Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. М. Чирка, Голоморфные движения и униформизация голоморфных семейств римановых поверхностей, *УМН*, 2012, том 67, выпуск 6, 125–202

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9499>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 14:18:27

УДК 517.545+517.554

Голоморфные движения и униформизация голоморфных семейств римановых поверхностей

Е. М. Чирка

Изучаются условия, достаточные для одновременной униформизации голоморфных семейств римановых поверхностей. Основной метод основан на локальной конструкции голоморфных и почти голоморфных движений с последующим применением техники пространств Тейхмюллера. Голоморфные движения применяются также к близкой задаче о продолжении комплексных структур.

Библиография: 62 названия.

Ключевые слова: римановы поверхности, пространства Тейхмюллера, униформизация, голоморфные движения, устранимые особенности.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	126
1. Голоморфные семейства римановых поверхностей	127
1.1. Определения и комментарии к ним	127
1.2. Примеры	132
1.3. Сферы и торы	135
2. Голоморфные движения и униформизация	141
2.1. Классические голоморфные движения	141
2.2. Горизонтально голоморфные тривиализации	147
2.3. Униформизация локально тривиализуемых семейств	153
3. Голоморфные движения и пространства Тейхмюллера	156
3.1. Универсальные семейства	156
3.2. Редукция базы	160
3.3. Теорема Берса–Ройдена	164
4. Почти голоморфные движения	167
4.1. Квазилинейные уравнения Бельтрами	167
4.2. Краевая задача Римана–Гильберта	173
5. Униформизация некоторых семейств	180
5.1. Компактные поверхности с проколами	180
5.2. Семейства с диск-плоскими границами	185
5.3. Плоскости. Теорема Нишино	187

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 11-01-00495 и 11-01-12033-офи-м).

© Е. М. Чирка, 2012

6. Об устранимых особенностях комплексных структур	191
6.1. Семейства проколотых дисков	191
6.2. Устранение послонно дискретных особенностей	193
6.3. Комментарии	197
Список литературы	199

Введение

Основная тематика статьи – это одновременная униформизация голоморфных семейств римановых поверхностей. В отличие от индивидуальных римановых поверхностей, униформизация семейств далеко не всегда существует, и приводимые в статье положительные результаты в основном относятся к семействам, локально допускающим “горизонтально голоморфные” тривиализации, тесно связанные с униформизациями Берса над пространствами Тейхмюллера.

Основной инструмент построения униформизации при помощи расслоений Берса – это промежуточная конструкция так называемых голоморфных движений, т. е. семейств попарно непересекающихся голоморфных сечений проекции тотального пространства M семейства $\{M_\lambda\}$ на базу параметров B . Как показано в работах Эрла–Фоулера [20], [21], для любого семейства гиперболических римановых поверхностей над односвязной базой локальная (по параметру) тривиализация голоморфными движениями является необходимым и достаточным условием голоморфности классифицирующего отображения базы в соответствующее пространство Тейхмюллера, а само семейство при наличии такой тривиализации является прообразом “универсальной кривой Тейхмюллера” относительно этого отображения.

Практически все результаты статьи относятся к топологически локально тривиальным семействам, но в разделе 1 обсуждается также общая ситуация и приводятся примеры, в том числе неуниформизируемых топологически локально тривиальных семейств римановых поверхностей.

Для семейств сфер (см. [37]) и торов техника униформизации сравнительно простая, условия униформизируемости зависят от голоморфных свойств базы и наличия глобальных голоморфных сечений (п. 1.3).

Разделы 2 и 3 составляют теоретическую основу униформизации при помощи голоморфных движений. В разделе 2 исследуются голоморфные движения в семействах римановых поверхностей и доказываются теоремы об униформизации семейств, которые локально тривиализуются голоморфными движениями (теорема 2.1). В разделе 3 подключается техника пространств Тейхмюллера, доказываются теорема Эрла–Фоулера [20] об универсальности и теорема Берса–Ройдена [12] о продолжении голоморфных движений.

В разделе 4 разрабатывается техника построения голоморфных движений, основанная на краевой задаче Римана–Гильберта для решений специальных квазилинейных уравнений Бельтрами; свойства этих решений исследуются в п. 4.1.

В п. 5.1 показано, как строятся локальные горизонтально голоморфные тривиализации для семейств компактных римановых поверхностей рода > 1 (см.

[40], [34]) и для компактных поверхностей с проколами (см. [19]; о сферах с проколами см. [12]). Условия униформируемости семейств гиперболических римановых поверхностей принципиально отличаются от условий униформируемости семейств параболических и рациональных поверхностей: для последних основными являются комплексные условия на базу (разрешимость проблем Кузена) и на существование глобальных сечений, а для семейств гиперболических поверхностей достаточно всего лишь односвязности базы, но зато нужны условия на тотальные пространства семейств типа локальной псевдовыпуклости.

Голоморфные семейства римановых поверхностей, конформно эквивалентных комплексной плоскости $\mathbb{C}$ или накрываемых $\mathbb{C}$ (параболические поверхности), представляют самостоятельный интерес. Основной здесь является теорема Нишино [49], утверждающая, что голоморфное семейство плоскостей, параметризуемых единичным кругом $\mathbb{D}$, биголоморфно эквивалентно $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$, если пространство этого семейства является многообразием Штейна. В п. 5.3 приводится доказательство теоремы Нишино с помощью голоморфных движений, при более слабых условиях на тотальное пространство.

В п. 6.1 доказывается локальный аналог теоремы Нишино, который можно рассматривать как теорему о продолжении комплексных структур и как обобщение теоремы Гартогса об аналитичности особенностей. Этот результат обобщается в п. 6.2 на семейства кругов с конечными множествами проколов.

1. Голоморфные семейства римановых поверхностей

1.1. Определения и комментарии к ним. Голоморфное семейство римановых поверхностей – это тройка $\pi: M \rightarrow B$, где M, B – комплексные многообразия, π – голоморфное сюръективное отображение (проекция) и все слои $M_\lambda := \pi^{-1}(\lambda)$ – римановы поверхности. При этом M и B , которые всюду в дальнейшем предполагаются *линейно связными*, могут быть и бесконечномерными банаховыми многообразиями (например, в качестве B у нас неоднократно фигурируют бесконечномерные пространства Тейхмюллера). Аналогичное определение можно привести и в более общей категории комплексных пространств (с особенностями), но нам оно не понадобится.

