Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Я. Мазалов, П. В. Парамонов, К. Ю. Федоровский, Условия C^m -приближаемости функций решениями эллиптических уравнений, *УМН*, 2012, том 67, выпуск 6, 53–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9498>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 13:20:50

УДК 517.53

Условия C^m -приближаемости функций решениями эллиптических уравнений

М. Я. Мазалов, П. В. Парамонов, К. Ю. Федоровский

В работе дается обзор результатов, полученных за последние 20–30 лет в качественной теории приближения функций голоморфными, гармоническими и полианалитическими функциями (и, в частности, соответствующими многочленами) в нормах пространств C^m типа Уитни на компактных подмножествах евклидовых пространств.

Библиография: 120 названий.

Ключевые слова: C^m -аппроксимация голоморфными, гармоническими и полианалитическими функциями; C^m -аналитическая и C^m -гармоническая емкость; s -мерный обхват по Хаусдорфу; локализационный оператор Витушкина; задача Дирихле; неванлинновские области.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	54
Глава 1. Условия C^m -приближаемости голоморфными и гармоническими функциями	54
1.1. Критерии равномерной приближаемости голоморфными функциями на компактах в $\mathbb{C}$	54
1.2. Критерии равномерной приближаемости гармоническими функциями на компактах в $\mathbb{R}^N$	61
1.3. Пространства C^m при $m > 0$ и связанные с ними емкости	64
1.4. Критерии C^m -приближаемости голоморфными функциями на компактах в $\mathbb{C}$ при $m > 0$	68
1.5. Критерии C^m -приближаемости гармоническими функциями на компактах в $\mathbb{R}^N$ при $m > 0$	69
1.6. C^m -аппроксимация голоморфными и гармоническими многочленами	71
Глава 2. Задачи аппроксимации для полианалитических функций	73
2.1. Введение	73
2.2. Равномерная аппроксимация полианалитическими рациональными функциями	76
2.3. Равномерная аппроксимация полианалитическими многочленами	77
2.4. Неванлинновские области и их свойства	82

Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-01-00434-а). Работа третьего автора выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 12-01-00434-а, 10-01-0837-а).

2.5. Аппроксимация бианалитическими многочленами и $\bar{\partial}^2$ -задача Дирихле	88
2.6. C^m -аппроксимация полианалитическими функциями, $m > 0$	90
Дополнение	92
Список литературы	93

Введение

В первой части настоящего обзора обсуждаются необходимые и достаточные условия C^m -приближаемости функций на компактах в $\mathbb{R}^N$ голоморфными (при $N = 2$) и гармоническими функциями. За последние 15–20 лет авторам удалось полностью ответить на вопросы, касающиеся “индивидуальной” аппроксимации. Полученные теоремы (некоторые из них публикуются впервые) обобщают и уточняют хорошо известные аппроксимационные критерии Келдыша–Дени, Витушкина, О’Фаррелла, Вердеры и Матеу–Оробича.

Примерно за эти же годы в работах Мельникова, Вердеры, Маттилы, Давида, Толсы и других авторов были решены известные проблемы Пенлеве и Витушкина, а также получены другие фундаментальные результаты, касающиеся метрических характеристик аналитической емкости и ее ближайших аналогов, в терминах которых, в частности, формулируются некоторые из упомянутых выше условий аппроксимации. Из этих результатов мы кратко обсуждаем и цитируем только самые основные, непосредственно относящиеся к тематике обзора.

Во второй части статьи рассматриваются задачи, связанные с равномерной и C^m -аппроксимацией функций полианалитическими функциями и многочленами на плоских компактах. Соответствующие исследования в этом направлении начались в 1980-е годы в работах О’Фаррелла, Вердеры, Кармоны и Вонга, а затем были продолжены в основном в работах авторов. Проблемы полиномиальной аппроксимации здесь особенно интересны и сложны ввиду того, что в них по существу возникают нелокальные условия приближаемости аналитического характера, которые не выражаются в известных емкостных, метрических или топологических терминах. Эти условия, в свою очередь, имеют очень интересные связи с теорией модельных пространств (т. е. инвариантных относительно оператора обратного сдвига подпространств пространства H^2).

В конце статьи (см. раздел “Дополнение”) приводится краткий список работ авторов (и их соавторов) по другим темам, непосредственно связанным с тематикой обзора.

Глава 1. Условия C^m -приближаемости голоморфными и гармоническими функциями

1.1. Критерии равномерной приближаемости голоморфными функциями на компактах в $\mathbb{C}$

Этот раздел посвящен критериям *равномерной* (т. е. C^0 -) приближаемости функций голоморфными функциями на компактах в $\mathbb{C}$. По теореме Рунге [1] здесь можно говорить об аппроксимации рациональными дробями, поэтому

мы будем придерживаться давно установившихся обозначений и формулировок [2], [3; гл. 8]. Пусть X – компактное подмножество в $\mathbb{C}$, f – непрерывная комплекснозначная функция на X .

Каковы условия на f и X , необходимые и достаточные для того, чтобы f можно было с любой точностью равномерно на X приблизить рациональными дробями (от комплексной переменной) с полюсами вне X ?

Алгебру всех функций на X , приближаемых в указанном смысле, обозначим через $R(X)$. Очевидно, что $R(X) \subset A(X)$, где $A(X) = C(X) \cap \text{Hol}(X^\circ)$ – алгебра всех комплекснозначных функций, непрерывных на X и голоморфных на внутренности X° компакта X (далее через $\text{Hol}(G)$ обозначается пространство всех голоморфных функций на открытом множестве G в $\mathbb{C}$). По теореме Л. Брауэра (см., например, [4; § 25.3]) мы можем продолжить функцию f (с компакта X) до функции класса $C(\overline{\mathbb{C}})$ с компактным носителем. Первый ответ на поставленный выше вопрос содержится в следующей теореме А. Г. Витушкина.

ТЕОРЕМА 1.1 [2; гл. IV, § 2, с. 173]. *Пусть X – компакт в $\mathbb{C}$, а $f \in C(\overline{\mathbb{C}})$. Следующие условия эквивалентны:*

- (a) $f|_X \in R(X)$;
- (b) *для любого открытого квадрата S_δ со сторонами длины $\delta > 0$, параллельными координатным осям в $\mathbb{C}$, выполнено неравенство*

$$\left| \int_{\partial S_\delta} f(z) dz \right| \leq A_0 \omega(f, \delta) \alpha(S_\delta \setminus X).$$

Здесь $A_0 > 0$ – абсолютная константа, $\omega(f, \cdot)$ – модуль непрерывности функции f в $\mathbb{C}$, а $\alpha(\cdot)$ – аналитическая C -емкость.

В дальнейшем постоянная A_0 может принимать различные положительные значения в разных соотношениях.

Напомним (см. [2], [3; гл. 8]), что для ограниченного множества E в $\mathbb{C}$, по определению,

$$\alpha(E) = \sup\{|c_1(g)| : g \in \mathcal{A}(E)\},$$

где $\mathcal{A}(E) = \{g \in C(\overline{\mathbb{C}}) : g \in \text{Hol}(\mathbb{C} \setminus E), \|g\| \leq 1, g(\infty) = 0\}$, $\|g\| \equiv \sup_{z \in \mathbb{C}} |g(z)|$ и $c_1(g) = \lim_{z \rightarrow \infty} zg(z)$ – коэффициент при z^{-1} разложения Лорана функции g в окрестности ∞ .

Основные свойства емкости $\alpha(\cdot)$ приведены в [2; гл. I]. В работе К. Толсы [5] найдена “метрическая” характеристика емкости $\alpha(\cdot)$ и установлена ее счетная субаддитивность.

Приведенное в [2] доказательство теоремы 1.1 не дало ответа на следующий вопрос [2; гл. IV, § 2, с. 173], [3; гл. VIII, разд. 8, с. 279]: остается ли утверждение этой теоремы верным, если семейство квадратов $\{S_\delta\}$ заменить семейством всех кругов в $\mathbb{C}$?

В теореме 1.4 ниже (см. [6]) дается утвердительный ответ на этот вопрос. Более того, оказывается, что вместо кругов можно взять любое семейство многоугольников, гомотетичных какому-либо фиксированному выпуклому многоугольнику, для которого единичный круг является вписанным.

Напомним, что доказательство теоремы 1.1 существенно опирается на следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.2 [2; гл. IV, § 2, с. 173]. Для произвольного компакта X и $f \in C(\mathbb{C})$ следующие три условия эквивалентны:

- (а) $f|_X \in R(X)$;
- (б) найдутся $A_0 > 0$, $k \geq 1$ и $\omega(t) \searrow 0$, $t \searrow 0$, такие, что для всякого открытого круга $B(a, \delta)$ (с центром $a \in \mathbb{C}$ и радиусом $\delta > 0$) и любой функции $\varphi \in C_0^\infty(B(a, \delta))$ справедлива оценка

$$\left| \int f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} dm(z) \right| \leq A_0 \delta \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \right\| \omega(\delta) \alpha(B(a, k\delta) \setminus X);$$

- (с) предыдущее условие (б) выполняется с некоторой абсолютной константой $A_0 > 0$ при $k = 1$ и $\omega(\delta) = \omega(f, \delta)$.

Здесь и далее через dm обозначена мера Лебега в $\mathbb{C}$ (если область интегрирования не указана, интеграл берется по всему $\mathbb{C}$).

В теореме 1.5 ниже (см. [6]) достаточное условие приближаемости (б) $\Rightarrow$ (а) теоремы 1.2 существенно ослаблено. Вместо всего класса $C_0^\infty(B(a, \delta))$ функций φ в условии (б) достаточно взять лишь одну функцию $\varphi(z) = \varphi_\delta^a(z) = \varphi_1((z - a)/\delta)/\delta^2$, где φ_1 – какая-либо фиксированная неотрицательная функция класса $Lip_1(\mathbb{C})$ с носителем в $B(0, 1)$ и условием $\int \varphi_1(z) dm(z) = 1$.

Важно отметить, что из сформулированных выше результатов нетрудно получить следующий критерий аппроксимации для классов функций.

ТЕОРЕМА 1.3 [2; гл. V, § 3, с. 184]. Для выполнения равенства $R(X) = A(X)$ необходимо и достаточно, чтобы имело место любое из следующих эквивалентных условий:

- (а) $\alpha(D \setminus X^\circ) = \alpha(D \setminus X)$ для каждого ограниченного открытого множества D ;
- (б) найдутся $A_0 > 0$ и $k \geq 1$ такие, что

$$\alpha(B(a, \delta) \setminus X^\circ) \leq A_0 \alpha(B(a, k\delta) \setminus X)$$

для каждого круга $B(a, \delta)$.

Пусть M – какой-либо открытый выпуклый многоугольник, стороны которого касаются $\partial B(0, 1)$. Кроме того, в качестве M можно взять и сам круг $B(0, 1)$. Для $a \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$ обозначим через $M(a, \delta)$ образ множества M относительно линейного отображения $z \mapsto \delta z + a$.

ТЕОРЕМА 1.4 [6]. Пусть X – компакт, $f \in C(\overline{\mathbb{C}})$. Следующие три условия эквивалентны:

- (а) $f|_X \in R(X)$;
- (б) для любого $a \in \mathbb{C}$ и $\delta > 0$ верна оценка

$$\left| \int_{\partial M(a, \delta)} f dz \right| \leq A_0 \omega(f, \delta) \alpha(M(a, \delta) \setminus X),$$

где $A_0 > 0$ зависит только от $\text{diam}(M)$;

- (с) существуют $k \geq 1$ и $\omega(t) \searrow 0$, $t \searrow 0$, такие, что для всех $a \in \mathbb{C}$ и $\delta > 0$ справедлива оценка

$$\left| \int_{\partial M(a, \delta)} f dz \right| \leq \omega(\delta) \alpha(M(a, k\delta) \setminus X). \quad (1)$$

Фиксируем какую-либо неотрицательную функцию φ_1 класса $Lip_1(\mathbb{C})$ с носителем $\text{Supp}(\varphi_1)$ в $B(0, 1)$ и условием $\int \varphi_1(z) dm(z) = 1$. Так как $\omega(\varphi_1, \delta) \leq A_1 \delta$ с некоторым $A_1 > 0$, то, как хорошо известно, $\partial\varphi_1/\partial\bar{z}$ существует dm -почти всюду, причем

$$2 \left\| \frac{\partial\varphi_1}{\partial\bar{z}} \right\| = \|\nabla\varphi_1\| \leq A_1.$$

Положим $\varphi_\delta^a(z) = \varphi_1((z-a)/\delta)/\delta^2$, $\varphi_\delta = \varphi_\delta^0$.

По аналогии с [2] доказательство теоремы 1.4 опирается на следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.5 [6]. *Для произвольного компакта X и функции $f \in C(\overline{\mathbb{C}})$ следующие условия эквивалентны:*

- (a) $f|_X \in R(X)$;
- (b) для всех $a \in \mathbb{C}$ и $\delta > 0$ имеем

$$\left| \int f(z) \frac{\partial\varphi_\delta^a}{\partial\bar{z}} dm(z) \right| \leq A_0 A_1 \delta^{-2} \omega(f, \delta) \alpha(B(a, \delta) \setminus X),$$

где $A_0 > 0$ – абсолютная константа;

(c) найдутся $k \geq 1$ и $\omega(t) \searrow 0$, $t \searrow 0$, такие, что для всех $a \in \mathbb{C}$ и $\delta > 0$ справедлива оценка

$$\left| \int f(z) \frac{\partial\varphi_\delta^a}{\partial\bar{z}} dm(z) \right| \leq A_1 \delta^{-2} \omega(\delta) \alpha(B(a, k\delta) \setminus X). \quad (2)$$

Взяв в теореме 1.5 в качестве φ_1 функцию

$$\varphi_1(z) = \frac{(1-\varepsilon)^2 - z\bar{z}}{2\pi(1-\varepsilon)^3/3} \quad \text{при } |z| < 1-\varepsilon,$$

$\varphi_1(z) = 0$ при $|z| \geq 1-\varepsilon$ ($\varepsilon \in (0, 1)$) и затем в соответствующей оценке (2) устремив параметр ε к 0, получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть $f \in C(\overline{\mathbb{C}})$. Для принадлежности $f|_X$ классу $R(X)$ необходимо и достаточно, чтобы неравенство

$$\left| \int_{B(a, \delta)} f(z)(z-a) dm(z) \right| \leq A_0 \omega(\delta) \delta^2 \alpha(B(a, k\delta) \setminus X)$$

выполнялось для всякого круга $B(a, \delta)$, где $A_0 > 0$, $k \geq 1$ и $\omega(t) \searrow 0$, $t \searrow 0$, зависят только от X и f . Более того, указанное утверждение верно при $k = 1$ и $\omega(\delta) = \omega(f, \delta)$ с некоторой абсолютной константой $A_0 > 0$.

Отметим, что в теоремах 1.1, 1.2, 1.4, 1.5 всюду вместо аналитической C -емкости α можно взять “обычную” аналитическую емкость γ (см. [2; гл. 1, § 1]). К сожалению, с помощью теорем 1.4 и 1.5 не удалось получить каких-либо новых (по сравнению с приведенными в [2]) геометрических или метрических достаточных условий рациональной аппроксимации для классов функций (см. [2; гл. 5]). Однако при доказательстве этих теорем получено дальнейшее усовершенствование и, в частности, упрощение локализационной техники А. Г. Витушкина, которая, как оказалось, имеет весьма широкое применение к задачам аппроксимации функций решениями общих однородных эллиптических

уравнений с постоянными коэффициентами в различных нормах (см. далее, а также работу [7] и литературу в ней). Так, вместо стандартного разбиения единицы $\{\varphi_j\}$, которое возникало в локализационной схеме Витушкина, мы берем специальное разбиение единицы $\{\psi_j\}$ вида $\psi_j = \varphi_\delta^0 * \varphi_\delta^0 * \varphi_j$, где φ_δ^0 – упомянутые выше функции. Это дает возможность, применяя условие (с) теоремы 1.5 и преобразование Фурье, получить необходимые оценки для первого и второго коэффициентов Лорана локализованных (с помощью $\{\psi_j\}$) функций. В результате мы можем найти нужные приближающие функции так же, как в [8], уравнивая соответствующие первый и второй коэффициенты Лорана не для каждой локализованной и приближающей ее функции, а сразу для их сумм, специальным образом скомбинированных. В частности, отпадает необходимость во введении понятия аналитического центра и повторной локализации, по существу используемых в доказательствах работы [2; гл. 4].

С другой стороны, новые результаты по метрической теории емкости $\alpha(\cdot)$, полученные в упомянутой выше работе Толсы [5], позволили подтвердить известную гипотезу Витушкина “о внутренней границе”. Конкретно, в [5] установлен следующий результат, дающий к настоящему времени наиболее “адекватные” достаточные (но, конечно, не являющиеся необходимыми) условия совпадения классов $R(X)$ и $A(X)$. Напомним, что *внутренней границей* $\partial_I K$ компакта K в $\mathbb{C}$ называется совокупность всех точек границы этого компакта, которые не являются граничными ни для какой компоненты множества $\mathbb{C} \setminus K$.

ТЕОРЕМА 1.6 [5]. *Если внутренняя граница $\partial_I X$ компакта X удовлетворяет условию $\alpha(\partial_I X) = 0$, то $R(X) = A(X)$.*

Напомним одну из задач, до сих пор остающуюся нерешенной.

ЗАДАЧА 1.1. *Пусть f непрерывна на компакте X и известно, что $f^2 \in R(X)$. Верно ли, что $f \in R(X)$?*

Содержательные примеры отсутствия аппроксимаций приведены в [3; гл. 8, § 9] (см. также [9]).

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1.4 (сведение к теореме 1.5). Доказательство импликации (а) $\Rightarrow$ (b) в теореме 1.4 непосредственно вытекает из теоремы А. Г. Витушкина [2; гл. II, § 6, теорема 2, с. 158] (в случае $M = B(0, 1)$ – из теоремы М. С. Мельникова [10]) об оценке интеграла Коши (подробнее см. [2; гл. III] и [11]). Так как импликация (b) $\Rightarrow$ (с) очевидна, то нам остается показать, что из условия (с) теоремы 1.4 вытекает условие (с) теоремы 1.5 с некоторой функцией φ_1 , зависящей от M .

Положим $\delta_1 = 2^{-1} \max\{\delta \in (0, 1]: M(0, \delta) \subset B(0, 1)\}$ и пусть $M_1 = M(0, \delta_1)$. Определим $\varphi_1 \in Lip_1(\mathbb{C})$ следующим образом. Если $z \in \mathbb{C} \setminus M_1$, то $\varphi_1(z) = 0$; при $z \in \partial M(0, t)$, $t \in (0, \delta_1)$, положим $\varphi_1(z) = A_1(\delta_1 - t)$, $\varphi_1(0) = A_1\delta_1$, где константа A_1 такова, что $\int \varphi_1 dm = 1$. Пусть, как и ранее, $\varphi_\delta^a = \varphi_1((z - a)/\delta)/\delta^2$. Непосредственно проверяется, что для всех $t \in (0, \delta_1\delta)$ и для всех $\zeta \in \partial M(a, t)$ (кроме, быть может, конечного их числа) имеет место равенство

$$\left. \frac{\partial \varphi_\delta^a}{\partial \bar{z}} \right|_{z=\zeta} = \frac{i}{2} A_1 \delta^{-3} \frac{d\zeta}{|d\zeta|} \Big|_{\partial M(a, t)}.$$

Для получения условия (с) теоремы 1.5 остается воспользоваться оценкой (1), последним равенством и теоремой Фубини (подробности см. в [6; § 2]).

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1.5. Импликация (а) $\Rightarrow$ (b) доказывается так же, как в теореме 1.2 (см. [2; гл. IV, § 2]), где достаточно воспользоваться только условием $\|\nabla\varphi\| < \infty$. Ввиду тривиальности импликации (b) $\Rightarrow$ (с), нам остается установить, что (с) $\Rightarrow$ (а). Последнее утверждение и составляет наиболее важную часть данной теоремы.

Выберем $R > 0$ так, что $X \subset B(0, R)$. Кроме того, мы можем предположить, что $f(z) = 0$ при $|z| > R$ и что для функции $\omega(\delta)$ из (2) имеет место неравенство $\omega(\delta) \geq \omega(f, \delta)$. Фиксируем $\delta > 0$ и какое-либо стандартное δ -разбиение единицы $\{(\varphi_j, B_j) : j \in \mathbb{Z}^2\}$ в $\mathbb{C}$. Последнее означает, что $B_j = B(a_j, \delta)$, $a_j = j_1\delta + ij_2\delta \in \mathbb{C}$ ($j = (j_1, j_2)$), $\varphi_j \in C_0^\infty(B_j)$, $0 \leq \varphi_j \leq 1$, $\|\nabla\varphi_j\| \leq \frac{A_0}{\delta}$, $\sum_j \varphi_j \equiv 1$.

