе $V(M)$. Тогда в группе $U^2(M)$ имеет место формула

$$\{M_1\} \oplus \{M_2\} = \{M_1\} + \{M_2\} + \sum a_{i,j} \{M_1\}^i \{M_2\}^j, \quad (16)$$

где $\{M_1\}^i \in U^{2i}(M)$ – класс кобордизмов двойственный i -й степени самопересечения многообразия M_1 , $a_{i,j} \in \Omega_U^{-2(i+j-1)}$ – коэффициенты ряда $cf_1(\xi_1 \otimes \xi_2) \in \Omega_U[[u, v]]$.

А. С. Мищенко (в то время аспирант С. П. Новикова) рассказал о задаче вычисления ряда $cf_1(\xi_1 \otimes \xi_2)$ алгебраисту Ю. Р. Вайнбергу, который обратил его внимание на классический результат, согласно которому если кольцо A является модулем над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, то любая формальная группа $F(u, v)$ над A имеет вид $F(u, v) = g^{-1}(g(u) + g(v))$, где ряд $g(u)$ называется *логарифмом* этой формальной группы. Ряд $g^{-1}(t)$ такой, что $g^{-1}(g(u)) = u$, называется *экспонентой* этой группы. Вскоре после этого А. С. Мищенко, используя введенные С. П. Новиковым кохомологические операции в кобордизмах, нашел явное выражение для логарифма формальной группы геометрических кобордизмов. Ответ оказался удивительно красивым [12; приложение 1

(теорема А. С. Мищенко)]

$$g(u) = u + \sum_{n \geq 1} [\mathbb{C}P^n] \frac{u^{n+1}}{n+1}. \quad (17)$$

В работе [38] для экспоненты формальной группы геометрических кобордизмов $g^{-1}(t)$ была получена формула

$$g^{-1}(t) = t + \sum [M^{2n}] \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (18)$$

где класс кобордизмов $[M^{2n}]$ однозначно определяется формулой $cf_1(\eta_{n+1}) = [M^{2n}]w_{n+1}$, где η_n и w_n – образующие групп $\tilde{K}(S^{2n}) = \mathbb{Z}$ и $H^{2n}(S^{2n}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ соответственно.

В [38] было показано, что закон сложения в формальной группе геометрических кобордизмов имеет вид

$$f(u, v) = \frac{u + v + \sum [H_{i,j}] u^i v^j}{\mathbb{C}P(u) \mathbb{C}P(v)}. \quad (19)$$

Здесь $H_{i,j}$ – известное *многообразие Милнора* – подмногообразие в $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$, двойственное линейному расслоению $\xi_1 \otimes \xi_2 \rightarrow \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$ и $\mathbb{C}P(u) = \sum_{n \geq 0} [\mathbb{C}P^n] u^n$.

Вывод формулы (19) опирается на формулу (16). В работах [39], [40] содержатся важные приложения формулы (19).

Весной 1967 г. С. П. Новиков был с визитом в США, где представил свою расширенную программу, включающую в том числе и *приложения формальной группы геометрических кобордизмов*. После его доклада на семинаре в Гарварде Дж. Тейт сказал, что он никогда не думал, что алгебраическая топология так близка к области его интересов – теории формальных групп. С. П. Новиков отметил что на его докладе присутствовал и Д. Квиллен (см. [3]).

В 1969 г. вышла работа Квиллена [41], в которой было показано, что формальную группу геометрических кобордизмов можно отождествить с универсальной формальной группой, описанной М. Лазаром в 1955 г.

Прокомментируем, следуя [37], этот результат, сыгравший важную роль в развитии теории кобордизмов и ее приложениях.

Формальная группа $\mathcal{F}(u, v) = u + v + \sum \alpha_{i,j} u^i v^j$ над коммутативным кольцом $\mathcal{A}$ называется *универсальной формальной группой*, если для любой формальной группы $F(u, v)$ над некоторым коммутативным кольцом A существует единственный кольцевой гомоморфизм $r: \mathcal{A} \rightarrow A$ такой, что $F(u, v) = u + v + \sum r(\alpha_{i,j}) u^i v^j$. Гомоморфизм r называется *классифицирующим*. Существует прямая конструкция универсальной формальной группы $\mathcal{F}(u, v)$, из которой следует, что она единственна и определена над градуированным кольцом $\mathcal{A} = \sum_{n \geq 0} \mathcal{A}_{-2n}$ (детали см. в [37]).

Лазар доказал, что $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[\alpha_n, n = 1, 2, \dots]$, $\deg \alpha_n = -2n$ (см. [42]).

Теорема Квиллена утверждает, что гомоморфизм $r: \mathcal{A} \rightarrow \Omega_U$, классифицирующий формальную группу геометрических кобордизмов, является изоморфизмом (см. [41]). Перечислим факты, из сопоставления которых вытекает этот фундаментальный результат.

Доказательство *мономорфности* гомоморфизма r извлекается из изоморфизма $\Omega_U \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}[[CP^n], n = 1, 2, \dots]$ и формулы (17). Этот факт используется в [41].

В [11] ключевой шаг доказательства того, что кольцо Ω_U является кольцом полиномов, использует, что многообразия Милнора $H_{i,j}$ (см. выше) порождают все кольцо Ω_U . Доказательство *эпиморфности* гомоморфизма r извлекается из указанного выше свойства набора многообразий Милнора и формулы (19). В [41] эта формула не используется (по-видимому, Квиллен ее не знал).

7. Операции Адамса–Новикова и степенные системы

Операции Адамса Ψ^k в K -теории сыграли ключевую роль в решении проблемы векторных полей на сферах и проблемы J -функтора. Эти классические проблемы алгебраической топологии были решены Ф. Адамсом в первой половине 1960-х годов. В это же время М. Атья на основе операций Ψ^k нашел замечательное решение проблемы инварианта Хопфа 1, которую в конце 1950-х годов решил Адамс, используя свою, ставшую после этого знаменитой, спектральную последовательность.

Как уже отмечалось выше, операции Адамса–Новикова Ψ_U^k , введенные в [12], играют важную роль в программе С. П. Новикова.

Операции Адамса Ψ^k в комплексной K -теории однозначно определяются как кольцевые гомоморфизмы

$$\Psi^k: K^0(X) \rightarrow K^0(X)$$

такие, что $\Psi^k[\eta] = [\eta^k]$ для любого линейного комплексного расслоения $\eta \rightarrow X$. Они продолжаются до мультипликативных преобразований

$$\Psi^k: K^*(\cdot) \left[\frac{1}{k} \right] \rightarrow K^*(\cdot) \left[\frac{1}{k} \right],$$

которые на кольце скаляров $K^*(\text{pt}) = \mathbb{Z}[\beta^{-1}, \beta]$, $\deg \beta = -2$, действуют по формуле $\Psi^k \beta = k\beta$.

Операции Адамса–Новикова Ψ_U^k , $k \in \mathbb{Z}$, однозначно определяются как мультипликативные кохомологические операции, которые на кольце скаляров Ω_U действуют по формуле $\Psi_U^k \sigma = k^n \sigma$, где $\sigma \in \Omega_U^{-2n}$.

Из точности представления алгебры $\mathcal{A}_U$ на кольце Ω_U сразу следует, что $\Psi_U^k \Psi_U^l = \Psi_U^{kl} = \Psi_U^l \Psi_U^k$, и если $s \in S_{2q}$, то $s \Psi_U^k = k^q \Psi_U^k s$.

Как уже отмечалось выше, любая мультипликативная операция однозначно задается своим значением на классе Тома $u = u(\xi) \in U^2(CP^\infty)$. В [12] показано, что

$$\Psi_U^k u = \frac{1}{k} u(\xi^k) = \frac{1}{k} [k](u), \quad k \neq 0,$$

где ряд $[k]u = ku + (u^2)$ определяется индуктивно при помощи формальной группы геометрических кобордизмов $f(u, v)$: Формальная группа $f(u, v)$ однозначно определяет ряд $\bar{u} = [-1](u)$ такой, что $f(u, \bar{u}) = 0$. Тогда

$$[k](u) = f(u, [k-1](u)), \quad k \geq 1, \quad \text{и} \quad [-k](u) = f(\bar{u}, [k-1](\bar{u})), \quad k \geq 2.$$

Из формулы $f(u, v) = g^{-1}(g(u) + g(v))$ следует, что $[k](u) = g^{-1}(kg(u))$, $k \in \mathbb{Z}$. Имеем $\Psi_U^k \in \mathcal{A}_U \left[\frac{1}{k} \right]$ и определен ряд $\Psi_U^0(u)$ как предел ряда $\frac{1}{k} g^{-1}(kg(u))$ при $k \rightarrow 0$. Получаем ряд $\Psi_U^0(u) = g(u)$, который задает проектор

$$\Psi_U^0: U^*(\cdot) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow U^*(\cdot) \otimes \mathbb{Q},$$

выделяющий в теории $U^*(\cdot) \otimes \mathbb{Q}$ в качестве прямого слагаемого классическую теорию когомологий $H^*(\cdot; \mathbb{Q})$. Развитие этого результата будет описано ниже в разд. 8.

Непосредственно из определений следует, что

$$\mu_K \Psi_U^k = \Psi^k \mu_K,$$

где $\mu_K: U^*(\cdot) \rightarrow K^*(\cdot)$ – описанное в разд. 5 преобразование такое, что $\mu_K u = u_K$.

Изучение алгебраических свойств операций Ψ_U^k привело (см. [37]) к понятию формальной степенной системы.

Пусть A , как и выше, некоторое коммутативное кольцо с единицей. *Формальной степенной системой* называется совокупность

$$\{f_k(u) \in A[[u]], \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

такая, что $f_k(0) = 0$ и $f_k(f_l(u)) = f_{kl}(u)$.

Скажем, что система $\{f_k(u)\}$ имеет тип s , если для любого k ряд $f_k(u)$ имеет вид

$$f_k(u) = k^s u + \sum \mu_i(k) u^{i+1}, \quad \mu_i(k) \in A.$$

Число s всегда предполагается положительным. Ясно, что любая система $\{f_k(u)\}$ типа s содержит подсистему $\{\hat{f}_k(u) = f_{k^q}(u)\}$ типа qs для фиксированного натурального q . Не всякая степенная система имеет тип s , например, степенной системой является совокупность $\{f_k(u) = u^{k^2}\}$.

В [37] доказано, что для любой формальной степенной системы $\{f_k(u)\}$ типа s существует ряд $B(u) \in A \otimes \mathbb{Q}[[u]]$, не зависящий от k , такой, что

$$f_k(u) = B^{-1}(k^s B(u)), \quad \text{где} \quad B^{-1}(B(u)) = u.$$

Ряд $B(u)$ однозначно определяется степенной системой и называется ее логарифмом, а ряд $B^{-1}(u)$ называется ее экспонентой.

Любая формальная группа $F(u, v)$ над A задает степенную систему

$$\{f_k(u) = [k](u), \quad k \in \mathbb{Z}\},$$

где $[0](u) = 0$ и $[k](u) = F(u, [k-1](u))$. Эта система имеет тип 1, она содержит подсистемы $\{\hat{f}_k(u) = f_{k^s}(u)\}$ типа s для любого натурального s .

Обозначим через $\Omega(s) \subset \Omega_U$ подкольцо, порожденное всеми коэффициентами формальных рядов

$$k^s \Psi^{k^s}(u) = [k^s](u) = k^s u + \sum \mu_i^{(s)}(k) u^{i+1} \in \Omega_U[[u]]$$

по всем k .

Имеем $\Omega(s) = \sum_{n \geq 0} \Omega(s)_{-2n}$. В [37] отмечено, что

$$\min\{s_n([M^{2n}]), [M^{2n}] \in \Omega(s)_{-2n}\} = \text{НОД}\{k^s(k^{ns} - 1), k = 2, 3, \dots\},$$

и поэтому кольцо $\Omega(s)$ не совпадает с кольцом Ω_U ни для какого s , но

$$\Omega(s) \otimes \mathbb{Q} = \Omega_U \otimes \mathbb{Q}.$$

Зафиксируем изоморфизм $\Omega_U \simeq \mathbb{Z}[a_n]$ и рассмотрим мультипликативный проектор $\pi_p: \Omega_U \rightarrow \Omega_U$, такой что $\pi_p a_n = a_n$, если $n = p^i - 1$, и $\pi_p a_n = 0$ в остальных случаях. Тогда гомоморфизм $\pi_p: \Omega(1) \rightarrow \pi_p(\Omega_U)$ является эпиморфизмом.

Формальная степенная система $f_U = \{[k^s](u)\}$ над кольцом $\Omega(s)$ является универсальной формальной степенной системой типа s на категории колец без кручения, т. е. для любой формальной степенной системы $\{f_k(u)\}$ типа s над любым коммутативным кольцом A без кручения существует единственный кольцевой гомоморфизм $\phi: \Omega(s) \rightarrow A$ такой, что $f = \phi[f_U]$.

Из существования логарифма $B(u)$ степенной системы вытекает, что каждой формальной степенной системе над кольцом A без кручения соответствует формальная группа

$$F(u, v) = B^{-1}(B(u) + B(v)) \in A \otimes \mathbb{Q}[[u, v]].$$

Пусть $\phi: \Omega(s) \rightarrow A$ – гомоморфизм, классифицирующий степенную систему $f = \{f_k(u)\}$ типа s над A . Для того чтобы эта степенная система порождалась формальной группой над кольцом A , необходимо и достаточно, чтобы гомоморфизм ϕ продолжался до гомоморфизма $\hat{\phi}: \Omega_U \rightarrow A$, т. е. $\hat{\phi}|_{\Omega(s)} = \phi$.

Из теоремы Лазара вытекает, что любая формальная группа $F(u, v)$ над любым коммутативным кольцом A является образом формальной группы (например, универсальной) над кольцом без кручения.

В [37] построено континуальное семейство формальных степенных систем над кольцом $\mathbb{Z}/p$, не являющихся образом никакой степенной системы над кольцом без кручения.

Операция $[k](u) = u \oplus \dots \oplus u$, где $\oplus$ – сложение в формальной группе, играет важную роль в классической теории формальных групп. В случае универсальной формальной группы она, как показано выше, задает универсальные степенные системы $\{[k^s](u)\}$ типа s над кольцами без кручения.

8. Характеры Чжена и Чжена–Дольда

Классическая K -теория $K^*(\cdot)$ пришла в алгебраическую топологию из алгебраической геометрии [43]. Большую роль в K -теории играет характер Чжена $\text{ch}: K^*(X) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Q})$. Характер Чжена ch является мультипликативным функториальным преобразованием, которое однозначно определяется тем, что для одномерного комплексного расслоения $\xi \rightarrow X$ имеет место формула $\text{ch } \xi = \exp c_1(\xi)$, где $c_1(\xi) \in H^2(X; \mathbb{Z})$ – первый класс Чжена в когомологиях.

А. Гротендик дал следующее обобщение теоремы Римана–Роха–Хирцебруха.

Пусть $f: X \rightarrow Y$ – проективное отображение гладких алгебраических многообразий. Тогда для любого элемента $x \in K^0(X)$ имеет место формула

$$\text{ch}(f_*x) \text{Td}(\tau_Y) = f_*(\text{ch}(x) \text{Td}(\tau_X)),$$

где τ_X и τ_Y – касательные расслоения и $\text{Td}(\tau_X)$, $\text{Td}(\tau_Y)$ – их классы Тодда.

Отображение гладких многообразий $f: X \rightarrow Y$ называется c_1 -отображением, если существует класс $c_1 \in H^2(X; \mathbb{Z})$ такой, что $w_2(X) - f^*w_2(Y) \equiv c_1 \pmod{2}$, где $w_2(\cdot)$ – второй класс Штифеля–Уитни. В [30] показано, что приведенная выше формула верна для всех c_1 -отображений.

В этом разделе мы основное внимание уделим характеру Чжена–Дольда ch_U в комплексных кобордизмах. Аналог теоремы Римана–Роха–Хирцебруха–Гротендика для отображений $f: X \rightarrow Y$ стабильно комплексных многообразий и преобразования ch_U обсудим в разд. 14.

В [12] было введено мультипликативное функториальное преобразование – характер Чжена в кобордизмах

$$\sigma\text{h}: \widehat{K}^*(X) \rightarrow U^*(X) \otimes \mathbb{Q},$$

где $\widehat{K}^*(\cdot) = K^0(\cdot) + K^1(\cdot)$ – 2-периодическая комплексная K -теория. Преобразование σh однозначно определяется тем, что для одномерного комплексного расслоения $\xi \rightarrow X$ имеет место формула

$$\sigma\text{h } \xi = \exp g(cf_1(\xi)), \quad (20)$$

где $g(u)$ – логарифм формальной группы геометрических кобордизмов и $cf_1(\xi)$ – первый класс Чжена–Коннера–Флойда. В [12] подчеркивается, что построение характера Чжена в кобордизмах – одна из важных задач, решаемых на основе логарифма формальной группы геометрических кобордизмов.

Теория $\widehat{K}(\cdot)$ имеет мультипликативный класс Тома $u_{\widehat{K}}(\zeta)$, универсальный для всех комплексных расслоений, который однозначно определяется условием $u_{\widehat{K}}(\xi) = cf_1^{\widehat{K}}(\xi) = [1 - \xi]$, где $\xi \rightarrow X$ – одномерное расслоение. Имеет место мультипликативное преобразование $\text{Td}: U^*(\cdot) \rightarrow \widehat{K}(\cdot)$ такое, что $\text{Td } u(\zeta) = u_{\widehat{K}}(\zeta)$. При этом преобразовании $\text{Td}[\mathbb{C}P^n] = 1$, $n \geq 0$. Следовательно,

$$\text{Td } \sigma\text{h } \xi = \exp(-\ln(1 - \text{Td } u(\xi))) = \xi.$$

Таким образом, композиция преобразований

$$\widehat{K}^*(X) \xrightarrow{\sigma\text{h}} U^*(X) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\text{Td}} \widehat{K}^*(X) \otimes \mathbb{Q}$$

совпадает с каноническим гомоморфизмом, индуцированным вложением $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Характером Чженя–Дольда в теории $h^*(\cdot)$ с $\Omega_h = h^*(\text{pt})$ называется преобразование теорий когомологий

$$\text{ch}_h: h^*(\cdot) \rightarrow H^*(\cdot; \Omega_h \otimes \mathbb{Q}); \quad H^i(\cdot; \Omega_h \otimes \mathbb{Q}) = \sum H^l(\cdot; \Omega_h^{i-l} \otimes \mathbb{Q}),$$

которое для $X = \text{pt}$ представляет собой канонический гомоморфизм $\Omega_h \rightarrow \Omega_h \otimes \mathbb{Q}$, где $H^*(\cdot)$ – классические когомологии.

Теорема существования и единственности характера Чженя–Дольда доказана впервые Дольдом (см. [44]). В случае, когда $h^*(\cdot)$ – комплексная K -теория, характер Чженя–Дольда ch_h совпадает с классическим характером Чженя ch (см. [44]). Этим объясняется выбор названия и обозначения для отображения ch_h (см. [38]).

Для любой обобщенной теории гомологий $h_*(\cdot) = \sum h_n(\cdot)$ существует аналогично определяемый гомологический характер Чженя–Дольда

$$\text{ch}^h: h_*(\cdot) \rightarrow H_*(\cdot; \Omega_h \otimes \mathbb{Q}).$$

Для теории стабильных гомотопий π_*^s , где $\Omega_{\pi_*^s}$ – кольцо стабильных гомотопических групп сфер и, следовательно, $\Omega_{\pi_*^s} \otimes \mathbb{Q} = \pi_0^s \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$, преобразование $\text{ch}_{\pi_*^s}$ разлагается в композицию с классическим гомоморфизмом Гуревича $H: \pi_*^s(\cdot) \rightarrow H_*(\cdot; \mathbb{Z})$, который соответствует отображению спектров $\mu_s^H: S \rightarrow K(\mathbb{Z})$ такому, что $\mu_s^H(1) = 1 \in \tilde{H}_0(S^0)$, где $1 \in \pi_0^s(S^0)$.

Подчеркнем, что характеры Чженя–Дольда ch_h и ch^h существуют для любых теорий когомологий $h^*(\cdot)$ и гомологий $h_*(\cdot)$. Мультипликативность теории $h^*(\cdot)$ и $\mathbb{C}$ -ориентируемость этой теории не требуется.

Перечислим основные свойства характера Чженя–Дольда ch_h .

а) Для любого конечного комплекса X гомоморфизм $\text{ch}_h \otimes \mathbb{Q}: h^*(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H^*(X; \Omega_h \otimes \mathbb{Q})$ является изоморфизмом.

б) Для любой мультипликативной теории когомологий $h^*(\cdot)$ характер Чженя–Дольда ch_h является кольцевым гомоморфизмом.

Пусть A^h – кольцо стабильных когомологических операций в теории $h^*(\cdot)$. Используя действие кольца A^h на Ω_h , введем в кольцо $H^*(X; \Omega_h \otimes \mathbb{Q})$ структуру A^h -модуля.

с) Характер Чженя–Дольда ch_h является гомоморфизмом A^h -модулей.

д) Пусть $\varphi: h_1(\cdot) \rightarrow h_2(\cdot)$ – преобразование теории когомологий. Тогда $\text{ch}_{h_2} \varphi = \varphi \text{ch}_{h_1}$.

Доказательство этих свойств легко следует из конструкции характера Чженя–Дольда, данной в [44].

В качестве следствия мы получаем следующее утверждение.

Пусть $h_1^*(\cdot)$ и $h_2^*(\cdot)$ – теории когомологий и $\lambda: \Omega_{h_1} \rightarrow \Omega_{h_2} \otimes \mathbb{Q}$ – гомоморфизм скаляров. Тогда для любого конечного клеточного комплекса X имеет место преобразование

$$\text{ch}_{h_1, \lambda}^{h_2}: h_1^*(X) \rightarrow h_2^*(X) \otimes \mathbb{Q},$$

однозначно определяемое условием $\text{ch}_{h_2} \text{ch}_{h_1, \lambda}^{h_2} = \lambda \text{ch}_{h_1}$.

Таким образом, для любого кольцевого гомоморфизма $\lambda: \Omega_U \rightarrow \mathbb{Q}$ получается преобразование

$$\mathrm{ch}_{U,\lambda}^{\widehat{K}}: U^*(\cdot) \rightarrow \widehat{K}^*(\cdot) \otimes \mathbb{Q},$$

которое в работах И. М. Кричевера [45], [46] нашло важное приложение в задаче о действиях групп на стабильно комплексных многообразиях.