Многообразие B называется *базой* голоморфного семейства (многообразием параметров), а M – *пространством* семейства $\{M_\lambda\}$.

Голоморфные семейства римановых поверхностей образуют категорию; отображение семейства $\pi: M \rightarrow B$ в семейство $\pi': M' \rightarrow B'$ – это пара голоморфных отображений $f: M \rightarrow M'$ и $g: B \rightarrow B'$ таких, что $\pi' \circ f = g \circ \pi$. Произвольные отображения $f: M \rightarrow M'$ с этим свойством мы называем *послойными*. Семейства $\pi: M \rightarrow B$, $\pi': M' \rightarrow B'$ называем (биголоморфно) *эквивалентными*, если существуют соответствующие биголоморфные отображения f, g .

Если $g: B' \rightarrow B$ – голоморфное отображение, то над B' естественно определяется семейство римановых поверхностей $M'_{\lambda'} := M_{g(\lambda')}$, дизъюнктное объединение M' которых имеет однозначно определяемую структуру комплексного многообразия, относительно которой послойно тождественное отображение $f: M' \rightarrow M$, $f|_{M'_{\lambda'}} \xrightarrow{\text{id}} M_{g(\lambda')}$ голоморфно (голоморфные функции на M'

в окрестности точки p' – это по определению прообразы голоморфных функций в окрестности $f(p')$ и функции вида $h \circ \pi'$, где h голоморфна в окрестности $\pi'(p')$ и $\pi'|_{M_{\lambda'}} \equiv \lambda'$ – проекция). Семейство $\pi': M' \rightarrow B'$ называется *прообразом* $\pi: M \rightarrow B$ относительно отображения g .

Семейство $\pi: M \rightarrow B$ называется *локально* топологически (гладко, голоморфно) *тривиальным*, если для всякого $\lambda \in B$ существуют окрестность $U \ni \lambda$ и гомеоморфизм (диффеоморфизм, бигоморфизм) $\psi: U \times M_\lambda \rightarrow \pi^{-1}(U)$ такие, что $\pi \circ \psi$ есть проекция $U \times M_\lambda$ на первый прямой сомножитель. В такой ситуации M является расслоенным пространством (топологическим, гладким, комплексным). В основном мы работаем далее с локально топологически тривиальными семействами.

Локально в M всякое голоморфное семейство бигоморфно тривиально, точнее, справедливо следующее.

ЛЕММА 1.1. Пусть $\pi: M \rightarrow B$ – голоморфное семейство некомпактных римановых поверхностей M_λ над конечномерным многообразием B . Тогда для всякого $\lambda \in B$ и всякой области $D \Subset M_\lambda$ существуют окрестность $U \ni \lambda$ и бигоморфное вложение (тривиализация) $h: U \times D \rightarrow M$ такие, что $h(0, p) \equiv p$ и $\pi \circ h(\lambda', p) = \lambda'$ для всех $\lambda' \in U$, $p \in D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как M_λ некомпактна, то на ней есть голоморфная функция f_λ такая, что df_λ не имеет нулей (глобальная локальная координата, см. [25]). Так как M_λ – многообразие Штейна, то по теореме Сью [55] существует окрестность $V \supset M_\lambda$ в M , которая тоже является многообразием Штейна. А тогда на V есть голоморфная функция f такая, что $f|_{M_\lambda} = f_\lambda$, и, значит, существуют окрестности $U \ni \lambda$ в B и $W \supset D$ в M такие, что каждая связная компонента уровня $f = \text{const}$ в W проектируется на U взаимно однозначно. Такую компоненту, содержащую точку $p \in W$, обозначим s_p и положим $h^{-1}(p) = (\pi(p), s_p \cap M_\lambda)$. Таким образом определено очевидно голоморфное и взаимно однозначное (следовательно, бигоморфное) отображение W на $U \times D$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. При условиях леммы, пусть X – замкнутое подмножество в M такое, что сужение $\pi|_X$ собственное (прообраз компакта – компакт). Тогда семейство голоморфных сечений π над B со значениями в X компактно, т.е. из всякой последовательности таких сечений выделяется подпоследовательность, сходящаяся равномерно на компактных подмножествах в B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{s_n\}$ – последовательность таких сечений. Покроем X счетным семейством областей W_j из леммы 1.1 таких, что $U_j = \pi(W_j)$ – координатные шары и горизонтальная граница каждой W_j , т.е. множество $\partial W_j \cap \pi^{-1}(U_j)$, не пересекает X .

Так как W_j – гиперболические многообразия по построению, то отображения $s_n|_{U_j} \rightarrow W_j$ не увеличивают метрику Кобаяши и, таким образом, образуют равномерно непрерывное семейство (топология, индуцируемая на гиперболическом многообразии метрикой Кобаяши, совпадает с обычной топологией). Поэтому в каждой W_j из последовательности $\{s_n|_{U_j}\}$ выделяется подпоследовательность, равномерно сходящаяся внутри U_j , а искомая подпоследовательность выделяется затем диагональным процессом. Следствие доказано.

Униформизация комплексного n -мерного многообразия M – это голоморфное накрытие его некоторой областью Ω в $\mathbb{C}^n$ или в каком-нибудь пополнении $\mathbb{C}^n$ типа $\mathbb{CP}_n$, т. е. представление M в виде Ω/Γ , где Γ – дискретная группа голоморфных автоморфизмов Ω без неподвижных точек (см. [9]). Существование такого накрытия в какой-то мере упрощает анализ на M , сводя его к анализу соответствующих объектов на области Ω (где есть глобальные голоморфные или однородные координаты), с контролем инвариантности относительно группы Γ .

Униформизуемость многомерных ($n > 1$) комплексных многообразий – событие довольно исключительное и эта проблема обычно формулируется как проблема открытой вложимости соответствующих *универсальных* накрытий в $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{CP}_n$ и т. п. В одномерном случае ситуация кардинально проще: по теореме Пуанкаре–Кёбе всякая риманова поверхность униформизируется, ее универсальная накрывающая конформно (= биголоморфно) эквивалентна сфере Римана $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{CP}_1$, комплексной плоскости $\mathbb{C}$ или единичному кругу $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$. Поэтому естественно воспользоваться такой замечательной особенностью одномерных многообразий для униформизации многомерных многообразий, используя их возможные представления в виде пространств, расслоенных голоморфными семействами римановых поверхностей, как выше.