Построим новое разбиение единицы $\{(\psi_j, B'_j)\}$, где $\psi_j = \varphi_\delta * \varphi_\delta * \varphi_j$, $B'_j = B(a_j, 3\delta)$ (напомним, что $\varphi_\delta = \varphi_\delta^0$). Легко показать, что $\psi_j \in C_0^\infty(B'_j)$ и $\|\nabla\psi_j\| \leq A_0/\delta$. Следуя [2], введем так называемые “локализованные” функции

$$f_j(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{f(\zeta) - f(\zeta)}{z - \zeta} \frac{\partial\psi_j}{\partial\bar{\zeta}} dm(\zeta). \quad (3)$$

Для произвольного класса функций $\mathcal{A}$ и числа $\tau \geq 0$ обозначим через $\tau\mathcal{A}$ класс функций $\{\tau g : g \in \mathcal{A}\}$. Нам потребуется следующая лемма, которая фактически вытекает из определения функций f_j и формулы Коши–Грина.

ЛЕММА 1.1 [2; гл. II, § 3, с. 152]. *Функции f_j удовлетворяют следующим условиям:*

- 1) $f_j \in A_0\omega(f, \delta)\mathcal{A}(B'_j \setminus X^\circ)$;
- 2) $f = \sum_j f_j$ и последняя сумма конечна ($f_j = 0$, когда $B'_j \cap B(0, R) = \emptyset$);
- 3) если $f_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^j (z - a_j)^n$ – разложение Лорана функции f_j вне B'_j (с центром a_j), то

$$c_n^j = -\frac{1}{\pi} \int f(\zeta)(\zeta - a_j)^{n-1} \frac{\partial\psi_j}{\partial\bar{\zeta}} dm(\zeta). \quad (4)$$

Пусть $k_1 = k + 2$ и $G_j = B(a_j, k_1\delta) \setminus X$.

ЛЕММА 1.2. *Для всех j справедливы оценки*

$$|c_1^j| \leq A_0\omega(\delta)\alpha(G_j), \quad (5)$$

$$|c_2^j| \leq A_0\omega(\delta)\delta\alpha(G_j). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале установим (5). Пусть $\varphi_j^* = \varphi_\delta * \varphi_j$, тогда

$$\varphi_j^* \in C_0^\infty(B(a_j, 2\delta)) \quad \text{и} \quad 0 \leq \varphi_j^* \leq 1. \quad (7)$$

Пользуясь соотношениями (4), (7), (2) и теоремой Фубини, получаем:

$$\begin{aligned} |c_1^j| &= \frac{1}{\pi} \left| \int f(\zeta) \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left(\int \varphi_\delta(\zeta - w) \varphi_j^*(w) dm(w) \right) dm(\zeta) \right| \\ &= \frac{1}{\pi} \left| \int \varphi_j^*(w) \left(\int f(\zeta) \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} (\varphi_\delta(\zeta - w)) dm(\zeta) \right) dm(w) \right| \\ &\leq \left| \int \varphi_j^*(w) A_2 A_1 \delta^{-2} \omega(\delta) \alpha(B(w, k\delta) \setminus X) dm(w) \right| \leq A_0 \omega(\delta) \alpha(G_j). \end{aligned}$$

Для получения оценки (6) для $|c_2^j|$ мы поступаем аналогично. Нужно только проверить, что в формуле

$$c_2^j = -\frac{1}{\pi} \int f(\zeta) (\zeta - a_j) \frac{\partial \psi_j}{\partial \bar{\zeta}} dm(\zeta)$$

функция $(\zeta - a_j) \partial \psi_j / \partial \bar{\zeta} = \partial((\zeta - a_j) \psi_j(\zeta)) / \partial \bar{\zeta}$ опять имеет вид $\partial(\varphi_\delta * \chi_j) / \partial \bar{\zeta}$, где $\chi_j \in C_0^\infty(B(a_j, 2\delta))$ и $\|\chi_j\| \leq A_0 \delta$. Это делается с помощью двумерного преобразование Фурье (см. [6; § 2]). Лемма 1.2 доказана.

Пусть $E \subset B(a, r)$, $g \in \mathcal{A}(E)$. Разложим функцию g в ряд Лорана с центром в точке a :

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(g, a)}{(z - a)^n},$$

где

$$c_n(g, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a, r)} g(z) (z - a)^{n-1} dz$$

и справедлива оценка [2; гл. I, § 5, с. 148]:

$$|c_n(g, a)| \leq A_0 (2r)^{n-1} \alpha(E). \quad (8)$$

Теперь мы можем непосредственно приступить к изложению “модифицированной” схемы приближения функции $f = \sum f_j$. Пусть $\mathcal{J} = \{j \in \mathbb{Z}^2: B'_j \cap \partial X \neq \emptyset\}$. Если $j \notin \mathcal{J}$ то, согласно лемме 1.1(1), $f_j \in R(X)$, т.е. эти f_j в приближении не нужны. Пусть теперь $j \in \mathcal{J}$. По определению $\alpha(G_j)$ и согласно (5), мы можем подобрать функции $f_j^* \in A_0 \omega(\delta) \mathcal{A}(G_j) \subset R(X)$, удовлетворяющие условию $c_1(f_j^*) = c_1(f_j)$. Положим $g_j = f_j - f_j^*$ ($f_j^* = f_j$, $g_j \equiv 0$ при $j \notin \mathcal{J}$), тогда

$$\|g_j\| \leq A_0 \omega(\delta), \quad c_1(g_j) = 0. \quad (9)$$

Далее, ввиду (6), (8) при $E = G_j$ и $g = f_j^*$ ($n = 2$), мы можем записать:

$$|c_2(g_j)| \leq A_0 \omega(\delta) \delta \alpha(G_j). \quad (10)$$

Пользуясь (8)–(10) и элементарной оценкой геометрической прогрессии, при $|z - a_j| > 3k_1 \delta$ получаем:

$$|g_j(z)| \leq \frac{A_0 \omega(\delta) \delta \alpha(G_j)}{|z - a_j|^2} + \frac{A_0 \omega(\delta) \delta^3}{|z - a_j|^3}. \quad (11)$$

Начиная с этого места мы не можем следовать известным доказательствам теоремы 1.2 (см. [2; гл. IV, §§ 4, 5, с. 176–179], [3; гл. VIII, разд. 8, с. 280–282], [7; с. 26–27]). Основная идея завершения доказательства состоит в том, что на

самом деле нет необходимости “устранять” все вторые коэффициенты $c_2(g_j)$ функций g_j , $j \in \mathcal{J}$, достаточно устранить (с надлежащими оценками) только суммарные коэффициенты $\sum_{j \in \Gamma_{ms}} c_2(g_j)$ для специального разбиения $\{\Gamma_{ms}\}$ множества $\mathcal{J}$ на группы Γ_{ms} . Иначе говоря, мы хотим разбить совокупность индексов $\mathcal{J}$ на непересекающиеся группы $\{\Gamma_{ms} : m \in \mathbb{Z}, 1 \leq s \leq s_m\}$ и приближать сумму локализованных функций в каждой группе как единое целое. Сама процедура разбиения множества $\mathcal{J}$ на группы (полные и неполные) вполне естественна. Детали получения надлежащих оценок приведены в [6; § 2].

1.2. Критерии равномерной приближаемости гармоническими функциями на компактах в $\mathbb{R}^N$

Теперь рассмотрим классический случай *равномерных* аппроксимаций *гармоническими* функциями. В этом разделе рассматриваются только *вещественнозначные* функции. Пусть $X \subset \mathbb{R}^N$ – компакт ($N \geq 2$ натурально), X° – множество всех внутренних точек X , ∂X – граница X , Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^N$. Пусть $R_\Delta(X)$ – класс тех функций из $C(X)$, которые могут быть с любой точностью равномерно на X приближены функциями F , гармоническими в некоторых (зависящих от F) окрестностях компакта X .

Задача состоит в описании функций f класса $R_\Delta(X)$.

Ясно, что все такие функции принадлежат пространству $A_\Delta(X) = C(X) \cap \text{Harm}(X^\circ)$, где через $\text{Harm}(G)$ обозначается пространство всех гармонических функций на открытом множестве G в $\mathbb{R}^N$. Продолжим функцию f с компакта X по теореме Брауэра до финитной функции класса $C(\mathbb{R}^N)$ и через $\omega(f, \cdot)$ обозначим модуль непрерывности функции f в $\mathbb{R}^N$.

Совсем недавно в [12] был получен следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.7. *В указанных обозначениях пусть $N \geq 3$ натурально, и пусть существуют постоянная $k \geq 1$ и функция $\omega(t) \searrow 0$, $t \searrow 0$, такие, что для любого открытого шара $B = B(a, \delta)$ (с радиусом δ и центром в точке a) в $\mathbb{R}^N$ с границей ∂B имеет место оценка*

$$\left| \frac{1}{\sigma(\partial B)} \int_{\partial B} f(x) d\sigma_x - \frac{1}{m(B)} \int_B f(x) dm_x \right| \leq \omega(\delta) \delta^{2-N} \text{Cap}(kB \setminus X), \quad (12)$$

где $d\sigma(\cdot)$ – поверхностная $((N-1)$ -мерная лебегова) мера на ∂B , $dm(\cdot)$ – мера Лебега в $\mathbb{R}^N$, $kB = B(a, k\delta)$, $\text{Cap}(\cdot)$ – (винеровская) гармоническая емкость в $\mathbb{R}^N$. Тогда $f \in R_\Delta(X)$.

Обратно, если $f \in R_\Delta(X)$, то оценка (12) выполнена для $k = 1$, а в качестве функции $\omega(t)$ достаточно взять $A_0 \omega(f, t)$, где $A_0 > 0$ – подходящая постоянная, зависящая только от размерности N .

Для ограниченной функции g на $\mathbb{R}^N$ полагаем $\|g\| = \sup\{|g(x)| : x \in \mathbb{R}^N\}$.

Напомним определение классической (винеровской) гармонической емкости ограниченного множества E в $\mathbb{R}^N$:

$$\text{Cap}(E) = \sup_{\mu} \{ \|\mu\| : \|\mu * |x|^{2-N}\| \leq 1 \}, \quad (13)$$

где верхняя грань берется по всем указанным неотрицательным борелевским мерам μ с носителем $\text{Supp } \mu$ в E , $\|\mu\|$ – полная масса меры μ , $*$ означает операцию свертки. Отметим, что в определении (13) можно дополнительно потребовать выполнения условия $\mu * |x|^{2-N} \in C(\mathbb{R}^N)$ и даже отказаться от неотрицательности меры μ (см. [13; гл. 5, лемма 12], [14; гл. 3, теорема 2 и лемма 6]).

Теорему 1.7 в качестве гипотезы сформулировал П. В. Парамонов: условие (12) аналогично по форме условию (iv) из [15; теорема 1.1], а также соответствующему условию из [6; следствие 2.3].

Доказательство теоремы 1.7 сводится к следующему утверждению – естественному аналогу леммы А. Г. Витушкина [2; гл. 4, § 2, лемма 1], сформулированному в качестве гипотезы А. Г. О’Фарреллом [16; задача 12.15].

ТЕОРЕМА 1.8 [12]. *Если выполнена оценка*

$$\left| \int_B f(x) \Delta \varphi(x) dm_x \right| \leq \omega(\delta) \|\nabla^2 \varphi\| \delta^2 \text{Cap}(kB \setminus X) \quad (14)$$

(где B , k и $\omega(\cdot)$ – те же, что и в теореме 1.7, φ – произвольная функция из $C_0^2(B)$), то $f \in R_\Delta(X)$.

Обратно, если $f \in R_\Delta(X)$, то оценка (14) выполнена с $k = 1$ и $\omega(t) = A_0 \omega(f, t)$.

На самом деле в [12] получено существенное усиление теоремы 1.8 (по форме аналогичное теореме 1.5), когда в качестве φ достаточно брать лишь одну неотрицательную функцию класса $C_0^2(B)$ определенного вида. В частности, теорема 1.7 получается как следствие последнего факта для функции $\varphi(x) = \delta^{-N}(1 - |x - a|^2 \delta^{-2})$ при $|x - a| < \delta$ и $\varphi(x) = 0$ при $|x - a| \geq \delta$. При этом интеграл в (14) следует брать по всему $\mathbb{R}^N$ в обобщенном смысле (см. [12; (2.13)–(2.15)]).

Необходимость каждой из оценок (12) и (14) для выполнения условия $f \in R_\Delta(X)$ доказывается стандартно – так же, как и для голоморфных функций. Вопрос о достаточности указанных оценок оказался значительно сложнее.

Следующий классический критерий совпадения классов $R_\Delta(X)$ и $A_\Delta(X)$, установленный Ж. Дени [17; теорема 5], теперь является непосредственным следствием каждой из теорем 1.7 и 1.8.

ТЕОРЕМА 1.9 [17]. *Равенство $R_\Delta(X) = A_\Delta(X)$ выполнено тогда и только тогда, когда дополнение к X и дополнение к X° разрежены в одних и тех же точках границы ∂X компакта X .*

В случае, когда компакт X является замкнутой областью, последний критерий установил М. В. Келдыш в терминах разрешимости и устойчивости задачи Дирихле [18; теоремы 12, 13], [13; теорема 19].

Фиксируем $x \in \partial X$, и пусть $E_n(x) = \{y \in \mathbb{R}^N \setminus X : 2^{-n-1} \leq |y - x| < 2^{-n}\}$ для натуральных n . Положим $C_n = \text{Cap}(E_n(x))$. В силу критерия Винера (см., например, [19; теоремы 5.2, 5.10]), разреженность дополнения к компак-

ту X в точке x равносильна сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n C_n$. Точки разреженности дополнения к множеству X° определяются аналогично.

Отметим, что из теоремы 1.9 вытекает (см., например, [20]) следующий критерий совпадения классов $R_\Delta(X)$ и $A_\Delta(X)$, аналогичный приведенному выше критерию А. Г. Витушкина (теореме 1.3) аппроксимации голоморфными функциями.

ТЕОРЕМА 1.10. Пусть X – компакт в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. Следующие условия равносильны:

- (a) $R_\Delta(X) = A_\Delta(X)$;
- (b) $\text{Cap}(D \setminus X^\circ) = \text{Cap}(D \setminus X)$ для каждого ограниченного открытого множества D в $\mathbb{R}^N$;
- (c) найдутся $A_0 > 0$ и $k \geq 1$ такие, что

$$\text{Cap}(B(a, \delta) \setminus X^\circ) \leq A_0 \text{Cap}(B(a, k\delta) \setminus X)$$

для каждого шара $B(a, \delta)$ в $\mathbb{R}^N$.

Так же как и в случае аппроксимации голоморфными функциями, теорема 1.10 является следствием теоремы 1.8, поскольку свойства (b) и (c) в теореме 1.10 влекут выполнение оценки (14) для всех функций $f \in A_\Delta(X) \cap C(\mathbb{R}^N)$ с компактным носителем и всех соответствующих φ .

В случае $X^\circ = \emptyset$ критерий равенства $R_\Delta(X) = A_\Delta(X) = C(X)$ конструктивно установил А. А. Гончар [21; теорема В]; здесь достаточное условие приближаемости улучшено по сравнению с теоремой 1.9 из-за эффекта “неустойчивости” гармонической емкости. Именно, если для почти всех $x \in X$ по мере Лебега в $\mathbb{R}^N$, $N > 2$, выполнено условие

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\text{Cap}(B(x, \delta) \setminus X)}{\delta^N} = \infty, \quad (15)$$

то $R_\Delta(X) = C(X)$; при этом δ^N нельзя заменить на $\delta^{N+\alpha}$ при $\alpha > 0$.

Ю. А. Лысенко и Б. М. Писаревский доказали, что для совпадения $R_\Delta(X)$ и $C(X)$ достаточно, чтобы предел в левой части (15) почти всюду был положительным [22].

Другой способ описания функций f класса $R_\Delta(X)$ получили А. Дебьяр и Б. Гаво [23] (см. также [24]).

ТЕОРЕМА 1.11 [23]. Функция f принадлежит классу $R_\Delta(X)$ тогда и только тогда, когда она непрерывна на компакте X и является тонко гармонической (*finely harmonic*) в тонкой внутренней (*fine interior*) компакта X .

Совсем кратко обсудим идеи доказательства теоремы 1.8 (см. [12]). Роль локализационного оператора Витушкина (см. формулу (3)), действующего непрерывно из пространства $C(\mathbb{R}^N)$ в себя, в данном случае играет оператор $V_\varphi(f) = \Phi * (\varphi \Delta f)$. Здесь φ – фиксированная функция класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\Phi(x) = -c_N |x|^{2-N}$ – фундаментальное решение для уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^N$ ($c_N > 0$ – подходящая постоянная), а функция $\varphi \Delta f$ рассматривается в обобщенном смысле. Основной смысл использования локализационного оператора V_φ виден из формул $\Delta V_\varphi(f) = \varphi \Delta f$ (т. е. “локализованная” функция $V_\varphi(f)$ является гармонической вне носителя распределения $\varphi \Delta f$) и $f = \sum V_{\varphi_j}(f)$ при условии, что $\sum \varphi_j = 1$ (суммирование по j конечно) в окрестности носителя функции f . Подробнее об этом см. в [25; с. 322], а также [26], где

подробно описана базовая техника оценок и уравнивания коэффициентов соответствующих рядов Лорана. Основная трудность заключается в следующем. Оценка (14) и подходящий аналог леммы 1.2 позволяют автоматически оценить и уравнять у каждой локализованной функции только “главный” лорановский коэффициент, соответствующий фундаментальному решению, что само по себе не достаточно для приближения исходной функции. В случае равномерных гармонических аппроксимаций требуется “уравнивать” уже $(N + 1)(N + 2)/2$ коэффициентов в лорановском разложении каждой из локализованных функций (коэффициенты при частных производных фундаментального решения до второго порядка включительно). Первый шаг к преодолению этой трудности – лемма 2.9 из [12] о приближении функции “по частям”, позволяющая свести задачу к уравниванию всего лишь N коэффициентов Лорана (коэффициентов при ядрах Рисса – первых производных фундаментального решения). Идея доказательства этой леммы состоит в том, что сначала строится “слабое” (L_1 с весом) приближение, из которого нужно равномерное приближение получается с помощью выпуклых комбинаций “слабо” приближающих функций на основе известной теоремы об отделимости выпуклых множеств в нормированном пространстве. Центральным моментом доказательства теоремы 1.8 является лемма 2.15 из [12], где, наряду с технически очень сложным геометрическим построением и идеей выпуклых комбинаций из [12; лемма 2.9], применяется теория сингулярных интегралов на липшицевой поверхности [27].

1.3. Пространства C^m при $m > 0$ и связанные с ними емкости

Пусть U – непустое открытое множество в $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$). При $0 < m < 1$ через $Lip_m(U)$ обозначается пространство (комплекснозначных) функций f на U с конечной нормой

$$\|f\|_{mU} = \|f\|_U + \sup_{x \neq y \in U} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^m},$$

где $\|f\|_U = \|f\|_{0U} = \sup\{|f(x)| : x \in U\}$. Через $Lip_0(U)$ обозначим пространство всех ограниченных на U функций с нормой $\|f\|_U$. Пусть $BC^m(U) \equiv lip_m(U)$ ($0 \leq m < 1$) означает замыкание в норме $\|\cdot\|_{mU}$ пространства $C^\infty(U) \cap Lip_m(U)$. Так, если $m = 0$, то $BC^0(U) = BC(U)$ есть пространство всех *непрерывных и ограниченных* на U функций. При $m \in \mathbb{N}$ через $BC^m(U)$ обозначается пространство функций на U , имеющих непрерывные ограниченные в U частные производные до порядка m включительно с нормой

$$\|f\|_{mU} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_U.$$

Символ $\partial^\alpha f$ при $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ и $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$ означает выражение

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Через $\omega_E(g, \delta) = \sup\{|g(x) - g(y)| : x, y \in E, |x - y| < \delta\}$ будем обозначать модуль непрерывности функции g (ограниченной) на множестве E . Для $m \in \mathbb{Z}_+$

и открытых U нам также потребуется полунорма

$$\|f\|'_{mU} = \sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha f\|_U.$$

Пусть теперь $m > 0$, $m \notin \mathbb{Z}_+$, $m = [m] + s$, где $[m]$ – целая часть числа m , а $s \in (0, 1)$. В этом случае определим пространство

$$Lip_m(U) = \{f \in BC^{[m]}(U) : \partial^\alpha f \in Lip_s(U) \text{ при всех } \alpha, |\alpha| = [m]\}$$

с нормой $\|f\|_{mU} = \|f\|_{[m]U} + \|f\|'_{mU}$, где

$$\|f\|'_{mU} = \sum_{|\alpha|=[m]} \sup_{\delta>0} \frac{\omega_U(\partial^\alpha f, \delta)}{\delta^s}.$$

Пространство $BC^m(U)$ определяется как замыкание в $Lip_m(U)$ пространства функций $Lip_m(U) \cap C^\infty(U)$. Можно показать, что $BC^m(U)$ состоит из всех функций $f \in Lip_m(U)$ таких, что для любого компакта $K \subset U$ и для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ с условием $|\alpha| = [m]$ выполняется соотношение $\omega_K(\partial^\alpha f, \delta)\delta^{-s} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Как обычно, $C_0^\infty(U) = \{\varphi \in C^\infty(U) : \text{Supp}(\varphi) - \text{компакт в } U\}$. Через $C_{\text{loc}}^m(U)$ обозначается пространство функций $\{f : f\varphi \in BC^m(U) \text{ для всех } \varphi \in C_0^\infty(U)\}$. При $U = \mathbb{R}^N$ индекс U в записи всех норм и модулей непрерывности опускается.