Преобразование $\mathrm{ch}_{h_1,\lambda}^{h_2}$ определено и для бесконечных клеточных комплексов X с конечномерными остовами таких, что $H^*(X; \mathbb{Z})$ не имеет кручения.

Для любой мультипликативной теории когомологий $h^*(\cdot)$ определено мультипликативное преобразование $\mathrm{ch}_{\widehat{K},1}^h: \widehat{K}^*(\cdot) \rightarrow h^*(\cdot) \otimes \mathbb{Q}$, где $1: \mathbb{Z} \rightarrow \Omega_h^0 \subset \Omega_h -$ гомоморфизм, задаваемый единицей кольца Ω_h . Это преобразование в [38] названо характером Чжэня в теории $h^*(\cdot)$. Преобразование $\mathrm{ch}_{\widehat{K},1}^U$ совпадает с характером Чжэня в кобордизмах σh , см. (20).

Введем кольцо $\Omega_U(\mathbb{Z}) = \sum_{n \geq 0} \Omega_U^{-2n}(\mathbb{Z})$. Здесь

$$\Omega_U^{-2n}(\mathbb{Z}) = \{ \sigma \in \Omega_U^{-2n} \otimes \mathbb{Q} : s\sigma \in \Omega_U^0 = \mathbb{Z} \text{ для } s \in S_{2n} \},$$

где $S = \sum_{n \geq 0} S_{2n}$ – алгебра Ландвебера–Новикова. В [38] доказано, что

$$\Omega_U(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \left[\frac{[\mathbb{C}P^n]}{n+1}, n = 1, 2, \dots \right].$$

Таким образом, $g(u) \in \Omega_U(\mathbb{Z})[[u]]$ и, следовательно, $g^{-1}(t) \in \Omega_U(\mathbb{Z})[[t]]$. Ясно, что кольцо $\Omega_U(\mathbb{Z})$ замкнуто относительно действия алгебры $\mathcal{A}_U$, индуцированного вложением $\Omega_U(\mathbb{Z}) \subset \Omega_U \otimes \mathbb{Q}$. Имеет место изоморфизм $\Omega_U(\mathbb{Z}) \cong S^*$, при котором действие алгебры Ландвебера–Новикова S на $\Omega_U(\mathbb{Z})$ соответствует каноническому левому действию l алгебры Хопфа S на двойственной алгебре S^* (детали см. в разд. 12).

Характер Чжэня–Дольда в кобордизмах (см. [38]) разлагается в композицию

$$\mathrm{ch}_U: U^*(X) \xrightarrow{\widehat{\mathrm{ch}}_U} H^*(X; \Omega_U(\mathbb{Z})) \xrightarrow{j} H^*(X; \Omega_U \otimes \mathbb{Q}),$$

где j – преобразование, индуцированное вложением $j: \Omega_U(\mathbb{Z}) \rightarrow \Omega_U \otimes \mathbb{Q}$. Преобразование $\widehat{\mathrm{ch}}_U: U^*(\cdot) \rightarrow H^*(\cdot; \Omega_U(\mathbb{Z}))$ называется *приведенным характером Чжэня–Дольда*, как мультипликативное преобразование оно однозначно определяется (см. разд. 5) тем, что для одномерного комплексного расслоения $\xi \rightarrow X$ имеет место формула $\mathrm{ch}_U c f_1(\xi) = g^{-1}(c_1(\xi))$.

Имеет место соответствующее преобразование теорий гомологий

$$\widehat{\mathrm{ch}}^U: U_*(\cdot) \rightarrow H_*(\cdot; \Omega_U(\mathbb{Z})).$$

Используя канонические изоморфизмы $\Omega_U(\mathbb{Z}) \simeq S_* \simeq H_*(MU; \mathbb{Z})$ преобразования $\widehat{\mathrm{ch}}_U$ и $\widehat{\mathrm{ch}}^U$ можно отождествить с преобразованиями, задаваемыми отображениями спектров $S \wedge MU \rightarrow K(\mathbb{Z}) \wedge MU$. В некоторых работах преобразование $\widehat{\mathrm{ch}}^U$ называется гомоморфизмом Гуревича, по аналогии с классическим гомоморфизмом Гуревича $H: \pi_*^s(X) \rightarrow H_*(X; \mathbb{Z})$, задаваемым вложением $S \rightarrow K(\mathbb{Z})$.

Преобразования $\mu_H: U^*(\cdot) \rightarrow H^*(\cdot, \mathbb{Z})$ и $\mu^H: U_*(\cdot) \rightarrow H_*(\cdot, \mathbb{Z})$ задаются отображением спектров $MU \rightarrow K(\mathbb{Z})$ (см. разд. 5). Ясно, что аугментация $\varepsilon: \Omega_U(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$: $\varepsilon(1) = 1$, $\varepsilon(\sigma) = 0$, $\deg \sigma < 0$ переводит $\widehat{\text{ch}}_U$ в μ_H и $\widehat{\text{ch}}^U$ в μ^H . Вычисление образа гомоморфизма $\mu^H: U_*(X) \rightarrow H_*(X, \mathbb{Z})$ называется проблемой Стиррода реализации циклов образами фундаментальных циклов стабильно комплексных многообразий. Эта проблема эквивалентна проблеме дифференциалов в спектральной последовательности Атья–Хирцебруха в теории $U_*(\cdot)$. Так как кольцо Ω_U не имеет кручения, то преобразования μ_H и μ^H являются эпиморфизмами для комплексов X без кручения в $\mathbb{Z}$ -гомологиях (см. разд. 9).

ТЕОРЕМА ЦЕЛОЧИСЛЕННОСТИ приведенного характера Чженя–Дольда [38]: *Имеет место функториальное мультипликативное преобразование $\mathcal{A}_U$ -модулей*

$$\widehat{\text{ch}}_U: U^*(X) \otimes_{\Omega_U} \Omega_U(\mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X; \Omega_U(\mathbb{Z})),$$

которое является изоморфизмом для пространств X без кручения в гомотопиях.

При $X = \mathbb{C}P^\infty$ мы получаем изоморфизм $\mathcal{A}_U$ -модулей

$$\widehat{\text{ch}}_U: \Omega_U(\mathbb{Z})[[u]] \rightarrow \Omega_U(\mathbb{Z})[[t]]$$

такой, что $\widehat{\text{ch}}_U(g(u)) = t$ и $\widehat{\text{ch}}_U u = g^{-1}(t)$, где $u \in U^2(\mathbb{C}P^\infty)$, $t \in H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$,

$$g(u) = u + \sum [\mathbb{C}P^n] \frac{u^{n+1}}{n+1}, \quad g^{-1}(t) = t + \sum [M^{2n}] \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Для любой операции $s \in S$, $s \neq 1$, по построению, $st = 0$ и, следовательно, $sg(u) = 0$.

Для $u \in U^2(\mathbb{C}P^\infty)$ мы имеем $su = 0$, если $s \neq s_n$ и $s_n u = u^{n+1}$, и, следовательно, $sg^{-1}(t) = 0$, если $s \neq s_n$ и $s_n g^{-1}(t) = (g^{-1}(t))^{n+1}$.

Используя эти факты, можно непосредственно вывести формулы действия операторов $s \in S$ на коэффициенты $[\mathbb{C}P^n]$ и $[M^{2n}]$, $n = 1, 2, \dots$, рядов $g(u)$ и $g^{-1}(t)$ и получить канонические изоморфизмы

$$\Omega_U(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \left[\frac{[\mathbb{C}P^1]}{2}, \dots, \frac{[\mathbb{C}P^n]}{n+1}, \dots \right] \simeq \mathbb{Z} \left[\frac{[M^2]}{2!}, \dots, \frac{[M^{2n}]}{(n+1)!}, \dots \right]$$

с алгеброй Хопфа S_* , двойственной алгебре Ландвебера–Новикова S .

В качестве следствия получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ. Пусть $\phi: U^*(\cdot) \rightarrow H^*(\cdot, \Omega_U(\mathbb{Z}))$ – нетривиальное мультипликативное преобразование теорий когомологий, коммутирующее с действием алгебры Ландвебера–Новикова S . Тогда ϕ совпадает с приведенным характером Чженя–Дольда $\widehat{\text{ch}}_U$.

СИЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ЦЕЛОЧИСЛЕННОСТИ. Приведенный характер Чженя–Дольда $\widehat{\text{ch}}_U$ для $X = S^{2n}$ разлагается в композицию

$$\widehat{\text{ch}}_U: U^*(S^{2n}) \rightarrow H^*(S^{2n}; \Omega_U) \rightarrow H^*(S^{2n}; \Omega_U(\mathbb{Z})).$$

Соответствующий результат для классического характера Чжэня $\text{ch} = \text{ch}_K$ вытекает из теоремы периодичности Ботта в комплексной K -теории. Теоремы целочисленности для характера Чжэня ch , основанные на теореме Ботта, были получены Ф. Адамсом (см. [47]). В частности, построен инвариант Адамса $e: \pi_{2n-1}^s \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, дающий сильную оценку снизу на порядок группы $J_{2n-1} \subset \pi_{2n-1}^s$, где $J_n = J(S^n)$ – образ стабильного J -гомоморфизма Уайтхеда $J: \pi_n(SO) \rightarrow \pi_n^s$, где $SO = \lim SO(n)$ (см. [48]).

Приведем конструкцию инварианта

$$e_U: \pi_{2n-1}^s \rightarrow \Omega_U^{-2n}(\mathbb{Z})/\Omega_U^{-2n}, \quad n \geq 1,$$

– аналога инварианта Адамса в случае комплексных кобордизмов.

Выберем представителя $f: S^{2(N+n)-1} \rightarrow S^{2N}$ элемента $[f] \in \pi_{2n-1}^s$. Положим $X_f = S^{2N} \cup_f D^{2(N+n)}$. Для пары (X_f, S^{2N}) имеет место точная последовательность $\mathcal{A}_U$ -модулей

$$0 \rightarrow \tilde{U}^*(S^{2(N+n)}) \xrightarrow{\pi^*} U^*(X_f) \xrightarrow{i^*} U^*(S^{2N}) \rightarrow 0.$$

Обозначим через $v_N \in U^{2N}(X_f)$ такой элемент, что $i^*v_N = u_N$, где u_N – канонический образующий, соответствующий вложению $S^{2N} \subset MU(N)$. Тогда $\text{ch}_U v_N = x_N + \sigma \pi^* \text{ch}_U u_{N+n}$, где $\sigma \in \Omega_U^{-2n}(\mathbb{Z})$ и $i^*x_N = \text{ch}_U u_N$.

Образ $[\sigma]$ элемента σ при проекции $\Omega_U^{-2n}(\mathbb{Z}) \rightarrow \Omega_U^{-2n}(\mathbb{Z})/\Omega_U^{-2n}$ не зависит от выбора представителя класса $[f]$ и элемента v_n . По определению $e_U(f) = [\sigma]$. Стандартно проверяется, что отображение e_U является гомоморфизмом. При $n = 1$, используя кольцо $U^*(\mathbb{C}P^2)$, получаем изоморфизм

$$e_U: \pi_1^s = \mathbb{Z}/2 \rightarrow \Omega_U^{-2}(\mathbb{Z})/\Omega_U^{-2} = \mathbb{Z}/2,$$

который переводит образующий элемент в $\frac{1}{2}[\mathbb{C}P^1]$, а при $n = 2$, используя кольцо $U^*(\mathbb{H}P^2)$, получаем эпиморфизм

$$e_U: \pi_3^s = \mathbb{Z}/8 + \mathbb{Z}/3 \rightarrow \Omega_U^{-4}(\mathbb{Z})/\Omega_U^{-4} = \mathbb{Z}/4 + \mathbb{Z}/3,$$

который переводит образующие элементы в $\frac{1}{4}[\mathbb{C}P^1]^2$ и $\frac{1}{3}[\mathbb{C}P^2]$ соответственно.

Доказательство этих утверждений следует из формул для $\text{ch}_U f_1(\xi)$ и $\text{ch}_U f_2(\zeta)$ (см. ниже), где $\xi \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ и $\zeta \rightarrow \mathbb{H}P^\infty$ – универсальные расслоения.

Скажем, что элемент $a \in U^k(X)$ является ch_U -целочисленным, если $\text{ch}_U a \in H^*(X; \Omega_U) \subset H^*(X; \Omega_U(\mathbb{Z}))$. Элемент $a \in U^k(X)$ называется косферическим, если существует отображение $f: \Sigma^{2N-k} X \rightarrow S^{2N}$ такое, что $f^*u_N = S^{2N-k}a$.

Из сильной теоремы целочисленности вытекает, что любой косферический элемент является ch_U -целочисленным. Пространство X называется ch_U -целочисленным, если его характер Чжэня–Дольда разлагается в композицию

$$\text{ch}_U: U^*(X) \rightarrow H^*(X; \Omega_U) \rightarrow H^*(X; \Omega_U(\mathbb{Z})).$$

В качестве следствия мы получаем, что если группа $H^*(X; \mathbb{Z})$ не имеет кручения и X является ch_U -целочисленным, то характер Чжэня–Дольда задает изоморфизм $\mathcal{A}_U$ -модулей $U^*(X) \rightarrow H^*(X; \Omega_U)$.

Используя теорему Джеймса [49] о гомотопической эквивалентности

$$\Sigma\Omega X \xrightarrow{\sim} \bigvee_{n \geq 1} X^{(n)},$$

где ΩX – пространство петель над X и $X^{(n)} = X \wedge \cdots \wedge X$ – приведенная n -я степень пространства X , мы получаем, что для любого ch_U -целочисленного пространства X его пространство петель также является ch_U -целочисленным.

Обратное утверждение неверно, например, пространство $S^1 \simeq \Omega \mathbb{C}P^\infty$ является ch_U -целочисленным, а пространство $\mathbb{C}P^\infty$ таковым не является.

Интересно рассмотреть более подробно случаи $X = S^{2k}$, $k \geq 1$. Положим $Y_k = \Omega \Sigma S^{2k}$. Согласно теореме Джеймса, $\Sigma Y_k \simeq \Sigma \left(\bigvee_{q \geq 1} S^{2kq} \right)$. Следовательно,

в качестве образующих свободного Ω_U -модуля $U^*(Y_k)$ можно выбрать косферические классы $v_{kq} \in U^{2kq}(Y_n)$, $q \geq 0$, где $v_0 = 1 \in \Omega_U$ и $v_k^q = q! v_{kq}$. В случае $k = 1$ имеет место отображение $\varphi: Y_1 = \Omega S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$, задающее образующую группы $H^2(Y_1; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Используя тот факт, что $s_n u = u^{n+1}$, $n \geq 0$, где $u = cf_1(\xi)$ и $\xi \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ – универсальное линейное расслоение, получаем формулу:

$$\varphi^* u = v_1 + \sum_{q \geq 1} [M^{2q}] v_{q+1} = g^{-1}(v_1),$$

где $[M^{2q}]$ – коэффициенты разложения в ряд экспоненты $g^{-1}(u)$ формальной группы геометрических кобордизмов.

Рассмотрим универсальное одномерное кватернионное расслоение $\zeta \rightarrow \mathbb{H}P^\infty$. Имеет место формула (см. [37])

$$\text{ch}_U cf_2(\zeta) = \tau + \sum_{q \geq 1} a_q [N^{4q}] \frac{\tau^{q+1}}{(2q+2)!},$$

где $a_q = 2$, если q нечетно, и $a_q = 1$, если q четно. Здесь τ – образующая группы $H^4(\mathbb{H}P^\infty; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ и N^{4q} – стабильно комплексное многообразие с родом Тодда, равным 1.

Допустим, что над $Y_2 = \Omega S^5$ определено некоторое одномерное кватернионное расслоение $\eta \rightarrow Y_2$ с $cf_2(\eta) = mw_2$, где w_2 – образующая группы $H^4(Y_2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Тогда существует непрерывное отображение $\varphi: Y_2 \rightarrow \mathbb{H}P^\infty$ такое, что $\varphi^* \tau = mw_2$. Имеем:

$$cf_2(\eta) = mw_2 + \sum_{q \geq 1} \alpha_q v_{2q+2}, \quad \alpha_q \in \Omega_U^{-4q}.$$

Ввиду косферичности пространства Y_2

$$\text{ch}_U cf_2(\eta) = mw_2 + \sum_{q \geq 1} \alpha_q w_{2q+2},$$

где $w_{2q} = \text{ch}_U v_{2q}$ – образующие групп $H^{2q}(Y_2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Таким образом, из условий

$$\varphi^* \zeta = \eta, \quad \text{Td}(N^{4q}) = 1 \quad \text{и} \quad w_2^q = q! w_{2q+2}$$

мы получаем соотношение

$$\text{Td } \alpha_q = a_q \frac{(q+1)!}{(2q+2)!} m^{q+1}.$$

Например, $\text{Td } \alpha_1 = m^2/3!$, $\text{Td } \alpha_2 = m^3/5!$. Ясно, что для данного $m \neq 0$ числа $\text{Td } \alpha_q$ не могут быть целыми для всех q . Таким образом, $m = 0$ для любого одномерного кватернионного расслоения $\eta \rightarrow Y_2$.

Пусть M – некоторый топологический моноид. Используя, что $\Omega \Sigma X$ гомотопически эквивалентно универсальному моноиду пространства X с отмеченной точкой $*$, мы получаем, что любое непрерывное отображение $\varphi: X \rightarrow M$ продолжается до отображения $\Omega \Sigma X \rightarrow M$. Для ch_U -целочисленного пространства X можно в ряде случаев показать, что для данного пространства Y отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ не продолжается до отображения $\Omega \Sigma X \rightarrow Y$ и тем самым доказать, что не существует топологического моноида M , гомотопически эквивалентного пространству Y .

Выше мы рассмотрели случай $X = S^4$ и $Y = \mathbb{H}P^\infty$. Аналогично, можно использовать $X = S^{2k}$ и получить условия, при которых отображения $S^{2k} \rightarrow Y$ не продолжаются до отображений $\Omega \Sigma S^{2k} \rightarrow Y$.

В последние годы развиваются теории квантовых когомологий и квантовых комплексных кобордизмов. В [50] получены результаты на основе соответствующего аналога характера Чжэня–Дольда.

9. Спектральная последовательность Атья–Хирцебруха

Для любого клеточного пространства X и любой теории когомологий $h^*(\cdot)$ существует спектральная последовательность Атья–Хирцебруха

$$\text{AH}_h(X) = \left\{ E_r^s(X) = \sum E_r^{s,t}, \quad r \geq 1; \quad d_r^{s,t}: E_r^{s,t} \rightarrow E_{r+s-r, t-r+1}^{s,t} \right\},$$

отвечающая фильтрации $\{\text{pt} \subset X_1 \subset \dots \subset X_q \subset \dots \subset X\}$, где X_q – q -мерный остов в X , и связывающая теорию $h^*(\cdot)$ с классическими когомологиями $H^*(\cdot)$.

В $\text{AH}_h(X)$ мы имеем $E_2^{s,t}(X) = H^s(X, h^t(\text{pt}))$, и если X – n -мерный клеточный комплекс, то

$$E_\infty^{s,t}(X) = h_s^{s+t}(X)/h_{s+1}^{s+t}(X), \quad \text{где} \quad h_q^m(X) = \ker(h^m(X) \rightarrow h^m(X_{q-1})).$$

Для любой теории гомологий $h_*(X)$ определена соответствующая гомологическая спектральная последовательность Атья–Хирцебруха

$$\text{AH}^h(X) = \left\{ E_s^r(X) = \sum E_{s,t}^r, \quad r \geq 1; \quad d_{s,t}^r: E_{s,t}^r \rightarrow E_{s-r, t+r-1}^r \right\}$$

такая, что $E_{s,t}^2(X) = H_s(X, h_t(\text{pt}))$ и

$$E_{s,t}^\infty(X) = h_{s+t}^{s+1}(X)/h_{s+t}^s(X), \quad \text{где} \quad h_m^q(X) = \text{Im}(h_m(X_{q-1}) \rightarrow h_m(X)).$$

Положим $X_s = \emptyset$ при $s < 0$. Рассмотрим пары троек

$$(X_{s+r}, X_s, X_{s-r}) \subset (X_{s+2r-1}, X_{s+r-1}, X_{s-1})$$

и вложения

$$i_{s,r}: (X_s, X_{s-r}) \rightarrow (X_{s+r-1}, X_{s-1}).$$

Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} h^{s+t}(X_{s+r-1}, X_{s-1}) & \xrightarrow{(i_{s,t}^*)^{s+t}} & h^{s+t}(X_s, X_{s-r}) \\ \downarrow \delta_{s+r-1,r} & & \downarrow \delta_{s,r} \\ h^{s+t+1}(X_{s+2r-1}, X_{s+r-1}) & \xrightarrow{(i_{s+t,r}^*)^{s+t}} & h^{s+t+1}(X_{s+r}, X_s) \end{array},$$

в которой $\delta_{s,r}$ – граничный гомоморфизм точной последовательности тройки (X_{s+r}, X_s, X_{s-r}) . Для $\text{АН}_h(X)$ имеют место следующие утверждения:

- $E_r^{s,t} = \text{Im}(i_{s,r}^*)^{s+t}$;
- $d_r^{s,t} = \bar{\delta}_{s,r}: \text{Im}(i_{s,r}^*)^{s+t} \rightarrow \text{Im}(i_{s+t,r}^*)^{s+t}$;
- $\ker d_r^{s,t} = \text{Im}(h^{s+t}(X_{s+r}, X_{s-1}) \rightarrow h^{s+t}(X_s, X_{s-r}))$;
- проекция $\pi: \ker d_r^{s,t} \rightarrow E_{r+1}^{s,t} = \ker d_r^{s,t} / \text{Im } d_r^{s-r,t+r-1}$ определяется композицией

$$h^{s+t}(X_{s+r}, X_{s-1}) \xrightarrow{j_1} h^{s+t}(X_s, X_{s-r}) \xrightarrow{j_2} h^{s+t}(X_s, X_{s-r-1}),$$

т. е. $\text{Im } j_1 \rightarrow \text{Im } j_2 j_1$.

Член $E_1^{s,t}(X)$ в $\text{АН}_h(X)$ совпадает с группой s -мерных коцепей $C^s(X, h^t(\text{pt}))$, а дифференциал $d_1^{s,t}$ представляет собой обычный кограничный оператор

$$\delta: C^s(X, h^t(\text{pt})) \rightarrow C^{s+1}(X, h^t(\text{pt}))$$

и, следовательно, $E_2^{s,t} = H^s(X, h^t(\text{pt}))$.