В связи с этим (и с другими задачами, где фигурируют семейства римановых поверхностей) полезно решить предварительную задачу *одновременной униформизации* такого семейства $\pi: M \rightarrow B$, т. е. найти область Ω в $B \times \widehat{\mathbb{C}}$, *послойно накрывающую* M , точнее область Ω вместе с сюръективным голоморфным отображением $f: \Omega \rightarrow M$ таким, что $\pi \circ f$ – прямая проекция Ω на B и $\Omega_\lambda \rightarrow M_\lambda$ – накрытие для каждого $\lambda \in B$ (т. е. все слои Ω_λ связные и у каждой точки $p \in M_\lambda$ есть окрестность $U_\lambda \ni p$ в M_λ такая, что всякая связная компонента множества $f^{-1}(U_\lambda) \subset \Omega_\lambda$ проектируется на U_λ взаимно однозначно). *Всюду в дальнейшем под униформизацией семейств римановых поверхностей подразумевается именно такая одновременная униформизация.*

Отображение f не обязательно является накрытием (см. пример 1.1 в п. 2.1), но если семейство $\pi: M \rightarrow B$ топологически локально тривиальное, то послойное накрытие ψ является также обычным накрытием $\Omega \rightarrow M$.

Отметим, что *если семейство $\{M_\lambda\}$ не содержит сфер и допускает послойно универсальное накрытие (т. е. послойное накрытие с односвязными слоями), то последнее является локально гладко тривиальным семейством* (см. [46]) и это позволяет подключить к проблеме униформизации технику почти комплексного анализа в $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ (см., скажем, пример 1.2).

Если $\pi: M \rightarrow B$ допускает *непрерывное* (не обязательно голоморфное) глобальное сечение s , то среди всех возможных послойных голоморфных накрытий (не обязательно областями в $B \times \widehat{\mathbb{C}}$) есть универсальный объект – накрытие, в которое поднимается сечение s и которое послойно накрывает любое другое послойное накрытие с этим свойством. Это так называемое *многообразие универсальных накрывающих* $\widehat{M}^s$ семейства $\pi: M \rightarrow B$. Его точками являются пары $(p, [\gamma])$, где p – точка в M и $[\gamma]$ – гомотопический класс путей на $M_{\pi(p)}$ с началом $s(\pi(p))$ и концом p . По лемме 1.1, существуют окрестность W пути $\gamma \subset M_\lambda$, $\lambda = \pi(p)$, в M и голоморфный ретракт $r: W \rightarrow W \cap M_\lambda$. Пусть

V_0, V_1 – односвязные окрестности в M_λ точек $s(\lambda)$ и p соответственно. Окрестность точки $(p, [\gamma])$ в $\widetilde{M}^s$ по определению есть множество точек $(q, [\gamma'])$ таких, что $q \in r^{-1}(V_1)$ и путь $r \circ \gamma'$ гомотопен γ на M_λ в классе путей с началом в V_0 и концом в V_1 . Эти окрестности образуют базис топологии на $\widetilde{M}^s$, относительно которой отображение (проекция) $\widetilde{M}^s \ni (p, [\gamma]) \mapsto p \in M$ непрерывно, причем у каждой точки из $\widetilde{M}^s$ есть окрестность, которая проектируется на свой образ в M взаимно однозначно. Поэтому на $\widetilde{M}^s$ однозначно определена комплексная структура, которая является поднятием таковой из M и однозначно определяется условием, что проекция $\tilde{\pi}: \widetilde{M}^s \rightarrow M$ голоморфна.

По построению, проекция $\tilde{\pi} \circ \pi$ допускает глобальное голоморфное сечение $\lambda \mapsto (s(\lambda), [s(\lambda)])$, где $[s(\lambda)]$ – класс замкнутых путей в M_λ с началом $s(\lambda)$, гомотопных постоянному пути, причем любое сечение проекции $\pi: M \rightarrow B$, послойно гомотопное s , поднимается до сечения проекции $\tilde{\pi} \circ \pi: \widetilde{M}^s \rightarrow B$. Слои проекции $\tilde{\pi} \circ \pi$ являются универсальными накрывающими соответствующих M_λ (отсюда название), и универсальность $\widetilde{M}^s$ в указанном классе послойных накрытий доказывается элементарно (нам она не понадобится).

Отметим, что многообразие $\widetilde{M}^s$ существенно зависит от гомотопического класса базового глобального сечения s в M (гомотопия послойная) и послойная униформизуемость или неуниформизуемость $\widetilde{M}^s$ может зависеть от того, какое глобальное сечение s выбрано в качестве базового.

Важную роль в изучении голоморфных семейств римановых поверхностей играют различные понятия псевдовыпуклости (см., например, [61], [62], [44]). Самым слабым и относительно просто проверяемым условием такого типа является условие диск-выпуклости. Комплексное многообразие M называется диск-выпуклым, если для любого компакта $K \subset M$ найдется компакт $\hat{K} \subset M$ такой, что если $f: \mathbb{D} \rightarrow M$ – голоморфный диск с $f(\partial\mathbb{D}) \subset K$ (т. е. $f(\mathbb{D}) \cup K$ – компакт), то $f(\mathbb{D}) \subset \hat{K}$. Для наших целей в основном достаточно еще более слабого условия, с весьма специальными голоморфными дисками.

Голоморфное семейство $\pi: M \rightarrow B$ назовем *трансверсально диск-выпуклым*, если для каждой точки $\lambda' \in B$ существует окрестность $U' \ni \lambda'$ со следующим свойством: для всякого вложенного голоморфного диска $h: \mathbb{D} \rightarrow U'$ с $h(0) = \lambda'$ и всякого компакта $K \in \pi^{-1}(h(\partial\mathbb{D}))$ найдется компакт $\hat{K} \subset M$ такой, что если $f: \mathbb{D} \rightarrow M$ – замкнутый голоморфный диск, $\pi \circ f = h$ (“горизонтальный” диск) и $f(\partial\mathbb{D}) \subset K$, то $f(\mathbb{D}) \subset \hat{K}$. (Голоморфность f на $\mathbb{D}$ означает, что f продолжается до голоморфного отображения $f: U \rightarrow M$ некоторого большего круга $U \supset \mathbb{D}$; замкнутый голоморфный диск – это отображение, непрерывное в $\mathbb{D}$ и голоморфное в $\mathbb{D}$.)