Пусть далее X – компакт в $\mathbb{R}^N$. При $m > 0$ положим

$$J_0^m(X) = \{f : f \in BC^m(\mathbb{R}^N), f = 0 \text{ в некоторой окрестности } X\},$$

а через $J^m(X)$ обозначим замыкание $J_0^m(X)$ в $BC^m(\mathbb{R}^N)$. При этом нетрудно показать, что

$$J_m(X) = \{f : f \in BC^m(\mathbb{R}^N), \partial^\alpha f|_X = 0 \text{ при } |\alpha| \leq [m]\}.$$

Пространство $C^m(X)$ определим как факторпространство $BC^m(\mathbb{R}^N)/J^m(X)$ с соответствующей факторнормой. Точнее, каждая функция $f \in BC^m(\mathbb{R}^N)$ единственным образом определяет элемент $f_X = f + J^m(X) \in C^m(X)$ с нормой в $C^m(X)$, равной $\|f_X\|_{mX} = \inf\{\|f + g\|_m : g \in J^m(X)\}$. Эквивалентное определение пространства $C^m(X)$ можно получить, используя вместо $\mathbb{R}^N$ любую фиксированную окрестность компакта X . В частности, для любой такой окрестности U и любой функции $g \in C_{\text{loc}}^m(U)$ единственным образом определяется элемент $g_X \in C^m(X)$ по формуле

$$g_X = \{f \in BC^m(\mathbb{R}^N) : \partial^\alpha(f - g)|_X \equiv 0 \text{ при } |\alpha| \leq [m]\}.$$

Указанные выше пространства можно определить “внутренним” способом, не выходя за пределы компакта X . Подробно эти факты, включая теорему Уитни о продолжении, изложены в [28; гл. VI].

Так как значения всех представителей f класса f_X совпадают на X° , то корректно определены пространства $A_\Delta^m(X) = C^m(X) \cap \text{Harm}(X^\circ)$ и (при $N = 2$) $A^m(X) = C^m(X) \cap \text{Hol}(X^\circ)$. При этом все пространства, в контексте *связанные с гармоническими функциями*, считаются состоящими только из *вещественнозначных функций*.

Далее, пусть $P^m(X)$ и $P_\Delta^m(X)$ – замыкания в $C^m(X)$ подпространств $\{p_X : p \in \mathcal{P}\}$ и $\{p_X : p \in \mathcal{P}_\Delta\}$, где $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}_\Delta$ – пространства всех многочленов комплексного переменного в $\mathbb{C}$ и (вещественных) гармонических многочленов в $\mathbb{R}^N$ соответственно.

Пусть также $R^m(X)$ (соответственно $R_\Delta^m(X)$) – замыкание в $C^m(X)$ подпространства $\{f_X : f \text{ голоморфна (соответственно гармонична) в некоторой (каждая } f \text{ в своей) окрестности компакта } X\}$.

При этом $P^m(X) \subset R^m(X) \subset A^m(X) \subset C^m(X)$ и $P_\Delta^m(X) \subset R_\Delta^m(X) \subset A_\Delta^m(X) \subset C^m(X)$.

Через $\mathcal{M}^s(E)$ ($s \in (0, N]$) обозначается s -мерный *обхват по Хаусдорфу* ограниченного множества E в $\mathbb{R}^N$, т. е.

$$\mathcal{M}^s(E) = \inf \sum_j r_j^s,$$

где инфимум берется по всем покрытиям $\{B_j\}$ множества E шарами (каждое $\{B_j\}$ есть не более чем счетное покрытие множества E шарами B_j в $\mathbb{R}^N$ с радиусами r_j). Аналогично, через $\mathcal{M}_*^s(E)$ (при $s \in (0, N)$) обозначается s -мерный *нижний обхват по Хаусдорфу* ограниченного множества E в $\mathbb{R}^N$, т. е.

$$\mathcal{M}_*^s(E) = \sup_h \left(\inf_{\{B_j\}} \sum_j h(r_j) \right),$$

где инфимум берется по всем (не более чем счетным) покрытиям $\{B_j\}$ множества E шарами B_j с радиусами r_j , а супремум берется по всем неотрицательным непрерывным функциям h на $(0, \infty)$, удовлетворяющим условиям $h(t) \leq t^s$ и $h(t)t^{-s} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$.

Фиксируем $N \geq 2$, $m \in [0, 2)$ (кроме случая $N = 2$, $m = 0$). *Гармонической C^m -емкостью* ограниченного множества E в $\mathbb{R}^N$ называется величина

$$\kappa_m(E) = \sup \langle \Delta f, 1 \rangle, \quad (16)$$

где супремум берется по всем $f \in C_{\text{loc}}^m(\mathbb{R}^N)$, удовлетворяющим условиям $\|f\|'_m \leq 1$, $\text{Supp}(\Delta f) \subset E$ (т. е. f гармонична вне E) и $f = \Phi * (\Delta f)$ (т. е. f “регулярна” на ∞).

Здесь и далее $\langle T, \varphi \rangle$ означает действие распределения T на функцию $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\Phi = \Phi_N(x)$ – фундаментальное решение для оператора Лапласа Δ в $\mathbb{R}^N$, а $*$ означает свертку. Отметим, что при $N \geq 3$ в определении (16) автоматически получаем $f \in BC^m(\mathbb{R}^N)$ и $f(\infty) = 0$.

Следующее утверждение хорошо известно.

ТЕОРЕМА 1.12. *Компакт K в $\mathbb{R}^N$ удовлетворяет условию $\kappa_m(K) = 0$ тогда и только тогда, когда K является множеством C^m -устраняемых особенностей для гармонических функций. Последнее означает, что если U – какая-либо окрестность компакта K и $f \in C_{\text{loc}}^m(U) \cap \text{Harm}(U \setminus K)$, то $f \in \text{Harm}(U)$.*

Иначе говоря, $\kappa_m(E)$ представляет собой “меру гармонической неустраняемости” для функций класса C^m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.12. Если компакт K является множеством C^m -устранимых особенностей для гармонических функций, то всякая функция f , фигурирующая в определении емкости $\kappa_m(K)$ (см. (16)), является целой гармонической функцией, и, следовательно, $\langle \Delta f, 1 \rangle = 0$, так что $\kappa_m(K) = 0$. Обратно, пусть K – компакт с условием $\kappa_m(K) = 0$, U – некоторая окрестность компакта K и $f \in C_{\text{loc}}^m(U) \cap \text{Harm}(U \setminus K)$. По известной лемме Вейля [29; теорема 4.4.1] достаточно доказать, что $\Delta f = 0$ в U в обобщенном смысле. Последнее означает, что $\langle \Delta f, \varphi \rangle = 0$ для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(U)$. Фиксируем любую такую функцию φ и определим $g = V_\varphi f = \Phi * (\varphi \Delta f)$ – локализацию Витушкина функции f с “индексом” φ . Согласно [26; лемма 2.1] и [25; лемма 3] оператор Витушкина инвариантен в пространствах C^m , так что $g \in C_{\text{loc}}^m(\mathbb{R}^N)$ и $\|g\|'_m < +\infty$. Поскольку, очевидно, $\text{Supp}(\Delta g) = \text{Supp}(\varphi \Delta f) \subset K$, по определению $\kappa_m(K)$ получаем $0 = \langle \Delta g, 1 \rangle = \langle \Delta f, \varphi \rangle$. Что и требовалось.

Отметим, что емкость $\kappa_0(\cdot)$ совпадает (с точностью до мультипликативной константы, причем здесь $N \geq 3$) с классической гармонической емкостью $\text{Cap}(\cdot)$ (см. [13; гл. 2]), а емкость $\kappa_1(\cdot)$ сравнима с C^1 -гармонической емкостью $\kappa(\cdot)$, введенной в [8]. Емкости $\kappa_m(\cdot)$ при $m \in (0, 1) \cup (1, 2)$ сравнимы с соответствующими емкостями, введенными в [26; с. 177] и [30; с. 727]. Замечательным является тот факт, что емкости $\kappa_m(\cdot)$ при $m \in (0, 1) \cup (1, 2)$ описываются в метрических терминах – они *сравнимы* с соответствующими нижними обхватами по Хаусдорфу. Как показано в [26; с. 178] (см. также [31]), при $m \in (0, 1) \cup (1, 2)$ для любого σ -компактного ограниченного множества E в $\mathbb{R}^N$ справедлива оценка

$$A_0^{-1} \mathcal{M}_*^{N+m-2}(E) \leq \kappa_m(E) \leq A_0 \mathcal{M}_*^{N+m-2}(E), \quad (17)$$

где $A_0 > 1$ зависит только от (m, N) . Кроме того, как нетрудно показать, при $0 < s < N$ для любого ограниченного открытого множества E в $\mathbb{R}^N$ имеем

$$A_0^{-1} \mathcal{M}_*^s(E) \leq \mathcal{M}_*^s(E) \leq A_0 \mathcal{M}_*^s(E), \quad (18)$$

где $A > 1$ – абсолютная константа.

Аналогичным образом определяются *аналитические C^m -емкости* ограниченных множеств E в $\mathbb{C}$ при $0 < m < 1$:

$$\alpha_m(E) = \sup \langle \bar{\partial} f, 1 \rangle,$$

где $\bar{\partial} f(z) = \partial f / \partial \bar{z}$ (т. е. $\bar{\partial}$ – оператор Коши–Римана в $\mathbb{C}$), а супремум берется по всем $f \in BC^m(\mathbb{C})$, удовлетворяющим условиям $\text{Supp}(\bar{\partial} f) \subset E$, $\|f\|'_m \leq 1$, $f(\infty) = 0$ (т. е. $f(z) = 1/(\pi z) * (\bar{\partial} f)$ – голоморфна вне E , включая ∞).

Напомним, что фундаментальным решением для оператора $\bar{\partial}$ в $\mathbb{C}$ является функция $1/(\pi z)$.

Компакт K в $\mathbb{C}$ удовлетворяет условию $\alpha_m(K) = 0$ тогда и только тогда, когда K является множеством C^m -устранимых особенностей для голоморфных функций. Наконец (см. [32] и [33]), при $m \in (0, 1)$ для любого σ -компактного ограниченного множества E в $\mathbb{C}$ имеем

$$A_0^{-1} \mathcal{M}_*^{m+1}(E) \leq \alpha_m(E) \leq A_0 \mathcal{M}_*^{m+1}(E),$$

где $A_0 > 1$ зависит только от m .

Отметим, что аналог последнего утверждения при $m = 0$ (для емкости $\alpha_0(E) = \alpha(E)$, определенной в разделе 1.1, и $\mathcal{M}_*^1(E)$) не имеет места [34]. То же можно сказать и про оценку (17) при всех $N \geq 2$ и $m = 1$.

1.4. Критерии C^m -приближаемости голоморфными функциями на компактах в $\mathbb{C}$ при $m > 0$

Фиксируем $m \in (0, 1)$. Пусть X – компакт в $\mathbb{C}$. По определению из предыдущего раздела, мы можем отождествить пространства $C^m(X)$ и $BC^m(\mathbb{C})|_X$, так что исходный элемент $f_X \in C^m(X)$ мы сразу будем считать продолженным до функции класса $BC^m(\mathbb{C})$ с компактным носителем. Положим $\omega_f^m(\delta) = \sup_{t \in (0, \delta)} (\omega(f, t)t^{-m})$, тогда $\omega_f^m(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Пусть M , $M(a, \delta)$, φ_1 , φ_δ^a такие же, как в разделе 1.1 выше.

Критерии аппроксимации голоморфными функциями в нормах пространств $C^m(X)$ (аналогичные теоремам 1.1 и 1.2) получены А. Г. О’Фарреллом (см. [33], [35], [36]). Мы приводим усиления этих критериев, аналогичные теоремам 1.4 и 1.5.

ТЕОРЕМА 1.13 [6]. Пусть X – компакт в $\mathbb{C}$, $f \in BC^m(\mathbb{C})$. Следующие условия эквивалентны:

(а) существует последовательность $\{f_n\}$ функций $f_n \in BC^m(\mathbb{C})$, голоморфных на компакте X (каждая f_n голоморфна в своей окрестности множества X), такая, что $\|f - f_n\|_m \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$;

(б) для всех $a \in \mathbb{C}$ и $\delta > 0$ имеем

$$\left| \int_{\partial M(a, \delta)} f dz \right| \leq A_0 \omega_f^m(\delta) \mathcal{M}^{1+m}(M(a, \delta) \setminus X),$$

где $A_0 = A_0(m, M) > 0$;

(с) найдутся $k \geq 1$ и $\omega(t) \searrow 0$, $t \searrow 0$, такие, что для всех $a \in \mathbb{C}$ и $\delta > 0$ имеем

$$\left| \int_{\partial M(a, \delta)} f dz \right| \leq \omega(\delta) \mathcal{M}^{1+m}(M(a, k\delta) \setminus X);$$

(d) существуют $A_0 > 0$, $k \geq 1$, и $\omega(t) \searrow 0$, $t \searrow 0$, такие, что для всех $a \in \mathbb{C}$ и $\delta > 0$

$$\left| \int_{B(a, \delta)} f(z) \frac{\partial \varphi_\delta^a}{\partial \bar{z}} dm(z) \right| \leq A_0 \omega(\delta) A_1 \delta^{-2} \mathcal{M}^{1+m}(M(a, k\delta) \setminus X),$$

где $A_1 = \|\nabla \varphi_1\|$.

В условиях (с) и (d) можно взять $k = 1$ и $\omega(t) = \omega_f^m(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (а) $\Rightarrow$ (б) стандартна (см. [35]), а (б) $\Rightarrow$ (с) – очевидна. Для получения импликации (с) $\Rightarrow$ (d) мы просто повторяем доказательство теоремы 1.4, подставляя всюду, где нужно, величину $\mathcal{M}_*^{1+m}(\cdot)$ вместо $\alpha(\cdot)$ (см. (17) и (18)). Остается установить, что (d) $\Rightarrow$ (а). Воспользуемся обозначениями из (начала) доказательства теоремы 1.5. Действуя так же, как в лемме 1.2, мы получим следующую оценку:

$$|c_1^j| \leq A_0 \omega(\delta) \mathcal{M}^{1+m}(G_j)$$

(отметим, что здесь достаточно было бы взять $\psi_j = \varphi_\delta * \varphi_j$). Окончание доказательства проходит по схеме [26; с. 177–185].

Критерий C^m -приближаемости (голоморфными функциями) для классов функций был получен А. Г. О’Фарреллом.

ТЕОРЕМА 1.14 [37]. При $t \in (0, 1)$ следующие условия эквивалентны:

(а) $R^m(X) = A^m(X)$;

(б) для всякой ограниченной области D в $\mathbb{C}$ справедливо равенство

$$\alpha_m(D \setminus X^\circ) = \alpha_m(D \setminus X);$$

(с) найдется $A_0 = A_0(m) > 0$ такое, что для каждого ограниченного открытого множества D в $\mathbb{C}$ справедлива оценка

$$\mathcal{M}_*^{1+m}(D \setminus X^\circ) \leq A_0 \mathcal{M}^{1+m}(D \setminus X);$$

(d) найдутся $A_0 > 0$ и $k \geq 1$ такие, что для каждого открытого круга $B(a, \delta)$ справедлива оценка

$$\mathcal{M}_*^{1+m}(B(a, \delta) \setminus X^\circ) \leq A_0 \mathcal{M}^{1+m}(B(a, k\delta) \setminus X).$$

Теперь доказательство этой теоремы получается как следствие теоремы 1.13.

Наконец, следующие теоремы при нецелых m получены А. Г. О'Фарреллом [36], а для целых m – Дж. Вердерой [38].

ТЕОРЕМА 1.15. Пусть X – компакт, $m \geq 1$, $f \in BC^m(\mathbb{C})$ (т.е. $f_X \in C^m(X)$). Следующие условия эквивалентны:

(а) $\partial^\alpha(\bar{\partial}f(x)) = 0$ при всех $x \in X$ и α таких, что $|\alpha| \leq [m] - 1$;

(б) найдется последовательность $\{f_n\}$ функций класса $BC^m(\mathbb{C})$, голоморфных в окрестности X (каждая функция голоморфна в своей окрестности), такая, что $\|f - f_n\|_m \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (т.е. $f_X \in R^m(X)$).

ТЕОРЕМА 1.16. При $m \geq 1$ условие $R^m(X) = A^m(X)$ эквивалентно условию $\bar{X}^\circ = X$.

Особенной красотой и нетривиальностью доказательства в двух последних теоремах отличается случай $m = 1$, где применяется теорема У. Нгуена о сравнимости Lip_1 -аналитической емкости и меры Лебега в $\mathbb{C}$ (см. [39] и [38]).

1.5. Критерии C^m -приближаемости гармоническими функциями на компактах в $\mathbb{R}^N$ при $m > 0$

В этом разделе дается описание функций класса $R_\Delta^m(X)$ при $m > 0$. Для функции f класса $BC^m(\mathbb{R}^N)$ с компактным носителем при $m \in (0, 1)$ определим $\omega_f^m(\delta) = \sup_{t \in (0, \delta)} (\omega(f, t)t^{-m})$ (как и ранее), а при $m = 1 + s \in (1, 2)$ положим $\omega_f^m(\delta) = \sup_{t \in (0, \delta)} (\sup_{|\alpha|=1} \omega(\partial^\alpha f, t)t^{-s})$. Справедливо следующее утверждение, аналогичное теореме 1.7.

ТЕОРЕМА 1.17. Пусть $N \geq 2$ и $m \in (0, 1) \cup (1, 2)$. Для (вещественной) функции f класса $BC^m(\mathbb{R}^N)$ с компактным носителем следующие условия эквивалентны:

(а) существует последовательность $\{f_n\}$ функций $f_n \in BC^m(\mathbb{R}^N)$, гармонических в окрестности компакта X (каждая f_n гармонична в своей окрестности), такая, что $\|f - f_n\|_m \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (т.е. $f_X \in R_\Delta^m(X)$);

(б) найдутся $k \geq 1$ и функция $\omega(t) \searrow 0$, $t \searrow 0$, такие, что для любого открытого шара $B = B(a, \delta)$ в $\mathbb{R}^N$ с границей ∂B имеет место оценка

$$\left| \frac{1}{\sigma(\partial B)} \int_{\partial B} f(x) d\sigma_x - \frac{1}{m(B)} \int_B f(x) dm_x \right| \leq \omega(\delta) \delta^{2-N} \mathcal{M}^{N-2+m}(kB \setminus X), \quad (19)$$

где $kB = B(a, k\delta)$;

(с) оценка (19) выполнена при $k = 1$ и $\omega(\delta) = A_0 \omega_f^m(\delta)$, где $A_0 = A_0(N, m)$.

При любом $N \geq 2$ и $m = 1$ настоящий критерий перестает быть верным. Однако он становится верным после замены выражения $\mathcal{M}^{N-1}(kB \setminus X)$ на $\kappa_1(kB \setminus X)$.

Наиболее трудная часть этой теоремы – случай $m \in (0, 1)$ – установлена в работе [40]. Здесь основные идеи работы [12] (коротко упомянутые в разделе 1.2) реализуются в значительно упрощенной форме. Доказательство полностью конструктивно. Хотя случаи $m = 1$ и $m \in (1, 2)$ теоремы 1.17 формулируются впервые, их доказательства были известны П. В. Парамонову еще при работе над статьями [6] и [15]. Доказательство импликации (а) $\Rightarrow$ (б) и построение специального разбиения единицы проходят по схеме [15; § 4] (подробнее см. [12; леммы 2.3–2.6]). Доказательство импликации (б) $\Rightarrow$ (а) проходит аналогично [8; § 5] (при $m = 1$) и аналогично [26; с. 177–185] (при $m \in (1, 2)$). Отметим, что в настоящем контексте справедлив соответствующий аналог теоремы 1.5, однако в [40] он в полной мере не доказывается. Важно также упомянуть, что совсем недавно А. де Вилья и К. Толса [41] установили счетную субаддитивность емкости $\kappa_1(\cdot)$ в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, и ее *сравнимость* с емкостью

$$\kappa_1^+(E) = \sup_{\mu} \{ \|\mu\| : \mu * \Phi_N \in C_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N), \|\mu * \Phi_N\|'_1 \leq 1 \}, \quad (20)$$

где супремум берется по всем указанным неотрицательным борелевским мерам μ с носителем $\text{Supp}(\mu)$ в E . Последняя емкость используется в критериях C^1 -аппроксимации *субгармонических* функций гармоническими [15].

Заметим также, что теорема 1.7 безусловно останется справедливой и на плоскости с заменой выражения $\text{Cap}(kB \setminus X)$ на $\kappa_0(kB \setminus X)$ при надлежащем определении емкости $\kappa_0(\cdot)$ при $N = 2$. Однако, в связи со спецификой фундаментального решения (для лапласиана) и указанных емкостей при $N = 2$, доказательство этой теоремы нуждается в существенной корректировке и пока еще не опубликовано.