Если $h^*(\cdot)$ – мультипликативная теория когомологий, то спектральная последовательность $\text{АН}_h(\cdot)$ является мультипликативной, т. е. ее члены $E_r^{*,*}$ являются градуированными косокоммутативными кольцами, дифференциалы d_r – дифференцированиями, член E_{r+1} – кольцом когомологий члена E_r , умножение в E_2 совпадает с обычным умножением в когомологиях с коэффициентами в кольце $h^*(\text{pt})$. Если X – конечный клеточный комплекс, то имеет место изоморфизм $E_\infty^{s,t}(X) = h_s^{s+t}(X)/h_{s+1}^{s+t}(X)$ и умножение в $E_\infty^{*,*}$ индуцируется умножением в кольце $h^*(X)$. Здесь $h_s^q(X) = \ker(h^q(X) \rightarrow h^q(X_{s-1}))$. В ряде случаев удастся доказать изоморфизм $E_\infty^{s,t}(X) = h_s^{s+t}(X)/h_{s+1}^{s+t}(X)$ и для бесконечных клеточных комплексов X с конечномерными остовами X_n . В этом случае говорят, что $\text{АН}_h(X)$ сильно сходится.

Любое непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ клеточных пространств гомотопически эквивалентно клеточному отображению, поэтому определен гомоморфизм

$$f^*: \text{АН}_h(Y) \rightarrow \text{АН}_h(X).$$

Любое преобразование теорий когомологий $\mu: h_1^*(\cdot) \rightarrow h_2^*(\cdot)$ задает гомоморфизм

$$\mathrm{AH}_\mu: \mathrm{AH}_{h_1}(X) \rightarrow \mathrm{AH}_{h_2}(X)$$

для любого клеточного пространства X .

Возьмем в качестве $h_2^*(\cdot)$ теорию когомологий $H^*(\cdot; \Omega_h \otimes \mathbb{Q})$ и рассмотрим отображение спектральных последовательностей Атья–Хирцебруха, задаваемое характером Чженя–Дольда. Отображение

$$\mathrm{AH}_{\mathrm{ch}_h}: E_{2,h}^{*,*}(X) = H^*(X; \Omega_h) \rightarrow E_{2,h_2}^{*,*}(X) = H^*(X; \Omega_h \otimes \mathbb{Q})$$

соответствует гомоморфизму $\Omega_h \rightarrow \Omega_h \otimes \mathbb{Q}$. Спектральная последовательность $\mathrm{AH}_{h_2}(X)$ тривиальна, т. е. все ее дифференциалы d_r , $r \geq 2$, тривиальны. Таким образом, спектральная последовательность $\mathrm{AH}_h \otimes \mathbb{Q}$ тривиальна. Приведем следствия этого результата.

– В $\mathrm{AH}_h(X)$ все дифференциалы имеют конечный порядок.

– Пусть Ω_h не имеет элементов конечного порядка. Тогда если $H^*(X; \mathbb{Z})$ не имеет элементов конечного порядка, то спектральная последовательность $\mathrm{AH}_h(X)$ тривиальна.

Аналогичные утверждения имеют место и для гомологической спектральной последовательности $\mathrm{AH}^h(X)$.

Алгебра стабильных когомологических операций $\mathcal{A}_h$ действует на $\mathrm{AH}_h(\cdot)$ таким образом, что (см. [51]):

– каждая операция $a \in \mathcal{A}_h$ определяет гомоморфизмы $E_r^{*,*}(X) \rightarrow E_r^{*,*}(X)$, $r \geq 2$,

– операция $a: E_r(X) \rightarrow E_r(X)$ является естественной относительно отображений $f: X \rightarrow Y$,

– в члене $E_2^{*,*}(X) = H^*(X, h^*(\mathrm{pt}))$ операция a индуцирована действием операции $a: h^*(\mathrm{pt}) \rightarrow h^*(\mathrm{pt})$,

– действие в $E_{r+1}(X)$ индуцировано действием в $E_r(X)$,

– в $E_\infty(X)$ действие присоединено к действию $a: h^*(X) \rightarrow h^*(X)$.

Таким образом, если операция $a \in \mathcal{A}_h$ тривиально действует на $h^*(\mathrm{pt})$, то она тривиально действует на $\mathrm{AH}_h(X)$ для любого X .

В случаях комплексной K -теории $K^*(\cdot)$ и теории комплексных кобордизмов $U^*(\cdot)$ представления алгебр $\mathcal{A}_K$ и $\mathcal{A}_U$ на кольцах $K^*(\mathrm{pt}) = \mathbb{Z}[\beta, \beta^{-1}]$ и $U^*(\mathrm{pt}) = \Omega_U$ являются точными и несут важную информацию о дифференциалах в $\mathrm{AH}_K(\cdot)$ и $\mathrm{AH}_U(\cdot)$ (см. [24], [51]).

Следуя [51], введем $\mathcal{A}_h$ -модуль дифференциала $d_r^t = \sum d_r^{s,t}$ в $\mathrm{AH}_h(\cdot)$ как градуированный $\mathcal{A}_h$ -модуль $\mathcal{D}_r^t$ с одной образующей d_r^t , $\deg d_r^t = 0$, и соотношениями $ad_r^t = 0$, где $a \in \mathcal{A}_h$, которые имеют место тогда и только тогда, когда для любого пространства X и элемента $x \in E_r^{*,*}(X)$ оператор $a: E_r(X) \rightarrow E_r(X)$ аннулирует элемент $d_r^t x \in E_r^{*,t-r+1}(X)$.

Рассмотрим левые $\mathcal{A}_h$ -идеалы

$$\mathcal{A}_h(n) = \{a \in \mathcal{A}_h: a(\sigma) = 0 \text{ для всех } \sigma \in h^n(\mathrm{pt})\}.$$

В [51] доказано, что если для стабильного спектра Y , представляющего данную теорию $h^*(\cdot)$, спектральная последовательность $\text{АН}_h(Y)$ тривиальна, то $\mathcal{D}_r^t = \mathcal{A}_h/J_r^t$, где J_r^t – идеал, порожденный идеалами $\mathcal{A}_h(t)$ и $\mathcal{A}_h(t-r+1)$.

Требуемыми свойствами обладают спектры, представляющие теории кобордизмов $SO^*(\cdot)$, $U^*(\cdot)$, $\mathcal{D}U^*(\cdot)$, $Sp^*(\cdot)$ и $S^*(\cdot)$.

В качестве нетривиального следствия этого результата, в [51] и [24] доказано, что в теории комплексных кобордизмов для любого r имеет место изоморфизм

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}_U}^{1,2r}(\mathcal{D}_r^0, \Omega_U) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{A}_U}^{1,2r}(\Omega_U, \Omega_U).$$

Порядком $\text{ord } d_r^{s,t}$ дифференциала $d_r^{s,t}$ называется наименьшее число, аннулирующее элементы $d_r^{s,t}x$, где $x \in E_r^{s,t}(X)$ для любого пространства X .

Используя вычисление группы $\text{Ext}_{\mathcal{A}_U}^{1,2r}(\Omega_U, \Omega_U)$ (см. [12]) получаем: $\text{ord } d_3^0 = 2$, $\text{ord } d_5^0 = 12$ и $\text{ord } d_{2r+1}^0 = \text{НОД}\{k^N(k^r-1), k=2, 3, \dots\}$ для $r > 2$.

Естественно возник вопрос [24], каким условиям должна удовлетворять теория $h^*(\cdot)$, чтобы имела место формула

$$\text{ord } d_{2r+1}^0 = \text{ord } |\text{Ext}_{\mathcal{A}_h}^{1,2r}(\Lambda, \Lambda)|,$$

где $\Lambda = h^*(\text{pt})$.

Например, обычные когомологии $H^*(\cdot)$ и теория когомотопий $S^*(\cdot)$ в отличие от теории $U^*(\cdot)$ этим свойством не обладают.

Спектральные последовательности Атья–Хирцебруха являются эффективным средством решения задач об ориентируемости векторного расслоения в данной теории когомологий и задач о реализуемости циклов и коциклов.

Пусть $\zeta \rightarrow X$ – некоторое n -мерное векторное расслоение над клеточным пространством, ориентируемое в классическом смысле. Фиксируем класс его ориентации $u_H \in H^n(T\zeta; \mathbb{Z})$. Для данной теории когомологий $h^*(\cdot)$ в $\text{АН}_h(T\zeta)$ определен элемент $[u_H] \in H^n(T\zeta; h^0(\text{pt})) = E_2^{n,0}(T\zeta)$. Непосредственно из определений получаем, что расслоение $\zeta \rightarrow X$ является h^* -ориентируемым тогда и только тогда, когда $[u_H]$ является циклом всех дифференциалов в $\text{АН}_h(T\zeta)$.

Рассмотрим некоторую подгруппу G_n группы $SO(n)$ и n -мерное векторное расслоение $\zeta_n \rightarrow BG_n$, соответствующее вложению $G_n \subset SO(n)$. Получаем, что универсальная ориентация для класса векторных G_n -расслоений существует тогда и только тогда, когда $[u_H(\zeta_n)] \in E_2^{n,0}(T\zeta_n)$ является циклом всех дифференциалов в $\text{АН}_h(T\zeta)$.

Для любых теорий бордизмов и кобордизмов ставятся задачи реализации циклов и коциклов. Обсудим эти задачи для теорий $U_*(\cdot)$ и $U^*(\cdot)$.

Говорят, что класс $a \in H_m(X; \mathbb{Z})$ реализуем в теории $U_*(\cdot)$, если существуют стабильно комплексное многообразие M^m и отображение $f: M^m \rightarrow X$ такое, что $f_*\langle M^m \rangle = a$, где $\langle M^m \rangle \in H_m(M^m; \mathbb{Z})$ – фундаментальный класс многообразия M^m . Класс $a \in H_m(X; \mathbb{Z})$ реализуем в теории $U^*(\cdot)$ тогда и только тогда, когда элемент $[a] \in E_{m,0}^2(X)$ является циклом всех дифференциалов в $\text{АН}_{U^*}(X)$.

Говорят, что класс $a \in H^k(X; \mathbb{Z})$ реализуем в теории $U^*(\cdot)$, если существует отображение $f: \Sigma^{2N-k}X \rightarrow MU(N)$ такое, что $f^*u_N = \Sigma^{2N-k}a$. Класс $a \in$

$H^k(X; \mathbb{Z})$ реализуем в теории $U^*(\cdot)$ тогда и только тогда, когда элемент $[a] \in E_2^{k,0}(X)$ является циклом всех дифференциалов в $\text{АН}_{U^*}(X)$.

Пусть теперь $X = W^l / \partial W^l$, где W^l – стабильно комплексное многообразие с границей и $a \in H^k(W^l, \partial W^l; \mathbb{Z})$. Согласно $H^*(\cdot)$ -двойственности Пуанкаре однозначно определен класс гомологий $Da \in H_{l-k}(W^l; \mathbb{Z})$. Непосредственно из конструкции геометрического оператора $U^*(\cdot)$ -двойственности Пуанкаре получаем, что класс a является U^* -реализуем тогда и только тогда, когда U_* -реализуем класс Da .

В алгебраической геометрии хорошо известна гипотеза Ходжа. Приведем ее целочисленный вариант.

Пусть X – гладкое проективное многообразие. Тогда каждый элемент группы $H^{2k}(X; \mathbb{Z}) \cap H^{k,k}(X)$, где $H^{k,k}(X)$ – когомологии Ходжа алгебраического многообразия X , является классом когомологий некоторого алгебраического цикла. Атья и Хирцебрух предъявили первый контрпример к этой гипотезе (см. [52]). Для этого они ввели спектральную последовательность в K -теории, получившую название спектральной последовательности Атья–Хирцебруха. Результат вытекал из построения многообразия X и элемента $a \in H^{2k}(X; \mathbb{Z}) \cap H^{k,k}(X)$ конечного порядка такого, что элемент $[a] \in E_2^{2k,0}(X)$ не является циклом первого нетривиального дифференциала d_3 в $\text{АН}_K(X)$.

Формулы для дифференциалов в спектральной последовательности Атья–Хирцебруха в теориях $U^*(\cdot)$ и $K^*(\cdot)$, использующие когомологические операции Стиррода, и приложения этих формул получены в [24], [51].

Результаты по приложению теории комплексных кобордизмов к задачам алгебраической геометрии, связанным с целочисленной гипотезой Ходжа, представлены в [53].

10. Проекторы в теории кобордизмов

Мультипликативное преобразование $\mu: U^*(\cdot) \rightarrow U^*(\cdot)$ является проектором (т.е. $\mu\mu = \mu$) тогда и только тогда, когда $\mu u = \mu(u) = u + \sum \varphi_k u^{k+1}$, где $\varphi_k \in \Omega_U$ и $\mu\varphi_k = 0$ для всех $k \geq 1$.

Большой запас проекторов в теории $U^*(\cdot)$ дает конструкция операторов деления, предложенная С. П. Новиковым в [12].

Пусть Λ – некоторое коммутативное кольцо с единицей без элементов конечного порядка и без делителей нуля. Обозначим через $h_\Lambda^*(\cdot)$ теорию $h^*(\cdot) \otimes \Lambda$.

Пусть $y \in \Omega_U^{-2n}$, $n > 0$. Оператором деления на y называется когомологическая операция

$$\Delta_y: U_\Lambda^*(\cdot) \rightarrow U_\Lambda^*(\cdot)$$

такая, что $\Delta_y y = 1$ и

$$\Delta_y ab = (\Delta_y a)b + a(\Delta_y b) - y(\Delta_y a)(\Delta_y b)$$

для любых a и b из $U_\Lambda^*(X)$.

Из определения следует, что если оператор Δ_y существует для данного $y \in \Omega_U$, то y является *мультипликативно неразложимым* в кольце Ω_U . Напомним, что это условие эквивалентно условию $s_n y \neq 0$ (об операциях s_n см. разд. 2).

Имеет место следующий результат.

Пусть $y \in \Omega_U^{-2n}$, $n > 0$ и $s_n y = -d \neq 0$. Возьмем $\Lambda = \mathbb{Z}[d^{-1}]$. Тогда

1. Множество операторов деления на y можно отождествить с множеством всех мультипликативных операций $\mu: U_\Lambda^*(\cdot) \rightarrow U_\Lambda^*(\cdot)$ таких, что

$$\mu u = \varphi_y(u) = u + yu^n(d^{-1}u + (u^2)).$$

2. Каждая мультипликативная операция $\mu: U_\Lambda^*(\cdot) \rightarrow U_\Lambda^*(\cdot)$ такая, что $\mu u = \varphi_y(u) = u + yu^n(d^{-1}u + (u^2))$, является проектором и выделяет в теории $U_\Lambda^*(\cdot)$ теорию когомологий $U_y^*(\cdot)$ с кольцом скаляров $\Omega_{U,y} = \Lambda[a_1, \dots, a_{n-1}, a_{n+1}, \dots]$.

В качестве следствия получаем:

1. Существует мультипликативный проектор $\mu: U^*(\cdot) \rightarrow U^*(\cdot)$, образом которого является $\mathbb{C}$ -ориентированная теория когомологий с кольцом скаляров $\mathbb{Z}[a_n]$, где n пробегает числа вида $p^q - 1$ для всех простых чисел p и $q = 1, 2, \dots$.

2. Фиксируем простое число p и рассмотрим кольцо целых p -адических чисел $\mathbb{Z}_p$. Выберем классы $[\mathbb{C}P^n]$ для $n \neq p^q - 1$ в качестве мультипликативных образующих кольца $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$. Тогда существует мультипликативный проектор $\mu_p: U^*(\cdot) \otimes \mathbb{Z}_p \rightarrow U^*(\cdot) \otimes \mathbb{Z}_p$ такой, что $\mu_p[\mathbb{C}P^n] = 0$, $n \neq p^q - 1$. Образом этого проектора является $\mathbb{C}$ -ориентированная теория когомологий с кольцом скаляров $\mathbb{Z}_p[a_{p^q-1}]$, $q = 1, 2, \dots$.

Алгебраическая теория операторов деления и ее топологические приложения были развиты в [54].

Используя классическую теорию препятствий в гомотопической топологии, Э. Браун и Ф. Петерсон в 1966 г. [55] доказали, что спектр $MU\mathbb{Z}_p$ расщепляется в прямую сумму сдвигов некоторого спектра, получившего название *спектра Брауна–Петерсона* и обозначение BP_p . Вскоре после этого С. П. Новиков в [12] получил результат Брауна–Петерсона при помощи введенных им операторов деления на скаляры (см. выше). В вычислениях гомотопических групп методом спектральной последовательности Адамса–Новикова он существенно использовал спектр Брауна–Петерсона. Для этого он ввел и исследовал алгебру когомологических операций $\mathcal{A}_{BP}$ в теории $BP^*(\cdot)$, определяемой этим спектром.

Важным приложением теоремы Квиллена об универсальности формальной группы геометрических кобордизмов явилось построение проекторов, получивших его имя.

До работы [41] не удавалось получить каноническое (универсальное) расщепление спектра $MU\mathbb{Z}_p$. Такое расщепление было получено на основе теории формальных групп.

Формальные группы $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ над некоторым коммутативным кольцом A называются сильно изоморфными над A , если существует ряд $\varphi(x) = x + (x^2) \in A[[x]]$ такой, что

$$\varphi(F_1(x, y)) = F_2(\varphi(x), \varphi(y)).$$

Например, логарифм $g(x)$ формальной группы $F(x, y) = F_1(x, y)$ над $A \otimes \mathbb{Q}$ задает ее сильный изоморфизм с аддитивной группой $F_2(x, y) = x + y$.

Квиллен применил теорему Картье о том, что над кольцом $\mathcal{A} \otimes \mathbb{Z}_p$ универсальная формальная группа $\mathcal{F}(x, y)$ сильно изоморфна группе $\mathcal{F}_p(x, y)$ с логарифмом

$$g_p(u) = u + \sum [\mathbb{C}P^{p^q-1}] \frac{u^{p^q}}{p^q}.$$

Проекторы π_p однозначно определяются условиями

$$\pi_p([\mathbb{C}P^{p^q-1}]) = [\mathbb{C}P^{p^q-1}] \quad \text{и} \quad \pi_p([\mathbb{C}P^n]) = 0, \quad n \neq p^q - 1.$$

Из теоремы Картье следует, что кольцевой гомоморфизм

$$\pi_p: \mathbb{Z}[[\mathbb{C}P^n], n \geq 1] \rightarrow \mathbb{Z}[[\mathbb{C}P^n], n \geq 1]$$

однозначно продолжается до проектора

$$\hat{\pi}_p: \Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p \rightarrow \Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p, \quad \hat{\pi}_p \hat{\pi}_p = \hat{\pi}_p.$$

Ряд $u_{BP} = u_{BP}(u)$, задающий сильный изоморфизм группы $\mathcal{F}(x, y)$ с группой $\mathcal{F}_p(x, y)$, определяет проектор

$$\pi_p: U^*(\cdot) \otimes \mathbb{Z}_p \rightarrow U^*(\cdot) \otimes \mathbb{Z}_p,$$

выделяющий в $U^*(\cdot) \otimes \mathbb{Z}_p$ теорию когомологий Брауна–Петерсона $BP^*(\cdot)$. В [41] приведена формула, описывающая средствами теории формальных групп ряд $u_{BP}(u)$.

В [41] дано описание алгебры $\mathcal{A}_{BP}$ всех когомологических операций в теории Брауна–Петерсона, которое теперь используется в приложениях спектральной последовательности Адамса–Новикова. Алгебра $\mathcal{A}_{BP}$ является свободным модулем над кольцом скаляров $\Omega_{BP} = \mathbb{Z}_p[a_{p-1}, \dots, a_{p^q-1}, \dots]$ с аддитивным базисом операций, определяемых характеристическими классами Чженя–Коннера–Флойда в теории $BP^*(\cdot)$. Обратим внимание, что группа, порожденная над $\mathbb{Z}_p$ этими базисными операциями, имеет структуру *коалгебры*, но, в отличие от случая Ландвебера–Новикова, не является алгеброй Хопфа, так как композиция базисных операций Квиллена разлагается по базису с коэффициентами из кольца Ω_{BP} , а не из $\mathbb{Z}_p$.

Построение проекторов Квиллена – это важный пример решения задач, сформулированных в разд. 4. Опишем общий случай.

Рассмотрим некоторую $\mathbb{C}$ -ориентированную теорию когомологий $(h^*(\cdot), u_h)$. Как отмечено выше, существует мультипликативное преобразование $\mu_h: U^*(\cdot) \rightarrow h^*(\cdot)$, переводящее формальную группу геометрических кобордизмов $f(u, v) = u + v + \sum a_{ij} u^i v^j$ в формальную группу над кольцом Ω_h

$$f_h(x, y) = x + y + \sum \alpha_{ij} x^i y^j,$$

где $x = \mu_h u$, $y = \mu_h v$, $\alpha_{ij} = \mu_h(a_{ij})$.

Из универсальности формальной группы $f(u, v)$ над Ω_U следует, что множество формальных групп над Ω_h можно отождествить с множеством кольцевых гомоморфизмов $\Omega_U \rightarrow \Omega_h$. Используя этот факт, получаем следующее утверждение.

Формальная группа $F(x, y)$ над Ω_h сильно изоморфна формальной группе $f_h(x, y)$ тогда и только тогда, когда кольцевой гомоморфизм $\varphi: \Omega_U \rightarrow \Omega_h$, классифицирующий формальную группу $F(x, y)$, продолжается до мультипликативного преобразования $\mu_h(F): U^*(\cdot) \rightarrow h^*(\cdot)$.

Для доказательства этого результата ориентацию $u_h \in h^2(\mathbb{C}P^\infty)$ надо заметить на ориентацию $\varphi(u_h)$, где $\varphi(u_h)$ – ряд, задающий сильный изоморфизм групп $f_h(x, y)$ и $F(x, y)$.

Приведем приложение этого результата к описанным выше каноническим ориентациям.

1. Рассмотрим классические когомологии $(H^*(\cdot; \Lambda), u_H)$ с коэффициентами в коммутативном кольце Λ . Тогда $f_H(x, y) = x + y$, и мы получаем, что множество всех мультипликативных преобразований

$$\mu: U^*(\cdot) \rightarrow H^*(\cdot; \Lambda)$$

можно отождествить с множеством всех формальных групп над Λ , сильно изоморфных линейной группе.

2. Рассмотрим комплексную K -теорию $(K_\Lambda^*(\cdot), u_K)$ с коэффициентами в Λ . Тогда $f_K(x, y) = x + y - \beta xy$, и мы получаем, что множество всех мультипликативных преобразований

$$\mu: U^*(\cdot) \rightarrow K_\Lambda^*(\cdot)$$

можно отождествить с множеством всех формальных групп над Λ , сильно изоморфных группе $x + y - \beta xy$.