Если для всякой последовательности замкнутых голоморфных дисков $f_n: \mathbb{D} \rightarrow M$, вложенных в слой M_λ (“вертикальные” диски), из равномерной сходимости $f_n|_{\partial\mathbb{D}}$ следует равномерная сходимость f_n в $\mathbb{D}$, то семейство $\pi: M \rightarrow B$ будем называть *вертикально диск-выпуклым*.

Согласно следствию 1.1, условие трансверсальной диск-выпуклости эквивалентно следующему: если U – окрестность из определения, $h: \mathbb{D} \rightarrow U$ – вложенный голоморфный диск, $f_n: \mathbb{D} \rightarrow M$, $n = 0, 1, \dots$, – замкнутые голоморфные диски с $\pi \circ f_n = h$ и K – компакт в M такой, что $f_n(\partial\mathbb{D}) \subset K$ для любого n , то

можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, равномерно внутри $\mathbb{D}$ сходящуюся к некоторому диску $f: \mathbb{D} \rightarrow \pi^{-1}(U)$, причем замыкание $f(\mathbb{D})$ в M – тоже компакт.

Следующее граничное свойство голоморфных дисков весьма полезно в приложениях этого свойства.

ЛЕММА 1.2. Пусть $\pi: M \rightarrow U$ – голоморфное семейство римановых поверхностей над областью $U \supset \overline{\mathbb{D}}$ в $\mathbb{C}_\zeta$. Пусть $f_n: \mathbb{D} \rightarrow M$ – голоморфные сечения проекции π , равномерно внутри $\mathbb{D}$ сходящиеся к сечению $f: \mathbb{D} \rightarrow M$. Предположим, что существует компакт $K \subset \pi^{-1}(\partial\mathbb{D})$ такой, что все множества $K \cup f_n(\mathbb{D})$ компактны. Тогда для каждого $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ множество предельных точек диска $f(\mathbb{D})$ на $M_\zeta \setminus K_\zeta$ либо пусто, либо является объединением некоторых связных компонент множества $M_\zeta \setminus K_\zeta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать утверждение для $\zeta = 1$. Пусть $a \in M_1 \setminus K_1$ – предельная точка для $f(\mathbb{D})$ и z – голоморфная функция в окрестности a на M такая, что $z(a) = 0$, $d\zeta \wedge dz \neq 0$, т.е. ζ, z – голоморфные координаты в окрестности $V^0 \ni a$ на M , не пересекающей K . Мы хотим показать, что $f(\mathbb{D})$ содержит окрестность a на M_1 .

Предположим противное. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что круг $\Delta: \zeta = 1, |z| \leq \delta$ принадлежит V^0 , но окружность $\partial\Delta: \zeta = 1, |z| = \delta$ не принадлежит $f(\mathbb{D})$. А тогда существуют $b \in (\text{int } \Delta) \cap \overline{f(\mathbb{D})}$ и многочлен $p(z)$ такие, что $p(z(b)) = 1$ и $|p| < 1$ на $\Delta \cap \overline{f(\mathbb{D})} \setminus b$.

Пусть $r > 0$ таково, что бикруг $V: |\zeta - 1| \leq r, |z| \leq \delta$ содержится в V^0 . Обозначим через X пересечение V с замкнутым множеством $\overline{f(\mathbb{D})} \bigcup_n \overline{f_n(\mathbb{D})}$. Так как $|p| < 1$ на компакте $X \cap \partial\Delta$ (возможно, пустом), то существуют $\varepsilon > 0, \theta < 1$ такие, что $|p| < \theta$ на $X \cap \{|\zeta - 1| \leq \varepsilon, |z| = \delta\}$. Положим $q = p(z)((1 + \zeta)/2)^N$, $N \in \mathbb{N}$. Так как $|(1 + \zeta)/2| < 1$ на компакте $X \cap \{|\zeta - 1| \geq \varepsilon\}$, то $|q| < \theta$ на $X \setminus (V \cap \{|\zeta| = 1\})$ при достаточно большом N .

Так как $\overline{f_n(\mathbb{D})}$ не пересекает множество $V \cap \{|\zeta| = 1\}$, то по принципу максимума $|q| < \theta$ на $f_n(\mathbb{D}) \cap V$. Так как точка $b \in \overline{f(\mathbb{D})}$ – предельная для $\bigcup f_n(\mathbb{D})$, то $|q(b)| \leq \theta$, в противоречии с тем, что $q(b) = 1$ по построению.

Полученное противоречие показывает, что $\text{int } \Delta \subset \overline{f(\mathbb{D})}$, т.е. множество $\overline{f(\mathbb{D})} \cap (M_1 \setminus K_1)$ открыто. Так как это множество, очевидно, и замкнуто в $M_1 \setminus K_1$, то оно является объединением (возможно, пустым) некоторого семейства связных компонент множества $M_1 \setminus K_1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.3. Пусть $\widetilde{M} \xrightarrow{\tilde{\pi}} M \rightarrow B$ – голоморфное послойное накрытие трансверсально (вертикально) диск-выпуклого семейства $\pi: M \rightarrow B$. Тогда, если все слои $\widetilde{M}_\lambda$ односвязные и некомпактные, то семейство $\pi \circ \tilde{\pi}: \widetilde{M} \rightarrow B$ тоже трансверсально (вертикально) диск-выпуклое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть U – окрестность точки $\lambda \in B$ из определения трансверсальной диск-выпуклости M , $h: \overline{\mathbb{D}} \rightarrow U$ – голоморфный диск и $\tilde{K}$ – компакт в $(\tilde{\pi} \circ \pi)^{-1}(U)$. Предположим, что существует последовательность замкнутых голоморфных дисков $\{\tilde{f}_n: \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \widetilde{M}\}$ таких, что $\pi \circ \tilde{\pi} \circ \tilde{f}_n = h$, все $\tilde{f}_n(\partial\mathbb{D}) \subset K$, но замыкание объединения любой подпоследовательности образов этих дисков некомпактно. Положим $K = \tilde{\pi}(\tilde{K})$ и $f_n = \tilde{\pi} \circ \tilde{f}_n$. Тогда $f_n(\partial\mathbb{D}) \subset K$

и, по условию, существует компакт $\hat{K} \subset M$ такой, что $f_n(\mathbb{D}) \subset \hat{K}$. Применяя следствие 1.1 к семейству $\pi^{-1}(h(U \supset \mathbb{D}))$ и компакт $X = \hat{K}$, из семейства f_n выделяем подпоследовательность, равномерно сходящуюся внутри $\mathbb{D}$ к некоторому диску $f: \mathbb{D} \rightarrow M$. Чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что $f_n \rightarrow f$.