Соответствующие теореме 1.17 критерии приближаемости для *классов функций* получены в [30] (случай $0 < m < 1$), в [8] (случай $m = 1$) и в [26] (случай $1 < m < 2$).

ТЕОРЕМА 1.18. Пусть X – компакт в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. При $m \in (0, 2)$ следующие условия эквивалентны:

- 1) $R_{\Delta}^m(X) = A_{\Delta}^m(X)$;
- 2) для любой ограниченной области D в $\mathbb{R}^N$ справедливо равенство

$$\kappa_m(D \setminus X^\circ) = \kappa_m(D \setminus X);$$

- 3) найдутся постоянные $A_0 > 0$ и $k \geq 1$ такие, что для любого шара $B(x, \delta)$ выполняются оценки

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_*^{N-2+m}(B(x, \delta) \setminus X^\circ) &\leq A_0 \mathcal{M}^{N-2+m}(B(x, k\delta) \setminus X) & (m \neq 1), \\ \kappa_1(B(x, \delta) \setminus X^\circ) &\leq A_0 \kappa_1(B(x, k\delta) \setminus X) & (m = 1), \end{aligned}$$

причем в последних оценках можно всегда взять $k = 1$.

Следует сказать, что теорема 1.18 вытекает из теоремы 1.17, причем доказательство теоремы 1.17 (в [40]) при $m \in (0, 1)$ существенно проще соответствующего доказательства в [30] (см. также [42]), где используются двойственные аргументы, опирающиеся на спектральный синтез в пространствах Лизоркина–Трибеля.

Отметим также, что из результатов Толсы [5] вытекает, что емкости α и κ_1 в $\mathbb{R}^2$ сравнимы, поэтому условия выполнения равенств $R(X) = A(X)$ и $R_\Delta^1(X) = A_\Delta^1(X)$ в $\mathbb{R}^2$ идентичны.

Наконец, обсудим критерии C^m -приближаемости гармоническими функциями при $m \geq 2$. Эти критерии аналогичны соответствующим результатам для голоморфных аппроксимаций (см. теоремы 1.15 и 1.16) и получены теми же авторами.

ТЕОРЕМА 1.19 [36], [26]. Пусть X – компакт в $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) и $m \geq 2$. Пусть $f \in BC^m(\mathbb{R}^N)$ (т.е. $f_X \in C^m(X)$). Следующие условия эквивалентны:

- (а) $\partial^\alpha(\Delta f(x)) = 0$ при всех $x \in X$ и α таких, что $|\alpha| \leq [m] - 2$;
- (б) найдется последовательность $\{f_n\}$ функций класса $BC^m(\mathbb{R}^N)$, гармонических в окрестности X (каждая функция в своей окрестности), такая, что $\|f - f_n\|_m \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (т.е. $f_X \in R_\Delta^m(X)$).

ТЕОРЕМА 1.20 [36], [26]. При $N \geq 2$ и $m \geq 2$ условие $R_\Delta^m(X) = A_\Delta^m(X)$ эквивалентно условию $\hat{X}^\circ = X$.

1.6. C^m -аппроксимация голоморфными и гармоническими многочленами

В данном разделе мы обсудим только соответствующие критерии приближаемости для классов функций. Обозначим через $\hat{X}$ объединение компакта X в $\mathbb{R}^N$ со всеми ограниченными компонентами его дополнения. Основная идея доказательства результатов этого раздела основывается на применении известного метода Рунге [1] вывода полюсов голоморфных функций (соответствующая процедура для гармонических функций обоснована Уолшем в [43; лемма на с. 536]). Этот метод позволяет в случае $X = \hat{X}$ свести при всех $m \geq 0$ проблемы C^m -аппроксимации голоморфными (и при всех $N \geq 2$ и $m \geq 0$ гармоническими) многочленами к проблемам C^m -аппроксимации функциями, голоморфными (соответственно гармоническими) в окрестностях X , т.е. к проблемам совпадения классов $R^m(X)$ и $A^m(X)$ (соответственно $R_\Delta^m(X)$ и $A_\Delta^m(X)$), см. теоремы 1.14, 1.16, 1.18 и 1.20.

Следующий классический результат С. Н. Мергеляна во многом стал базой для дальнейших исследований.

ТЕОРЕМА 1.21 [44]. Пусть X – компакт в $\mathbb{C}$. Равенство $P^0(X) = A^0(X)$ справедливо тогда и только тогда, когда $X = \hat{X}$ (т.е. множество $\mathbb{C} \setminus X$ связно).

Необходимость условия $X = \hat{X}$ здесь тривиальна и распространяется на случаи C^m -аппроксимации многочленами комплексного переменного для всех $m \geq 0$, однако при $m > 0$ одного условия $X = \hat{X}$ уже не достаточно. Из теорем 1.14 и 1.16 непосредственно вытекают следующие метрико-топологические

критерии C^m -приближаемости (в дальнейшем мы не будем выписывать все эквивалентные условия, ограничиваясь только основными).

ТЕОРЕМА 1.22. Пусть X – компакт в $\mathbb{C}$, $m \in (0, 1)$. Для выполнения равенства $P^m(X) = A^m(X)$ необходимо и достаточно, чтобы компакт X имел связное дополнение и существовали постоянные $A_0 > 0$ и $k \geq 1$ такие, что для любого круга $B(a, \delta)$ справедлива оценка

$$\mathcal{M}_*^{1+m}(B(a, \delta) \setminus X^\circ) \leq A_0 \mathcal{M}^{1+m}(B(a, k\delta) \setminus X)$$

(последнее равенство тогда оказывается справедливым и при $k = 1$).

ТЕОРЕМА 1.23. Пусть X – компакт в $\mathbb{C}$, $m \geq 1$. Для выполнения равенства $P^m(X) = A^m(X)$ необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия $X = \hat{X}$ и $\overline{X^\circ} = X$.

Для C^m -гармонических приближений столь же простое сведение проблемы полиномиальных аппроксимаций к проблеме равенства пространств $R_\Delta^m(X)$ и $A_\Delta^m(X)$ (т. е. к теоремам 1.18 и 1.20) возможно только при $m \geq 1$ (см. [45; § 4]), поэтому сразу сформулируем соответствующие критерии для случаев $m \geq 1$.

ТЕОРЕМА 1.24. Пусть X – компакт в $\mathbb{R}^2$. Равенство $P_\Delta^1(X) = A_\Delta^1(X)$ справедливо тогда и только тогда, когда X имеет связное дополнение.

Этот аналог теоремы Мергеляна был вначале получен для так называемой “ослабленной” C^1 -нормы (см. [46]). Приведенный здесь критерий использует дополнительно результат Толсы [47] о сравнимости емкостей $\gamma(\cdot)$ и $\gamma_+(\cdot)$ в $\mathbb{R}^2$ (откуда, в частности, следует, что для любой ограниченной области D в $\mathbb{R}^2$ емкость $\kappa_1(D)$ сравнима с $\text{diam}(D)$).

При $N \geq 3$ одного условия $X = \hat{X}$ уже не достаточно, требуется дополнительное емкостное условие из теоремы 1.18.

ТЕОРЕМА 1.25. Пусть X – компакт в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. Равенство $P_\Delta^1(X) = A_\Delta^1(X)$ справедливо тогда и только тогда, когда $\mathbb{R}^N \setminus X$ связно, причем найдутся постоянные $A_0 > 0$ и $k \geq 1$ такие, что для любого шара $B(x, \delta)$ выполняется оценка

$$\kappa_1(B(x, \delta) \setminus X^\circ) \leq A_0 \kappa_1(B(x, k\delta) \setminus X)$$

(в которой можно всегда взять $k = 1$).

ТЕОРЕМА 1.26. Пусть X – компакт в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, и $m \in (1, 2)$. Для выполнения равенства $P_\Delta^m(X) = A_\Delta^m(X)$ необходимо и достаточно, чтобы компакт X имел связное дополнение и существовали постоянные $A_0 > 0$ и $k \geq 1$ такие, что для любого шара $B(x, \delta)$ справедлива оценка

$$\mathcal{M}_*^{N-2+m}(B(x, \delta) \setminus X^\circ) \leq A_0 \mathcal{M}^{N-2+m}(B(x, k\delta) \setminus X)$$

(последнее равенство оказывается справедливым и при $k = 1$).

Наконец, при $m \geq 2$ мы получаем чисто топологический критерий приближаемости.

ТЕОРЕМА 1.27. Пусть X – компакт в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. При $m \geq 2$ равенство $P_\Delta^m(X) = A_\Delta^m(X)$ справедливо тогда и только тогда, когда одновременно выполняются условия $X = \hat{X}$ и $\overline{X^\circ} = X$.

Нам осталось обсудить случаи $m \in [0, 1)$.

Пусть сначала $N = 2$. При $m \in [0, 1/2)$ справедлив следующий топологический критерий приближаемости.

ТЕОРЕМА 1.28. Пусть X – компакт в $\mathbb{R}^2$. При $m \in [0, 1/2)$ равенство $P_\Delta^m(X) = A_\Delta^m(X)$ выполняется тогда и только тогда, когда $\partial\hat{X} = \partial X$.

Компакты X в $\mathbb{R}^2$ с условием $\partial\hat{X} = \partial X$ называются *компактами Каратеодори*. При $m = 0$ последняя теорема является переформулировкой известной теоремы Уолша–Лебега [43; р. 503] (см. также [3; теорема 3.3]). При ее доказательстве по существу использовалось свойство регулярности (относительно задачи Дирихле для уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^2$) всякой односвязной ограниченной области на плоскости (полученное Лебегом [48]). Теорема 1.28 при $m \in (0, 1/2)$ доказана в [45], где вместо только что упомянутой теоремы Лебега применялась теорема Е. Джонстона [49] о регулярности всякой односвязной плоской области в пространствах Lip_m при $m \in (0, 1/2)$.

На случай $m \in (1/2, 1)$ ($N = 2$) утверждение теоремы 1.28 не распространяется. Точнее, имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.29 [45]. Пусть Γ – замкнутая жорданова кривая на плоскости, состоящая из конечного числа C^1 -гладких дуг. Для $x \in \Gamma$ пусть θ_x – величина внешнего угла к области $\hat{\Gamma}^\circ$ в точке x . Положим $\theta_\Gamma = \min_{x \in \Gamma} \theta_x$. Тогда

- (а) при $m < \pi/(2\pi - \theta_\Gamma)$ равенство $C^m(\Gamma) = P_\Delta^m(\Gamma)$ справедливо;
- (б) если $m > \pi/(2\pi - \theta_\Gamma)$, $\tau > 0$ и при этом Γ состоит из конечного числа $C^{1+\tau}$ -гладких дуг (дуг Ляпунова), то $C^m(\Gamma) \neq P_\Delta^m(\Gamma)$.

Таким образом, случаи $m \in [1/2, 1)$ при $N = 2$ остаются неизученными. По крайней мере, чисто топологических критериев здесь не существует. При $N \geq 3$ аналогичная ситуация возникает уже при $m \in (0, 1)$. Здесь мы можем пока сформулировать только упомянутое выше достаточное условие приближаемости (верное при всех рассматриваемых N и m): если $\hat{X} = X$, то равенства $P_\Delta^m(X) = A_\Delta^m(X)$ и $R_\Delta^m(X) = A_\Delta^m(X)$ эквивалентны.

В завершение, нам остается обсудить случай ($N \geq 3$, $m = 0$), исследованный С. Гардинером [50; разд. 1.10].

ТЕОРЕМА 1.30. Пусть X – компакт в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. Равенство $P_\Delta^0(X) = A_\Delta^0(X)$ выполняется тогда и только тогда, когда $\mathbb{R}^N \setminus \hat{X}$ и $\mathbb{R}^N \setminus X^\circ$ разрежены в одних и тех же точках компакта X .

Глава 2. Задачи аппроксимации для полианалитических функций

2.1. Введение

Теория полианалитических функций возникла как самостоятельное направление комплексного анализа в первой половине XX века в связи с разработкой математических моделей плоской теории упругости (см., например, [51] и цитированную там литературу, а также [52]).

Напомним понятие полианалитической функции. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ – открытое множество. Функция f называется *полианалитической порядка n* (или, короче, *n -аналитической*) в U , если она имеет вид

$$f(z) = \bar{z}^{n-1} f_{n-1}(z) + \cdots + \bar{z} f_1(z) + f_0(z), \quad (21)$$

где n – натуральное число, а $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ – голоморфные функции в U . В этом случае функции $f_0, \dots, f_{n-1}$ называются *голоморфными компонентами* функции f . Пусть $Hol_n(U)$ – это пространство всех n -аналитических функций в U . Заметим, что пространство $Hol_n(U)$ состоит из всех непрерывных на U функций f , удовлетворяющих (в смысле теории обобщенных функций) эллиптическому дифференциальному уравнению

$$\bar{\partial}^n f = 0,$$

где $\bar{\partial} = \partial/\partial \bar{z}$ – оператор Коши–Римана.

Далее, функция f называется *n -аналитической мероморфной* в U , если она имеет вид (21), где $f_0, \dots, f_{n-1}$ (*мероморфные компоненты* функции f) – мероморфные функции в U . Заметим, что n -аналитическая мероморфная функция может быть непрерывной в своей особой точке. Так, 3-аналитическая мероморфная функция

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{z}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0, \end{cases}$$

непрерывна в точке $z = 0$.

Кроме того, *n -аналитическим многочленом* мы будем называть n -аналитическую функцию f , все голоморфные компоненты которой являются многочленами комплексного переменного, а *n -аналитической рациональной функцией* – такую n -аналитическую мероморфную функцию, все мероморфные компоненты которой являются рациональными функциями комплексного переменного. Заметим, что n -аналитическая рациональная функция не определяется (при $n \geq 2$) как отношение двух n -аналитических многочленов. Обозначим через $\mathcal{P}_n$ и $\mathcal{R}_n$ пространства всех n -аналитических многочленов и n -аналитических рациональных функций соответственно, а если X – компакт в $\mathbb{C}$, то пусть $\mathcal{R}_n(X)$ – это пространство, состоящее из всех функций $f \in \mathcal{R}_n$ таких, что полюсы всех рациональных компонент функции f лежат вне X .

Основы теории полианалитических функций, а также история их изучения достаточно подробно описаны в книге [52] (см. также цитированную там литературу). Среди недавних результатов можно отметить работы [53]–[55], в которых изучается граничное поведение голоморфных компонент полианалитических функций, и работы [56], [57], в которых рассматриваются краевые задачи типа Дирихле для полианалитических функций. Значительный интерес в теории полианалитических функций представляют задачи равномерной и C^m -аппроксимации функций полианалитическими многочленами и рациональными функциями на компактах в $\mathbb{C}$.

Основное внимание в настоящей главе будет уделено задачам *равномерной аппроксимации* для полианалитических функций порядка $n \geq 2$. Случай $n = 1$ (т. е. случай аппроксимации рациональными функциями и многочленами комплексного переменного) был подробно рассмотрен в разделах 1.1 и 1.6 выше.

Пусть $n \geq 2$ – фиксированное целое число, а X – компакт в $\mathbb{C}$. Определим

$$R_n(X) := \{f \in C(X) : \forall \varepsilon > 0 \exists g \in \mathcal{R}_n(X) : \|f - g\|_X < \varepsilon\}$$

– пространство всех функций, равномерно на X приближаемых n -аналитическими рациональными функциями с полюсами вне X , и

$$P_n(X) := \{f \in C(X) : \forall \varepsilon > 0 \exists p \in \mathcal{P}_n : \|f - p\|_X < \varepsilon\}$$

– пространство всех функций, равномерно на X приближаемых n -аналитическими многочленами. При этом

$$P_n(X) \subset R_n(X) \subset A_n(X),$$

где $A_n(X) := C(X) \cap \text{Hol}_n(X^\circ)$.

Интересующие нас задачи равномерной аппроксимации для полианалитических функций формулируются следующим образом.

ЗАДАЧА 2.1. Пусть X – компакт в $\mathbb{C}$, а $n \geq 2$ – натуральное число.

1. Найти необходимые и достаточные условия на X , при которых

$$R_n(X) = A_n(X). \quad (22)$$

2. Найти необходимые и достаточные условия на X , при которых

$$P_n(X) = A_n(X). \quad (23)$$

При изучении этой задачи нам потребуется еще одно функциональное пространство. Для компактов X и Y в $\mathbb{C}$ с условием $X \subseteq Y$ определим

$$R_n(X, Y) := \{f \in C(X) : \forall \varepsilon > 0 \exists g \in \mathcal{R}_n(Y) : \|f - g\|_X < \varepsilon\}$$

– пространство функций, равномерно на X приближаемых n -аналитическими рациональными функциями с полюсами вне Y (типичным примером такой ситуации является пространство $R_n(\partial\Omega, \bar{\Omega})$, где Ω – ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}$).

Кратко обсудим структуру этой главы. Задача 2.1 обсуждается в разделе 2.2 (в случае аппроксимации полианалитическими рациональными функциями) и в разделе 2.3 (в случае аппроксимации полианалитическими многочленами). В задаче 2.1.2 естественно возникает специальная аналитическая характеристика плоских односвязных областей – понятие неванлинновской области. Это понятие обсуждается в разделе 2.4. В разделе 2.5 рассматривается взаимосвязь задачи равномерной приближаемости функций бианалитическими (т.е. полианалитическими порядка $n = 2$) многочленами и задачи Дирихле для бианалитических функций. Раздел 2.6 посвящен задачам C^m -приближаемости функций полианалитическими функциями и многочленами при $m > 0$.

Всюду в дальнейшем пусть $\mathbb{D}$ – это единичный круг в $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}_e := \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$, а $\mathbb{T}$ – единичная окружность. Как обычно, под контуром понимается замкнутая жорданова кривая в $\mathbb{C}$ (не обязательно спрямляемая), а под мерой – конечная комплекснозначная борелевская мера. Если Γ – контур в $\mathbb{C}$, то $D(\Gamma)$ – область, им ограниченная. Пусть также $\bar{z}(z) := \bar{z}$.

2.2. Равномерная аппроксимация полианалитическими рациональными функциями

Задача 2.1.1 интересует исследователей начиная с 1970-х годов. Тогда она формулировалась в несколько более общем виде – как задача о равномерной аппроксимации рациональными модулями, т. е. функциями вида

$$f_0(z) + g_1(z)f_1(z) + \dots + g_m(z)f_m(z),$$

где $f_0, f_1, \dots, f_m \in \mathcal{R}_1(X)$, а $g_1, \dots, g_m$ – заданные непрерывные функции, обладающие определенными специальными свойствами. Случай аппроксимации полианалитическими рациональными функциями возникает при $g_k = \bar{z}^k$, $k = 1, \dots, m$. Одной из первых работ, в которых рассматривались задачи равномерной аппроксимации для рациональных модулей, была статья А. Г. О’Фаррелла [58]. Затем (в 1980-х годах) последовали работы Дж. Л.-М. Вонга [59]–[62], Т. Трента и Дж. Л.-М. Вонга [63], [64], Дж. Дж. Кармоны [65], [66] и других авторов. В этих работах получены, в частности, следующие достаточные условия на компакт X , при которых имеет место равенство (22).

1) $X^\circ = \emptyset$ (см. [63; теорема 1]).

2) Множество $\mathbb{C} \setminus X$ имеет конечное число связных компонент, см. [66; теорема 2]. Это условие (практически без изменения приведенного в работе [66] доказательства) можно заменить на любое из следующих условий: нижняя грань диаметров всех связных компонент множества $\mathbb{C} \setminus X$ положительна; или каждая граничная точка компакта X является граничной точкой для некоторой связной компоненты множества $\mathbb{C} \setminus X$; или X является компактом Каратеодори. Более того, это условие можно заменить на следующее условие емкостного характера:

$$\gamma(B(z, r) \setminus X) \geq Cr,$$

для некоторой положительной константы C , для всех $z \in \partial X$ и для всех достаточно малых $r > 0$.

3) Множество $\partial_I X$ (определение см. перед теоремой 1.6) не более чем счетно (см. [62; замечание 1]).

Окончательное решение задачи 2.1.1 о равномерной аппроксимации функций полианалитическими рациональными функциями было недавно получено в работах [67], [68]. Так, имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.1. *Для любого компакта $X \subset \mathbb{C}$ и для любого целого $n \geq 2$ имеет место равенство $R_n(X) = A_n(X)$.*

Этот критерий естественно рассматривать как непосредственный аналог емкостного критерия А. Г. Витушкина равномерной приближаемости рациональным функциями. В самом деле, естественным образом определенная в задаче 2.1.1 емкость тривиальна в том смысле, что емкость любого непустого ограниченного множества ограничена сверху и снизу двумя абсолютными константами. Отметим также, что при $n = 2$ этот результат был сформулирован в качестве гипотезы в работе Дж. Вердеры [69] (в которой было доказано, что на любом компакте $X \subset \mathbb{C}$ любая функция класса $A_2(X)$, удовлетворяющая дополнительно условию Дини, может быть равномерно на X приближена функцией класса $\mathcal{R}_2(X)$).

Отметим также, что задачи аппроксимации рациональными модулями рассматривались не только для равномерной нормы, но и в липшицевых, соболевских и интегральных нормах (см., в частности, [70]–[75]).