3. Множество всех мультипликативных преобразований

$$\mu: U^*(\cdot) \rightarrow U_\Lambda^*(\cdot)$$

можно отождествить с множеством всех формальных групп над $\Omega_U \otimes \Lambda$, сильно изоморфных универсальной формальной группе.

Например, операции $\Psi_U^k: U^*(\cdot) \rightarrow U^*(\cdot) \left[\frac{1}{k} \right]$ соответствует формальная группа

$$F(u, v) = u + v + \sum k^{i+j-1} a_{ij} u^i v^j.$$

Ряд $\Psi_U^k u = \frac{1}{k} [k](u)$ задает сильный изоморфизм формальной группы геометрических кобордизмов с этой группой.

Рассмотрим ряд $g(u) = u + \sum [\mathbb{C}P^n] \frac{u^{n+1}}{n+1}$ и кольцевой гомоморфизм $\mu: \Omega_U \rightarrow \Lambda$. Положим

$$g_\mu(x) = x + \sum \mu([\mathbb{C}P^n]) \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

В качестве следствия предыдущих результатов получаем решение задач из разд. 4.

1. Кольцевой гомоморфизм $\mu: \Omega_U \rightarrow \Lambda$ продолжается до мультипликативного преобразования $\mu: U^*(\cdot) \rightarrow H^*(\cdot; \Lambda)$ тогда и только тогда, когда $g_\mu(x) \in \Lambda[[x]]$, где $x = \mu_H u$.

2. Кольцевой гомоморфизм $\mu: \Omega_U \rightarrow \Lambda[\beta]$ продолжается до мультипликативного преобразования $\mu: U^*(\cdot) \rightarrow K_\Lambda(\cdot)$ тогда и только тогда, когда $\exp(\beta g_\mu(x)) \in \Lambda[\beta][[x]]$.

3. Кольцевой гомоморфизм $\mu: \Omega_U \rightarrow \Omega_U \otimes \Lambda$ продолжается до мультипликативного преобразования $\mu: U^*(\cdot) \rightarrow U_\Lambda^*(\cdot)$ тогда и только тогда, когда $g^{-1}(g_\mu(x)) \in \Omega_U \otimes \Lambda[[x]]$.

В [56] дано описание проекторов в U^* -теории, связанных с SU^* -теорией. Эти проекторы нашли приложение в задаче о деформации умножения в U^* -теории (см. [54]).

11. Двухзначные формальные группы

Изучение формальных степенных систем в [37] во многом было стимулировано тем, что топологические конструкции приводят к другим реализациям универсальных степенных систем, определяемым многозначными формальными группами, первые важные примеры которых были введены в [37].

Пусть $F(u, v)$ – формальная группа над кольцом A и $\bar{u} = [-1](u)$ – ряд, задающий обратный элемент для операции $u \oplus v = F(u, v)$. Положим $x = u\bar{u} = |u|^2 \in A[[u]]$. Тогда

$$|F(u, v)|^2 = F(u, v)F(\bar{u}, \bar{v}) \quad \text{и} \quad |F(\bar{u}, v)|^2 = F(\bar{u}, v)F(u, \bar{v}).$$

В [37] показано, что формальные ряды $|F(u, v)|^2 + |F(\bar{u}, v)|^2$ и $|F(u, v)|^2 |F(\bar{u}, v)|^2$ из кольца $A[[u, v]]$ принадлежат подкольцу $A[[x, y]] \subset A[[u, v]]$, следовательно, их можно переписать в виде $\Theta_1(x, y)$ и $\Theta_2(x, y)$ соответственно.

Рассмотрим над кольцом $A[[x, y]]$ квадратное уравнение

$$Z^2 - \Theta_1(x, y)Z + \Theta_2(x, y) = 0$$

и ряд $B(x) = x + (x^2)$, который в кольце $A \otimes \mathbb{Q}[[u]]$ имеет вид $g(u)g(\bar{u}) = -g(u)^2$. Тогда решения

$$\begin{aligned} |F(u, v)|^2 &= B^{-1}\left(\left(\sqrt{B(x)} + \sqrt{B(y)}\right)^2\right), \\ |F(\bar{u}, v)|^2 &= B^{-1}\left(\left(\sqrt{B(x)} - \sqrt{B(y)}\right)^2\right) \end{aligned}$$

введенного уравнения не являются рядами от x и y , но обладают своеобразной ассоциативностью. Такие квадратные уравнения в [37] были названы *двухзначными формальными группами, определенными квадратом модуля формальной группы*.

В [57] было дано аксиоматическое определение двухзначной формальной группы над кольцом A , задаваемой уравнением

$$Z^2 - \Theta_1(x, y)Z + \Theta_2(x, y) = 0,$$

где $\Theta_k(x, y) \in A[[x, y]]$, $k = 1, 2$.

Обозначим через $\Lambda \subset \Omega_U$ подкольцо, порожденное коэффициентами рядов $\Theta_k(x, y) \in \Omega_U[[x, y]]$, $k = 1, 2$, полученных описанной выше конструкцией в случае формальной группы геометрических кобордизмов. Соответствующая двузначная формальная группа над кольцом Λ названа *двузначной формальной группой в кобордизмах*.

В цикле работ автора настоящей статьи было доказано, что двузначная формальная группа в кобордизмах является универсальной среди двузначных групп, удовлетворяющих условию $\Theta_2(x, x) = 0$.

Детальное изложение теории двузначных формальных групп и ее топологических приложений дано в [58]. Главным алгебраическим результатом этой теории является полная классификация двузначных формальных групп. Опишем топологический результат, получивший важные приложения в теории $Sp^*(\cdot)$ кобордизмов стабильно симплектических многообразий, задаваемой спектром Тома $MSp = \{MSp(n)\}$. Кольцо скаляров этой теории — Ω_{Sp} .

В последние годы активно изучаются симплектические кобордизмы, построенные на основе симплектических многообразий в смысле симплектической геометрии [59]. В связи с этим появилось предложение, чтобы не было путаницы, называть теорию $Sp^*(\cdot)$ теорией кватернионных кобордизмов, но мы будем придерживаться устоявшейся терминологии.

В работе С. П. Новикова [11] методом классической спектральной последовательности Адамса было показано, что

$$\Omega_{Sp} \left[\frac{1}{2} \right] \equiv \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] [b_n, n = 1, \dots], \quad \deg b_n = -4n.$$

Полное вычисление кольца Ω_{Sp} , включая структуру кольца $\Omega_{Sp}/(2\text{-кручение})$, остается одной из самых известных нерешенных задач алгебраической топологии.

Каноническое отображение спектров $j: MSp \rightarrow MU$, соответствующее стандартному вложению групп $Sp(n) \subset U(2n)$, задает кольцевой гомоморфизм $j_*: \Omega_{Sp} \rightarrow \Omega_U$ такой, что $\text{Ker } j_* \left[\frac{1}{2} \right] = 0$, и эпиморфизм $\mathcal{A}_U$ -модулей $j^*: \mathcal{A}_U \rightarrow U^*(MSp)$. В [58] построена теория функтора

$$L^*(X) = \text{Hom}_{\mathcal{A}_U}(U^*(MSp), U^*(X))$$

и вычислены кольца $L^*(X)$ для важных случаев, когда X — произведение комплексных проективных пространств. Например, доказано, что

$$L^{4*}(CP(\infty) \times CP(\infty)) = L[[x, y, Z]] / \langle Z^2 - \Theta_1(x, y)Z + \Theta_2(x, y) \rangle,$$

где $L = L^*(\text{pt})$. Кольца $L^*(X)$ играют ключевую роль в вычислении колец $Sp^*(X)$ методом спектральной последовательности Адамса–Новикова. Отметим, что если пространство X не имеет 2-крючения в гомологиях, то кольцо $L^*(X)$ является минимальным аддитивно прямым слагаемым в кольце $U^*(X)$, содержащим образ кольца $Sp^*(X)$. Особый интерес, естественно, представляет кольцо $L = L^*(\text{pt}) \subset \Omega_U$, которое можно отождествить с кольцом комплексных

кобордизмов стабильно комплексных многообразий M^m , обладающих накрытиями $\widehat{M}^m \rightarrow M^m$ со стабильно симплектической структурой, т. е. многообразие $\widehat{M}^m$ допускает вложение $\widehat{M}^m \subset \mathbb{R}^{m+4n}$, нормальное расслоение которого имеет структурную группу $Sp(n)$.

Пусть Λ_1 – подкольцо в $\Lambda\left[\frac{1}{2}\right]$, порожденное коэффициентами рядов $\frac{1}{2}\Theta_1(x, y)$ и $\Theta_2(x, y)$. В [58] доказано, что $L = \Lambda_1 \cap \Omega_U$ и

$$\Lambda_1 = \mathbb{Z}[c_n, n \geq 1], \quad \deg c_n = -4n.$$

В. В. Вершинин, используя это вычисление кольца L , получил важный результат о произведении элементов порядка 2 в кольце Ω_{Sp} (см. [60]) методом спектральной последовательности Адамса–Новикова.

Любая двузначная формальная группа над кольцом A , определяемая уравнением

$$Z^2 - \Theta_1(x, y)Z + \Theta_2(x, y) = 0,$$

где $\Theta_2(x, x) = 0$, задает совокупность рядов $\{\phi_k(x), k \in \mathbb{Z}\}$, где $\phi_k(x) = \phi_{-k}(x)$, $\phi_0(x) = 0$, $\phi_1(x) = x$ и

$$\phi_k(x) = \Theta_1(x, \phi_{k-1}(x)) - \phi_{k-2}(x).$$

Ряды $\phi_k(x) = k^2x + (x^2)$ представляют собой степенную систему типа 2. Эта система не является системой, задаваемой формальной группой над кольцом A (см. [37]), так как формальная группа $B^{-1}(B(x) + B(y))$ не лежит в кольце $A[[x, y]]$, где $B(x) \in A \otimes \mathbb{Q}$ – логарифм степенной системы $\{\phi_k(x)\}$ (см. выше).

Двузначная формальная группа над кольцом L , задаваемая квадратом модуля формальной группы геометрических кобордизмов $f(u, v)$ над кольцом Ω_U , является универсальной среди двузначных групп таких, что $\Theta_2(x, x) = 0$ (см. [58]). Обозначим через $L(2)$ подкольцо в L , порожденное коэффициентами соответствующей степенной системы $\{\phi_k(x)\}$ типа 2. Таким образом, мы получаем реализацию над кольцом $L(2) \subset L \subset \Omega_U$ универсальной степенной системы типа 2, отличную от ее реализации степенной системой $\{[k^2](u)\}$ над кольцом $\Omega(2) \subset \Omega_U$. Следовательно, существует изоморфизм колец $\Omega(2) \rightarrow L(2)$. Этот изоморфизм удваивает размерность классов кобордизмов.

Описанная система $\{\phi_k(x)\}$ типа 2 имеет важные топологические применения и впервые возникла в неявном виде в [23] при описании неподвижных точек действия 2-групп обобщенных кватернионов на стабильно комплексных многообразиях.

Конструкция степенной системы $\phi_k(x)$ имеет естественное обобщение. Пусть $F(u, v)$ – формальная группа над кольцом R без кручения и $g_F(u)$ – ее логарифм. Рассмотрим полный набор $(\xi_0 = 1, \dots, \xi_{m-1})$ корней m -й степени из 1. Положим $B_m^{-1}(-y) = \prod_{j=0}^{m-1} g_F^{-1}(\xi_j \sqrt[m]{y})$, $x = \prod_{j=0}^{m-1} g_F^{-1}(\xi_j g_F(u))$. Тогда $B_m(x) = (-1)^{m-1} g_F(u)^m$, и мы получаем формальную степенную систему

$$F_k^{(m)}(x) = B_m^{-1}(k^m B_m(x)) = \prod_{j=0}^{m-1} g_F^{-1}(k \xi_j g_F(u))$$

типа $s = m$. Коэффициенты ряда $F_k^{(m)}(x)$ заведомо лежат в кольце R для формальных групп $F(u, v)$ с комплексным умножением на ξ_j (возведением в степень ξ_j). Эта конструкция проходит для формальной группы геометрических кобордизмов над кольцом $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_p$ и $m = p - 1$, где $\mathbb{Z}_p$ – кольцо целых p -адических чисел. Как и в случае $m = 2$, можно рассмотреть также m -значную формальную группу, задаваемую алгебраическим уравнением степени m , решения которого имеют вид $F_k(x, y) = B_m^{-1}((\sqrt[m]{B_m(x)} + \varepsilon^k \sqrt[m]{B_m(y)})^m)$, где $k = 0, \dots, m - 1$ и $\varepsilon^m = 1$. Топологические конструкции и приложения m -значных групп можно найти в [61], обзор по их теории – в [62].

12. Квантовые группы и операторные дубли

Пусть k – некоторое коммутативное кольцо. Скажем, что алгебры A и M над k образуют тройку Милнора $(A, M; \varphi)$, если A – алгебра Хопфа, а M – некоторый A -модуль с милноровским действием $\varphi: A \otimes M \rightarrow M$, т. е. $a(m_1 \cdot m_2) = \sum (a' m_1)(a'' m_2)$, где $\Delta a = \sum a' \otimes a''$ – диагональ в A и $am = \varphi(a \otimes m)$.

В 1990-е годы, когда большое внимание было привлечено к квантовым группам (см. [18], [19]), С. П. Новиков, исследуя связь конструкции В. Г. Дринфельда с алгеброй $\mathcal{A}_U$, ввел в [16] понятие *операторного дубля* $M_\varphi A$ тройки Милнора $(A, M; \varphi)$.

Операторный дубль $M_\varphi A$ представляет собой алгебру над k такую, что:

- алгебра $M_\varphi A$ содержит алгебры A и M как подалгебры;
- k -линейное отображение $M \otimes_k A \rightarrow M_\varphi A: m \otimes a \rightarrow m \cdot a$ является изоморфизмом;
- выполняется правило коммутации $a \cdot m = \sum a'(m) \cdot a''$.

Далее, когда ясно, о каком действии φ алгебры A на M идет речь, операторный дубль $M_\varphi A$ обозначается короче: MA . Ясно, что операторный дубль $\Omega_U S$ для канонического представления S на Ω_U совпадает с алгеброй $\mathcal{A}_U$ (см. [16]).

Пусть A – некоторая алгебра Хопфа над k и $A^* = \text{Hom}_k(A, k)$ – двойственная ей алгебра Хопфа. Обозначим через r, l и ad милноровские действия алгебры Хопфа A на A^* , задаваемые формулами

$$\begin{aligned} \langle r(x)\sigma, y \rangle &= \langle \sigma, yx \rangle, & \langle l(x)\sigma, y \rangle &= \langle \sigma, \gamma(x)y \rangle, \\ \langle \text{ad}(x)\sigma, y \rangle &= \left\langle \sigma, \sum \gamma(x')yx'' \right\rangle, \end{aligned}$$

где $x, y \in A$, $\sigma \in A^*$, γ – антиавтоморфизм алгебры Хопфа A , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – каноническое спаривание $A^* \otimes A \rightarrow k$. Таким образом, для алгебры Хопфа A определены операторные дубли

$$A_r^* A, \quad A_l^* A \quad \text{и} \quad A_{\text{ad}}^* A.$$

В случае, когда алгебра Хопфа A является *кокоммутативной*, операторный дубль $A_{\text{ad}}^* A$ совпадает (см. [16]) с квантовой группой алгебры Хопфа A в конструкции В. Г. Дринфельда.

В [16] отмечается, что операторные дубли естественно возникают как алгебры дифференциальных операторов на группах Ли или алгебры разностных операторов на дискретных группах. В этих случаях M – алгебра функций на группе со стандартной структурой алгебры Хопфа, а $X = M^*$ – двойственная алгебра Хопфа. Аналогичная конструкция под именем “гейзенбергов дубль” одновременно и независимо появилась в работе М. А. Семенова-Тян-Шанского (см. [20]).

Как следует из [63] (см. разд. 17), алгебра всех операций в теории комплексных кобордизмов изоморфна подалгебре в алгебре дифференциальных операторов на группе $\text{Diff}_1(\mathbb{Z})$.

Развитие теории и приложений операторных дублей было дано в [17]. В этой работе, в частности, показано, что квантовая группа S_{ad}^*S алгебры Ландвебера–Новикова S изоморфна подалгебре Хопфа алгебры кохомологических операций в теории удвоенных комплексных кобордизмов $DU^*(\cdot)$. Теория $DU^*(\cdot)$ представима спектром $MU \wedge MU$. Она строится на основе гладких многообразий, в нормальном расслоении которых фиксировано расщепление в сумму двух комплексных расслоений. Для удвоенной теории комплексных кобордизмов $DU^*(\cdot)$ имеются преобразования (см. разд. 4)

$$\mu_{DU}^l: U^*(\cdot) \rightarrow DU^*(\cdot) \quad \text{и} \quad \mu_{DU}^r: U^*(\cdot) \rightarrow DU^*(\cdot),$$

задающие вложения

$$\mu_{DU}^l: \Omega_U \rightarrow \Omega_{DU} \quad \text{и} \quad \mu_{DU}^r: \Omega_U \rightarrow \Omega_{DU}.$$

Положим $\mu_{DU}^l(\Omega_U) = \Omega_{U,l}$ и $\mu_{DU}^r(\Omega_U) = \Omega_{U,r}$. На кольце кохомологий точки $DU^*(\text{pt}) = \Omega_{DU} = \pi_*(MU \wedge MU)$ теории $DU^*(\cdot)$ существуют операторы, задающие *расщепляющие изоморфизмы*

$$\Omega_{U,l} \otimes S_r^* \xrightarrow{\cong} \Omega_{DU} \xleftarrow{\cong} S_l^* \otimes \Omega_{U,r}.$$

Описание этих изоморфизмов в терминах формальной группы геометрических кобордизмов см. ниже.

Левая u_l и правая u_r ориентации универсального расслоения $\xi \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ определяют две формальные группы над кольцом Ω_{DU} :

$$f^l(x, y) = x + y + \sum \alpha_{i,j}^l x^i y^j, \quad \alpha_{i,j}^l \in \Omega_{U,l},$$

$$f^r(x, y) = x + y + \sum \alpha_{i,j}^r x^i y^j, \quad \alpha_{i,j}^r \in \Omega_{U,r}.$$

Как отмечалось выше, любые две ориентации связаны рядом, следовательно, существует ряд $\phi(x) = x + \sum b_k^r x^{k+1}$, $b_k^r \in \Omega_{DU}$, такой, что $u_r = \phi(u_l)$ и

$$\phi(f^l(x, y)) = f^r(\phi(x), \phi(y)),$$

т. е. ряд $\phi(x)$ задает сильный изоморфизм групп $f^l(x, y)$ с $f^r(x, y)$. В [17] доказано, что относительно вложений μ_{DU}^l и μ_{DU}^r имеют место изоморфизмы:

$$\Omega_{U,l}[b_n^r, n = 1, 2, \dots] \simeq \Omega_{DU} \simeq \Omega_{U,r}[b_n^l, n = 1, 2, \dots],$$

где b_n^l – коэффициенты ряда $\phi^{-1}(x)$.

Пусть $(h^*(\cdot), u_1, u_2)$ – некоторая $\mathbb{C}$ -ориентированная теория когомологий с двумя ориентациями. Тогда имеются мультипликативное преобразование

$$\mu_h: U^*(\cdot) \rightarrow h^*(\cdot); \quad \mu_h u = u_1,$$

формальная группа

$$f_h(x, y) = x + y + \sum a_{i,j}^h x^i y^j, \quad a_{i,j}^h \in \Omega_h,$$

и ряд

$$\phi(x) = x + \sum b_n^h x^{n+1}, \quad b_n^h \in \Omega_h,$$

такой, что $u_2 = \phi(u_1)$.

Из предыдущих конструкций следует, что преобразование μ_h продолжается до мультипликативного преобразования

$$D\mu_h: DU^*(X) \rightarrow h^*(X),$$

которое для $X = \text{pt}$ дает гоморфизм

$$D\mu_h: \Omega_{U,l}[b_n^r, n = 1, 2, \dots] \rightarrow \Omega_h$$

такой, что

$$D\mu_h(\alpha_{i,j}^l) = a_{i,j}^h \quad \text{и} \quad D\mu_h(b_n^r) = b_n^h.$$

Универсальные свойства теории $(DU^*(\cdot), u^l, u^r)$ можно описать в другой форме, эквивалентной предыдущей.

Пусть $(h^*(\cdot), u)$ – некоторая $\mathbb{C}$ -ориентированная теория когомологий и $F(u, v)$ – некоторая формальная группа над Ω_h , сильно изоморфная формальной группе $f_h(x, y)$, т. е. существует ряд $\phi(x) = x + \sum b_n^h x^{n+1}$, $b_n^h \in \Omega_h$, такой, что

$$\phi(f_h(x, y)) = F(\phi(x), \phi(y)).$$

Тогда преобразование μ_h продолжается до мультипликативного преобразования $D\mu_h$, действующего на кольце скаляров по той же формуле.

Рассмотрим теперь алгебру когомологических операций в теории $DU^*(\cdot)$. В этой алгебре имеется подалгебра Хопфа $DS = S^l \otimes S^r$ – тензорное произведение алгебр Хопфа, где S^l и S^r – алгебры операций Ландвебера–Новикова, построенные по ориентациям u_l и u_r соответственно.

Аналогично изоморфизму для алгебры $\mathcal{A}_U$, имеет место изоморфизм $\mathcal{A}_{DU} = \Omega_{DU}(S^l \otimes S^r)$. В [17] доказано, что подкольцо $B = \mathbb{Z}[b_n^r, n = 1, 2, \dots] \subset \Omega_{DU} \simeq \Omega_{U,l}[b_n^r, n = 1, 2, \dots]$ замкнуто относительно действия алгебры DS и, следовательно, является модулем Милнора над алгеброй Хопфа $S \otimes S$.

Следовательно, алгебра $\mathcal{A}_{DU}$ содержит в качестве подалгебры операторный дубль $B(S \otimes S)$.

Пусть S^* – алгебра Хопфа, двойственная алгебре Хопфа S . Тогда существует изоморфизм $S^* \rightarrow B$, который вместе с диагональным гомоморфизмом $\Delta: S \rightarrow S \otimes S$ задает вложение квантового дубля $D(S)$ в операторный дубль $B(S \otimes S) \subset \mathcal{A}_{DU}$.

В [54] дана следующая алгебраическая характеристика кольца Ω_U и универсальной формальной группы над ним.