Пусть V – окрестность $f(\mathbb{D})$ в $\pi^{-1}(h(\mathbb{D}))$, послойно по себе стягиваемая на $f(\mathbb{D})$ (сечения – топологические круги). Тогда для любого $r \in (0, 1)$ найдется номер $n(r)$ такой, что $f_n(r\mathbb{D}) \subset V$ для всех $n \geq n(r)$. Так как $\tilde{M}_\lambda \rightarrow M_\lambda$ – накрытия, то для всякого $\lambda = h(\zeta) \in h(r\mathbb{D})$ существует однозначно определенный диск $\tilde{V}_\lambda$, содержащий точку $\tilde{f}_{n(r)}(\zeta)$ и такой, что $\tilde{\pi}(\tilde{V}_\lambda) = V_\lambda$. Так как $f_n \rightarrow f$, то отсюда следует, что $\tilde{f}_n$ равномерно на $r\mathbb{D}$ сходятся к некоторому голоморфному диску $\tilde{f}^r: r\mathbb{D} \rightarrow \tilde{M}$ такому, что $\tilde{\pi} \circ \tilde{f}^r = f$; при этом диски $\tilde{V}_\lambda$ образуют окрестность $\tilde{f}^r(r\mathbb{D})$. При увеличении r диски $\tilde{V}_\lambda$, построенные для меньших его значений, не меняются, поэтому существует голоморфный диск $\tilde{f}: \mathbb{D} \rightarrow M$ такой, что $\tilde{f}_n \rightarrow \tilde{f}$ равномерно внутри $\mathbb{D}$, $\tilde{\pi} \circ \tilde{f} = f$ и $\tilde{f}(\mathbb{D}) \subset \tilde{V} = \bigcup \tilde{V}_{h(\zeta)}$.

Предположим, что $\tilde{K} \cup \tilde{f}(\mathbb{D})$ – не компакт. Тогда по лемме 1.2 существует $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ такое, что замыкание диска $\tilde{f}(\mathbb{D})$ содержит связную компоненту D с некомпактным замыканием множества $\tilde{M}_{h(\zeta)} \setminus \tilde{K}_{h(\zeta)}$. Так как $\tilde{M}_\lambda$ односвязные по условию (т.е. $\tilde{M}_\lambda \rightarrow M_\lambda$ – универсальные накрытия), то $\tilde{\pi}(D) = M_\lambda$ и, значит, $\tilde{f}(\mathbb{D})$ содержит всё $M_{h(\zeta)}$. Но это противоречит тому, что $\tilde{f}(\mathbb{D})$ – компакт, а слои M_λ некомпактны. Таким образом, доказано, что множество $\tilde{K} \cup \tilde{f}(\mathbb{D})$ компактно, и, ввиду произвольности $\{\tilde{f}_n\}$, трансверсальная диск-выпуклость семейства $\pi \circ \tilde{\pi}: \tilde{M} \rightarrow B$ доказана.

Пусть теперь M – вертикально диск-выпуклое и $\tilde{f}_n: \mathbb{D} \rightarrow \tilde{M}$ – замкнутые голоморфные диски, непрерывные в $\overline{\mathbb{D}}$, вложенные соответственно в слои $\tilde{M}_{\lambda_n}$ и равномерно сходящиеся на $\partial\mathbb{D}$, $\tilde{f}_n(1) \rightarrow a \in \tilde{M}_{\lambda_0}$. Тогда $f_n := \tilde{\pi} \circ \tilde{f}_n$ равномерно сходятся к замкнутому голоморфному диску $f: \mathbb{D} \rightarrow M_{\lambda_0}$. Так как $\tilde{\pi}|_{\tilde{M}_{\lambda_0}} \rightarrow M_{\lambda_0}$ – накрытие, то существует однозначно определяемое поднятие $\tilde{f}$ этого диска на $\tilde{M}_{\lambda_0}$ такое, что $\tilde{f}(1) = a$, и, значит, $\tilde{f}_n \rightrightarrows \tilde{f}$ на $\partial\mathbb{D}$. По лемме 1.1, существует послойная биголоморфная тривиализация окрестности $\tilde{f}(\mathbb{D})$ в $\tilde{M}$, содержащая все $\tilde{f}_n(\mathbb{D})$ при больших n . По принципу максимума в этой окрестности, $\tilde{f}_n \rightrightarrows \tilde{f}$ в $\mathbb{D}$. Лемма доказана.

1.2. Примеры.

ПРИМЕР 1.1. Послойное накрытие в общем не является накрытием. Например, пусть M есть область $\{(\lambda, w) \in \mathbb{C}^2 : \lambda w \neq -1\}$ с обычной проекцией $(\lambda, w) \mapsto \lambda$. Тогда отображение

$$\mathbb{C}_{\lambda, z}^2 \ni (\lambda, z) \mapsto \left(\lambda, \frac{e^{\lambda z} - 1}{\lambda} \right) \in M, \quad (0, z) \mapsto (0, z)$$

является послойным голоморфным накрытием, но прообраз каждой точки $(0, w)$ единственный, а над каждой (λ, w) , $\lambda \neq 0$, – счетное число прообразов.

ПРИМЕР 1.2. Простейшие примеры глобально неуниформизируемых семейств – это нетривиальные голоморфные линейные расслоения, например стандартное расслоение гиперплоского сечения над $\mathbb{CP}_1 = \hat{\mathbb{C}}$ (база односвязная). Локально

такие семейства униформируемы просто по определению голоморфных расслоений, и причины глобальной неуниформируемости во многом чисто топологические. Но топологическая тривиальность базы (например, стягиваемость) в общем тоже ничего не гарантирует, даже для слоений на комплексные плоскости.

Как отмечалось выше, многообразия универсальных накрывающих с голоморфными базовыми сечениями образуют локально гладко тривиальные семейства односвязных поверхностей с глобальными голоморфными сечениями, так называемые *косые цилиндры* (см. [35], [37], [52]). Униформируемость косого цилиндра эквивалентна его голоморфной послойной вложимости в $B \times \widehat{\mathbb{C}}$, что в общем невозможно даже локально.