2.3. Равномерная аппроксимация полианалитическими многочленами

Изучение задачи 2.1.2 началось в 1980-х годах. Сразу отметим, что эта задача до сих пор остается нерешенной в общем случае. Первым результатом, полученным в задаче 2.1.2, было следующее утверждение, которое непосредственно вытекает из [66; теорема 2]: *если $X \subset \mathbb{C}$ – компакт со связным дополнением, а $n \geq 2$ – целое число, то $P_n(X) = A_n(X)$* . Отметим еще работу [76], в которой задача 2.1.2 также рассматривалась в случае компактов со связным дополнением.

Таким образом, условие теоремы Мергеляна остается достаточным условием и в случае аппроксимации полианалитическими многочленами. Однако, как было показано в [77], даже в простейшем случае, когда компакт X имеет несвязное дополнение, а именно в случае, когда X – это спрямляемый контур в $\mathbb{C}$, решение задачи 2.1.2 формулируется в терминах специальных аналитических свойств компакта X . В частности, если X – произвольная окружность в $\mathbb{C}$, то равенство (23) не выполняется, но это равенство выполняется (при любом целом $n \geq 2$) для любой замкнутой жордановой ломаной и для любого эллипса (не являющегося окружностью) X в $\mathbb{C}$. При этом задача 2.1.2 – это первая задача в рассматриваемой тематике, в которой возникли условия приближаемости, выражаемые в терминах аналитических (но не емкостных) свойств компактов, на которых рассматривается аппроксимация (напомним, что критерии равномерной и C^m -приближаемости функций голоморфными и гармоническими многочленами формулируются в терминах топологических, метрических и емкостных свойств соответствующих компактов).

В [78; § 2] задача 2.1.2 полностью решена в случае, когда X является *компактом Каратеодори*. Для того чтобы сформулировать соответствующий критерий приближаемости, нам потребуется понятие *неванлинновской области* – специальная аналитическая характеристика плоских односвязных областей, которая естественно возникла в рассматриваемой задаче (см. [77], [78]).

Напомним, что символом $H^\infty(U)$, где U – открытое множество в $\mathbb{C}$, обозначается пространство всех голоморфных и ограниченных функций в U . Напомним также, что, согласно классической теореме Фату, для любой функции f класса $H^\infty = H^\infty(\mathbb{D})$ и для почти всех точек $\xi \in \mathbb{T}$ существуют конечные угловые предельные (граничные) значения $f(\xi)$ функции f в точке ξ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 [78; определение 2.1]. Ограниченная односвязная область Ω в $\mathbb{C}$ называется *неванлинновской*, если существуют две функции $u, v \in H^\infty(\Omega)$ (причем $v \not\equiv 0$) такие, что равенство

$$\bar{\zeta} = \frac{u(\zeta)}{v(\zeta)} \quad (24)$$

выполняется на $\partial\Omega$ почти всюду в смысле конформного отображения. Это означает, что для почти всех точек $\xi \in \mathbb{T}$ имеет место равенство *угловых граничных значений*

$$\overline{\varphi(\xi)} = \frac{(u \circ \varphi)(\xi)}{(v \circ \varphi)(\xi)},$$

где φ – некоторое конформное отображение $\mathbb{D}$ на Ω . Совокупность всех неванлинновских областей обозначим символом ND .

Определение неванлинновской области корректно в том смысле, что оно не зависит от выбора φ . В силу граничной теоремы единственности Лузина–Привалова, отношение u/v определено в Ω (для неванлинновской области Ω) единственным образом. Более того, без ограничения общности можно считать, что функции u и v из определения неванлинновской области не имеют общих нулей в Ω . Соответствующее отношение u/v удобно назвать ND -функцией для (неванлинновской) области Ω .

Заметим, что если область $\Omega \in ND$ – это жорданова область со спрямляемой границей, то равенство (24) может пониматься непосредственно как равенство угловых граничных значений почти всюду на $\partial\Omega$. Равенство (24) можно аналогично понимать и на любой спрямляемой жордановой дуге $\gamma \subset \partial\Omega$, обладающей тем свойством, что никакая точка $a \in \gamma$ не является предельной точкой для множества $\partial\Omega \setminus \gamma$.

Непосредственно проверяется, что единичный круг $\mathbb{D}$ является неванлинновской областью, а любая область, ограниченная невырожденным (т. е. не являющимся окружностью) эллипсом, – нет. Свойства и другие примеры неванлинновских областей будут подробно обсуждены ниже в разделе 2.4.

Напомним, что ограниченная область Ω в $\mathbb{C}$ называется областью Каратеодори, если $\partial\Omega = \partial\Omega_\infty$, где Ω_∞ – это неограниченная связная компонента множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Omega}$; при этом всякая область Каратеодори Ω является односвязной и обладает свойством $\Omega = (\overline{\Omega})^\circ$. Имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.2 [78; теорема 2.2]. 1) Пусть ограниченная односвязная область Ω является неванлинновской. Тогда $R_n(\partial\Omega, \overline{\Omega}) \neq C(\partial\Omega)$ для любого целого числа $n \geq 1$.

2) Если Ω – область Каратеодори в $\mathbb{C}$, а $n \geq 2$ – целое число, то $C(\partial\Omega) = R_n(\partial\Omega, \overline{\Omega})$ тогда и только тогда, когда Ω не является неванлинновской областью.

3) Пусть X – компакт Каратеодори в $\mathbb{C}$, а $n \geq 2$ – целое число. Тогда $A_n(X) = P_n(X)$, если и только если каждая ограниченная компонента множества $\mathbb{C} \setminus X$ не является неванлинновской областью.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Пусть $\Omega \in ND$, а функции $u, v \in H^\infty(\Omega)$ взяты из определения 2.1, и пусть точка $z_0 \in \Omega$ выбрана так, что $0 < |u(z_0) - \bar{z}_0 v(z_0)|$. С использованием принципа максимума модуля для голоморфных функций непосредственно проверяется, что

$$\left. \frac{(\bar{z} - \bar{z}_0)^{n-1}}{z - z_0} \right|_{\partial\Omega} \notin R_n(\partial\Omega, \overline{\Omega}),$$

откуда вытекает первое утверждение теоремы и соответствующая импликация во втором утверждении.

Доказательство обратной импликации во втором утверждении мы приведем более подробно, так как из соответствующих рассуждений будет видно, как в рассматриваемой задаче возникает понятие неванлинновской области. Пусть $C(\partial\Omega) \neq R_n(\partial\Omega, \bar{\Omega})$, тогда $C(\partial\Omega) \neq R_2(\partial\Omega, \bar{\Omega})$. Поэтому найдется ненулевая мера μ на $\partial\Omega$ такая, что $\mu \perp R(\partial\Omega, \bar{\Omega})$ и $\bar{\mu} \perp R_1(\partial\Omega, \bar{\Omega})$.

Пусть φ – некоторое конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на Ω , а ψ – соответствующее обратное отображение. Пусть $\mathcal{F}(\varphi)$ – множество Фату функции φ (т.е. множество $\mathcal{F}(\varphi)$ состоит из всех тех точек $\xi \in \mathbb{T}$, в которых существуют угловые граничные значения $\varphi(\xi)$) и пусть $\partial_a\Omega$ – это множество всех тех точек $\zeta \in \partial\Omega$, которые являются достижимыми из Ω посредством некоторой кривой (достижимая часть границы области Ω). Можно показать, что

$$\partial_a\Omega := \{\varphi(\xi) : \xi \in \mathcal{F}(\varphi)\},$$

а также что множества $\mathcal{F}(\varphi)$ и $\partial_a\Omega$ являются борелевскими. В силу [79; следствие 1] функции φ и ψ продолжаются до борелевских функций (обозначаемых также символами φ и ψ) на $\mathbb{D} \cup \mathcal{F}(\varphi)$ и на $\Omega \cup \partial_a\Omega$ соответственно, причем $\psi(\varphi(\xi)) = \xi$ и $\varphi(\psi(\zeta)) = \zeta$ для любых $\xi \in \mathcal{F}(\varphi)$ и $\zeta \in \partial_a\Omega$.

Пусть ω – мера на $\partial\Omega$, определенная соотношением $\omega := \varphi(d\xi)$. Как показано в [79; теорема 2], меры μ и $\bar{\mu}$ имеют вид $\mu = (f \circ \psi)\omega$ и $\bar{\mu} = (g \circ \psi)\omega$ соответственно, где f и g – некоторые функции класса Харди H^1 в круге $\mathbb{D}$. Из этого вытекает, что для почти всех $\xi \in \mathbb{T}$ имеет место равенство угловых граничных значений

$$\overline{\varphi(\xi)} = \frac{g(\xi)}{f(\xi)},$$

откуда следует (остается представить отношение f/g в виде отношения двух функций класса H^∞ и перейти от функций в круге $\mathbb{D}$ к соответствующим функциям в Ω), что область Ω является неванлинновской.

Далее, из второго утверждения теоремы непосредственно вытекает необходимость условия третьего утверждения. Достаточность этого условия вытекает из того, что в случае компактов Каратеодори любая мера μ на X , ортогональная пространству $\mathcal{P}_n$, будет ортогональна пространству $\mathcal{R}_n(X)$ (после этого остается воспользоваться равенством $R_n(X) = A_n(X)$). Детали соответствующих рассуждений приведены в доказательстве второго утверждения теоремы 2.2 в [78].

В случае, когда компакт X , на котором рассматривается аппроксимация, не является компактом Каратеодори, задача 2.1.2 оказалась существенно сложнее и остается нерешенной вплоть до настоящего времени. Приведем одно необходимое и достаточное условие приближаемости в этой задаче, справедливое для компактов общего вида.

ТЕОРЕМА 2.3 [80; теорема 3]. *Равенство $A_n(X) = P_n(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда равенство $A_n(X \cap \bar{\Omega}) = R_n(X \cap \bar{\Omega}, \bar{\Omega})$ выполняется для любой связной компоненты множества $(\hat{X})^\circ$, не содержащейся в X .*

Можно сказать, что утверждение теоремы 2.3 носит локализационный характер, хотя, безусловно, задача о совпадении пространств $A_n(X)$ и $P_n(X)$ не

локальна в стандартном смысле (см. [3; гл. 2, § 10]). Отметим также, что утверждение теоремы 2.3 имеет редуktивный характер, так как вопрос о возможности аппроксимации n -аналитическими многочленами на данном компакте $X \subset \mathbb{C}$ сводится в ней к вопросу о возможности аппроксимации n -аналитическими рациональными функциями со специальным образом локализованными полюсами на компактах вида $X \cup \bar{\Omega}$, которые могут иметь более простую структуру, чем исходный компакт X .

При использовании теоремы 2.3 важно уметь отвечать на следующий вопрос: *пусть Ω – область Каратеодори, а X – компактное подмножество в Ω с условием $A_n(X) = R_n(X, \bar{\Omega})$; при каких дополнительных условиях справедливо равенство $A_n(X \cup \partial\Omega) = R_n(X \cup \partial\Omega, \bar{\Omega})$?*

Ряд необходимых и достаточных условий приближаемости в этом случае был получен в [78; теорема 4.3] и [79; теорема 3] в случае, когда X компактно принадлежит Ω , а также в [80; теорема 4 и следствие 1] и [79; теорема 4] в случае, когда $X \cap \partial\Omega \neq \emptyset$. Все эти результаты формулируются в терминах подходящих аналитических характеристик области Ω , являющихся специальными модификациями понятия неванлинновской области (таких, например, как понятие локально неванлинновской области, введенное в [78; определение 4.2] и [79; определение 2], и понятие I -неванлинновской области, введенное в [80; определение 4]).

Приведем определение локально неванлинновской области и сформулируем один из упомянутых результатов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2 [79; определение 2]. Ограниченная односвязная область Ω в $\mathbb{C}$ называется *локально неванлинновской*, если найдутся компакт $\Sigma \subset \Omega$ и две функции $u, v \in H^\infty(\Omega \setminus \Sigma)$, $v \not\equiv 0$, такие, что равенство (24) выполняется почти всюду на $\partial\Omega$ в смысле конформного отображения.

Например, область $G_{a,b}$, ограниченная эллипсом $\Gamma_{a,b}$ с полуосями $a > b > 0$ и с фокусами в точках ± 1 , является локально неванлинновской, но не неванлинновской областью, что легко проверяется непосредственно.

Класс всех локально неванлинновских областей обозначим символом LND .

Так как для области $\Omega \in LND$ существует много различных способов определить требуемый компакт Σ , то для того, чтобы показать, какие Σ , u , v мы имеем в виду, работая с Ω , мы будем использовать обозначение $\Omega \sim [\Sigma, u, v]$.

ТЕОРЕМА 2.4 [78; теорема 4.3], [79; теорема 3]. Пусть $n \geq 2$ – натуральное число, $\Omega \notin ND$ – область Каратеодори, K – компакт в Ω с условием (23), а $X = K \cup \partial\Omega$.

- 1) Если $\Omega \notin LND$, то $R_n(X, \bar{\Omega}) = A_n(X)$.
- 2) Пусть $\Omega \in LND$ и $\Omega \sim [\Sigma, u, v]$. Если функция u/v не может быть продолжена мероморфно из $\Omega \setminus (\widehat{K \cup \Sigma})$ на $\Omega \setminus \widehat{K}$, то $R_n(X, \bar{\Omega}) = A_n(X)$.

Если область Ω в теореме 2.4 такова, что множество $\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$ связно, то равенство $R_n(X, \bar{\Omega}) = A_n(X)$ можно заменить на равенство $P_n(X) = A_n(X)$.

Отметим, что в [78; пример 4.6] показано, что условие на компакт X , достаточное для выполнения равенства $R_n(X, \bar{\Omega}) = A_n(X)$, которое приведено во втором утверждении теоремы 2.4, не является необходимым. Конкретно,

равенство $P_n(X) = A_n(X)$ может выполняться для $X = K \cup \partial G$, где G – специально подобранная жорданова область с аналитической границей, функция Шварца которой (см. раздел 2.4 ниже) голоморфна в $G \setminus K$, $K = \widehat{K}$, $K^\circ = \emptyset$.

Приведем несколько простых примеров, вытекающих из упомянутых результатов работ [79] и [80]. Пусть $K_1 := [-a, a]$, $K_2 := [-ib, ib]$, $K_3 = \overline{G}_{a,b} \cap \{\operatorname{Im} z \geq b/2\}$, а K_4 – замкнутая жорданова ломаная, лежащая в $G_{a,b}$, такая, что $[-1, 1] \subset D(K_4)$. Тогда имеют место следующие утверждения:

1. $P_2(K_1 \cup \Gamma_{a,b}) \neq C(K_1 \cup \Gamma_{a,b})$;
2. $P_2(K_2 \cup \Gamma_{a,b}) = C(K_2 \cup \Gamma_{a,b})$;
3. $P_n(K_3 \cup \Gamma_{a,b}) = A_n(K_3 \cup \Gamma_{a,b})$ для любого целого $n \geq 2$;
4. $P_3(K_4 \cup \Gamma_{a,b}) = C(K_4 \cup \Gamma_{a,b})$.

Однако неизвестно, верно ли равенство $P_2(K_4 \cup \Gamma_{a,b}) = C(K_4 \cup \Gamma_{a,b})$.

Заметим, что условия приближаемости, приведенные в теоремах 2.2, 2.3 и 2.4, одинаковы для всех значений порядка полианалитичности $n \geq 2$. Однако в случае компактов, не являющихся компактами Каратеодори, в задаче 2.1.2 возникают условия приближаемости, зависящие от порядка полианалитичности. Так, в [78; пример 4.5] приведен пример компакта Y , для которого $P_3(Y) = C(Y) \neq P_2(Y)$ (этот компакт является объединением эллипса $\Gamma_{a,b}$ и некоторой специально подобранной аналитической кривой, лежащей в области $G_{a,b}$ и соединяющей точки ± 1 – фокусы эллипса $\Gamma_{a,b}$). Более того, имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.5 [81; теорема 1]. *Для каждого $n \geq 1$ существует компакт $X_n \subset \mathbb{C}$ такой, что $P_{2n}(X_n) = C(X_n) \neq P_n(X_n)$.*

Компакт X_n , существование которого утверждается в теореме 2.5, является объединением n штук софокусных эллипсов. Представляется весьма правдоподобным, что для этого компакта должно иметь место равенство $P_{n+1}(X_n) = C(X_n)$, доказать которое до сих пор не удается.

Таким образом, окончательное решение задачи 2.1.2 (которое все еще не найдено) должно учитывать не только специальные аналитические свойства компактов, на которых рассматривается аппроксимация, но и зависимость условий приближаемости от порядка полианалитичности, характер которой до конца до сих пор не ясен. Некоторые утверждения, позволяющие понять возможный характер этой зависимости, получены в работе [82].

В завершение этого раздела отметим, что доказательства всех приведенных результатов о равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами основаны на использовании двойственных методов (связанных с использованием специальных свойств мер, ортогональных к пространствам полианалитических рациональных функций). В связи с этим представляется весьма интересным найти конструктивное доказательство, например, второго утверждения теоремы 2.2 хотя бы в случае, когда Ω – жорданова область со спрямляемой (или даже аналитической) границей.

Отметим также, что аналитические характеристики плоских односвязных областей, подобные понятию неванлинновской области, возникли также в задаче о равномерной приближаемости функций полиномиальными решениями общих однородных эллиптических, но не сильно эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка на компактах в $\mathbb{R}^2$. Упомянем в связи с этой задачей работу А. Б. Зайцева [83].

2.4. Неванлинновские области и их свойства

Рассмотрим подробно понятие неванлинновской области, введенное в предыдущем разделе. Начнем с конкретных примеров. Простые вычисления показывают, что любой круг $B(a, r)$ принадлежит ND , но $G_{a,b}$ не принадлежит ND (напомним, что $G_{a,b}$ – это область, ограниченная эллипсом $G_{a,b}$, см. текст после определения 2.2). Далее, пусть $G'_{a,b}$ – это овал Ньюмана, т. е. область, ограниченная образом эллипса $G_{a,b}$ при отображении $z \mapsto 1/z$. Тогда $G'_{a,b} \in ND$. Наконец, области, ограниченные кривыми Ламе (т. е. кривыми, заданными уравнениями вида $(x/a)^{2k} + (y/b)^{2k} = 1$, где $a \geq b > 0$ и $k \geq 2$ – целое число), не являются неванлинновскими.

Если Ω – ограниченная односвязная область с границей, содержащей две (достижимые из Ω) аналитически независимые аналитические дуги, то из теоремы единственности Лузина–Привалова вытекает, что $\Omega \notin ND$ (см. также [77; предложение 2]). Примерами таких областей являются, в частности, области, ограниченные произвольными многоугольниками.

Пусть G – жорданова область с аналитической границей Γ и пусть S – функция Шварца контура Γ . Напомним, что это означает, что Γ – это образ окружности $\mathbb{T}$ при отображении, конформном в некоторой ее окрестности, а S – это такая голоморфная в некоторой области $U \supset \Gamma$ функция, что $\Gamma = \{z \in U : \bar{z} = S(z)\}$. Ясно, что область G является неванлинновской тогда и только тогда, когда S – это мероморфная функция в G (в этом случае S , очевидно, будет ND -функцией области G). В [84; гл. 14] доказано, что функция Шварца S аналитического контура $\Gamma = \partial G$ является мероморфной в G тогда и только тогда, когда конформное отображение φ единичного круга $\mathbb{D}$ на G является рациональной функцией с полюсами вне $\mathbb{D}$.

Таким образом, *среди жордановых областей с аналитическими границами неванлинновскими областями будут образы единичного круга при рациональных конформных отображениях и только они.*

Отметим также, что свойство области быть неванлинновской является весьма ограничительным в следующем смысле (см. [79; теорема 5]). Пусть Ω – неванлинновская область, а $\mathfrak{L}$ – плоская алгебраическая кривая. Если найдется дуга $\gamma \subset \mathfrak{L} \cap \partial\Omega$ такая, что $\omega(\gamma) > 0$ (символом $\omega(\gamma)$ обозначена гармоническая мера дуги γ , вычисленная относительно Ω и некоторой точки $z \in \Omega$), то $\partial\Omega \subset \mathfrak{L}$.

Далее, как показано в [78; предложение 3.3 и пример 5.8], если $\Omega \in ND$ – жорданова область со спрямляемой границей Γ , то для всех допустимых функций $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ из определения 2.1 функция $u - \bar{z}v$ непрерывно продолжается из области Ω на $\bar{\Omega}$, причем $u - \bar{z}v = 0$ на Γ , однако существуют жордановы неванлинновские области Ω со спрямляемыми границами такие, что ни одна из соответствующих функций $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ не может быть выбрана принадлежащей пространству $A(\bar{\Omega})$.