Рассмотрим категорию колец $\mathcal{K}$, являющихся модулями над левым операторным дублем S_l^*S алгебры Хопфа S и модулями Милнора над S .

Пусть $K \in \mathcal{K}$. Элемент $v \in K$ называется геометрическим, если $sv = 0$ при $s \neq s_n$ и $s_nv = v^{n+1}$.

Рассмотрим кольцо $S^*[[u, v]]$, где u и v , по определению, геометрические элементы. Тогда $S^*[[u, v]] \in \mathcal{K}$ и существует ряд $\mathcal{F}(u, v) \in S^*[[u, v]]$, который однозначно определяется условием, что $w = \mathcal{F}(u, v)$ является геометрическим элементом. Более того, из единственности геометрического элемента $\mathcal{F}(u, v)$ такого, что $\mathcal{F}(u, 0) = u$, а u и v геометрические, вытекает, что ряд $\mathcal{F}(u, v)$ задает формальную группу над кольцом S^* . Аналогично доказывается, что существует ряд $g(x) = x + \sum b_i x^{i+1}$, $b_i \in S^*$, который однозначно определяется условием, что $sg(x) = 0$, $s \in S_{2q}$, $q > 0$, для любого геометрического элемента $x \in S^*[[u, v]]$, и, следовательно,

$$\mathcal{F}(u, v) = g^{-1}(g(u) + g(v)).$$

Обозначим через Ω подкольцо в S^* , порожденное коэффициентами ряда $\mathcal{F}(u, v)$.

Таким образом, ряд $\mathcal{F}(u, v)$ над кольцом Ω задает закон сложения, относительно которого множество геометрических элементов кольца $S^*[[u, v]]$ является группой. Этот закон является универсальным для функтора из категории $\mathcal{K}$ в категорию множеств, сопоставляющего кольцу $K \in \mathcal{K}$ множество его геометрических элементов.

Используя, что $U^*(X) \otimes_{\Omega_U} S^* \in \mathcal{K}$ для любого пространства X , мы получаем, что формальная группа $\mathcal{F}(u, v)$ совпадает с формальной группой геометрических кобордизмов. Это дает алгебраическую характеристику кольца Ω_U и формальной группы геометрических кобордизмов в терминах алгебры Ландвебера–Новикова.

13. Задачи о действиях групп

Вернемся теперь в 1968 год. С. П. Новиков в [23] развил и уточнил результаты своей работы [12] по известной задаче вычисления характеристических чисел modulo p многообразия M^n , несущего действие циклической группы $\mathbb{Z}/p$ (см. [64]). Для действий с изолированными неподвижными точками были получены явные формулы. К решению задач в этом направлении успешно подключились ученики С. П. Новикова (см. [65]–[70]). Важные результаты о кобордизмах многообразий с действием окружности были получены в [45], [46], [71]–[74]. В [23] была поставлена задача: извлечь из формул, полученных методами теории кобордизмов, знаменитые результаты Атья–Ботта о голоморфных действиях группы $\mathbb{Z}_p$ с изолированными неподвижными точками.

С. П. Новиков обсудил формулы Атья–Ботта с Д. К. Фаддеевым, который предложил записать их с помощью оператора теоретико-числового следа и провел показательные вычисления. Вскоре эта задача была полностью решена (см. [37]) для классических родов Хирцебруха. Впоследствии Т. Е. Панов в [75]

решил эту задачу для эллиптического рода Виттена–Ошанина (см. разд. 15), используя оператор следа для расширения поля модулярных форм.

Результаты работы [23] опирались на открытую С.П.Новиковым связь родов Хирцебруха с логарифмом формальной группы геометрических кобордизмов.

Рассмотрим ряд $Q(t) = 1 + \sum a_k t^k$ и положим

$$L_Q = L_Q(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \prod_{q=1}^n Q(t_q),$$

где $\sigma_k = \sigma_k(t_1, \dots, t_n)$ – k -я элементарная симметрическая функция. Классический род Хирцебруха $L_Q(M^{2n})$ задается формулой

$$L_Q(M^{2n}) = (L_Q(c_1, \dots, c_n), \langle M^{2n} \rangle),$$

где $c_k = c_r(\tau(M^{2n}))$ – классы Чженя в обычных когомологиях стабильного комплексного касательного расслоения и $\langle M^{2n} \rangle$ – фундаментальный цикл многообразия в гомологиях. Впервые аналог этой формулы появился в [76] для ориентированных многообразий M^{4n} и их классов Понтрягина. В [23] доказано следующее утверждение. Пусть $f(t) = t/Q(t)$ и $f^{-1}(t)$ – ряд такой, что $f^{-1}(f(t)) = t$. Тогда

$$f^{-1}(t) = t + \sum_{n \geq 1} L_Q([CP^n]) \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

Род Хирцебруха L_Q задает кольцевой гомоморфизм кольца Ω_U .

Верно и следующее утверждение: каждый кольцевой гомоморфизм кольца Ω_U в кольцо без кручения можно однозначно представить с помощью рода Хирцебруха L_Q для некоторого ряда Q . Развитие этого результата см. в разд. 14.

Используя изоморфизм $\Omega_U \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}[[CP^n], n = 1, 2, \dots]$, мы получаем по формуле С.П.Новикова эффективное решение следующей задачи: найти ряд $Q(t)$ по значениям $L_Q([CP^n])$. В современной литературе термины “род Хирцебруха” и “кольцевой гомоморфизм кольца Ω_U в кольцо без кручения” считаются синонимами.

Опишем, следуя [77], недавние результаты о действиях окружности на многообразиях.

Рассмотрим $2n$ -мерное многообразие M с гладким действием θ окружности S^1 на нем. Говорят, что M обладает структурой нормального комплексного S^1 -многообразия (M, θ, c_ν) , если заданы линейное действие S^1 на $\mathbb{C}^k$ и эквивариантное вложение $i: M \rightarrow D^{2k} \subset \mathbb{C}^k$, $i(M) \cap \partial D^{2k} = \emptyset$, вместе с фиксированной эквивариантной комплексной структурой c_ν на нормальном расслоении $\nu(i)$. Используя стандартное диагональное действие группы S^1 на сфере $S^{2m+1} \subset \mathbb{C}^{m+1}$ и действие S^1 на $D^{2k} \subset \mathbb{C}^k$, введем гладкие многообразия $\mathcal{M}_m = S^{2m+1} \times_{S^1} M$ и $W_m = S^{2m+1} \times_{S^1} D^{2k}$. Вложение i продолжается до вложения $i': \mathcal{M}_m \rightarrow W_m$, так что комплексная структура c_ν продолжается до комплексной структуры c' на нормальном расслоении $\nu(i')$.

Мы получили $\mathbb{C}$ -ориентированное отображение i' многообразия $\mathcal{M}_m$ размерности $2(m+n)$ в $2(m+k)$ -мерное многообразие W_m с границей ∂W_m такое, что

$\mathcal{M}_m \cap \partial W_m = \emptyset$ и $W_m/\partial W_m$ является пространством Тома $T\zeta$ комплексного k -мерного расслоения $\zeta = (S^{2m+1} \times_{S^1} \mathbb{C}^k) \rightarrow \mathbb{C}P^m$.

Таким образом, однозначно определен класс комплексных кобордизмов $\Phi_m(M, \theta, c_\nu) \in U^{-2n}(\mathbb{C}P^m)$ такой, что $i'_!(1) = T_U \Phi_m(M, \theta, c_\nu)$, где $1 \in \Omega_U^0 \subset U^0(\mathcal{M}_m)$ и $i'_!: U^0(\mathcal{M}_m) \rightarrow U^{2(k-n)}(W_m/\partial W_m)$ – гомоморфизм Гизина вложения i' . Здесь $T_U: \tilde{U}^{-2n}(\mathbb{C}P^m) \rightarrow \tilde{U}^{2(k-n)}(T\zeta)$ – изоморфизм Тома.

Проверяется, что $i_m^* \Phi_{m+1} = \Phi_m$, где $r_m: \mathbb{C}P^m \rightarrow \mathbb{C}P^{m+1}$ – стандартное вложение. Обратная последовательность $\{\Phi_m(M, \theta, c_\nu): m = 0, 1, \dots\}$ задает элемент $\Phi(M, \theta, c_\nu) \in U^{-2n}(\mathbb{C}P^\infty)$, который называется *универсальным S^1 -эквивариантным родом структуры (M, θ, c_ν)* . Непосредственно из конструкции следует, что ряд $\Phi(M, \theta, c_\nu)$ по переменной u при $u = 0$ принимает значение $[M]$.

Скажем, что M обладает структурой *тангенциального стабильно комплексного S^1 -многообразия (M, θ, c_ν)* , если заданы некоторое комплексное l -мерное расслоение $\zeta \rightarrow M$ и изоморфизм $c_\tau: \tau(M) \oplus \mathbb{C}^{l-n} \rightarrow \zeta$, где $\tau(M)$ – вещественное касательное расслоение, такие, что композиция

$$\rho(t): \zeta \xrightarrow{c_\tau^{-1}} \tau(M) \oplus \mathbb{C}^{l-n} \xrightarrow{d\theta(t)+I} \tau(M) \oplus \mathbb{C}^{l-n} \xrightarrow{c_\tau} \zeta$$

является комплексным преобразованием для каждого $t \in S^1$, где $d\theta(t)$ – дифференциал преобразования $\theta(t)$. Таким образом, определено представление $\rho: S^1 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\zeta, \zeta)$. С точностью до естественной эквивалентности структура (M, θ, c_τ) определяет структуру (M, θ, c_ν) , и поэтому можно ввести $\Phi(M, \theta, c_\tau)$ как $\Phi(M, \theta, c_\nu)$ для соответствующей структуры c_ν . Важно иметь в виду, что обратное, вообще говоря, неверно, т. е. c_ν не всегда определяет эквивариантную структуру c_τ .

Пусть $x \in M$ – изолированная неподвижная точка действия θ . Тогда представление $\rho_x: S^1 \rightarrow GL(l, \mathbb{C})$ разлагает слой в сумму $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^{l-n}$, где $\rho_x(t)$ действует на $\mathbb{C}^n$ как $\rho_{x,1} \oplus \dots \oplus \rho_{x,n}$ и тривиально на $\mathbb{C}^{l-n}$. Здесь $\rho_{x,j}$ – одномерное комплексное представление веса $\omega_{x,j}$, т. е. $\rho_{x,j}(t)v = t^{\omega_{x,j}}v$, где $\omega_{x,j} \neq 0$. Таким образом, каждой изолированной неподвижной точке x сопоставляется набор весов $\omega_x = (\omega_{x,1}, \dots, \omega_{x,n}) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^n$. Более того, изоморфизм

$$c_{x,\tau}: \tau_x \oplus \mathbb{C}^{l-n} \rightarrow \zeta_x$$

индуцирует *ориентацию* в касательном пространстве τ_x , с помощью которой вводится *функция знака* $\sigma(x)$ на множестве X изолированных неподвижных точек $x \in M$ такая, что $\sigma(x) = 1$, если композиция линейных отображений

$$\tau_x(M) \xrightarrow{I \oplus 0} \tau_x(M) \oplus \mathbb{C}^{l-n} \xrightarrow{c_{\tau,x}} \xi_x \cong \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^{l-n} \rightarrow \mathbb{C}^n$$

сохраняет ориентацию, и $\sigma(x) = -1$, если не сохраняет, где π – проекция на первое слагаемое с канонической ориентацией в $\mathbb{C}^n$.

Имеет место ТЕОРЕМА ЛОКАЛИЗАЦИИ ЭКВИВАРИАНТНОГО РОДА:

Пусть множество X неподвижных точек S^1 -многообразия (M, θ, c_τ) конечно. Тогда в группе $U^{-2n}(\mathbb{C}P^\infty) \subset \Omega_U[[u]]$ верна формула

$$\Phi(M, \theta, c_\tau) = \sum_{x \in X} \sigma(x) \prod_{i=1}^n \frac{1}{[\omega_{x,i}](u)} = [M] + \mathcal{R}(M),$$

где $[\cdot](u)$ – степенная система формальной группы геометрических кобордизмов (см. разд. 8), $[M]$ – класс кобордизмов многообразия M . Ряды $\mathcal{R}(M)$ описаны в [77], их коэффициенты представляют собой классы кобордизмов пространств расслоений со слоем многообразие M и базой, кобордантной нулю.

Для почти комплексного S^1 -многообразия M (т.е. $l = n$) мы имеем $\sigma(x) \equiv 1$ и формула для $\Phi(M, \theta, c_\tau)$ переходит в формулу Кричевера [45].

Каждое слагаемое в формуле для $\Phi(M, \theta, c_\tau)$ имеет полюс порядка n при $u = 0$. Утверждение о том, что эквивариантный род задается рядом по u , т.е. не имеет особенностей при $u = 0$, накладывает сильное условие на возможные наборы весов и знаков $\{\omega_x \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^n, \sigma(x), x \in X\}$ структуры (M, θ, c_τ) .

Задача описания условий на возможные наборы весов в неподвижных точках действия конечной группы $\mathbb{Z}/p$ была поставлена в [12], где они названы условиями Коннера–Флойда. Эти условия изучались в [12], [65]–[67].

В работах Т. Е. Панова [78], [79] получены явные формулы для важных алгебро-топологических инвариантов многообразий M^{2n} со структурой (M, θ, c_τ) (детали см. в [80]), в том числе формула

$$(c_n(\tau(M^{2n})), \langle M^{2n} \rangle) = \sum_{x \in X} \sigma(x).$$

В случае, когда структура c_τ на M^{2n} эквивалентна почти комплексной структуре, имеем $\sum_{x \in X} \sigma(x) = \chi(M^{2n})$, где $\chi(M^{2n})$ – эйлерова характеристика многообразия M^{2n} . Согласно теореме Э. Томаса [81], $2n$ -мерное вещественное ориентируемое расслоение ξ допускает комплексную структуру тогда и только тогда, когда оно допускает стабильно комплексную структуру ζ такую, что $c_n(\zeta) = e(\xi)$, где $e(\xi)$ – эйлеров класс расслоения ξ . В частности, $(e(\tau(M^{2n})), \langle M^{2n} \rangle) = \chi(M^{2n})$. Таким образом, условие $\sigma(x) = 1$ для всех неподвижных точек действия (M, θ, c_τ) является *необходимым* для существования T^k -инвариантной почти комплексной структуры.

В работе В. М. Бухштабера, Т. Е. Панова и Н. Рэя [82] для действий тора T^k , $k \geq 1$, были рассмотрены T^k -многообразия (M, θ, c_τ) и в случае, когда действие θ имеет изолированные неподвижные точки, получена формула локализации универсального T^k -рода $\Phi(M, \theta, c_\tau) \in \Omega_U[[u_1, \dots, u_k]]$ в терминах знаков $\sigma(x)$ и весов ω_x неподвижных точек $x \in M$. Эта формула нашла важные приложения ввиду того, что такие действия играют ключевую роль в разных направлениях современных исследований. Приведем наиболее известные классы действий тора T^k с изолированными неподвижными точками.

В последние 30 лет под влиянием задач, пришедших из физики, активно развивается *торическая геометрия* – раздел алгебраической геометрии. Центральным объектом здесь является торическое многообразие. Первые топологические аналоги таких многообразий были введены М. Дэвисом и Т. Янушкевичем в [83] и впоследствии получили название *кваситорических*. Более подробно о квазиторических многообразиях см. [80].

Приведем, следуя книге [80], конструкцию квазиторического многообразия $M(P, \Lambda)$, которая отличается от конструкции из [83]. Она является топологическим аналогом алгебро-геометрической конструкции В. В. Батырева неособых проективных торических многообразий (см. [84]).

Выпуклый n -мерный многогранник $P \subset \mathbb{R}^n$ называется простым, если в каждой его вершине сходится в точности n гиперграней.

Пусть

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_i, x \rangle + b_i \geq 0, 1 \leq i \leq m\},$$

где $a_i \in \mathbb{R}^n$ и $b_i \in \mathbb{R}$. Предполагается, что ни одно из m неравенств нельзя удалить.

Образует $(m \times n)$ -матрицу A_P , строки которой – векторы a_i , записанные в стандартном базисе. Положим $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$. Образом отображения

$$L_P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m: L_P(x) = A_P x + b$$

является пересечение n -мерной плоскости $\{y \in \mathbb{R}^m: y = A_P x + b\}$ с положительным конусом

$$\mathbb{R}_{\geq}^m = \{y \in \mathbb{R}^m: y_i \geq 0, i = 1, \dots, m\}.$$

Каноническое действие стандартного тора $\mathbb{T}^m$ на $\mathbb{C}^m$ задает проекцию

$$\rho: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}^m: \rho(z) = (|z_1|^2, \dots, |z_m|^2).$$

Вводится гладкое многообразие $\mathcal{Z}_P$ с каноническим действием тора $\mathbb{T}^m$ такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_P & \longrightarrow & \mathbb{C}^m \\ \downarrow \rho_P & & \downarrow \rho, \\ P & \xrightarrow{L_P} & \mathbb{R}_{\geq}^m \end{array}$$

коммутативна.

Пусть $\{F_1, \dots, F_m\}$ – множество гиперграней *простого* многогранника P^n . Целочисленная $(n \times m)$ -матрица Λ задает характеристическое отображение

$$\ell: \{F_1, \dots, F_m\} \rightarrow \mathbb{Z}^n,$$

если ее столбцы $\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_n}$ образуют базис в $\mathbb{Z}^n$ для любой вершины $v = F_{j_1} \cap \dots \cap F_{j_n}$. Матрица Λ задает эпиморфизм $\ell: \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^n$. Группа $K(\Lambda) = \ker \ell$ ранга $(m - n)$ действует свободно на $\mathcal{Z}_P$.

Пространство орбит $M = \mathcal{Z}_P / K(\Lambda)$ является $2n$ -мерным гладким многообразием с действием n -мерного тора $T^n = \mathbb{T}^m / K(\Lambda)$. Обозначим это действие через α , оно удовлетворяет условиям из [83]:

- 1) α локально изоморфно стандартному действию $\mathbb{T}^n$ на $\mathbb{C}^n$;
- 2) существует проекция $\pi: M \rightarrow P$ такая, что $\pi^{-1}(x)$ является орбитой действия α для любого $x \in P$.

Многообразие $M = M(P, \Lambda)$ называется *квазиторическим с комбинаторными данными* (A_P, Λ, b) .

В алгебраической геометрии *неособое проективное торическое* многообразие M определяется (см. [84]) простым многогранником

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_i, x \rangle + b_i \geq 0, i = 1, \dots, m\},$$

вершины которого лежат в решетке $\mathbb{Z}^n$, и наборы векторов $a_{i_1}, \dots, a_{i_n}$ для каждой вершины $v = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^n$.

В этом случае определено характеристическое отображение $\ell: \{F_1, \dots, F_m\} \rightarrow \mathbb{Z}^n$ при помощи матрицы $A_P^\top$, которая задает эпиморфизм $\ell: \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^n$ и его комплексификацию $\ell_{\mathbb{C}}: (\mathbb{C}^*)^m \rightarrow (\mathbb{C}^*)^n$, где $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Комбинаторные данные (A_P, b, Λ) задают каноническую T^n -инвариантную тангенциальную стабильно комплексную структуру на многообразии $M(P, \Lambda)$ и позволяют для каждой неподвижной точки x вычислить знак $\sigma(x)$ (см. ниже), причем, если T^n -инвариантная структура является почти комплексной, то $\sigma(x) = 1$ для всех неподвижных точек.

Рассмотрим проекцию $\pi: M(P, \Lambda) \rightarrow P$. Множество гиперграней $\{F_1, \dots, F_m\}$ многогранника P определяет множество взаимно транверсальных подмногообразий $M_j = \pi^{-1}(F_j)$, $j = 1, \dots, m$, коразмерности 2 в $M(P, \Lambda)$. Пусть $v = F_{j_1} \cap \dots \cap F_{j_n}$ — вершина многогранника P . Тогда $x = \pi^{-1}(v) = M_{j_1} \cap \dots \cap M_{j_n}$ — неподвижная точка T^n -действия α на $M(P, \Lambda)$. Имеем взаимно однозначное соответствие между множеством вершин $\{v_1, \dots, v_N\}$ и множеством неподвижных точек $\{x_1, \dots, x_N\}$ действия α . Касательное пространство τ_x к $M = M(P, \Lambda)$ в неподвижной точке x как $2n$ -мерное вещественное пространство разлагается в сумму $\tau_x(M(P, \Lambda)) = \nu_{j_1}|_x \oplus \dots \oplus \nu_{j_n}|_x$, где $\nu_j \rightarrow M_j$ — нормальное расслоение к подмногообразию M_j в M .

В терминах комбинаторных данных задается структура комплексного одномерного расслоения в ν_j для каждого $j = 1, \dots, m$.

Пусть $x = M_{j_1} \cap \dots \cap M_{j_n}$ — неподвижная точка. Тогда $\sigma(x) = 1$, если ориентация пространства $\tau_x(M)$, задаваемая стабильно комплексной структурой в M , совпадает с ориентацией расслоения $\nu_{j_1}|_x \oplus \dots \oplus \nu_{j_n}|_x$, определенного ориентациями расслоений ν_{j_k} , $k = 1, \dots, m$, и $\sigma(x) = -1$ в противном случае. Имеет место формула

$$\sigma(x) = \text{sign}(\det(\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_n}) \det(a_{j_1}, \dots, a_{j_n})).$$

Понятие знака $\sigma(x)$ неподвижной точки x действия тора T^n на квазиторическом многообразии M^{2n} сыграло важную роль в известной задаче о представителях классов стабильно-комплексных кобордизмов.

Согласно теореме Милнора (см. [28]) в каждом классе $[M^{2n}] \in \Omega_U^{-2n}$ содержится неособое алгебраическое многообразие. Метод доказательства этой теоремы использует многообразия Милнора (см. разд. 6 после формулы (19)) и приводит к несвязным многообразиям. В 1958 г. в докладе на Международном математическом конгрессе в Эдинбурге Ф. Хирцебрух (см. [96]) поставил задачу: описать классы $[M^{2n}] \in \Omega_U^{-2n}$, содержащие неприводимое (т.е. связное) *неособое* алгебраическое многообразие. Эта задача до сих пор остается нерешенной.