В качестве примера рассмотрим семейство $\mathbb{C}_\lambda \times \mathbb{C}_w$ с нестандартной комплексной структурой J , относительно которой проекция $(\lambda, w) \mapsto \lambda$ (т.е. функция λ) голоморфна. В качестве базовой формы типа $(1, 0)$ относительно J возьмем, кроме $d\lambda$, форму $dw + w^3 d\bar{\lambda}$. Тогда функции вида $h(\lambda) + 2\bar{\lambda} - 1/w^2$, где h голоморфна в $D \subset \mathbb{C}$, являются J -голоморфными в области $D \times \mathbb{C}$ и, например, $w/(1 - 2\bar{\lambda}w^2)^{1/2}$ есть вертикальная координата в окрестности $\mathbb{C} \times 0$. Так как $w \mapsto 2\bar{\lambda} - 1/w^2$ при фиксированном λ является двулиственным разветвленным накрытием $\mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus 0$, то слои семейства $(\mathbb{C}_\lambda \times \mathbb{C}_w, J)$ конформно эквивалентны $\mathbb{C}$.

Предположим, что это семейство над какой-то областью $D \subset \mathbb{C}_\lambda$ униформируемо, т.е. в $D \times \widehat{\mathbb{C}}_z$ (со стандартной структурой и однолистной мероморфной в слоях функцией z) существует область Ω вместе с биголоморфизмом $F : \Omega \rightarrow (D \times \mathbb{C}, J)$, сохраняющим проекцию. Тогда $f = z \circ F^{-1}$ – мероморфная функция в $(D \times \mathbb{C}_w, J)$, однолистная в слоях. Так как сужения $dw + w^3 d\bar{\lambda}$ на $\lambda \times \mathbb{C}$ равны сужениям dw , то f – дробно-линейная функция по w при каждом фиксированном $\lambda \in D$. Так как f является J -мероморфной функцией, то $df = f_\lambda d\lambda + f_w(dw + w^3 d\bar{\lambda})$ вне полюсов f , т.е. $f_{\bar{\lambda}} = w^3 f_w$, из чего ясно, что f не может быть линейной по w ни при каком фиксированном λ . Таким образом, $f(\cdot, w) = a/(w - c) + b$ в Ω с функциями a, b, c , гладкими в D , и $f_{\bar{\lambda}}$ должна равняться $w^3 f_w = -aw^3/(w - c)^2$. Но $f_{\bar{\lambda}}$ ограничена в окрестности $w = \infty$, а $w^3 f_w \rightarrow \infty$ при $w \rightarrow \infty$, и это противоречие показывает, что для любой области $D \subset \mathbb{C}$ семейство $(D \times \mathbb{C}, J) \rightarrow D$ не униформируемо.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Если вместо w^3 в определении J поставить w^2 , то соответствующее семейство плоскостей, как легко видеть, будет биголоморфно эквивалентным семейству $(\mathbb{C}_\lambda \times \widehat{\mathbb{C}}_z) \setminus \{z = \bar{\lambda}\}$ (“мероморфно униформируемо”), но оно не эквивалентно послойно никакой области в $\mathbb{C}_{\lambda, z}^2$ (поскольку тогда соответствующая функция f , как выше, линейная, а не квадратичная по w – с тем же противоречием).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Многообразие $(D \times \mathbb{C}, J)$ для любой области $D \subset \mathbb{C}$ не является псевдовыпуклым. В самом деле, пусть $D \supset \{|\lambda - \lambda_0| \leq r\}$. Функции $2|\lambda - \lambda_0|^2 + \varepsilon^2 - (\lambda - \lambda_0)/w^2$, $\varepsilon > 0$, J -голоморфны в $D \times (\mathbb{C} \setminus 0)$, поэтому поверхности их нулей $S_\varepsilon : w^2 = (\lambda - \lambda_0)/(2|\lambda - \lambda_0|^2 + \varepsilon^2)$ J -голоморфны в $D \times \mathbb{C}$. Граница поверхности $S_\varepsilon \cap \{|\lambda - \lambda_0| < r\}$ при любом $\varepsilon > 0$ лежит в компакте $\{|\lambda - \lambda_0| = r, |w| \leq 1/r\}$, а точки $(\lambda_0 + \varepsilon, 1/\sqrt{3\varepsilon}) \in S_\varepsilon$ стремятся к (λ_0, ∞)

при $\varepsilon \rightarrow 0$, что противоречит псевдовыпуклости. В частности, $(D \times \mathbb{C}, J)$ не являются многообразиями Штейна.

В приложениях, связанных с голоморфными слоениями на многообразиях Штейна, многообразия универсальных накрывающих (соответствующие штейновым сечениям) сами являются многообразиями Штейна (см. [35], [36]). Поэтому естественно изучить униформизируемость косых цилиндров с этим дополнительным свойством.

Первый пример неуниформизируемого косоуго цилиндра Штейна построил А. Глущок [28], который показал также [29], что в качестве такого цилиндра можно взять многообразие универсальных накрывающих некоторого алгебраического слоения на аффинной алгебраической комплексно двумерной поверхности без особенностей, причем соответствующее семейство не униформизируемо ни над какой областью в базе. Примеры довольно сложные и мы здесь ограничимся ссылками.

ПРИМЕР 1.3. Из трансверсальной плюс вертикальной диск-выпуклости голоморфного семейства не следует обычная диск-выпуклость пространства этого семейства. В самом деле, область $M = \mathbb{C}^2 \setminus (0, 0)$ является пространством семейства римановых поверхностей $\pi: M \rightarrow \mathbb{C}$ с $\pi(z) = z_2^2 - z_1^3$. Сама M очевидно не диск-выпуклая.

С другой стороны, пусть $h: \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$ – голоморфный вложенный диск, $h(0) = 0$, K – компакт в $\pi^{-1}(h(\partial\mathbb{D}))$ и $f_n: \mathbb{D} \rightarrow M$ – голоморфные диски такие, что $\pi \circ f_n = h$ и множества $K \cup f_n(\mathbb{D})$ компактные. Тогда можно считать, что f_n сходятся к некоторому $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}^2$ равномерно внутри $\mathbb{D}$ и $\pi \circ f = h$.