Неванлинновские области и конформные отображения. Важной задачей является описание неванлинновских областей в терминах конформных отображений круга $\mathbb{D}$ на рассматриваемую область. Оказывается, что такое описание может быть получено в терминах псевдопродолжения голоморфных ограниченных функций. Напомним (см. [85; определение 2]), что функция

$f \in H^\infty$ допускает псевдопродолжение неванлинновского типа, если существуют две функции $f_1, f_2 \in H^\infty(\mathbb{D}_e)$, $f_2 \not\equiv 0$, такие, что для почти всех $\xi \in \mathbb{T}$ выполняется равенство $f(\xi) = f_1(\xi)/f_2(\xi)$ угловых предельных значений, где $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ – предельные значения функций f_1 и f_2 из $\mathbb{D}_e$. Отметим, что предложенное понятие псевдопродолжения неванлинновского типа является частным случаем общего понятия псевдопродолжения, введенного в работе [86] (см. также [87; определение 2.1.2]).

Кроме того, для описания неванлинновских областей в терминах конформных отображений нам понадобится понятие *модельного пространства*. Напомним это понятие. Пусть Θ – внутренняя функция (т.е. функция класса H^∞ такая, что $|\Theta(\xi)| = 1$ для почти всех $\xi \in \mathbb{T}$), и пусть пространство $K_\Theta \subset H^2$ (где H^2 – это стандартное пространство Харди в круге $\mathbb{D}$) определено следующим образом:

$$K_\Theta = H^2 \ominus \Theta H^2.$$

В силу классической теоремы Берлинга подпространства $K_\Theta \subset H^2$ и только они являются инвариантными подпространствами для оператора обратного сдвига $\mathcal{B}: f \mapsto (f(z) - f(0))/z$ в H^2 (см., например, [88; лекция I, п. 4]). Пространства K_Θ называют *модельными подпространствами*. Соответствующий термин был предложен Н. К. Никольским (см., например, [88; лекция VIII]) и объясняется выдающейся ролью, которую эти пространства играют в функциональной модели Нады–Фойаша. Пространства K_Θ часто называют также **-инвариантными подпространствами*.

Имеет место следующее утверждение, объединяющее результаты [78; предложение 3.1], [85; теорема 1].

ТЕОРЕМА 2.6. 1) *Ограниченная односвязная область $\Omega \subset \mathbb{C}$ является неванлинновской тогда и только тогда, когда конформное отображение φ круга $\mathbb{D}$ на Ω допускает псевдопродолжение неванлинновского типа.*

2) *Пусть Θ – внутренняя функция. Тогда любая ограниченная однолистная функция из пространства K_Θ конформно отображает единичный круг $\mathbb{D}$ на некоторую неванлинновскую область. Обратно, если однолистная функция $\varphi \in H^\infty$ отображает $\mathbb{D}$ конформно на некоторую неванлинновскую область, то существует внутренняя функция Θ такая, что $\varphi \in K_\Theta$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Omega \in ND$, а функции $u, v \in H^\infty(\Omega)$ взяты из определения 2.1. В этом случае непосредственно проверяется, что функции $\overline{(u \circ \varphi)(1/\bar{w})}$ и $\overline{(v \circ \varphi)(1/\bar{w})}$ принадлежат пространству $H^\infty(\mathbb{D}_e)$ и определяют псевдопродолжение неванлинновского типа для функции φ . Обратно, если φ допускает псевдопродолжение неванлинновского типа, а функции $f_1, f_2 \in H^\infty(\mathbb{D}_e)$ взяты из соответствующего определения (см. выше), то функции $u = h_1 \circ \varphi^{-1}$ и $v = h_2 \circ \varphi^{-1}$, где $h_s(w) = \overline{f_s(1/\bar{w})}$ при $w \in \mathbb{D}$, $s = 1, 2$, принадлежат классу $H^\infty(\Omega)$ и удовлетворяют (24).

Перейдем ко второму утверждению теоремы. Напомним, что пространство K_Θ – это инвариантное подпространство для оператора $\mathcal{B}$. Следовательно, функция $\varphi \in K_\Theta$ не является циклическим элементом для $\mathcal{B}$ (т.е. линейная оболочка элементов $\{\mathcal{B}^k \varphi: k \in \mathbb{Z}_+\}$ не плотна в H^2). В силу [87; теорема 2.2.1] φ допускает в этом случае псевдопродолжение неванлинновского типа.

Обратно, пусть функция $\varphi \in H^\infty$ однолистка и отображает $\mathbb{D}$ на некоторую неванлинновскую область. Тогда φ допускает псевдопродолжение неванлинновского типа. Снова применяя [87; теорема 2.2.1], заключаем, что φ не является циклическим элементом для оператора $\mathcal{B}$ в H^2 . Тогда подпространство $\mathcal{H} \subset H^2$, определенное как замыкание в H^2 линейной оболочки элементов $\{\mathcal{B}^k \varphi : k \in \mathbb{Z}_+\}$, будет $\mathcal{B}$ -инвариантным подпространством. В силу теоремы Берлинга найдется такая внутренняя функция Θ , что $\mathcal{H} = K_\Theta$.

Отметим несколько простых следствий теоремы 2.6. Так, если Ω – неванлинновская область, а h – рациональная функция с полюсами вне $\overline{\Omega}$, однолистка в Ω , то область $h(\Omega)$ также будет неванлинновской. В частности, образ круга $\mathbb{D}$ под действием отображения $(z + 1/\sin(\pi/n))^n$, $n \geq 3$, дает пример неванлинновской области, которая не является не только жордановой областью, но и областью Каратеодори. Кроме того, неванлинновские области обладают следующим свойством “плотности”: в любой окрестности произвольного контура существует аналитический неванлинновский контур (т. е. граница жордановой неванлинновской области).

Из второго утверждения теоремы 2.6 вытекает следующий метод построения неванлинновских областей: для построения неванлинновской области с требуемыми свойствами в пространстве K_Θ (для некоторой специально выбранной внутренней функции Θ) необходимо найти однолистную функцию, имеющую нужные аналитические свойства (например, заданное граничное поведение).

Естественно возникает следующий вопрос: *для каких внутренних функций Θ в соответствующих пространствах K_Θ существуют однолистные функции?* В связи с этим отметим, что ранее в литературе уже возникали вопросы о существовании в модельных пространствах K_Θ функций, обладающих определенной регулярностью. Так, в [90] изучен вопрос о существовании в таких пространствах гладких функций. Однако вопрос о существовании в модельных пространствах однолистных функций впервые возник именно в связи с задачей равномерной аппроксимации функций полианалитическими членами (см. [85], [89]).

Если Θ_1 и Θ_2 – внутренние функции, а $\Theta = \Theta_1 \Theta_2$, то

$$K_\Theta = K_{\Theta_1} \oplus (\Theta_1 K_{\Theta_2}). \quad (25)$$

Хорошо известно (см., например, [91; гл. II, теорема 5.5]), что всякая внутренняя функция Θ может быть представлена в виде $\Theta(z) = e^{ic} B(z) S(z)$, где $c \in \mathbb{R}$, а B и S – некоторые произведение Бляшке и сингулярная внутренняя функция соответственно. Напомним, что произведение Бляшке (см. [91; гл. II, § 2]) – это функция вида

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_n}{|a_n|} \frac{z - a_n}{\bar{a}_n z - 1},$$

где $(a_n)_{n=1}^\infty$ – некоторая последовательность Бляшке в $\mathbb{D}$ (т. е. $a_n \in \mathbb{D}$ при $n \in \mathbb{N}$ и выполняется условие $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) < \infty$), а сингулярная внутренняя функция (см. [91; гл. II, § 6]) – это функция вида

$$S(z) = \exp\left(-\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu_S(\zeta)\right),$$

где μ_S – некоторая конечная положительная сингулярная мера на $\mathbb{T}$. С учетом (25) представляется целесообразным рассмотреть вопросы о существовании однолистных функций в пространствах K_B и K_S по отдельности.

Очевидно, что для любого произведения Бляшке B в пространстве K_B существуют однолистные функции (например, функция $1/(1 - \bar{a}_n z)$, где a_n – любой из нулей B). В случае же сингулярной внутренней функции S вопрос о существовании однолистных функций в K_S является открытым (и весьма нетривиальным). В [90; § 3] показано, что однолистные функции всегда существуют в пространстве $K_{S(w,Q)}$ для любых $w \in \mathbb{T}$ и $Q > 0$, где $S(w, Q)(z) = \exp(Q(z+w)/(z-w))$. Кроме того, из результатов [90; § 3] вытекает следующая, представляющаяся весьма правдоподобной, гипотеза.

ГИПОТЕЗА 2.1. Пусть S – сингулярная внутренняя функция. Пространство K_S содержит ограниченные однолистные функции в том и только том случае, когда найдется множество Карлесона Y такое, что $\mu_S(Y) > 0$.

Напомним, что множество $Y \subset \mathbb{T}$ называется множеством Карлесона, если $\int_{\mathbb{T}} \log \text{dist}(\zeta, Y) |d\zeta| > -\infty$. В связи с этой гипотезой отметим, что имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.7 [90; теорема 4]. Пусть S – сингулярная внутренняя функция. Следующие условия эквивалентны:

а) существует натуральное число N такое, что пространство K_{S_N} , где сингулярная внутренняя функция S_N определена равенством

$$S_N(z) = S(z)S(\omega_N z)S(\omega_N^2 z) \cdots S(\omega_N^{N-1} z),$$

$\omega_N = \exp(2\pi i/N)$, содержит ограниченные однолистные функции;

б) существует множество Карлесона $Y \subset \mathbb{T}$ такое, что $\mu_S(Y) > 0$.

Регулярность границ неванлинновских областей. Рассмотрим теперь вопрос о возможной иррегулярности границ неванлинновских областей. Сразу отметим, что построение неванлинновских областей с неаналитическими границами, так же как с другими предписанными аналитическими или геометрическими свойствами, является достаточно трудной задачей, требующей использования весьма тонких аналитических конструкций и оценок. Первый пример неванлинновской области с нигде не аналитической границей был построен в работе [92].

Исследованию возможной иррегулярности границ неванлинновских областей посвящены работы [85] и [89]. Обсудим полученные в этих работах результаты.

Пусть B – бесконечное произведение Бляшке с нулями $\{a_1, a_2, \dots\}$, и пусть $B_0 \equiv 1$, а B_n при целых $n \geq 1$ – это произведение первых n множителей произведения B . Хорошо известно (см., например, [93]), что система функций $\{g_n\}_{n=1}^\infty$, где

$$g_n(z) := \frac{\sqrt{1 - |a_n|^2} B_{n-1}(z)}{1 - \bar{a}_n z},$$

образует ортонормированный базис в пространстве K_B . Если же B – это интерполяционное произведение Бляшке, т.е. если для последовательности

$(a_n)_{n=1}^\infty$ выполняется условие Карлесона:

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \left| \frac{a_n - a_k}{1 - \bar{a}_n \bar{a}_k} \right| > 0,$$

то система функций $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$, где

$$\psi_n(z) = \frac{\sqrt{1 - |a_n|^2}}{1 - \bar{a}_n z}$$

образует базис Рисса в пространстве K_B (см., например, [88; лекция 4]).

В [85; теорема 3] было доказано, что для любого $\alpha \in (0, 1)$ существует неванлинновская область с границей, принадлежащей классу C^1 , но не классу $C^{1,\alpha}$. Эта область была получена как конформный образ круга $\mathbb{D}$ при отображении функцией φ вида $\sum_{n=1}^\infty c_n g_n(z)$, причем последовательность Бляшке $(a_n)_{n=1}^\infty$, определяющая функцию φ , имеет единственную точку накопления на $\mathbb{T}$. В [90; теорема 2] этот результат был существенно усилен, причем соответствующая конструкция оказывается значительно проще конструкции, использованной в [85; теорема 3].

ТЕОРЕМА 2.8 [90; теорема 2]. *Для любого $\alpha \in (0, 1)$ и для любого замкнутого подмножества $E \subseteq \mathbb{T}$ существует интерполяционная последовательность Бляшке $(a_n)_{n=1}^\infty$ такая, что множество ее предельных точек равно E , а в пространстве K_B , где B – соответствующее произведение Бляшке, существует однолистная функция f вида $\sum_{n=1}^\infty c_n \psi_n(z)$, конформно отображающая $\mathbb{D}$ на неванлинновскую область $f(\mathbb{D})$ с границей, принадлежащей классу C^1 , но не классу $C^{1,\alpha}$.*

Недавно Е. П. Долженко ввел понятие модуля спрямляемости спрямляемой жордановой кривой (см. [94] и [95]). Эту характеристику регулярности границ жордановых областей также представляется интересным использовать при изучении возможной иррегулярности границ неванлинновских областей. Напомним понятие модуля спрямляемости. Пусть Γ – спрямляемая жорданова кривая (замкнутая или разомкнутая, с концами или без них). Модулем спрямляемости $\varrho(\Gamma, \delta)$, $\delta > 0$, называется величина $\varrho(\Gamma, \delta) := \sup\{d(\Gamma; z, w) : z, w \in \Gamma, |z - w| \leq \delta\}$, где $d(\Gamma; z, w)$ обозначает либо длину дуги $\Gamma(z, w)$ кривой Γ с концами z и w – в случае разомкнутой кривой Γ , либо меньшую из длин двух дуг $\Gamma(z, w)$ кривой Γ с этими концами – в случае замкнутой кривой Γ . Определим, при $k \in (0, 1]$, класс $\mathcal{G}_0^k$, состоящий из всех спрямляемых жордановых кривых Γ таких, что $\varrho(\Gamma, \delta) \leq c\delta^k$ при всех $\delta \in (0, \delta_0)$ для некоторых $c > 1$ и $\delta_0 > 0$. Таким образом, в классе $\mathcal{G}_0^k$ лежат кривые, в определенном смысле “близкие” к неспрямляемым. Имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.9 [90; теорема 3]. *Для любого $k \in (0, 1]$ существует неванлинновская область Ω такая, что $\partial\Omega \notin \mathcal{G}_0^k$. При этом $\Omega = f(\mathbb{D})$, где f – однолистная функция вида $\sum_{n=1}^\infty c_n \psi_n$.*

Также можно показать, что в пространстве K_B , где B – соответствующим образом подобранное произведение Бляшке, можно найти такую однолиственную функцию f вида $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n$, для которой f' не принадлежит H^p ни при каком $p > 1$.

Таким образом, существуют неванлинновские области с “почти неспрямляемыми” границами. Однако поставленный в [96; задача 2.10] и [78; задача 3.2] вопрос о существовании неванлинновских областей с неспрямляемыми границами (который, в силу теоремы 2.6, сводится к вопросу о существовании в некотором пространстве K_{Θ} однолиственной функции f со свойством $f' \notin H^1$) пока остается открытым.

Неванлинновские и классические квадратурные области. В завершение этого пункта рассмотрим взаимосвязь понятий неванлинновской области и *классической квадратурной области*. Последнее понятие естественно возникает в ряде разделов комплексного анализа. Напомним, что ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{C}$ называется (*классической*) *квадратурной областью* (см., например, [97]), если существуют конечный набор точек $b_1, \dots, b_m \in \Omega$ и коэффициенты $c_{k,j} \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, m$, $j = 0, \dots, m_k$, $c_{k,m_k} \neq 0$, такие, что

$$\iint_{\Omega} f \, dx \, dy = \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{m_k} c_{k,j} f^{(j)}(b_k) \quad (26)$$

для любой интегрируемой голоморфной функции f в Ω . Равенство (26) называется *квадратурным соотношением*. Термин “классическая квадратурная область” используется для того, чтобы отличить эти области от квадратурных областей в широком смысле, когда вместо квадратурного соотношения (26) используется соотношение $\iint_{\Omega} f \, dx \, dy = \langle T, f \rangle$, где T – некоторое распределение с носителем $\text{Supp}(T) \subset \Omega$ (такое понятие квадратурной области используется, например, Г. Шапиро [98]).

Примеры классических квадратурных областей – единичный круг $\mathbb{D}$ и овал Ньюмана $G'_{a,b}$. Примером квадратурной области в широком смысле, не являющейся классической квадратурной областью, является эллипс $G_{a,b}$.

Оказывается (см., например, [97; раздел 3]), что ограниченная область Ω является классической квадратурной областью, *если и только если* существует функция S , определенная на $\bar{\Omega}$, мероморфная в Ω , непрерывно продолжающаяся на $\partial\Omega$ и удовлетворяющая условию $\bar{z} = S(z)$ для всех $z \in \partial\Omega$. Этот результат был получен Ф. Дэвисом в [84; гл. 14] при дополнительных предположениях о регулярности границы $\partial\Omega$ области Ω и, в полной общности, Д. Ароновым и Г. Шапиро в [99].

В этом случае функция S может пониматься как “односторонняя” функция Шварца границы $\partial\Omega$ этой области. Полная характеристизация областей, границы которых имеют односторонние функции Шварца, было получено М. Сакаи [100]. Грубо говоря, граница такой области является объединением не более чем конечного числа аналитических дуг и может содержать не более чем конечное число особых точек, каждая из которых – это двойная точка или внутренний кэсп (область $\varphi(\mathbb{D})$ при $\varphi(z) = z + z^2/2$ доставляет пример такой области).

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть Ω – ограниченная односвязная область. Если Ω является классической квадратурной областью, то $\Omega \in ND$. Обратно, если Ω – это неванлинновская область такая, что соответствующая ND -функция непрерывно продолжается на $\partial\Omega$, то Ω является классической квадратурной областью.

Необходимо подчеркнуть, что указанная взаимосвязь между понятиями неванлинновской и классической квадратурной областей не продолжается на более широкий класс областей, так как существуют неванлинновские области с существенно более иррегулярными границами (см. выше).

2.5. Аппроксимация бианалитическими многочленами и $\bar{\partial}^2$ -задача Дирихле

Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – ограниченная односвязная область. При $n \in \mathbb{N}$ определим

$$D_n(\partial\Omega) = \{h \in C(\partial\Omega) : \exists f_h \in C(\bar{\Omega}) \cap \text{Hol}_n(\Omega), f_h|_{\partial\Omega} = h\}.$$

В стандартной терминологии $D_n(\partial\Omega)$ есть совокупность функций $h \in C(\partial\Omega)$, для которых $\bar{\partial}^n$ -задача Дирихле разрешима в классическом смысле. Говорят, что Ω является $\bar{\partial}^n$ -регулярной, если $D_n(\partial\Omega) = C(\partial\Omega)$, и $\bar{\partial}^n$ -иррегулярной в противном случае.

Рассмотрим вопрос о существовании $\bar{\partial}^n$ -регулярных областей (см. [78; задача 5.1]). Как показано в [78; предложение 5.2], если G – жорданова область, граница которой содержит какую-либо аналитическую дугу, то G не является $\bar{\partial}^2$ -регулярной областью. Важным моментом этого доказательства является применение следующей оценки, полученной в [66; лемма 3]: пусть $f \in A_2(\bar{G})$, а f_0 и f_1 – голоморфные компоненты функции f , тогда

$$|f_1(z)| \leq A \frac{\omega(f, \text{dist}(z, \partial G))}{\text{dist}(z, \partial G)} \quad (27)$$

для всех $z \in G$, где $\omega(f, \cdot)$ есть модуль непрерывности функции f в $\bar{G}$ и A – абсолютная константа. Кроме того, используя теорему Келлога–Варшавского и оценку (27), можно показать, что при $\alpha \in (0, 1)$ никакая жорданова область с границей класса $C^{1,\alpha}$ не является $\bar{\partial}^2$ -регулярной. Наиболее общим результатом в этом направлении является следующее утверждение, недавно полученное в [57; теорема 1].

ТЕОРЕМА 2.10. Пусть φ – конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на жорданову область G со спрямляемой границей. Если

$$\iint_{\mathbb{D}} |\varphi''(z)| dx dy < \infty,$$

то множество $D(\partial G) := \bigcup_n D_n(\partial G)$ имеет первую категорию в $C(\partial G)$.

Так как $C(\partial G)$ – это полное метрическое пространство, то, по теореме Бэра о категории, $D(\partial G) \neq C(\partial G)$ для области G , удовлетворяющей условиям теоремы 2.10. Однако в [57; пример 2] приведен пример жордановой области G_0

с липшицевой границей такой, что $D_2(\partial G_0) = C(\partial G_0)$. Этот трудный пример дал положительный ответ на вопрос, поставленный в [78; задача 5.1].

Обсудим теперь взаимосвязь свойства жордановой области G быть $\bar{\partial}^2$ -регулярной (т. е. свойства разрешимости задачи Дирихле для бианалитических функций в G для любых непрерывных граничных данных) и свойства $P_2(\partial G) = C(\partial G)$. Заметим, что имеют место следующие утверждения:

- 1) для любой жордановой области G справедливы включения

$$D_2(\partial G) \subset P_2(\partial G) \subset C(\partial G);$$

- 2) для любой жордановой области $G \notin ND$ такой, что ∂G содержит некоторую аналитическую дугу,

$$D_2(\partial G) \neq P_2(\partial G) = C(\partial G). \quad (28)$$

В самом деле, первое из этих утверждений вытекает из [66; теорема 2], а второе – из теоремы 2.2 и [78; предложение 5.2].

В [78; предложение 5.4] было получено полное описание пространств $D_2(\partial G)$ и $P_2(\partial G)$ в специальном случае, когда $G \in ND$ – жорданова область с аналитической границей. В этом случае пусть u/v – это ND -функция для G (в данном случае мы вправе считать, что u и v голоморфны на открытом множестве U , содержащем $\bar{G}$). Тогда

$$D_2(\partial G) = P_2(\partial G) = \{h \in C(\partial G) : \mathbb{P}[hv] \in A_1(\bar{G})\},$$

где $\mathbb{P}$ – оператор Пуассона для области G .