В [85] доказано, что для каждого $n > 1$ в группе Ω_U^{-2n} существует базис, составленный из классов стабильно комплексных кобордизмов квазиторических

многообразий. Стандартная операция связной суммы $M_1^{2n} \# M_2^{2n}$ квазиторических многообразий вдоль окрестностей неподвижных точек $x_k \in M_k^{2n}$, $k = 1, 2$, дает многообразие M^{2n} с действием тора T^n . В [86] доказано, что это многообразие имеет структуру квазиторического многообразия, согласованную с квазиторическими структурами на M_1^{2n} и M_2^{2n} тогда и только тогда, когда $\sigma(x_1)\sigma(x_2) = -1$.

В [86] введена новая операция $M_1^{2n} \diamond M_2^{2n}$ соединения квазиторических многообразий – “бриллиантовая сумма” такая, что в группе Ω_U^{-2n} имеет место формула

$$[M_1^{2n} \diamond M_2^{2n}] = [M_1^{2n}] + [M_2^{2n}].$$

Операция $\diamond$ позволяет соединять квазиторические многообразия вдоль неподвижных точек одного знака. В частности, определено квазиторическое многообразие $M_1^{2n} \diamond M_2^{2n}$ в случае торических многообразий M_1 и M_2 .

В качестве следствия сформулированного выше результата из [85] в [86] получено:

Каждый класс стабильно комплексных кобордизмов $[M^{2n}] \in \Omega_U^{-2n}$, $n > 1$, содержит квазиторическое многообразие.

В этой формулировке нельзя убрать приставку “квази”. Препятствием является, например, тот факт, что любое торическое многообразие имеет род Тодда 1.

Отметим решение еще одной известной задачи, использующее понятие знака $\sigma(x)$ неподвижной точки $x \in M^{2n}$.

А. А. Кустарев [87] показал, что если $\sigma(x) = 1$ для любой неподвижной точки, то каноническая T^n -инвариантная стабильно комплексная структура на $M(P, \Lambda)$ эквивалентна T^n -инвариантной почти комплексной структуре. Таким образом, для комбинаторных данных (A_P, b, Λ) существует T^n -инвариантная почти комплексная структура на квазиторическом многообразии $M(P, \Lambda)$ тогда и только тогда, когда $\sigma(x) = 1$ (см. формулу выше) для любой неподвижной точки x .

Другой важный класс T^k -многообразий (M, θ, c_τ) с изолированными неподвижными точками, когда знаки и веса неподвижных точек вычисляются эффективно, дает классическая теория однородных пространств G/H компактных групп Ли. Здесь θ — действие максимального тора T^k группы G на однородном пространстве G/H .

В. М. Бухштабером и С. Терзич в [88] получены формулы для $\Phi(G/H, \theta, c_\tau)$ в терминах теории групп Ли и в качестве следствия вычислены классы комплексных кобордизмов комплексных многообразий флагов и многообразий Грассмана.

14. Роды Хирцебруха

Пусть A — некоторое коммутативное кольцо без кручения с единицей 1 и $f(t) = t + \sum_{k \geq 1} f_k t^{k+1}$, где $f_k \in A \otimes \mathbb{Q}$. Положим

$$Q(t) = \frac{t}{f(t)}.$$

Роды Хирцебруха L_Q (см. разд. 13) далее будем обозначать L_f .

Род $L_f: \Omega_U \rightarrow A \otimes \mathbb{Q}$ называется *A-целочисленным*, если $L_f(M^{2n}) \in A$ для любого стабильно комплексного многообразия M^{2n} .

Благодаря универсальности формальной группы геометрических кобордизмов над Ω_U , множество формальных групп над A взаимно однозначно соответствует множеству кольцевых гомоморфизмов $\Omega_U \rightarrow A$. При этом формальная группа F классифицируется родом Хирцебруха $L_f: \Omega_U \rightarrow A$, где $f(t)$ – экспонента этой группы. Следовательно, множество всех A -целочисленных родов L_f совпадает с множеством кольцевых гомоморфизмов $L_f: \Omega_U \rightarrow A$ и множеством всех формальных групп над A . Обратим внимание, что решение задачи описания всех $\mathbb{Z}$ -целочисленных родов Хирцебруха, таким образом, следует из работы Т. Хонда [89], которая опирается на фундаментальные результаты теории чисел. В этой работе получена классификация формальных групп над $\mathbb{Z}$.

Тождественному отображению $\Omega_U \rightarrow \Omega_U$ соответствует род Хирцебруха L_f , где $f(t)$ – экспонента формальной группы геометрических кобордизмов. Этот род детально изучен в [38] под именем *универсального рода Хирцебруха*.

Напомним, что для любого n -мерного комплексного расслоения $\zeta \rightarrow X$ определены функториальные классы Тома $u(\zeta) \in U^{2n}(T(\zeta))$ и $u_H(\zeta) \in H^{2n}(T(\zeta))$ такие, что $u_H(\zeta) = \mu_H u(\zeta)$, где $\mu_H: U^*(\cdot) \rightarrow H^*(\cdot; \mathbb{Z})$ – каноническое мультипликативное преобразование (см. разд. 3 и 4).

Введем характеристический класс $\mathcal{P}(\zeta) \in H^0(X; \Omega_U(\mathbb{Z}))$ формулой

$$T_{u_H(\zeta)} \mathcal{P}(\zeta) = \text{ch}_U u(\zeta),$$

где $T_{u_H(\zeta)}$ – изоморфизм Тома в когомологиях.

Непосредственно из определения следует, что $\mathcal{P}(n) = 1$, где n – тривиальное расслоение над X , и для любых комплексных расслоений ζ_1 и ζ_2 над X имеет место формула $\mathcal{P}(\zeta_1 \oplus \zeta_2) = \mathcal{P}(\zeta_1) \mathcal{P}(\zeta_2)$. Таким образом, определен *экспоненциальный* гомоморфизм

$$\mathcal{P}: K^0(X) \rightarrow (1 + \tilde{H}^0(X, \Omega_U(\mathbb{Z}))).$$

Этот гомоморфизм полностью определяется тем, что для универсального расслоения $\xi \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ имеет место формула $t\mathcal{P}(\xi) = f(t)$, где $t \in H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$ и $f(t)$ – экспонента формальной группы геометрических кобордизмов.

Общим характеристическим классом Тодда $\mathcal{T}(\zeta)$ комплексного расслоения ζ называется класс $\mathcal{P}(-\zeta) = \mathcal{P}(\zeta)^{-1}$ (см. [38]).

Выбор названия объясняется тем, что класс $\mathcal{T}(\zeta)$ возникает в U^* -аналоге общей теоремы Римана–Роха–Хирцебруха–Гротендика.

Рассмотрим, как и выше, некоторое $\mathbb{C}$ -ориентированное отображение многообразий

$$f: M^m \rightarrow W^l, \quad \partial M = \emptyset, \quad f(M) \cap \partial W = \emptyset,$$

с комплексным нормальным расслоением ν вложения $M^m \subset W^l \times \mathbb{R}^{q+m}$.

Мультипликативные преобразования $\mu_H: U^*(\cdot) \rightarrow H^*(\cdot, \mathbb{Z})$ и $\text{ch}_U: U^*(\cdot) \rightarrow H^*(\cdot, \Omega_U(\mathbb{Z}))$ задают две ориентации $u_H(\nu) = \mu_H u(\nu)$ и $\text{ch}_U u(\nu)$ расслоения ν . Следовательно, для U^* -гомоморфизма Гизина

$$f_! : U^k(M^m) \rightarrow U^{k+l-m}(W^l, \partial W^l).$$

Мы получаем формулу (см. разд. 3)

$$\mathrm{ch}_U f_!(x) = (f_!)_H(\mathcal{T}(-\nu)x),$$

где $\mathcal{T}(-\nu) = \rho(\mathrm{ch}_U u(\nu), u_H(\nu))$ – класс, различающий ориентации.

В случае, когда многообразия M^m и W^l ориентированы в обычных когомологиях, имеют место изоморфизмы двойственности Пуанкаре:

$$\begin{aligned} D_M: H^k(M^m; \mathbb{Z}) &\rightarrow H_{m-k}(M^m; \mathbb{Z}) \\ D_W^{-1}: H_{m-k}(W^l; \mathbb{Z}) &\rightarrow H^{l+k-m}(W^l, \partial W^l; \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

и $(f_!)_H = \mathcal{D}_W^{-1} f_* \mathcal{D}_M$.

В случае, когда многообразия M^m и W^l ориентированы в U^* -теории, т.е. когда касательные расслоения $\tau(M^m)$ и $\tau(W^l)$ являются стабильно комплексными, мы получаем формулу

$$\mathrm{ch}_U f_!(x) = \mathcal{D}_W^{-1} f_* \mathcal{D}_M \left(\frac{\mathcal{T}(\tau(M))}{\mathcal{T}(\tau(W))} x \right).$$

В случае, когда M^{2n} – стабильно комплексное многообразие, а W – точка, мы получаем: $f_!(1) = [M^{2n}]$ и

$$[M^{2n}] = \mathrm{ch}_U[M^{2n}] = (\mathcal{T}(\tau(M)), \langle M^{2n} \rangle).$$

Рассмотрим кольцевой гомоморфизм $\mathrm{Td}: \Omega_U(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Q}[\beta^{-1}, \beta]$, ограничение которого на $\Omega_U \subset \Omega_U(\mathbb{Z})$ задается формулой $\mathrm{Td}[M^{2n}] = \mathrm{Td}(M^{2n})\beta^{-n}$, где $\mathrm{Td}(M^{2n})$ – классический род Тодда стабильно комплексного многообразия. Напомним, что $\mathrm{Td} = L_Q$, где $Q(t) = \frac{t}{1 - e^{-\beta t}}$.

Обозначим также $\mathrm{Td}: H^*(\cdot; \Omega_U(\mathbb{Z})) \rightarrow H^*(\cdot; \mathbb{Q})$ преобразование, определенное гомоморфизмом колец коэффициентов. Имеет место соотношение:

$$\mathrm{Td} \mathrm{ch}_U = \mathrm{ch}_K \mu_K,$$

где $\mu_K: U^*(\cdot) \rightarrow K^*(\cdot)$ – преобразование Римана–Роха–Коннера–Флойда (см. разд. 4).

Для любого стабильно комплексного многообразия M^{2n} из приведенных выше результатов вытекает соотношение

$$\mathrm{Td} \mathrm{ch}_U f_!(x) = \mathrm{ch}_K \mu_K f_! x$$

и, следовательно, соотношение

$$\mathrm{ch}_K(f_!)_K \mu_K x = (\mu_K \mathcal{T}(\tau(M)) \mathrm{ch}_K \mu_K x, \langle M \rangle).$$

Гомоморфизм $\mathrm{Td}: \Omega_U \rightarrow \mathbb{Z}[\beta^{-1}, \beta]$ задает в кольце $\mathbb{Z}[\beta^{-1}, \beta]$ структуру Ω_U -модуля, относительно которой имеет место известный изоморфизм Коннера–Флойда

$$U^*(X) \otimes_{\Omega_U} \mathbb{Z}[\beta^{-1}, \beta] \rightarrow K^*(X).$$

Из этого результата и предыдущего соотношения вытекает классическая формула Римана–Роха–Хирцебруха–Гротендика в комплексной K -теории:

$$\mathrm{ch}_K(f_!)_K \zeta = (\mathcal{T}_K(\tau(M)) \mathrm{ch}_K \zeta, \langle M \rangle),$$

где $\zeta \in K^0(M)$ и $\mathcal{T}_K(\cdot)$ – характеристический класс Тодда в K -теории.

В разд. 13 описан универсальный S^1 -эквивариантный род $\Phi(M, \theta, c_\nu) \in U^*(\mathbb{C}P^\infty) = \Omega_U[[u]]$ структуры (M, θ, c_ν) .

Любой род $L_f: \Omega_U \rightarrow A$ задает S^1 -эквивариантный род $L_f(\Phi(M, \theta, c_\nu)) = \Phi_f(M, \theta, c_\nu) \in A[[u]]$, который можно рассматривать как деформацию с параметром u рода $L_f[M]$. По построению, деформация соответствует структуре (M, θ, c_ν) действия окружности S^1 на многообразии M . Это приводит к следующему понятию.

Структура (M, θ, c_ν) называется *жесткой* для рода L_f , если

$$\Phi_f(M, \theta, c_\nu)(u) = \Phi_f(M, \theta, c_\nu)(0) = L_f[M].$$

На основе универсального T^k -эквивариантного рода $\Phi(M, \theta, c_\nu) \in U^*(BT^k)$ вводятся T^k -эквивариантные роды $\Phi_f(M, \theta, c_\nu) \in A[[u_1, \dots, u_k]]$.

Аналогично вводятся универсальные G -эквивариантные роды $\Phi(M, \theta, c_\nu) \in U^*(BG)$, где G – компактная группа Ли, BG – ее классифицирующее пространство и θ – действие группы G на M для некоторого G -эквивариантного вложения $M \subset \mathbb{R}^N$ с комплексным нормальным расслоением ν .

Отметим, что в случае группы G все результаты о жестких структурах для родов L_f извлекаются из результатов о T^k -эквивариантных родах, где $T^k \subset G$ – максимальный тор группы G .

Результаты о жестких структурах для классических родов, привлекавшие большое внимание к этой теме, были получены в [90] на основе теоремы Атья–Зингера. В [45], [74] был развит метод, основанный на использовании аналитических свойств “соотношений Коннера–Флойда”, полученных из формул локализации эквивариантных родов в терминах формальных групп. В [45] получен ряд результатов о жесткости, в частности новое доказательство результатов Атья и Хирцебруха.

И. М. Кричевер в [46] ввел род L_f , получивший впоследствии его имя, где $f(t) = \frac{e^{\lambda/2} t}{\Phi(t)}$ и $\Phi(t)$ – эллиптическая функция Бейкера–Ахиезера, играющая фундаментальную роль в теории интегрируемых систем.

В [46] доказано, что структура (M, θ, c_ν) для рода Кричевера является жесткой, если $c_1(c_\nu) = 0$.

Замечательная характеристика этого рода была получена в [91] и [92] в связи с задачей построения аналогов родов Хирцебруха для *компактных особых алгебраических многообразий*.

15. Эллиптические формальные группы

Опишем, следуя работе [93], приложение классических теорий эллиптических кривых и эллиптических функций к проблеме A -целочисленности родов Хирцебруха и проблеме построения родов Хирцебруха, жестких для определенных структур (M, θ, c_ν) .

Общая модель Вейерштрасса эллиптической кривой в координатах $(X : Y : Z) \in \mathbb{C}P^2$ задается уравнением

$$Y^2Z + \mu_1XYZ + \mu_3YZ^2 = X^3 + \mu_2X^2Z + \mu_4XZ^2 + \mu_6Z^3,$$

зависящим от вектора параметров $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_6)$.

В карте $\{Y \neq 0\}$ с координатами $u = -X/Y$ и $s = -Z/Y$ это уравнение принимает вид

$$s = u^3 + \mu_1us + \mu_2u^2s + \mu_3s^2 + \mu_4us^2 + \mu_6s^3,$$

однородный относительно градуировки $\deg u = 2$, $\deg s = 6$, $\deg \mu_i = -2i$. Здесь u и s – арифметические координаты Тейта (см. [94]). Они получили такое название, так как в окрестности точки $(0, 0)$ координата s задается рядом $s(u) \in \mathbb{Z}[\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_6][[u]]$ и, таким образом, u является униформизирующей координатой на этой кривой.

Геометрическая групповая структура на эллиптической кривой задается следующим условием: если точки P_1, P_2, P_3 лежат на пересечении некоторой прямой с данной кривой, то $P_1 + P_2 + P_3 = 0$. Фиксируем нуль геометрической групповой структуры в точке $O = (0 : 1 : 0)$. Тогда в полученной группе из соотношений $P_1 + P_2 + P_3 = 0$ и $P_3 + \bar{P}_3 + O = 0$ вытекает $P_1 + P_2 = \bar{P}_3$.

Пусть $(u, s(u)), (v, s(v)), (w, s(w))$ и $(\bar{w}, s(\bar{w}))$ – координаты точек P_1, P_2, P_3 и $\bar{P}_3$ в карте $\{Y \neq 0\}$. Геометрическая групповая структура в координатах $(u, s(u))$ задает закон сложения формальной группы над кольцом $\mathbb{Z}[\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_6]$ уравнением $\mathcal{F}_{\text{El}}(u, v) = \bar{w}$. Эта формальная группа названа *общей эллиптической формальной группой*.

В [93] получен явный вид ряда $\mathcal{F}_{\text{El}}(u, v) \in \mathbb{Z}[\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_6][[u, v]]$ и дифференциальные уравнения на экспоненту общей эллиптической формальной группы.

Формальная группа $\mathcal{F}_{\text{El}}(u, v)$ определяет $\mathbb{Z}[\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_6]$ -целочисленный род Хирцебруха, названный *общим эллиптическим родом* L_{El} .

Формальная группа над кольцом A называется *эллиптической* и обозначается $F_{\text{El}}(u, v)$, если классифицирующий ее кольцевой гомоморфизм $\mathcal{A} \rightarrow A$ разлагается в композицию $\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}[\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_6] \rightarrow A$.

Положим

$$c_2 = \mu_1^2 + 4\mu_2, \quad c_4 = \mu_1\mu_3 + 2\mu_4, \quad c_6 = \mu_3^2 + 4\mu_6$$

и

$$g_2(\mu) = \frac{1}{12} c_2^2 - 2c_4, \quad g_3(\mu) = \frac{1}{6} c_2c_4 - \left(\frac{1}{6} c_2\right)^3 - c_6.$$

Имеем $\deg g_i = -4i$. Экспонента формальной группы $\mathcal{F}_{\text{El}}(u, v)$ задается формулой

$$f_{\text{El}}(t) = -2 \frac{\wp(t) - (4\mu_2 + \mu_1^2)/12}{\wp'(t) - \mu_1\wp(t) + \mu_1(4\mu_2 + \mu_1^2)/12 - \mu_3},$$

где $\wp(t) = \wp(t; g_2(\mu), g_3(\mu))$ – классическая $\wp$ -функция Вейерштрасса [95].

Как отмечено в разд. 14, в работе [46] И. М. Кричевер ввел род Хирцебруха L_f , где

$$f(t) = f_{\text{Kr}}(t) = \frac{\exp((\lambda/2)t)}{\Phi(t)},$$

и доказал, что этот род обладает фундаментальным свойством жесткости на многообразиях с S^1 -эквивариантной SU -структурой.

Пусть A – кольцо без делителей нуля. В [93] доказано, что для того чтобы экспонента эллиптической формальной группы $F_{\text{El}}(u, v)$ над A задавала род Кричевера, необходимо и достаточно, чтобы в A выполнялись соотношения

$$\mu_2\mu_3 - \mu_1\mu_4 = 0, \quad \mu_3^2 + 3\mu_6 = 0, \quad \mu_3(\mu_1\mu_3 + \mu_4) = 0.$$

Приведем примеры законов сложения формальных групп, экспоненты которых задают эллиптические роды Кричевера.

Пусть $\mu = (0, \mu_2, 0, \mu_4, 0)$. Тогда $f_{\text{El}}(t)$ удовлетворяет уравнению $(f')^2 = 1 - 2\delta f^2 + \varepsilon f^4$, где $\delta = \mu_2$, $\varepsilon = \mu_2^2 - 4\mu_4$. То есть $f_{\text{El}}(t)$ – эллиптический синус $sn(t)$, и $F_{\text{El}}(u, v) \in \mathbb{Z}[\mu_2, \mu_4][[u, v]]$ задает классический закон сложения

$$F_{\text{El}}(u, v) = \frac{u\rho(v) + v\rho(u)}{1 - \varepsilon u^2 v^2}, \quad \text{где} \quad \rho(u)^2 = 1 - 2\delta u^2 + \varepsilon u^4.$$

В этом случае род Хирцебруха L_f является эллиптическим родом, введенным Ошаниным в [39].

Пусть $\mu = (0, 0, \mu_3, 0, \mu_6)$, где $\mu_3^2 = -3\mu_6$. Тогда

$$F_{\text{El}}(u, v) = \frac{u^2 r(v) - v^2 r(u)}{ur(v)^2 - vr(u)^2}, \quad \text{где} \quad r(u)^3 = 1 - 3\mu_3 u^3.$$

В этом случае род L_f является целочисленным над кольцом $\mathbb{Z}[\mu_3, \mu_6]/\mu_3^2 + 3\mu_6$ и соответствующий ему эквивариантный род является жестким на многообразиях с S^1 -эквивариантной SU -структурой.

Пусть $\mu = (\mu_1, \mu_2, 0, 0, 0)$. Тогда

$$F_{\text{El}}(u, v) = \frac{u + v - \mu_1 uv}{1 + \mu_2 uv}, \quad g(u) = \frac{1}{\alpha - \beta} \ln \frac{1 - \beta u}{1 - \alpha u}, \quad f(t) = \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha e^{\alpha t} - \beta e^{\beta t}},$$

где $\mu_1 = \alpha + \beta$, $\mu_2 = -\alpha\beta$. В этом случае род Хирцебруха L_f является известным *двупараметрическим родом Тодда* $T_{\alpha, \beta}$. Род $T_{\alpha, \beta}$ переходит в род Тодда при $\mu_2 = 0$; в L -род (сигнатуру, см. разд. 16) при $\mu_1 = 0$; в эйлерову характеристику при $\mu_1^2 = -4\mu_2$.

16. Общая проблема Милнора–Хирцебруха

Пусть $\gamma \in \mathcal{A}_U$ – операция в теории комплексных кобордизмов и $L: \Omega_U \rightarrow A$ – некоторый род Хирцебруха. Элемент $L(\gamma[M^{2n}]) \in A$ называется (L, γ) -характеристическим числом стабильно комплексного многообразия M^{2n} . В случае, когда $L = L_H: \Omega_U \rightarrow \mathbb{Z}$ – аугментация, т.е. $L_H([M^{2n}]) = 0$ при $n > 0$ и $L_H([\text{pt}]) = 1$, мы получаем, что если γ – операция Ландвебера–Новикова $s \in$

S_{2k} , то $L_H(s(M^{2n})) = 0$, при $k \neq n$ и $L_H(s(M^{2n}))$ – классическое характеристическое число, отвечающее характеристическому классу комплексного нормального расслоения многообразия M^{2n} .

На Математическом конгрессе в Эдинбурге, 1958 г., в докладе Хирцебруха (см. [96]) была сформулирована задача: найти все соотношения делимости на множествах характеристических чисел комплексных многообразий. Теория комплексных кобордизмов привела к задаче, получившей известность как проблема Милнора–Хирцебруха: найти все соотношения делимости на множествах характеристических чисел стабильно комплексных многообразий. Атья и Хирцебрух (см. [30]), опираясь на теорему Римана–Роха–Хирцебруха–Гротендика, выдвинули гипотезу, что решение проблемы Милнора–Хирцебруха дают условия целочисленности всех (L, γ) -чисел, где $L = \text{Td}: \Omega_U \rightarrow \mathbb{Z}$ – род Тодда.