Предположим, что $f(0) = (0, 0)$. Тогда $f(\zeta) = (z_1(\zeta), z_2(\zeta))$, обе функции $z_j(\zeta)$ равны нулю при $\zeta = 0$, и, значит, функция $z_2^2(\zeta) - z_1^3(\zeta)$ имеет в 0 нуль не менее чем второго порядка. Но по условию $\pi \circ f = h$ – вложение, т. е. нуль должен быть простым. Это противоречие показывает, что семейство $\pi: M \rightarrow \mathbb{C}$ трансверсально диск-выпуклое.

Пусть теперь $f_n: \overline{\mathbb{D}} \rightarrow M$ – замкнутые вложенные вертикальные голоморфные диски, $f_n(\overline{\mathbb{D}}) \subset S_n = \{z_2^2 - z_1^3 = c_n\}$ для некоторой последовательности $c_n \rightarrow 0$ и $f_n \rightrightarrows f$ в $\overline{\mathbb{D}}$, $f(\partial\mathbb{D}) \subset M$. Предположим, что $f(\mathbb{D}) \ni (0, 0)$. Тогда $f(\overline{\mathbb{D}}) \subset S_0: z_2^2 = z_1^3$ и поэтому существует $\delta > 0$ такое, что $f(\mathbb{D}) \supset S \cap \{|z_1| \leq \delta\}$. Но тогда $f_n(\mathbb{D})$ при достаточно больших n содержат окружности $S_n \cap \{|z_1| = \delta\}$. Так как $f_n: \mathbb{D} \rightarrow S_n$ – вложения и любая замкнутая жорданова кривая в $\mathbb{D}$ ограничивает односвязную область, то $f_n(\mathbb{D}) \cap \{|z_1| < \delta\}$ должны быть топологическими кругами. С другой стороны, при большом n , $n > n(\delta)$, поверхность $S_n \cap \{|z_1| < \delta\}$ есть тор без топологического круга, с нетривиальным циклом $S_n \cap \{z_1 \in \gamma\}$, где γ есть, например, отрезок, соединяющий точки $c_n^{1/3} e^{\pm i\pi/3}$ (цикл, исчезающий при $n \rightarrow \infty$). Это противоречие показывает, что $f(\overline{\mathbb{D}}) \subset M$, и, значит, семейство $\pi: M \rightarrow \mathbb{C}$ является вертикально диск-выпуклым.

Аналогично можно доказать, что для любого многочлена p в $\mathbb{C}^2$ с неприводимыми уровнями и конечным критическим множеством σ семейство $p: \mathbb{C}^2 \setminus \sigma \rightarrow \mathbb{C}$ является трансверсально и вертикально диск-выпуклым (трансверсальная диск-выпуклость следует, как выше, из принципа аргумента, а вертикальная – из наличия исчезающих циклов в окрестности каждой критической точки).

1.3. Сферы и торы. Голоморфные семейства сфер локально тривиальны. Поскольку все сферы биголоморфно эквивалентны, то это утверждение является простым частным случаем теоремы Грауэрта–Фишера [23]. Мы приведем здесь другое доказательство, в основном следуя [37].

Пусть $\pi: M \rightarrow B$ – голоморфное семейство над произвольным комплексным банаховым многообразием B , слои M_λ которого конформно эквивалентны сфере Римана $\widehat{\mathbb{C}}$. Предположим, что есть три глобальных голоморфных сечения s_0, s_1, s_∞ проекции π с попарно непересекающимися образами. Тогда в каждом слое M_λ однозначно определена мероморфная функция, равная j в точках $s_j(\lambda)$, соответственно. Покажем, что эта функция мероморфна на M (хотя даже непрерывность ее не очевидна). Доказательство разобьем на две части.

Шаг 1. $B = \mathbb{D}$. В этом случае (как и в случае любого конечномерного B) $\pi: M \rightarrow B$ есть гладкое расслоение по теореме Эресмана [22]. Так как у нас есть три глобальных сечения, то M послойно диффеоморфно $B \times \widehat{\mathbb{C}}$, причем диффеоморфизм $\phi: B \times \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow M$ можно выбрать так, что он сохраняет ориентацию и $\phi(\lambda, j) = s_j(\lambda)$, $j = 0, 1, \infty$ (на $\widehat{\mathbb{C}}$ фиксируем глобальную мероморфную координату w). Комплексная структура на M при этом индуцирует на $B \times \widehat{\mathbb{C}}$ комплексную структуру J , в общем отличную от стандартной. Так как диффеоморфизм ϕ послойный, то λ остается голоморфной функцией и, значит, $d\lambda$ – дифференциал типа $(1, 0)_J$ (т. е. типа $(1, 0)$ относительно структуры J).

Слои $\lambda \times \widehat{\mathbb{C}}$ голоморфны относительно J , и сужение J на такой слой однозначно определяется функцией $\mu(\lambda, \cdot) \in L^\infty(\mathbb{C})$ такой, что $dw + \mu(\lambda, w)d\bar{w}$ – форма типа $(1, 0)_{J|_{\lambda \times \mathbb{C}}}$. При замене w на $\omega = 1/w$ функция μ преобразуется в $\mu(\lambda, 1/\omega)\omega^2/\bar{\omega}^2$. Так как ϕ сохраняет ориентацию и $\widehat{\mathbb{C}}$ – компакт, то $|\mu(\lambda, \cdot)| \leq k(\lambda) < 1$ с некоторой непрерывной функцией k . Так как ϕ – диффеоморфизм, то функция $\mu(\lambda, w)$ гладкая и все ее частные производные по $\lambda, \bar{\lambda}$ тоже гладкие в $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ и равномерно ограниченные, поскольку структура J гладкая на $\mathbb{D} \times \widehat{\mathbb{C}}$ (см. преобразование μ при замене w на $1/w$). Таким образом, отображение $B \ni \lambda \mapsto \mu(\lambda, \cdot) \in L^\infty(\mathbb{C})$ гладкое. А тогда, по теореме Альфорса–Берса [1], [2], для всякой фиксированной $\lambda \in B$ существует единственное гомеоморфное в $\mathbb{C}$ решение $z(\lambda, w)$ уравнения Бельтрами $z_{\bar{w}} = \mu(\lambda, \cdot)z_w$, нормированное условиями $z(\lambda, 0) = 0$, $z(\lambda, 1) = 1$, причем функция z гладкая на $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$.