Представляется полезным сравнить (28) с соответствующей ситуацией для гармонических функций в шкале равномерной и липшицевых норм. Пусть G – произвольная жорданова область в $\mathbb{C}$. При любом $m \in [0, 1/2)$ всякая функция $f \in \text{lip}_m(\partial G)$ может быть единственным образом продолжена до функции $F \in \text{lip}_m(\bar{G})$, гармонической в G , причем f может быть приближена в $\text{Lip}_m(\partial G)$ -норме на ∂G гармоническими многочленами (см. выше). При $m \in [1/2, 1)$ существуют жорданова область G , а также функция $f \in \text{lip}_m(\partial G)$, $\text{Lip}_m(\partial G)$ -приближаемая на ∂G гармоническими многочленами, для которой соответствующее решение F задачи Дирихле не принадлежит $\text{Lip}_m(\bar{D})$. Это означает, что ситуация, аналогичная (28), для гармонических функций возникает только начиная с порядка гладкости $m = 1/2$.

Отметим также отсутствие эквивалентности между условием приближаемости (23) при $X = \partial\Omega$ для области Каратеодори Ω и свойством единственности решений $\bar{\partial}^2$ -задачи Дирихле в Ω . В самом деле, имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.11 [78; теорема 5.5]. 1) Если $\Omega \in ND$ – область Каратеодори, то найдется такая функция $f \in A_2(\bar{\Omega})$, что $f|_{\partial\Omega} = 0$, но $f \not\equiv 0$ в Ω .

2) Существуют жорданова область $G \notin LND$ со спрямляемой границей и функция f с теми же свойствами, что и в предыдущем утверждении, причем граница этой области G может даже быть аналитической всюду, за исключением одной точки.

В связи с этим напомним, что согласно [52; теорема 3.8] каждая жорданова область $G \notin ND$ с аналитической границей обладает свойством единственности, т. е. из того, что $f \in A_2(\bar{G})$ и $f|_{\partial G} = 0$, вытекает $f \equiv 0$ в G .

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Пусть $\Omega \in ND$ – область Каратеодори. В этом случае (в силу теоремы 2.2) мы можем найти ненулевую меру μ на $\partial\Omega$ такую, что $\mu \perp \mathcal{R}_2(\bar{\Omega})$ (при этом мера μ не имеет атомов). Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{z - \zeta} d\mu(\zeta).$$

Можно показать (это проделано, например, при доказательстве [78; теорема 2.2]), что функция f всюду определена, непрерывна и обращается в нуль вне Ω . Так как $\mu \neq 0$, то $f \neq 0$, т.е. функция f полностью удовлетворяет условиям первого утверждения теоремы.

Доказательство второго утверждения теоремы состоит в явном построении соответствующего примера, которое не приводится здесь ввиду его громоздкости. Отметим только, что требуемая область получается как образ единичного круга $\mathbb{D}$ при отображении, осуществляемом однолистной функцией φ вида

$$\varphi(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k z}{1 - \bar{a}_k z},$$

где c_k – некоторые специально подобранные коэффициенты, а $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ – специально подобранная последовательность точек единичного круга, не являющаяся последовательностью Бляшке (т.е. $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |a_k|) = \infty$), но являющаяся множеством нулей некоторой функции из пространства Бергмана $AL^2(\mathbb{D})$.

В заключение отметим, что *не существует ограниченной односвязной области Ω такой, что для Ω выполнены одновременно свойства общей разрешимости и единственности решения $\bar{\partial}^2$ -задачи Дирихле.*

В самом деле, пусть, от противного, такая область Ω существует. Возьмем $z_0 \in \Omega$ и рассмотрим функцию $\varphi(z) = \frac{1}{z - z_0} \Big|_{\partial\Omega} \in C(\partial\Omega)$. В силу свойства разрешимости существует функция $f_\varphi \in C(\bar{\Omega})$, бианалитическая в Ω , с условием $f_\varphi|_{\partial\Omega} = \varphi$. Тогда $(z - z_0)f_\varphi(z) - 1 = 0$ на $\partial\Omega$. Так как выполнено свойство единственности, имеем $(z - z_0)f_\varphi(z) - 1 = 0$ в Ω . А это неверно, например, в точке z_0 .

2.6. C^m -аппроксимация полианалитическими функциями, $m > 0$

Пусть $n \geq 2$ – натуральное число. В этом пункте мы кратко обсудим условия C^m -приближаемости функций n -аналитическими функциями и многочленами при $m \geq n - 1$. При этом, как и в п. 1.6, мы ограничимся только рассмотрением соответствующих критериев приближаемости для классов функций.

Положим $A_n^m(X) = C^m(X) \cap \text{Hol}_n(X^\circ)$ и определим пространства $R_n^m(X)$ и $P_n^m(X)$ как замыкания в $C^m(X)$ подпространств $\{f_X : f \in \mathcal{R}_n(X)\}$ и $\{p_X : p \in \mathcal{P}_n\}$ соответственно.

Из результатов работы [26] вытекают следующие результаты (символом z обозначается как комплексное число $x_1 + ix_2$, так и соответствующая точка плоскости $\mathbb{R}^2$; при $\alpha \in \mathbb{Z}_+^2$ производные в выражении $\partial^\alpha(\cdot)$ берутся по переменным x_1 и x_2).

ТЕОРЕМА 2.12. Пусть X – компакт в $\mathbb{C}$, а $m \geq n$.

1) Пусть $f \in BC(\mathbb{C})$. Следующие условия эквивалентны:

- а) $\partial^\alpha(\bar{\partial}^n f(z)) = 0$ при всех $z \in X$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^2$ с условием $|\alpha| \leq [m] - n$;
- б) найдется последовательность $(f_k)_{k=1}^\infty$ функций класса $BC(\mathbb{C})$, n -аналитических в окрестности X (каждая функция в своей окрестности), такая, что $\|f - f_k\|_m \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

2) Равенство $A_n^m(X) = R_n^m(X)$ справедливо в том и только том случае, когда $X = \overline{X^\circ}$.

3) Равенство $A_n^m(X) = P_n^m(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда $X = \overline{X^\circ}$, а множество $\mathbb{C} \setminus X$ связно.

Пусть теперь $m \in [n-1, n)$. В этом случае нам потребуются n -аналитические C^m -емкости $\chi_m(\cdot)$, которые определяются следующим образом. Пусть E – ограниченное множество в $\mathbb{C}$. Тогда

$$\chi_m(E) = \sup \langle \bar{\partial}^n f, 1 \rangle,$$

где супремум берется по всем функциям f класса $C_{\text{loc}}^m(\mathbb{C})$ с условиями $\|f\|'_m \leq 1$, $\text{Supp}(\bar{\partial}^n f) \subset E$ (т.е. функция f является n -аналитической вне E) и $f = \Phi_n * \bar{\partial}^n f$, где $\Phi_n(z) = \bar{z}^{n-1}/(\pi(n-1)!)z$ – фундаментальное решение для оператора $\bar{\partial}^n$.

Непосредственно проверяется, что емкости $\chi_{n-1}(\cdot)$ и $\alpha(\cdot)$ сравнимы (принципиальную роль здесь играет результат Толсы [5] о соизмеримости емкостей $\alpha(\cdot)$ и $\alpha_+(\cdot)$). Более того, при $n-1 < m < n$ емкости $\chi_m(\cdot)$ сравнимы с нижними обхватами по Хаусдорфу $\mathcal{M}_*^{m+2-n}(\cdot)$.

Имеют место следующие критерии C^m -приближаемости функций n -аналитическими функциями и многочленами.

ТЕОРЕМА 2.13. Пусть X – компакт в $\mathbb{C}$, а $m \in (n-1, n)$.

1) Равенство $A_n^m(X) = R_n^m(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

- (а) для всякой ограниченной области G в $\mathbb{C}$ справедливо равенство

$$\chi_m(D \setminus X^\circ) = \chi_m(D \setminus X);$$

- (б) найдется константа $A_0 = A_0(m) > 0$ такая, что для каждого ограниченного открытого множества U в $\mathbb{C}$ справедлива оценка

$$\mathcal{M}_*^{m+2-n}(U \setminus X^\circ) \leq A_0 \mathcal{M}_*^{m+2-n}(U \setminus X);$$

- (с) найдутся $A_0 > 0$ и $q \geq 1$ такие, что для каждого открытого круга $B(a, \delta)$ справедлива оценка

$$\mathcal{M}_*^{m+2-n}(B(a, \delta) \setminus X^\circ) \leq A_0 \mathcal{M}_*^{m+2-n}(B(a, k\delta) \setminus X).$$

2) Равенство $A_n^m(X) = P_n^m(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда компакт X имеет связное дополнение и выполняется любое из вышеприведенных условий (а)–(с).

3) Равенство $A_n^{n-1}(X) = R_n^{n-1}(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда для всякой ограниченной области G в $\mathbb{C}$ справедливо равенство

$$\chi_{n-1}(D \setminus X^\circ) = \chi_{n-1}(D \setminus X).$$

4) Равенство $A_n^{n-1}(X) = P_n^{n-1}(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда компакт X имеет связное дополнение.

Первое и второе утверждения теоремы 2.13 вытекают из соответствующих результатов работы [26]. Третье утверждение может быть доказано аналогично тому, как теорема 1.18 при $m = 1$ доказывается в работе [8]. Необходимость условия связности дополнения к компакту X в четвертом утверждении теоремы 2.13 очевидна. Основным моментом в доказательстве достаточности этого утверждения является тот факт, что из цитированного выше результата Толсы о сравнимости емкостей $\alpha(\cdot)$ и $\alpha_+(\cdot)$ вытекает, что для любой ограниченной области D в $\mathbb{C}$ емкость $\chi_{n-1}(D)$ сравнима с $\text{diam}(D)$ (см. также обсуждение теоремы 1.24 выше). Таким образом, четвертое утверждение теоремы 2.13 представляет собой естественный аналог теоремы Мергеляна.

Необходимо отметить, что подробные доказательства утверждений теоремы 2.13 пока не опубликованы, за исключением четвертого утверждения, которое доказано в [101] для “ослабленной” C^{n-1} -нормы.

В случае $0 < m < n - 1$ задача о C^m -приближаемости функций n -аналитическими функциями и многочленами требует дальнейшего изучения.

Так, из [42; теорема 1] вытекает, что условие (а) п. 1) теоремы 2.13, в котором в качестве U рассматривается любой открытый круг $B(a, \delta)$ в $\mathbb{C}$, остается необходимым и достаточным условием для выполнения равенства $A_n^m(X) = R_n^m(X)$ при $m \in (n - 2, n - 1)$.

Кроме того, представляется весьма правдоподобным, что, используя методы, аналогичные примененным в работах [67], [68] при доказательстве теоремы 2.1, можно доказать равенство $A_n^m(X) = R_n^m(X)$ для любого *целого* $m \leq n - 2$. В то же самое время при *нецелых* значениях $m < n - 2$ можно найти компакты X , для которых соответствующее равенство не выполняется (см., например, [42; раздел 4]).

Дополнение

В этом разделе мы упомянем как общие, так и некоторые специальные направления исследований, наиболее тесно связанные с рассмотренной выше тематикой как по формулировкам задач, так и по применяемым методам. За последние 30 лет здесь был получен целый ряд фундаментальных результатов, дающих ответы на известные проблемы Данжуа, Пенлеве, Витушкина, О’Фаррелла, Вердеры.

1. Изучение множеств устранимых особенностей решений однородных эллиптических уравнений и связанных с ними емкостей в различных классах функций (в основном классических: C^m , L_p , BMO и др.). Кроме цитируемых выше работ К. Толсы [47], [5] и [41] мы выделим ряд наиболее ярких (на наш взгляд) работ последних лет: [102]–[108], открывающих глубокие связи теории емкостей, геометрической теории меры и теории сингулярных интегралов. Отметим также работы [109], [110], в которых изучаются геометрические свойства некоторых емкостей, обсуждавшихся в связи с рассматриваемыми аппроксимационными задачами.

2. Аппроксимация функций решениями общих однородных эллиптических уравнений на замкнутых (не обязательно ограниченных) подмножествах в $\mathbb{R}^N$ (или на замкнутых множествах фиксированной области в $\mathbb{R}^N$) в нормах классических пространств функций (C^m , L_p , BMO и др.), а также “абстрактных”

пространств обобщенных функций (с определенным набором свойств). Локализационный метод Витушкина (при условии *инвариантности* соответствующего оператора Витушкина, см., например, [111]) удастся применить в большинстве из рассматриваемых здесь задач. Этот метод, как правило, дополняется функционально-аналитическим подходом (например, методом спектрального синтеза [42]) и/или теорией сингулярных интегралов [68]. К упомянутым ранее ссылкам [26] и [7] мы добавим работы [112], [113] и их приложения к вопросам граничных и асимптотических значений [114], [115] (см. также [116] и литературу, цитируемую в указанных работах).

3. Аппроксимация и продолжение субгармонических функций в различных пространствах (типа Рунге и Уолша) и классах гладкости C^m : [117], [50], [118]–[120].

4. Изучение регулярности функций, принадлежащих модельным пространствам (т. е. инвариантным относительно оператора обратного сдвига подпространствам пространства H^2): [85], [90], [89].

Список литературы

- [1] C. Runge, “Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen”, *Acta Math.*, **6**:1 (1885), 229–244.
- [2] А. Г. Витушкин, “Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений”, *УМН*, **22**:6(138) (1967), 141–199; англ. пер.: A. G. Vitushkin, “The analytic capacity of sets in problems of approximation theory”, *Russian Math. Surveys*, **22**:6 (1967), 139–200.
- [3] Т. Гамелин, *Равномерные алгебры*, Мир, М., 1973, 336 с.; пер. с англ.: T. W. Gamelin, *Uniform algebras*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1969, xiii+257 pp.
- [4] Ф. Хаусдорф, *Теория множеств*, ОНТИ, М.–Л., 1937, 305 с.; пер. с нем.: F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, Leipzig, 1935, 306 pp.
- [5] X. Tolsa, “The semiadditivity of continuous analytic capacity and the inner boundary conjecture”, *Amer. J. Math.*, **126**:3 (2004), 523–567.
- [6] П. В. Парамонов, “Некоторые новые критерии равномерной приближаемости функций рациональными дробями”, *Матем. сб.*, **186**:9 (1995), 97–112; англ. пер.: P. V. Paramonov, “Some new criteria for uniform approximability of functions by rational fractions”, *Sb. Math.*, **186**:9 (1995), 1325–1340.
- [7] J. Verdera, “Removability, capacity and approximation”, *Complex potential theory* (Montreal, PQ, 1993), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **439**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994, 419–473.
- [8] П. В. Парамонов, “О гармонических аппроксимациях в C^1 -норме”, *Матем. сб.*, **181**:10 (1990), 1341–1365; англ. пер.: P. V. Paramonov, “On harmonic approximation in the C^1 -norm”, *Math. USSR-Sb.*, **71**:1 (1992), 183–207.
- [9] Е. П. Долженко, “Об аппроксимации на замкнутых областях и на нуль-множествах”, *Докл. АН СССР*, **143** (1962), 771–774.
- [10] М. С. Мельников, “Оценка интеграла Коши по аналитической кривой”, *Матем. сб.*, **71**(113):4 (1966), 503–514.
- [11] M. S. Melnikov, X. Tolsa, “Estimate of the Cauchy integral over Ahlfors regular curves”, *Selected topics in complex analysis*, Oper. Theory Adv. Appl., **158**, Birkhäuser, Basel, 2005, 159–176.
- [12] М. Я. Мазалов, “Критерий равномерной приближаемости гармоническими функциями на компактах в $\mathbb{R}^3$ ”, *Тр. МИАН*, **279** (2012), 120–165.

- [13] М. В. Келдыш, “О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле”, *УМН*, 1941, № 8, 171–231; англ. пер.: M. V. Keldysh, “On the solvability and stability of the Dirichlet problem”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **51** (1966), 1–73.
- [14] Л. Карлесон, *Избранные проблемы теории исключительных множеств*, Мир, М., 1971, 126 с.; пер. с англ.: L. Carleson, *Selected problems on exceptional sets*, Van Nostrand Math. Stud., **13**, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton–Toronto–London, 1967, v+151 pp.
- [15] Дж. Вердера, М. С. Мельников, П. В. Парамонов, “ C^1 -аппроксимация и продолжение субгармонических функций”, *Матем. сб.*, **192**:4 (2001), 37–58; англ. пер.: J. Verdera, M. S. Mel’nikov, P. V. Paramonov, “ C^1 -approximation and extension of subharmonic functions”, *Sb. Math.*, **192**:3-4 (2001), 515–535.
- [16] A. G. O’Farrell, “Uniform approximation by harmonic functions”, *Linear and complex analysis. Problem book 3*, part 2, Lecture Notes in Math., **1574**, Springer-Verlag, Berlin, 1994, 121 (problem 12.15).
- [17] J. Deny, “Systèmes totaux de fonctions harmoniques”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **1** (1949), 103–113.
- [18] М. В. Келдыш, “О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле”, *Докл. АН СССР*, **18**:6 (1938), 315–318.
- [19] Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала*, Наука, М., 1966, 515 с.; англ. пер.: N. S. Landkof, *Foundations of modern potential theory*, Grundlehren Math. Wiss., **180**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1972, x+424 pp.
- [20] М. Labrèche, *De l’approximation harmonique uniforme*, Thèse, Université de Montréal, 1982.
- [21] А. А. Гончар, “О равномерном приближении непрерывных функций гармоническими”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **27**:6 (1963), 1239–1250.
- [22] Ю. А. Лысенко, Б. П. Писаревский, “Неустойчивость гармонической емкости и приближения непрерывных функций гармоническими”, *Матем. сб.*, **76**(118):1 (1968), 52–71; англ. пер.: Yu. A. Lysenko, B. M. Pisarevskii, “Instability of harmonic capacity and approximations of continuous functions by harmonic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **5**:1 (1968), 53–72.
- [23] A. Debiard, B. Gaveau, “Potentiel fin et algèbre de fonctions analytiques. I”, *J. Funct. Anal.*, **16**:3 (1974), 289–304.
- [24] P. M. Gauthier, S. Ladouceur, “Uniform approximation and fine potential theory”, *J. Approx. Theory*, **72**:2 (1993), 138–140.
- [25] A. G. O’Farrell, “Metaharmonic approximation in Lipschitz norms”, *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A*, **75**:24 (1975), 317–330.
- [26] J. Verdera, “ C^m -approximation by solutions of elliptic equations, and Calderón–Zygmund operators”, *Duke Math. J.*, **55**:1 (1987), 157–187.
- [27] G. David, *Wavelets and singular integrals on curves and surfaces*, Lecture Notes in Math., **1465**, Springer-Verlag, Berlin, 1991, x+107 pp.
- [28] И. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973, 342 с.; пер. с англ.: E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Math. Ser., **30**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970, xiv+290 pp.
- [29] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, т. I: *Теория распределений и анализ Фурье*, Мир, М., 1986, 464 с.; пер. с англ.: L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators*, v. I: *Distribution theory and Fourier analysis*, Grundlehren Math. Wiss., **256**, Springer-Verlag, Berlin, 1983, ix+391 pp.
- [30] J. Mateu, J. Orobitg, “Lipshitz approximation by harmonic functions and some applications to spectral synthesis”, *Indiana Univ. Math. J.*, **39**:3 (1990), 703–736.