Эта гипотеза была независимо доказана Р. Стонгом [97] и А. Хаттори [98].

Для каждого ориентируемого $4k$ -мерного многообразия M определяется сигнатура $\tau(M)$ как разность чисел положительных и отрицательных квадратов формы индекса пересечения на $H_{2k}(M; \mathbb{Z})$. Сигнатура является инвариантом класса ориентированных бордизмов многообразия M . Для рода Хирцебруха $L_Q = T_\alpha, -\alpha$, где $Q(t) = t/\text{th } t$, имеет место формула $L_Q[M^{4k}] = \tau(M^{4k})$. Здесь $\text{th } t$ – гиперболический тангенс.

Непосредственно из определения сигнатуры $\tau(M)$ следует, что род Хирцебруха $L_Q[M^{4k}] = \tau(M^{4k})$ является гомотопическим инвариантом многообразия M . Благодаря этому факту результаты о делимости сигнатуры нашли фундаментальные приложения в теории многообразий. Наиболее известна в этом направлении теорема В. А. Рохлина:

Пусть M^4 – ориентируемое гладкое многообразие такое, что $M^4 \setminus (\text{pt})$ – параллелизуемое многообразие. Тогда $\tau(M^4)$ делится на 16.

Гладкое многообразие M^n является SU -многообразием, или многообразием Калаби–Яо в современной терминологии, если существует вложение $M^n \subset \mathbb{R}^{n+2m}$, нормальное расслоение ν которого имеет структуру комплексного расслоения с $c_1(\nu) = 0$. Здесь $c_1(\cdot)$ – первый класс Чженя в когомологиях.

Хорошо известна теорема С. Д. Ошанина (см. [99]):

Сигнатура $\tau(M)$ любого $(8k+4)$ -мерного SU -многообразия M делится на 16.

В [99] для всех k построены $(8k+4)$ -мерные SU -многообразия M с $\tau(M) = 16$.

Пусть $\xi \rightarrow X$ – некоторое комплексное расслоение. Тогда $\xi + \bar{\xi}$ имеет каноническую структуру симплектического расслоения и определены классы Понтрягина $P_\omega(\xi + \bar{\xi}) \in U^{4|\omega|}(X)$ и операции $p_\omega \in \mathcal{A}_U$ (см. [58]).

В [100] (см. также [101]) на основе теории эллиптических функций, с использованием эллиптического рода Ошанина–Виттена и операции Адамса–Новикова Ψ_U^4 доказано, что для любого $[M^{4n}] \in \Omega_U$ имеет место соотношение:

$$L[M^{4n}] + \sum (-1)^{||\omega||} L(P_\omega[M^{4n}]) \equiv 0 \pmod{2^{\alpha(n)}},$$

где $\alpha(n)$ – число единиц в двоичном разложении числа n и $L: \Omega_U \rightarrow \mathbb{Z}$ – род Хирцебруха, сопоставляющий многообразию его сигнатуру.

Этот результат привел к следующей задаче (ОБЩАЯ ПРОБЛЕМА МИЛНОРА–ХИРЦЕБРУХА).

Пусть даны набор операций $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ в теории комплексных кобордизмов и род Хирцебруха $L: \Omega_U \rightarrow A$. Найти соотношения на характеристические числа $L\gamma_i([M^{2n}])$, $i = 1, \dots, N$, которые имеют место для любого стабильно комплексного многообразия M^{2n} .

Важные результаты по общей проблеме Милнора–Хирцебруха получены К. Е. Фельдманом в [102]. В частности, доказано соотношение

$$L[M^{4n}] + \sum (-1)^k L(\pi_k[M^{4n}]) \equiv 0 \pmod{2^{\alpha(n)}},$$

где L и $\alpha(n)$ – такие же, как выше, и π_k – операция, отвечающая характеристическому классу $\pi_k(M^{4n}) = (-1)^k (cf_{2k}(\tau(M^{4n}))) + cf_{2k}(\tau(M^{4n}))$, где $cf_{2k}(\cdot)$ – характеристические классы Чженя–Коннера–Флойда.

Отметим также следующий результат работы [102]: Пусть M^{2n} – почти комплексное многообразие, касательное расслоение которого допускает линейное подрасслоение. Тогда эйлерова характеристика многообразия M^{2n} является четной.

В [103] развит подход, позволивший на основе результатов по общей проблеме Милнора–Хирцебруха получить новые доказательства и обобщения известных “the miraculous cancellation formula” Альвареса–Виттена [104] и классической формулы Пика [105].

17. Алгебры Ли векторных полей и нильмногообразия.

В работе В. М. Бухштабера и А. В. Шокурова [63] была установлена связь алгебры $\mathcal{A}_U$ с алгеброй операторов на группе $\text{Diff}_1(k)$, где k – некоторое коммутативное кольцо с единицей. Элементами этой группы являются ряды вида

$$x = x(t) = t + \sum_{n \geq 1} x_n t^{n+1}, \quad x_n \in k.$$

Обозначение $\text{Diff}_1(k)$ объясняется тем, что когда $k = \mathbb{R}$ – поле вещественных чисел, эта группа является подгруппой группы формальных диффеоморфизмов прямой $\mathbb{R}^1$. В группе $\text{Diff}_1(k)$ умножение $x \cdot y$ задается формулой $(x \cdot y)(t) = y(x(t))$, т. е. подстановкой ряда $x(t)$ в ряд $y(t)$.

Положим $\text{Diff}_1(k) \simeq G^\infty(k)$. Обозначим через $G_m^\infty(k)$ нормальный делитель в $G^\infty(k)$, порожденный рядами $\left\{ t + \sum_{n \geq m+1} x_n t^{n+1} \right\}$, и через $G^m(k)$ подмноже-

ство полиномов $t + \sum_{n=1}^m x_n t^{n+1}$ в $G^\infty(k)$. Каноническая проекция $\pi_m: G^\infty(k) \rightarrow G^m(k)$ представляет собой ретракцию $G^\infty(k) \rightarrow G^m(k)$. Отождествляя $G^m(k)$ с k^m , мы получаем в k^m с координатами $(x_1, \dots, x_m)$ структуру алгебраической группы, умножение в которой задается формулой

$$(x \cdot y)(t) = \pi_m(y(x(t))).$$

Таким образом, действие группы $G^m(k)$ на себе левыми сдвигами задает линейное представление этой группы в линейном пространстве k^m и, следовательно, задает представление группы $G^m(k)$ на кольце полиномов $P_m(k) = k[x_1, \dots, x_m]$. Переходя к обратному пределу по m , мы получаем действие группы $\text{Diff}_1(k) = \varprojlim G^m(k)$ на кольце полиномов $P(k) = k[x_1, x_2, \dots]$.

Обозначим через $\mathcal{S}$ алгебру всех $\text{Diff}_1(\mathbb{Z})$ -инвариантных формальных дифференциальных операторов в $P = P(\mathbb{Z})$, т. е. формальных степенных рядов от $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots$ с коэффициентами в $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots]$, переводящих P в P и коммутирующих с линейными гомоморфизмами, задаваемыми элементами группы $\text{Diff}_1(\mathbb{Z})$. В работе [63] показано, что имеет место изоморфизм алгебры Ландвебера–Новикова S с алгеброй операторов $\mathcal{S}$, который превращает P в S -модуль Милнора. При этом из теоремы Стонга–Хаттори о делимости чисел Чжэня стабильно комплексных многообразий извлекается, что кольцо кобордизмов Ω_U , как S -модуль, отождествляется с $\mathcal{S}$ -подмодулем Ω в P , представляющим собой подкольцо в P , порожденное однородными (относительно градуировки $\deg x_n = -2n$) полиномами, остающимися в P при правом сдвиге на ряд $(1 - \exp(-t)) \in \text{Diff}_1(\mathbb{Q})$. Таким образом, в [63] был установлен изоморфизм алгебр $\mathcal{A}_U \simeq \Omega_U S \rightarrow \Omega \mathcal{S}$. Топологические приложения этого изоморфизма можно найти в работах [25], [63], [106].

Описанное выше действие группы $G^m(k)$ на k^m задается нижнетреугольными матрицами. В случае $k = \mathbb{R}$ мы получаем структуру нильпотентной группы на $\mathbb{R}^m$. В группе $G^m(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^m$ имеется кокомпактная решетка $G^m(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^m$. Таким образом, для каждого $m \geq 1$ мы получаем нильмногообразие $M^m = G^m(\mathbb{R})/G^m(\mathbb{Z})$ – пространство Эйленберга–Маклейна $K(G^m(\mathbb{Z}), 1)$. Эти многообразия образуют башню главных расслоений со слоем окружность S^1 :

$$\dots \rightarrow M^{m+1} \rightarrow M^m \rightarrow \dots \rightarrow M^2 \rightarrow M^1.$$

Здесь $M^1 = S^1$ и $M^2 = T^2$ – абелевы группы, а все M^m , $m \geq 3$, уже не группы. Многообразия M^m естественно назвать скрученными торами. В работе [106] явно описаны дифференциальные 2-формы ω_m на M^m , имеющие максимально возможный ранг. Эти формы ω_m для четных m задают на M^m симплектическую структуру.

Многообразия M^m представляют собой реализацию симплектических неформальных многообразий, которые в работе И. К. Бабенко и И. А. Тайманова [107] привели к построению симплектических неформальных односвязных многообразий. В работе Ф. Джонсона и Э. Риса [108] многообразия $G^m(\mathbb{C})/G^m(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ были использованы как явные примеры комплексных некелеровых многообразий.

Алгебраическая структура групп $G^\infty(k)$ для конечных полей k изучается давно в связи с задачами теории групп и теории чисел. Группа $G^\infty(\mathbb{Z})$ привлекла к себе внимание относительно недавно. Ее алгебраическая структура изучалась в работах [109], [110]. Алгебраическим и топологическим результатам о группе $G^\infty(\mathbb{Z})$ посвящен обзор [111]. В [110] показано, что группа $G^\infty(\mathbb{Z})$

имеет всего 4 образующих и

$$G^\infty(\mathbb{Z})/[G^\infty(\mathbb{Z}), G^\infty(\mathbb{Z})] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}/2 + \mathbb{Z}/2.$$

Этот результат получен как следствие теоремы:

$$G^m(\mathbb{Z})/[G^m(\mathbb{Z}), G^m(\mathbb{Z})] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}/2 + \mathbb{Z}/2.$$

для всех $m \geq 6$.

В [63] подалгебра $\hat{S} \subset S$, порожденная операциями s_n , была отождествлена с алгеброй Хопфа–Ли, порожденной векторными полями $d_k = x^{k+1} \frac{d}{dx}$, $k \geq 1$ на вещественной прямой с координатой x . Задача вычисления когомологий этой алгебры была поставлена И. М. Гельфандом в докладе на Международном Математическом конгрессе в Ницце, 1970 г. (см. [112]), и ее решение опубликовано Л. В. Гончаровой в [113], [114]. А именно, утверждается, что группа $H^{s,t}(\hat{S}; \mathbb{Q})$ равна $\mathbb{Q}$, если $t = 3s^2 \pm s$, и является нулевой в остальных случаях. Числа $3s^2 \pm s/2$ называются пентагонными числами Эйлера. Из свойств этих чисел следует, что в биградуированном кольце $H^{*,*}(\hat{S}; \mathbb{Q})$ умножение тривиально.

Вычисление групп $H^{*,*}(\hat{S}; \mathbb{Q})$ в [113], [114] технически сложное и трудно проверяемое. Имеется ряд публикаций, использующих различные, в том числе и самые современные методы гомологической алгебры, для доказательства этого важного результата. Поиски в этом направлении продолжаются.

На основе теоремы Л. Гончаровой в [63] получено вычисление когомологий $H^*(S; \mathbb{Q})$ алгебры Ландвебера–Новикова S . Приложение этого результата см. в [63], [25].

Связь алгебры $\mathcal{A}_U$ с группой $\text{Diff}_1(\mathbb{Z})$ открыла пути приложений в алгебраической топологии результатов общей теории нильпотентных групп Ли [116], теории нильмногообразий [117], а также результатов о группе $\text{Diff}_1(\mathbb{Z})$ [111].

С другой стороны, эта связь привела к развитию исследований алгебраической топологии и дифференциальной геометрии многообразий $K(G_m(\mathbb{Z}), 1)$. Напомним, что изучение башен главных расслоений со слоем окружность – хорошо известная тема алгебраической топологии.

18. Алгебраические кобордизмы

Успехи теории комплексных кобордизмов, естественно, стимулировали распространение ее идей и методов на произвольные алгебраические поля. Построению алгебраических кобордизмов посвящена монография В. Снэйта [118] (см. также [119]), в центре внимания которой конструкция, позволившая получить и важные алгебро-топологические результаты, в том числе гомотопическую реализацию изоморфизма Коннера–Флойда $U^*(X) \otimes_{\Omega_U} \mathbb{Z}[\beta^{-1}, \beta] \cong K^*(X)$ (см. [120]), использованного в [12]. Здесь $K^*(X)$ – комплексная K -теория и структура Ω_U -модуля в кольце $\mathbb{Z}[\beta^{-1}, \beta]$ задается родом Тодда $\text{Td}: \Omega_U \rightarrow \mathbb{Z}[\beta^{-1}, \beta]$: $\text{Td}([M^{2n}]) = \text{Td}(M^{2n})\beta^n$ (см. разд. 4 и 14).

В работах В. В. Воеводского был развит подход, отличный от подхода В. Снэйта. Были введены алгебраические кобордизмы над произвольными алгебраическими полями, представленные так называемым $\mathbb{P}^1$ -спектром. В случае полей $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ они совпадают с комплексными и неориентированными кобордизмами соответственно. Эта теория сыграла ключевую роль в доказательстве гипотезы Милнора [121]. Работы В. В. Воеводского привлекли большое внимание к алгебраическим кобордизмам. Позднее более геометрический вариант его теории вместе с соответствующей алгеброй Ландвебера–Новикова был предложен М. Левином и Ф. Морелем в [15]. В этой работе введено понятие ориентированной теории когомологий на категории гладких квазипроективных схем над полем k . В случае поля k характеристики 0 с помощью описанного в [35] подхода к теории комплексных кобордизмов на этой категории строится универсальная ориентированная теория когомологий, названная теорией алгебраических кобордизмов. Устанавливается связь алгебраических кобордизмов схемы X с ее классическим кольцом Чжоу и группой Гротендика алгебраических векторных расслоений над X . Эта теория получила известность и развитие в алгебраической геометрии (см. [122], [123]).

В работе А. Вишика [124] в теории Левина–Мореля введены новые, так называемые симметрические, операции. Эти операции тривиально действуют на классах кобордизмов, реализуемых подмногообразиями, и, таким образом, являются препятствием в известной задаче о реализации алгебраического цикла алгебраическим подмногообразием. Исследованы свойства симметрических операций, описана их связь с операциями Ландвебера–Новикова, даны приложения, в том числе в задаче о рациональности циклов.

Список литературы

- [1] В. М. Бухштабер, А. С. Мищенко, С. П. Новиков, “Формальные группы и их роль в аппарате алгебраической топологии”, *УМН*, **26:2**(158) (1971), 131–154; англ. пер.: V. M. Bukhshtaber, A. S. Mishchenko, S. P. Novikov, “Formal groups and their role in the apparatus of algebraic topology”, *Russian Math. Surveys*, **26:2** (1971), 63–90.
- [2] С. П. Новиков, “Топология в XX веке: взгляд изнутри”, *УМН*, **59:5**(359) (2004), 3–28; англ. пер.: S. P. Novikov, “Topology in the 20th century: a view from the inside”, *Russian Math. Surveys*, **59:5** (2004), 803–829.
- [3] С. П. Новиков, Предисловие к кн.: *Кобордизмы в Советском Союзе 1967–1979*, Топологическая библиотека, **4**, ред. С. П. Новиков, И. А. Тайманов, М.–Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2011, 9–13.
- [4] *Кобордизмы в Советском Союзе 1967–1979*, Топологическая библиотека, **4**, ред. С. П. Новиков, И. А. Тайманов, М.–Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2011, 584 с.
- [5] С. П. Новиков, *Топология*, изд. 2-е, дополн., Институт компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2002, 336 с.; англ. изд.: S. P. Novikov, *Topology*, Encyclopaedia Math. Sci., **12**, Springer, Berlin, 1996, 319 pp.
- [6] H. Poincaré, “Analysis situs”, *J. Ecole Polytech.* (2), **1** (1895), 1–121; А. Пуанкаре, “Analysis situs”, *Избранные труды*, т. II, Наука, М., 1972, 457–807.
- [7] M. F. Atiyah, “Bordism and cobordism”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **57:2** (1961), 200–208.

- [8] R. Thom, “Quelques propriétés globales de variétés différentiables”, *Comm. Math. Helv.*, **28** (1954), 17–86.
- [9] J. Milnor, “On the cobordism ring Ω_* and a complex analogue. Part I”, *Amer. J. Math.*, **82**:3 (1960), 505–521.
- [10] С. П. Новиков, “О некоторых задачах топологии многообразий, связанных с теорией пространств Тома”, *Докл. АН СССР*, **132**:5 (1960), 1031–1034; англ. пер.: S. P. Novikov, “Some problems in the topology of manifolds connected with the theory of Thom spaces”, *Soviet Math. Dokl.*, **1** (1960), 717–720.
- [11] С. П. Новиков, “Гомотопические свойства комплексов Тома”, *Матем. сб.*, **57(99)**:4 (1962), 407–442.
- [12] С. П. Новиков, “Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **31**:4 (1967), 855–951; англ. пер.: S. P. Novikov, “The methods of algebraic topology from the viewpoint of cobordism theory”, *Math. USSR-Izv.*, **1**:4 (1967), 827–913.
- [13] T. Katsura, Yu. Shimizu, K. Ueno, “Complex cobordism ring and conformal field theory over $\mathbb{Z}$ ”, *Math. Ann.*, **291**:3 (1991), 551–571.
- [14] T. Coates, A. Givental, “Quantum cobordisms and formal group laws”, *The unity of mathematics*, Progr. Math., **244**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006, 155–171.
- [15] M. Levine, F. Morel, *Algebraic cobordism*, Springer Monogr. Math., Springer, Berlin, 2007, xii+244 pp.
- [16] С. П. Новиков, “Различные удвоения алгебр Хопфа. Алгебры операторов на квантовых группах, комплексные кобордизмы”, *УМН*, **47**:5(287) (1992), 189–190; англ. пер.: S. P. Novikov, “Various doublings of Hopf algebras. Operator algebras on quantum groups, complex cobordisms”, *Russ. Math. Surveys*, **47**:5 (1992), 198–199.
- [17] V. M. Buchstaber, “Semigroups of maps into groups, operator doubles, and complex cobordisms”, *Topics in topology and mathematical physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **170**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 9–31.
- [18] В. Г. Дринфельд, “Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга–Бакстера”, *Докл. АН СССР*, **283**:5 (1985), 1060–1064; англ. пер.: V. G. Drinfel’d, “Hopf algebras and the quantum Yang–Baxter equation”, *Soviet Math. Dokl.*, **32** (1985), 256–258.
- [19] К. Кассель, *Квантовые группы*, ФАЗИС, М., 1999; пер. с англ.: C. Kassel, *Quantum groups*, Grad. Texts in Math., **155**, Springer-Verlag, New York, 1995, xii+531 pp.
- [20] М. А. Семенов-Тянь-Шанский, “Группы Пуассона–Ли. Квантовый принцип двойственности и скрученный квантовый дубль”, *ТМФ*, **93**:2 (1992), 302–329; англ. пер.: M. A. Semenov-Tyan-Shanskii, “Poisson–Lie groups. The quantum duality principle and the twisted quantum double”, *Theoret. and Math. Phys.*, **93**:2 (1992), 1292–1307.
- [21] M. Demazure, “Motifs des variétés algébriques”, *Séminaire N. Bourbaki*, **1969/70**, Exp. № 365, 1971, 19–38.
- [22] P. S. Landweber, “Cobordism operations and Hopf algebras”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **129** (1967), 94–110.
- [23] С. П. Новиков, “Операторы Адамса и неподвижные точки”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:6 (1968), 1245–1263; англ. пер.: S. P. Novikov, “Adams operators and fixed points”, *Math. USSR-Izv.*, **2**:6 (1968), 1193–1211.
- [24] В. М. Бухштабер, “Модули дифференциалов спектральной последовательности Атья–Хирцебруха. II”, *Матем. сб.*, **83(125)**:1(9) (1970), 61–76; англ. пер.: V. M. Buhštaber, “Modules of differentials of the Atiyah–Hirzebruch spectral sequence. II”, *Math. USSR-Sb.*, **12**:1 (1970), 59–75.
- [25] А. В. Шокуров, “О соотношениях между числами Чженя квазикомплексных многообразий”, *Матем. заметки*, **26**:1 (1979), 137–148; англ. пер.:

- A. V. Shokurov, “Relations between the Chern numbers of quasicomplex manifolds”, *Math. Notes*, **26**:1 (1979), 560–566.
- [26] D. C. Ravenel, *Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres*, 2nd ed., AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2004, xix+395 pp.
- [27] H. Miller, *Kervaire invariant one [after M. A. Hill, M. J. Hopkins, and D. C. Ravenel]*, Séminaire N. Bourbaki, **2010/2011**, Exp. № 1029, 63ème année, 2011, 30 pp.; 2011, arXiv:1104.4523.
- [28] Р. Стонг, *Заметки по теории кобордизмов*, Мир, М., 1973, 372 с.; пер. с англ.: R. Stong, *Notes on cobordism theory*, Math. Notes, Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1968, v+354+lvi pp.
- [29] F. Hirzebruch, “A Riemann–Roch theorem for differentiable manifolds”, Séminaire N. Bourbaki, **1958/59**, Exp. № 177, 1959, 129–149.
- [30] M. F. Atiyah, F. Hirzebruch, “Riemann–Roch theorems for differentiable manifolds”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **65** (1959), 276–281.
- [31] Э. Дайер, “Соотношения между теориями когомологий”, *Математика*, **9**:2 (1965), 15–18; пер. с англ.: E. Dyer, “Relations between cohomology theories”, *Colloquium on Algebraic Topology* (Aarhus, 1962), Aarhus University, Aarhus, Denmark, 1962, 89–93.
- [32] I. Panin, “Oriented cohomology theories of algebraic varieties”, *K-Theory*, **30**:3 (2003), 265–314.
- [33] I. Panin, A. Smirnov, “Riemann–Roch theorems for oriented cohomology”, *Axiomatic, enriched and motivic homotopy theory*, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., **131**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004, 261–333.
- [34] I. Panin, “Oriented cohomology theories of algebraic varieties. II. (After I. Panin and A. Smirnov.)”, *Homology, Homotopy Appl.*, **11**:1 (2009), 349–405.
- [35] D. Quillen, “Elementary proofs of some results of cobordism theory using Steenrod operations”, *Adv. in Math.*, **7** (1971), 29–56.
- [36] V. Buchstaber, N. Ray, “Operations and quantum doubles in complex oriented cohomology theory”, *Homology, Homotopy Appl.*, **1** (1999), 169–185 (electronic).
- [37] В. М. Бухштабер, С. П. Новиков, “Формальные группы, степенные системы и операторы Адамса”, *Матем. сб.*, **84(126)**:1 (1971), 81–118; англ. пер.: V. M. Buhštaber, S. P. Novikov, “Formal groups, power systems and Adams operators”, *Math. USSR-Sb.*, **13**:1 (1971), 80–116.
- [38] В. М. Бухштабер, “Характер Чженя–Дольда в кобордизмах. I”, *Матем. сб.*, **83(125)**:4(12) (1970), 575–595; англ. пер.: V. M. Buhštaber, “The Chern–Dold character in cobordisms. I”, *Math. USSR-Sb.*, **12**:4 (1970), 573–594.
- [39] S. Ochanine, “Sur les genres multiplicatifs définis par des intégrales elliptiques”, *Topology*, **26**:2 (1987), 143–151.
- [40] F. Hirzebruch, T. Berger, R. Jung, *Manifolds and modular forms*, Aspects Math., **E20**, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1992, xii+211 pp.
- [41] D. Quillen, “On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75** (1969), 1293–1298.
- [42] M. Lazard, “Sur les groupes de Lie formels à un paramètre”, *Bull. Soc. Math. France*, **83** (1955), 251–274.
- [43] E. Friedlander, “An introduction to K -theory”, *Some recent developments in algebraic K-theory*, ICTP Lect. Notes, **23**, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2008, 1–77.
- [44] А. Дольд, “Соотношения между ordinary и extraordinary теориями гомологий”, *Математика*, **9**:2 (1965), 8–14; пер. с англ.: A. Dold, “Relations between ordinary and extraordinary homology”, *Colloquium on Algebraic Topology* (Aarhus, 1962), Aarhus University, Aarhus, Denmark, 1962, 2–9.