- [31] L. Carleson, “On the connection between Hausdorff measures and capacity”, *Ark. Math.*, **3**:5 (1958), 403–406.
- [32] М. С. Мельников, “Метрические свойства аналитической α -емкости и приближения аналитических функций с условием Гёльдера рациональными функциями”, *Матем. сб.*, **79(121)**:1(5) (1969), 118–127; англ. пер.: M. S. Mel’nikov, “Metric properties of analytic α -capacity and approximation of analytic functions with a Hölder condition by rational functions”, *Math. USSR-Sb.*, **8**:1 (1969), 115–124.
- [33] A. G. O’Farrell, “Estimates for capacities and approximation in Lipschitz norms”, *J. Reine Angew. Math.*, **311/312** (1979), 101–115.
- [34] А. Г. Витушкин, “Пример множеств положительной длины, но нулевой аналитической емкости”, *Докл. АН СССР*, **127**:2 (1959), 246–249.
- [35] A. G. O’Farrell, “Rational approximation and weak analyticity. II”, *Math. Ann.*, **281**:1 (1988), 169–176.
- [36] A. G. O’Farrell, “Rational approximation in Lipschitz norms. II”, *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A*, **79**:11 (1979), 103–114.
- [37] A. G. O’Farrell, “Hausdorff content and rational approximation in fractional Lipschitz norms”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **228** (1977), 187–206.
- [38] J. Verdera, “On C^m -rational approximation”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **97**:4 (1986), 621–625.
- [39] Xuan Uy Nguyen, “An extremal problem on singular integrals”, *Amer. J. Math.*, **102**:2 (1980), 279–290.
- [40] М. Я. Мазалов, “Критерий приближаемости гармоническими функциями в пространствах Липшица”, *Исследования по линейным операторам и теории функций. Вып. 40*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **401**, ПОМИ, СПб., 2012, 144–171.
- [41] A. Ruiz de Villa, X. Tolsa, “Characterization and semiadditivity of the C^1 -harmonic capacity”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **362**:7 (2010), 3641–3675.
- [42] J. Mateu, Yu. Netrusov, J. Orobitg, J. Verdera, “BMO and Lipschitz approximation by solutions of elliptic equations”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **46**:4 (1996), 1057–1081.
- [43] J. L. Walsh, “The approximation of harmonic functions by harmonic polynomials and by harmonic rational functions”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **35**:4 (1929), 499–544.
- [44] С. Н. Мергелян, “Равномерные приближения функций комплексного переменного”, *УМН*, **7**:2(48) (1952), 31–122; англ. пер.: S. N. Mergelyan, “Uniform approximations to functions of a complex variable”, *Amer. Math. Soc. Transl.*, **101**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1954, 294–391.
- [45] П. В. Парамонов, “ C^m -приближения гармоническими полиномами на компактных множествах в $\mathbb{R}^n$ ”, *Матем. сб.*, **184**:2 (1993), 105–128; англ. пер.: P. V. Paramonov, “ C^m -approximations by harmonic polynomials on compact sets in $\mathbb{R}^n$ ”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **78**:1 (1994), 231–251.
- [46] П. В. Парамонов, “О приближениях гармоническими полиномами в C^1 -норме на компактах в $\mathbb{R}^2$ ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **57**:2 (1993), 113–124; англ. пер.: P. V. Paramonov, “On approximation by harmonic polynomials in the C^1 -norm on compact sets in $\mathbb{R}^2$ ”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **42**:2 (1994), 321–331.
- [47] X. Tolsa, “Painlevé’s problem and the semiadditivity of analytic capacity”, *Acta Math.*, **190**:1 (2003), 105–149.
- [48] H. Lebesgue, “Sur le problème de Dirichlet”, *Palermo Rend.*, **24**:1 (1907), 371–402.
- [49] E. H. Johnston, “The boundary modulus of continuity of harmonic functions”, *Pacific J. Math.*, **90**:1 (1980), 87–98.
- [50] S. J. Gardiner, *Harmonic approximation*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **221**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, xiv+132 pp.

- [51] Н. И. Мусхелишвили, *Некоторые основные задачи математической теории упругости: основные уравнения, плоская теория упругости, кручение и изгиб*, 5-е изд., Наука, М., 1966, 707 с.; англ. пер. 4-го изд.: N. I. Muskhelishvili, *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Fundamental equations, plane theory of elasticity, torsion and bending*, P. Noordhoff, Ltd., Groningen, 1963, xxxi+718 pp.
- [52] M. B. Balk, *Polyanalytic functions*, Math. Res., **63**, Akademie-Verlag, Berlin, 1991, 197 pp.
- [53] Е. П. Долженко, “О граничном поведении компонент полианалитических функций”, *Матем. заметки*, **63**:6 (1998), 821–834; англ. пер.: E. P. Dolzhenko, “On boundary properties of the components of polyharmonic functions”, *Math. Notes*, **63**:5-6 (1998), 724–735.
- [54] Е. П. Долженко, В. И. Данченко, “О граничных свойствах решений обобщенного уравнения Коши–Римана”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко, Тр. МИАН, **236**, Наука, М., 2002, 142–152; англ. пер.: E. P. Dolzhenko, V. I. Danchenko, “On the boundary properties of solutions to the generalized Cauchy–Riemann equation”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **236** (2002), 132–142.
- [55] В. И. Данченко, Е. П. Долженко, “О граничном поведении голоморфных компонент бианалитических функций”, *Труды международной конференции по динамическим системам и дифференциальным уравнениям*, Часть 3 (Суздаль, 1–6 июня 2002 г.), Современная математика и ее приложения, **9**, Институт кибернетики АН Грузии, Тбилиси, 2003, 93–98; англ. пер.: V. I. Danchenko, E. P. Dolzhenko, “On boundary behavior of holomorphic components of bianalytic functions”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **126**:6 (2005), 1586–1592.
- [56] К. М. Расулов, “О разрешимости краевых задач типа Дирихле для полианалитических функций”, *Докл. АН СССР*, **309**:6 (1989), 1309–1313; англ. пер.: K. M. Rasulov, “On the solution of boundary value problems of Dirichlet problem type for polyanalytic functions”, *Soviet Math. Dokl.*, **40**:3 (1990), 643–647.
- [57] М. Я. Мазалов, “О задаче Дирихле для полианалитических функций”, *Матем. сб.*, **200**:10 (2009), 59–80; англ. пер.: M. Ya. Mazalov, “The Dirichlet problem for polyanalytic functions”, *Sb. Math.*, **200**:10 (2009), 1473–1493.
- [58] A. G. O’Farrell, “Annihilators of rational modules”, *J. Funct. Anal.*, **19**:4 (1975), 373–389.
- [59] J. L.-M. Wang, “Approximation by rational modules on nowhere dense sets”, *Pacific J. Math.*, **80**:1 (1979), 293–295.
- [60] J. L.-M. Wang, “Rational modules and higher order Cauchy transforms”, *Internat. J. Math. Math. Sci.*, **4**:4 (1981), 661–665.
- [61] J. L.-M. Wang, “Approximation by rational modules on boundary sets”, *Pacific J. Math.*, **92**:1 (1981), 237–239.
- [62] J. L.-M. Wang, “A localization operator for rational modules”, *Rocky Mountain J. Math.*, **19**:4 (1989), 999–1002.
- [63] T. Trent, J. L.-M. Wang, “Uniform approximation by rational modules on nowhere dense sets”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **81**:1 (1981), 62–64.
- [64] T. Trent, J. L.-M. Wang, “The uniform closure of rational modules”, *Bull. London Math. Soc.*, **13**:5 (1981), 415–420.
- [65] J. J. Carmona, “A necessary and sufficient condition for uniform approximation by certain rational modules”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **86**:3 (1982), 487–490.
- [66] J. J. Carmona, “Mergelyan’s approximation theorem for rational modules”, *J. Approx. Theory*, **44**:2 (1985), 113–126.

- [67] М. Я. Мазалов, “О равномерных приближениях бианалитическими функциями на произвольных компактах в $\mathbb{C}$ ”, *Матем. сб.*, **195**:5 (2004), 79–102; англ. пер.: М. Ya. Mazalov, “Uniform approximations by bianalytic functions on arbitrary compact subsets of $\mathbb{C}$ ”, *Sb. Math.*, **195**:5 (2004), 687–709.
- [68] М. Я. Мазалов, “Критерий равномерной приближаемости на произвольных компактах для решений эллиптических уравнений”, *Матем. сб.*, **199**:1 (2008), 15–46; англ. пер.: М. Ya. Mazalov, “A criterion for uniform approximability on arbitrary compact sets for solutions of elliptic equations”, *Sb. Math.*, **199**:1-2 (2008), 13–44.
- [69] J. Verdera, “On the uniform approximation problem for the square of the Cauchy–Riemann operator”, *Pacific J. Math.*, **159**:2 (1993), 379–396.
- [70] J. L.-M. Wang, “Approximation by rational modules in $\text{Lip } \alpha$ norms”, *Illinois J. Math.*, **26**:4 (1982), 632–636.
- [71] J. Verdera, “Approximation by rational modules in Sobolev and Lipschitz norms”, *J. Funct. Anal.*, **58**:3 (1984), 267–290.
- [72] J. J. Carmona Doménech, “The closure in Lip_α norms of rational modules with three generators”, *Illinois J. Math.*, **29**:3 (1985), 418–431.
- [73] J. L.-M. Wang, “A Mergelyan–Vitushkin approximation theorem for rational modules”, *J. Approx. Theory*, **63**:3 (1990), 368–374.
- [74] J. L.-M. Wang, “Approximation by rational modules in L^p and BMO”, *J. Math. Anal. Appl.*, **160**:1 (1991), 19–23.
- [75] J. L.-M. Wang, “Rational modules and Cauchy transforms. II”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **115**:2 (1992), 405–408.
- [76] В. В. Андриевский, В. И. Белый, В. В. Маймескул, “Прямые и обратные теоремы приближения функций для рациональных модулей в областях с квазиконформной границей”, *Матем. заметки*, **46**:2 (1989), 12–20; англ. пер.: V. V. Andrievskii, V. I. Belyi, V. V. Maimeskul, “Direct and inverse theorems for approximation of functions for rational modules in domains with quasiconformal boundary”, *Math. Notes*, **46**:1-2 (1989), 581–588.
- [77] К. Ю. Федоровский, “О равномерных приближениях функций n -аналитическими многочленами на спрямляемых контурах в $\mathbb{C}$ ”, *Матем. заметки*, **59**:4 (1996), 604–610; англ. пер.: K. Yu. Fedorovskiy, “Uniform n -analytic polynomial approximations of functions on rectifiable contours in $\mathbb{C}$ ”, *Math. Notes*, **59**:3-4 (1996), 435–439.
- [78] Дж. Дж. Кармона, П. В. Парамонов, К. Ю. Федоровский, “О равномерной аппроксимации полианалитическими многочленами и задаче Дирихле для бианалитических функций”, *Матем. сб.*, **193**:10 (2002), 75–98; англ. пер.: J. J. Carmona, P. V. Paramonov, K. Yu. Fedorovskiy, “On uniform approximation by polyanalytic polynomials and the Dirichlet problem for bianalytic functions”, *Sb. Math.*, **193**:9-10 (2002), 1469–1492.
- [79] J. J. Carmona, K. Yu. Fedorovskiy, “Conformal maps and uniform approximation by polyanalytic functions”, *Selected topics in complex analysis*, Oper. Theory Adv. Appl., **158**, Birkhäuser, Basel, 2005, 109–130.
- [80] А. Буаве, П. М. Готье, П. В. Парамонов, “О равномерной аппроксимации n -аналитическими функциями на замкнутых множествах в $\mathbb{C}$ ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:3 (2004), 15–28; англ. пер.: A. Boivin, P. M. Gauthier, P. V. Paramonov, “On uniform approximation by n -analytic functions on closed sets in $\mathbb{C}$ ”, *Izv. Math.*, **68**:3 (2004), 447–459.
- [81] Дж. Дж. Кармона, К. Ю. Федоровский, “О зависимости условий равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами от порядка полианалитичности”, *Матем. заметки*, **83**:1 (2008), 32–38; англ. пер.: J. J. Carmona, K. Yu. Fedorovskiy, “On the dependence of uniform polyanalytic

- polynomial approximations on the order of polyanalyticity”, *Math. Notes*, **83**:1-2 (2008), 31–36.
- [82] J. J. Carmona, K. Yu. Fedorovskiy, “New conditions for uniform approximation by polyanalytic polynomials”, *Тр. МИАН*, **279** (2012), 227–241.
- [83] А. Б. Зайцев, “О равномерной приближаемости функций полиномиальными решениями эллиптических уравнений второго порядка на плоских компактах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:6 (2004), 85–98; англ. пер.: A. B. Zaitsev, “Uniform approximability of functions by polynomial solutions of second-order elliptic equations on compact plane sets”, *Izv. Math.*, **68**:6 (2004), 1143–1156.
- [84] P. J. Davis, *The Schwarz functions and its applications*, Carus Math. Monogr., **17**, Math. Assoc. Amer., Buffalo, NY, 1974, xi+228 pp.
- [85] К. Ю. Федоровский, “О некоторых свойствах и примерах неванлинновских областей”, *Комплексный анализ и приложения*, Сборник статей, Тр. МИАН, **253**, Наука, М., 2006, 204–213; англ. пер.: K. Yu. Fedorovskii, “On some properties and examples of Nevanlinna domains”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **253** (2006), 186–194.
- [86] H. S. Shapiro, “Generalized analytic continuation” (Madras, 1967), *Symposia on Theoretical Physics and Mathematics*, **8**, Plenum, New York, 1968, 151–163.
- [87] R. G. Douglas, H. S. Shapiro, A. L. Shields, “Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **20**:1 (1970), 37–76.
- [88] Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига*, Наука, М., 1980, 383 с.; англ. дополн. изд.: N. K. Nikol’skii, *Treatise on the shift operator. Spectral function theory*, Grundlehren Math. Wiss., **273**, Springer-Verlag, Berlin, 1986, xii+491 pp.
- [89] K. Dyakonov, D. Khavinson, “Smooth functions in star-invariant subspaces”, *Recent advances in operator-related function theory*, *Contemp. Math.*, **393**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, 59–66.
- [90] А. Д. Баранов, К. Ю. Федоровский, “Регулярность границ неванлинновских областей и однолистные функции в модельных подпространствах”, *Матем. сб.*, **202**:12 (2011), 3–22; англ. пер.: A. D. Baranov, K. Yu. Fedorovskiy, “Boundary regularity of Nevanlinna domains and univalent functions in model subspaces”, *Sb. Math.*, **202**:12 (2011), 1723–1740.
- [91] Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984, 470 с.; пер. с англ.: J. B. Garnett, *Bounded analytic functions*, *Pure Appl. Math.*, **96**, Academic Press, Inc., [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York–London, 1981, xvi+467 pp.
- [92] М. Я. Мазалов, “Пример непостоянной бианалитической функции, обращающейся в нуль всюду на нигде не аналитической границе”, *Матем. заметки*, **62**:4 (1997), 629–632; англ. пер.: M. Ya. Mazalov, “An example of a nonconstant bianalytic function vanishing everywhere on a nowhere analytic boundary”, *Math. Notes*, **62**:4 (1997), 524–526.
- [93] P. R. Ahern, D. N. Clark, “On functions orthogonal to invariant subspaces”, *Acta Math.*, **124** (1970), 191–204.
- [94] Е. П. Долженко, “О граничной гладкости конформных отображений областей с негладкими границами”, *Докл. РАН*, **415**:2 (2007), 155–159; англ. пер.: E. P. Dolzhenko, “On the boundary smoothness of conformal mappings of domains with nonsmooth boundaries”, *Dokl. Math.*, **76**:1 (2007), 514–518.
- [95] Е. П. Долженко, “Оценки модулей непрерывности конформных отображений областей вблизи их достижимых граничных дуг”, *Матем. сб.*, **202**:12 (2011), 57–106; англ. пер.: E. P. Dolzhenko, “Bounds for the moduli of continuity for conformal mappings of domains near their accessible boundary arcs”, *Sb. Math.*, **202**:12 (2011), 1775–1823.

- [96] К. Ю. Федоровский, “Аппроксимация и граничные свойства полианалитических функций”, *Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Анатолия Георгиевича Витушкина, Тр. МИАН, **235**, Наука, М., 2001, 262–271; англ. пер.: K. Yu. Fedorovskiy, “Approximation and boundary properties of polyanalytic functions”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **235** (2001), 251–260.
- [97] B. Gustafsson, H. S. Shapiro, “What is a quadrature domain?”, *Quadrature domains and their application*, Oper. Theory Adv. Appl., **156**, Birkhäuser, Basel, 2005, 1–25.
- [98] H. S. Shapiro, *The Schwarz function and its generalization to higher dimensions*, Univ. Arkansas Lecture Notes Math. Sci., **9**, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992, xiv+108 pp.
- [99] D. Aharonov, H. S. Shapiro, “Domains in which analytic functions satisfy quadrature identities”, *J. Anal. Math.*, **30** (1976), 39–73.
- [100] M. Sakai, “Regularity of boundary having a Schwarz function”, *Acta Math.*, **166**:3-4 (1991), 263–297.
- [101] K. Yu. Fedorovskiy, “ C^m -approximation by polyanalytic polynomials on compact subsets of the complex plane”, *Complex Anal. Oper. Theory*, **5**:3 (2011), 671–681.
- [102] P. Mattila, “Smooth maps, null-sets for integralgeometric measure and analytic capacity”, *Ann. of Math. (2)*, **123**:2 (1986), 303–309.
- [103] М. С. Мельников, “Аналитическая емкость: дискретный подход и кривизна меры”, *Матем. сб.*, **186**:6 (1995), 57–76; англ. пер.: M. S. Mel’nikov, “Analytic capacity: discrete approach and curvature of measure”, *Sb. Math.*, **186**:6 (1995), 827–846.
- [104] M. S. Melnikov, J. Verdera, “A geometric proof of the L^2 boundedness of the Cauchy integral on Lipschitz graphs”, *Internat. Math. Res. Notices*, 1995, № 7, 325–331.
- [105] P. Mattila, M. S. Melnikov, J. Verdera, “The Cauchy integral, analytic capacity, and uniform rectifiability”, *Ann. of Math. (2)*, **144**:1 (1996), 127–136.
- [106] G. David, P. Mattila, “Removable sets for Lipschitz harmonic functions in the plane”, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **16**:1 (2000), 137–215.
- [107] G. David, “Unrectifiable 1-sets have vanishing analytic capacity”, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **14**:2 (1998), 369–479.
- [108] F. Nazarov, S. Treil, A. Volberg, “The Tb -theorem on non-homogeneous spaces”, *Acta Math.*, **190**:2 (2003), 151–239.
- [109] P. Mattila, P. V. Paramonov, “On geometric properties of harmonic Lip_1 -capacity”, *Pacific J. Math.*, **171**:2 (1995), 469–491.
- [110] P. Mattila, P. V. Paramonov, “On density properties of the Riesz capacities and the analytic capacity γ_+ ”, *Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Анатолия Георгиевича Витушкина, Тр. МИАН, **235**, Наука, М., 2001, 143–156; англ. изд.: *Proc. Steklov Inst. Math.*, **235** (2001), 136–149.
- [111] A. G. O’Farrell, “ T -invariance”, *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A*, **92**:2 (1992), 185–203.
- [112] P. V. Paramonov, J. Verdera, “Approximation by solutions of elliptic equations on closed subsets of Euclidean space”, *Math. Scand.*, **74**:2 (1994), 249–259.
- [113] А. Буаве, П. В. Парамонов, “Аппроксимация мероморфными и целыми решениями эллиптических уравнений в банаховых пространствах распределений”, *Матем. сб.*, **189**:4 (1998), 3–24; англ. пер.: A. Boivin, P. V. Paramonov, “Approximation by meromorphic and entire solutions of elliptic equations in Banach spaces of distributions”, *Sb. Math.*, **189**:4 (1998), 481–502.
- [114] A. Boivin, P. V. Paramonov, “On radial limit functions for entire solutions of second order elliptic equations in $\mathbb{R}^2$ ”, *Publ. Mat.*, **42**:2 (1998), 509–519.

- [115] A. Boivin, P. M. Gauthier, P. V. Paramonov, “Approximation on closed sets by analytic or meromorphic solutions of elliptic equations and applications”, *Canad. J. Math.*, **54**:5 (2002), 945–969.
- [116] П. В. Парамонов, К. Ю. Федоровский, “О равномерной и C^1 -приближаемости функций на компактах в $\mathbb{R}^2$ решениями эллиптических уравнений второго порядка”, *Матем. сб.*, **190**:2 (1999), 123–144; англ. пер.: P. V. Paramonov, K. Yu. Fedorovskiy, “Uniform and C^1 -approximability of functions on compact subsets of $\mathbb{R}^2$ by solutions of second-order elliptic equations”, *Sb. Math.*, **190**:2 (1999), 285–307.
- [117] P. M. Gauthier, “Subharmonic extensions and approximations”, *Canad. Math. Bull.*, **37**:1 (1994), 46–53.
- [118] М. С. Мельников, П. В. Парамонов, “ C^1 -продолжение субгармонических функций с замкнутых жордановых областей в $\mathbb{R}^2$ ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:6 (2004), 105–118; англ. пер.: M. S. Mel’nikov, P. V. Paramonov, “ C^1 -extension of subharmonic functions from closed Jordan domains in $\mathbb{R}^2$ ”, *Izv. Math.*, **68**:6 (2004), 1165–1178.
- [119] П. В. Парамонов, “О C^1 -продолжении и C^1 -отражении субгармонических функций с областей Ляпунова–Дини на $\mathbb{R}^N$ ”, *Матем. сб.*, **199**:12 (2008), 79–116; англ. пер.: P. V. Paramonov, “ C^1 -extension and C^1 -reflection of subharmonic functions from Lyapunov–Dini domains into $\mathbb{R}^N$ ”, *Sb. Math.*, **199**:12 (2008), 1809–1846.
- [120] A. Boivin, P. M. Gauthier, P. V. Paramonov, “ C^m -subharmonic extension of Runge-type from closed to open subsets of $\mathbb{R}^N$ ”, *Тр. МИАН*, **279** (2012), 219–226.

М. Я. Мазалов (M. Ya. Mazalov)

Филиал ГОУ ВПО МЭИ (ТУ), Смоленск

E-mail: maksimmazalov@yandex.ru

Поступила в редакцию

18.10.2012

П. В. Парамонов (P. V. Paramonov)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: petr.paramonov@list.ru

К. Ю. Федоровский (K. Yu. Fedorovskiy)

Московский государственный технический

университет им. Н. Э. Баумана

E-mail: kfedorovs@yandex.ru