- [45] И. М. Кричевер, “Формальные группы и формула Атьи–Хирцебруха”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **38**:6 (1974), 1289–1304; англ. пер.: I. M. Kričever, “Formal groups and the Atiyah–Hirzebruch formula”, *Math. USSR-Izv.*, **8**:6 (1974), 1271–1285.
- [46] И. М. Кричевер, “Обобщенные эллиптические роды и функции Бейкера–Ахиезера”, *Матем. заметки*, **47**:2 (1990), 34–45; англ. пер.: I. M. Krichever, “Generalized elliptic genera and Baker–Akhiezer functions”, *Math. Notes*, **47**:2 (1990), 132–142.
- [47] J. F. Adams, “On Chern characters and the structure of the unitary group”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **57**:2 (1961), 189–199.
- [48] J. F. Adams, “On the groups $J(X)$. IV”, *Topology*, **5** (1966), 21–71.
- [49] И. М. Джеймс, “Приведенные степени пространств”, *Математика*, **1**:3 (1957), 3–34; пер. с англ.: I. M. James, “Reduced product spaces”, *Ann. of Math.* (2), **62** (1955), 170–197.
- [50] T. Coates, A. Givental, “Quantum Riemann–Roch, Lefschetz and Serre”, *Ann. of Math.* (2), **165**:1 (2007), 15–53.
- [51] В. М. Бухштабер, “Модули дифференциалов спектральной последовательности Атьи–Хирцебруха”, *Матем. сб.*, **78(120)**:2 (1969), 307–320; англ. пер.: V. M. Buhštaber, “Modules of differentials of the Atiyah–Hirzebruch spectral sequence”, *Math. USSR-Sb.*, **7**:2 (1969), 299–313.
- [52] M. F. Atiyah, F. Hirzebruch, “Analytic cycles on complex manifolds”, *Topology*, **1**:1 (1962), 25–45.
- [53] B. Totaro, “Torsion algebraic cycles and complex cobordism”, *J. Amer. Math. Soc.*, **10**:2 (1997), 467–493.
- [54] Б. И. Ботвинник, В. М. Бухштабер, С. П. Новиков, С. А. Юзвинский, “Алгебраические аспекты теории умножений в комплексных кобордизмах”, *УМН*, **55**:4(334) (2000), 5–24; англ. пер.: B. I. Botvinnik, V. M. Buchstaber, S. P. Novikov, S. A. Yuzvinskii, “Algebraic aspects of the theory of multiplications in complex cobordism theory”, *Russian Math. Surveys*, **55**:4 (2000), 613–633.
- [55] E. H. Brown, F. P. Peterson, “A spectrum whose Z_p cohomology is the algebra of reduced p^{th} powers”, *Topology*, **5** (1966), 149–154.
- [56] В. М. Бухштабер, “Проекторы в унитарных кобордизмах, связанные с SU-теорией”, *УМН*, **27**:6(168) (1972), 231–232.
- [57] В. М. Бухштабер, “Двузначные формальные группы. Некоторые приложения к кобордизмам”, *УМН*, **26**:3(159) (1971), 195–196.
- [58] В. М. Бухштабер, “Характеристические классы в кобордизмах и топологические приложения теорий однозначных и двузначных формальных групп”, *Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем.*, **10**, ВИНТИ, М., 1978, 5–178; англ. пер.: V. M. Buchstaber, “Characteristic cobordism classes and topological applications of the theories of one-valued and two-valued formal groups”, *J. Soviet Math.*, **11**:6 (1979), 815–921.
- [59] V. L. Ginzburg, V. Guillemin, Y. Karshon, *Moment maps, cobordisms, and Hamiltonian group actions*, *Math. Surveys Monogr.*, **98**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, viii+350 pp.
- [60] В. В. Вершинин, “О кольце симплектических кобордизмов”, *Топология*, Сборник работ, Тр. МИАН СССР, **154**, 1983, 49–52; англ. пер.: V. V. Vershinin, “The ring of symplectic cobordisms”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **154** (1985), 53–56.
- [61] В. М. Бухштабер, А. Н. Холодов, “Топологические конструкции, связанные с многозначными формальными группами”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **46**:1 (1982), 3–27; англ. пер.: V. M. Buchstaber, A. N. Kholodov, “Topological constructions connected with many-valued formal groups”, *Math. USSR-Izv.*, **20**:1 (1983), 1–25.

- [62] V. M. Buchstaber, “ n -valued groups: theory and applications”, *Mosc. Math. J.*, **6**:1 (2006), 57–84.
- [63] В. М. Бухштабер, А. В. Шокуров, “Алгебра Ландвебера–Новикова и формальные векторные поля на прямой”, *Функц. анализ и его прил.*, **12**:3 (1978), 1–11; англ. пер.: V. M. Bukhshtaber, A. V. Shokurov, “The Landweber–Novikov algebra and formal vector fields on the line”, *Funct. Anal. Appl.*, **12**:3 (1978), 159–168.
- [64] П. Коннер, Э. Флойд, *Гладкие периодические отображения*, Мир, М., 1969, 340 с.; пер. с англ.: P. E. Conner, E. E. Floyd, *Differentiable periodic maps*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, **33**, Academic Press, New York; Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1964, vii+148 pp.
- [65] А. С. Мищенко, “Многообразие с действием группы Z_p и неподвижные точки”, *Матем. заметки*, **4**:4 (1968), 381–386; англ. пер.: A. S. Mishchenko, “Manifolds with the action of the group Z_p and fixed points”, *Math. Notes*, **4**:4 (1968), 721–724.
- [66] А. С. Мищенко, “Бордизмы с действием группы Z_p и неподвижные точки”, *Матем. сб.*, **80(122)**:3(11) (1969), 307–313; англ. пер.: A. S. Mishchenko, “Bordisms with the action of the group Z_p and fixed points”, *Math. USSR-Sb.*, **9**:3 (1969), 291–296.
- [67] Г. Г. Каспаров, “Инварианты классических линзовых многообразий в теории кобордизмов”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **33**:4 (1969), 735–747; англ. пер.: G. G. Kasparov, “Invariants of classical lens manifolds in cobordism theory”, *Math. USSR-Izv.*, **3**:4 (1969), 695–705.
- [68] И. М. Кричевер, “Действия конечных циклических групп на квазикомплексных многообразиях”, *Матем. сб.*, **90(132)**:2 (1973), 306–319; англ. пер.: I. M. Krichever, “Actions of finite cyclic groups on quasicomplex manifolds”, *Math. USSR-Sb.*, **19**:2 (1973), 305–319.
- [69] С. М. Гусейн-Заде, И. М. Кричевер, “О формулах для неподвижных точек действия группы Z_p ”, *УМН*, **28**:1(169) (1973), 237–238.
- [70] И. М. Кричевер, “Замечание к работе ‘Действия конечных циклических групп на квазикомплексных многообразиях’”, *Матем. сб.*, **95(137)**:1(9) (1974), 146–147; англ. пер.: I. M. Krichever, “Remark on the paper ‘Actions of finite cyclic groups on quasicomplex manifolds’”, *Math. USSR-Sb.*, **24**:1 (1974), 145–146.
- [71] С. М. Гусейн-Заде, “Неподвижные точки U -действий окружности”, *УМН*, **26**:4(160) (1971), 250.
- [72] С. М. Гусейн-Заде, “О действии окружности на многообразиях”, *Матем. заметки*, **10**:5 (1971), 511–518; англ. пер.: S. M. Gusein-Zade, “On the action of a circle on manifolds”, *Math. Notes*, **10**:5 (1971), 731–734.
- [73] С. М. Гусейн-Заде, “ U -действия окружности и неподвижные точки”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35**:5 (1971), 1120–1136; англ. пер.: S. M. Gusein-Zade, “ U -actions of a circle and fixed points”, *Math. USSR-Izv.*, **5**:5 (1971), 1127–1143.
- [74] И. М. Кричевер, “Эквивариантные роды Хирцебруха. Формула Атья–Хирцебруха”, *УМН*, **30**:1(181) (1975), 243–244.
- [75] Т. Е. Панов, “Вычисление родов Хирцебруха многообразий, несущих действие группы $\mathbf{Z}/p$, через инварианты действия”, *Известия РАН. Сер. матем.*, **62**:3 (1998), 87–120; англ. пер.: T. E. Panov, “Calculation of Hirzebruch genera for manifolds acted on by the group $\mathbf{Z}/p$ via invariants of the action”, *Izv. Math.*, **62**:3 (1998), 515–548.
- [76] Ф. Хирцебрух, *Топологические методы в алгебраической геометрии*, Мир, М., 1973, 280 с.; пер. с нем.: F. Hirzebruch, *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, **9**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1956, viii+165 pp.
- [77] В. М. Бухштабер, Н. Рэй, “Универсальный эквивариантный род и формула Кричевера”, *УМН*, **62**:1(373) (2007), 195–196; англ. пер.: V. M. Buchstaber, N. Ray,

- “Universal equivariant genus and Krichever’s formula”, *Russian Math. Surveys*, **62**:1 (2007), 178–180.
- [78] Т. Е. Панов, “Комбинаторные формулы для χ_y -рода полиориентированного квазиторического многообразия”, *УМН*, **54**:5(329) (1999), 169–170; англ. пер.: Т. Е. Panov, “Combinatorial formulae for the χ_y -genus of a multioriented quasitoric manifold”, *Russian Math. Surveys*, **54**:5 (1999), 1037–1039.
- [79] Т. Е. Панов, “Роды Хирцебруха многообразий с действием тора”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:3 (2001), 123–138; англ. пер.: Т. Е. Panov, “Hirzebruch genera of manifolds with torus action”, *Izv. Math.*, **65**:3 (2001), 543–556.
- [80] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике*, МЦНМО, М., 2004, 272 с.
- [81] E. Thomas, “Complex structures on real vector bundles”, *Amer. J. Math.*, **89** (1967), 887–908.
- [82] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, N. Ray, “Toric genera”, *Int. Math. Res. Not.*, **16** (2010), 3207–3262.
- [83] M. W. Davis, T. Januszkiewicz, “Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions”, *Duke Math. J.*, **62**:2 (1991), 417–451.
- [84] V. V. Batyrev, “Quantum cohomology rings of toric manifolds”, *Journées de géométrie algébrique d’Orsay* (Orsay, 1992), Astérisque, **218**, 1993, 9–34.
- [85] В. М. Бухштабер, Н. Рай, “Торические многообразия и комплексные кобордизмы”, *УМН*, **53**:2(320) (1998), 139–140; англ. пер.: V. M. Buchstaber, N. Ray, “Toric manifolds and complex cobordisms”, *Russian Math. Surveys*, **53**:2 (1998), 371–373.
- [86] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, N. Ray, “Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds”, *Mosc. Math. J.*, **7**:2 (2007), 219–242.
- [87] А. А. Кустарев, “Эquivariant почти комплексные структуры на квазиторических многообразиях”, *УМН*, **64**:1(385) (2009), 153–154; англ. пер.: A. A. Kustarev, “Equivariant almost complex structures on quasi-toric manifolds”, *Russian Math. Surveys*, **64**:1 (2009), 156–158.
- [88] V. M. Buchstaber, S. Terzic, “Equivariant complex structures on homogeneous spaces and their cobordism classes”, *Geometry, topology, and mathematical physics*, S. P. Novikov’s seminar: 2006–2007, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **224**, eds. V. M. Buchstaber, I. M. Krichever, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 27–57.
- [89] Т. Хонда, “Формальные группы и дзета-функции”, *Математика*, **6** (1969), 3–17; пер. с англ.: Т. Honda, “Formal groups and zeta-functions”, *Osaka J. Math.*, **5** (1968), 199–213.
- [90] M. Atiyah, F. Hirzebruch, “Spin-manifolds and group actions”, *Essays on topology and related topics*, Mémoires dédiés à Georges de Rham, Springer, New York, 1970, 18–28.
- [91] B. Totaro, “Chern numbers for singular varieties and elliptic homology”, *Ann. of Math.* (2), **151**:2 (2000), 757–791.
- [92] H. W. Braden, K. E. Feldman, “Functional equations and the generalised elliptic genus”, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12**, Suppl. 1 (2005), 74–85.
- [93] В. М. Бухштабер, Е. Ю. Бунькова, “Формальные группы Кричевера”, *Функц. анализ и его прил.*, **45**:2 (2011), 23–44; англ. пер.: V. M. Buchstaber, E. Yu. Bun’kova, “Krichever formal groups”, *Funct. Anal. Appl.*, **45**:2 (2011), 99–116.
- [94] J. T. Tate, “The arithmetic of elliptic curves”, *Invent. Math.*, **23**:3-4 (1974), 179–206.
- [95] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа. ч. 2. Трансцендентные функции*, УРСС, М., 2010, 500 с.; пер. с англ.: E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Reprint of the fourth (1927) edition. An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions; with an account

of the principal transcendental functions, Cambridge Math. Lib., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, vi+608 pp.

- [96] Ф. Хирцебрух, “Комплексные многообразия”, *Международный математический конгресс в Эдинбурге 1958 г.*, Физматгиз, М., 1962, 138–157; пер. с англ.: F. Hirzebruch, “Komplexe Mannigfaltigkeiten”, *Proc. Internat. Congress Math.* 1958, Cambridge Univ. Press, New York, 1960, 119–136.
- [97] R. E. Stong, “Relations among characteristic numbers. I”, *Topology*, **4**:3 (1965), 267–281; “Relations among characteristic numbers. II”, *Topology*, **5**:2 (1966), 133–148.
- [98] A. Hattori, “Integral characteristic numbers for weakly almost complex manifolds”, *Topology*, **5**:3 (1966), 259–280.
- [99] С. Д. Ошанин, “Сигнатура SU-многообразий”, *Матем. заметки*, **13**:1 (1973), 97–102; англ. пер.: S. D. Oshanin, “The signature of SU-varieties”, *Math. Notes*, **13**:1 (1973), 57–60.
- [100] В. М. Бухштабер, А. П. Веселов, “Операторы Данкла, функциональные уравнения и преобразования эллиптических родов”, *УМН*, **49**:2(296) (1994), 147–148; англ. пер.: V. M. Buchstaber, A. P. Veselov, “Dunkl operators, functional equations, and transformations of elliptic genera”, *Russian Math. Surveys*, **49**:2 (1994), 145–147.
- [101] V. M. Buchstaber, A. P. Veselov, “On a remarkable functional equation in the theory of generalized Dunkl operators and transformations of elliptic genera”, *Math. Z.*, **223**:4 (1996), 595–607.
- [102] K. E. Feldman, “Chern numbers of Chern submanifolds”, *Q. J. Math.*, **53**:4 (2002), 421–429.
- [103] K. E. Feldman, “Miraculous cancellation and Pick’s theorem”, *Toric topology*, Contemp. Math., **460**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 71–86.
- [104] L. Alvarez-Gaumé, E. Witten, “Gravitational anomalies”, *Nucl. Phys. B*, **234**:2 (1984), 269–330.
- [105] G. Pick, “Geometrisches zur Zahlenlehre”, *Sitzber. Lotos Prag.* (2), **19** (1900), 311–319.
- [106] В. М. Бухштабер, “Группы полиномиальных преобразований прямой, неформальные симплектические многообразия и алгебра Ландвебера–Новикова”, *УМН*, **54**:4(328) (1999), 161–162; англ. пер.: V. M. Bukhshtaber, “Groups of polynomial transformations of a line, non-formal symplectic manifolds, and the Landweber–Novikov algebra”, *Russian Math. Surveys*, **54**:4 (1999), 837–838.
- [107] И. К. Бабенко, И. А. Тайманов, “О неформальных односвязных симплектических многообразиях”, *Сиб. матем. журн.*, **41**:2 (2000), 253–269; англ. пер.: I. K. Babenko, I. A. Taimanov, “On nonformal simply connected symplectic manifolds”, *Siberian Math. J.*, **41**:2 (2000), 204–217.
- [108] F. E. A. Johnson, E. G. Rees, “The fundamental groups of algebraic varieties”, *Algebraic topology Poznań 1989*, Lecture Notes in Math., **1474**, Springer, Berlin, 1991, 75–82.
- [109] И. К. Бабенко, С. А. Богатый, “Аменабельность группы подстановок формальных степенных рядов”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:2 (2011), 19–34; англ. пер.: I. K. Babenko, S. A. Bogatyĭ, “The amenability of the substitution group of formal power series”, *Izv. Math.*, **75**:2 (2011), 239–252.
- [110] И. К. Бабенко, С. А. Богатый, “О группе подстановок формальных целочисленных рядов”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:2 (2008), 39–64; англ. пер.: I. K. Babenko, S. A. Bogatyĭ, “On the group of substitutions of formal power series with integer coefficients”, *Izv. Math.*, **72**:2 (2008), 241–264.
- [111] И. К. Бабенко, “Алгебра, геометрия и топология группы подстановок формальных степенных рядов”, *УМН*, 2013 (в печати).

- [112] I. M. Gel'fand, "The cohomology of infinite dimensional Lie algebra: some questions of integral geometry", *Actes du Congrès International des Mathématiciens* (Nice, 1970), **1**, Gauthier-Villars, Paris, 1971, 95–111.
- [113] Л. В. Гончарова, "Когомологии алгебр Ли формальных векторных полей на прямой", *Функц. анализ и его прил.*, **7:2** (1973), 6–14; англ. пер.: L. V. Goncharova, "The cohomologies of Lie algebras of formal vector fields on the line", *Funct. Anal. Appl.*, **7:2** (1973), 91–97.
- [114] Л. В. Гончарова, "Когомологии алгебр Ли формальных векторных полей на прямой", *Функц. анализ и его прил.*, **7:3** (1973), 33–44; англ. пер.: L. V. Goncharova, "The cohomologies of Lie algebras of formal vector fields on the line", *Funct. Anal. Appl.*, **7:3** (1973), 194–203.
- [115] Д. Б. Фукс, *Когомологии бесконечномерных алгебр Ли*, Наука, М., 1984, 272 с.; англ. пер.: D. B. Fuks, *Cohomology of infinite-dimensional Lie algebras*, Consultants Bureau, New York, 1986, xii+339 pp.
- [116] А. И. Мальцев, "Об одном классе однородных пространств", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **13:1** (1949), 9–32; англ. пер.: A. I. Malcev, "On a class of homogeneous spaces", *Amer. Math. Soc. Transl.*, **1951**, № 39, 1951, 33 pp.
- [117] Л. Ауслендер, Л. Грин, Ф. Хан, "Потоки на однородных пространствах", 1966, 208 с.; пер. с англ.: L. Auslander, L. Green, F. Hahn, "Flows on homogeneous spaces", *Ann. of Math. Stud.*, **53**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1963, vii+107 pp.
- [118] В. Снэйт, *Алгебраический кобордизм и K-теория*, Мир, М., 1983, 280 с.; пер. с англ.: V. P. Snaith, "Algebraic cobordism and K-theory", *Mem. Amer. Math. Soc.*, **21:221** (1979), vii+152 pp.
- [119] D. Gepner, V. Snaith, "On the motivic spectra representing algebraic cobordism and algebraic K-theory", *Doc. Math.*, **14** (2009), 359–396.
- [120] П. Коннер, Э. Флойд, "О соотношении теории кобордизмов и K-теории", Дополнение к кн.: *Гладкие периодические отображения*, Мир, М., 1969, 233–331; пер. с англ.: P. E. Conner, E. E. Floyd, *The relation of cobordism to K-theories*, Lecture Notes in Math., **28**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1966, v+112 pp.
- [121] V. Voevodsky, *The Milnor conjecture*, 1996, <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0170>.
- [122] M. Levine, R. Pandharipande, "Algebraic cobordism revisited", *Invent. Math.*, **176:1** (2009), 63–130.
- [123] I. Panin, K. Pimenov, O. Roendigs, *A universality theorem for Voevodsky's algebraic cobordism spectrum*, 2007, <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0846>.
- [124] A. Vishik, "Symmetric operations in algebraic cobordism", *Adv. Math.*, **213:2** (2007), 489–552.

В. М. Бухштабер (V. M. Buchstaber)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: buchstab@mi.ras.ru

Поступила в редакцию

02.09.2012