Так как $dz = z_w(dw + \mu(\lambda, \cdot)d\bar{w})$ на $\lambda \times \mathbb{C}$, то z является J -голоморфной функцией на каждом слое и поэтому $\bar{\partial}_J z$, т. е. компонента dz типа $(0, 1)_J$, уже на всем $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ имеет вид $a d\bar{\lambda}$ с гладкой функцией $a = \partial z(\lambda, w)/\partial \bar{\lambda}$, которую мы далее рассматриваем как функцию от λ, z . Таким образом, формы $d\lambda$ и $\partial_J z = dz - a d\bar{\lambda}$ образуют на $\mathbb{D} \times \mathbb{C}_z$ базис форм типа $(1, 0)_J$.

Так как J – комплексная структура (т. е. в каждой точке есть локальные J -голоморфные координаты), то форма

$$d\partial_J z = \bar{\partial}_J \partial_J z = -(a_z dz + a_{\bar{z}} d\bar{z} + a_\lambda d\lambda) \wedge d\bar{\lambda}$$

имеет нулевую компоненту типа $(0, 2)_J$. Так как $dz \wedge d\bar{\lambda} = \partial_J z \wedge d\bar{\lambda}$ и $d\lambda \wedge d\bar{\lambda}$ – формы типа $(1, 1)_J$, а

$$d\bar{z} \wedge d\bar{\lambda} = (d\bar{z} - \bar{a} d\lambda) \wedge d\bar{\lambda} + \bar{a} d\lambda \wedge d\bar{\lambda}$$

имеет ненулевую $(0, 2)_J$ -компоненту, то отсюда следует, что $a_{\bar{z}} \equiv 0$, т. е. функция $a(\lambda, z)$ голоморфна по z (в обычном смысле).

Так как J – структура на $\mathbb{D} \times \widehat{\mathbb{C}}$ и функция a определяется по J однозначно, то в результате замены $z \mapsto \zeta = 1/z$ базисом $(1, 0)_J$ -форм на $\mathbb{D} \times (\mathbb{C} \setminus 0)$ станут $d\lambda$ и $d\zeta + \zeta^2 a(\lambda, 1/\zeta) d\bar{\lambda}$, причем функция $\zeta^2 a(\lambda, 1/\zeta)$ должна (вместе с J) гладким образом продолжаться на все $\mathbb{D} \times \mathbb{C}_\zeta$. Так как $a(\lambda, z)$ голоморфна по z , то из этого следует, что a есть многочлен по z степени не выше 2. Так как $\mathbb{D} \times \infty_z$ – голоморфный диск относительно J , соответствующий $\zeta = 0$ (см. нормировки ϕ и z), то сужение на него (продолженной) $(1, 0)_J$ -формы $d\zeta + \zeta^2 a(\lambda, 1/\zeta) d\bar{\lambda}$ должно быть пропорционально $d\lambda$. Из этого очевидно следует, что a – многочлен по z степени не выше 1, $a(\lambda, z) = a_0(\lambda) + a_1(\lambda)z$. Так как $\mathbb{D} \times 0$ – тоже J -голоморфный диск и сужение на него $\partial_J z$ равно $-a_0(\lambda) d\bar{\lambda}$, то $a_0 \equiv 0$. Наконец, диск $\mathbb{D} \times 1$ тоже J -голоморфный, сужение $\partial_J z$ на него равно $-a_1(\lambda) d\bar{\lambda}$ и, значит, $a_1 \equiv 0$. Таким образом, $a \equiv 0$ и мы доказали, что dz – форма типа $(1, 0)_J$, т. е. функция $z(\lambda, w)$ J -голоморфна на $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ и J -мероморфна на $\mathbb{D} \times \widehat{\mathbb{C}}$.

Вывод: в случае $B = \mathbb{D}$ функция $z \circ \phi^{-1}$, о которой речь шла в самом начале этого пункта, мероморфна на M и, значит, отображение $M \ni p \mapsto (\pi(p), z \circ \phi^{-1}(p)) \in \mathbb{D} \times \widehat{\mathbb{C}}$ биголоморфно.

Шаг 2. Пусть теперь B – произвольное комплексное банахово многообразие и z – функция на M , мероморфная и однолистная на каждом слое M_λ и равная j в соответствующих точках $s_j(\lambda)$, $j = 0, 1, \infty$ (нормированная мероморфная координата в слоях). Пусть $f: \mathbb{D} \rightarrow M$ – произвольный голоморфный диск, не пересекающий $s_\infty(B)$, и $h := \pi \circ f$. Тогда для диска $h: \mathbb{D} \rightarrow B$ определено голоморфное семейство сфер $\pi': M' \rightarrow \mathbb{D}$, прообраз семейства $\pi: M \rightarrow B$ относительно отображения h . По доказанному выше, прообраз на M' функции z является мероморфной функцией, в частности, функция $z \circ f$ голоморфна в $\mathbb{D}$. Ввиду произвольности f и локальной ограниченности z вне $s_\infty(B)$, функция z голоморфна на $M \setminus s_\infty(B)$. Аналогично, $1/z$ голоморфна на $M \setminus s_0(B)$ и, значит, z мероморфна на M , а отображение $M \ni p \mapsto (\pi(p), z(p)) \in B \times \widehat{\mathbb{C}}$ является послойным биголоморфизмом.

Опишем теперь общие голоморфные семейства сфер.

ТЕОРЕМА 1.1. *Всякое голоморфное семейство сфер $\pi: M \rightarrow B$ над произвольным комплексным банаховым многообразием B является локально голоморфно тривиальным расслоением с послойно дробно-линейными отображениями переходов.*

Если π допускает глобальное голоморфное сечение, то M есть послойное замыкание голоморфного расслоения комплексных плоскостей с послойно аффинными функциями переходов.

Если π допускает два глобальных голоморфных сечения с непересекающимися образами, то M есть послойное замыкание голоморфного линейного расслоения.

Наконец, если π допускает три глобальных голоморфных сечения с попарно не пересекающимися образами, то семейство $\pi: M \rightarrow B$ тривиально, т. е. биголоморфно эквивалентно семейству $B \times \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если s – глобальное голоморфное сечение π , то для всякой $\alpha \in B$ существуют окрестность V_α и мероморфная однолистная в слоях

функция z_α в $U_\alpha := \pi^{-1}(V_\alpha)$, равная ∞ в точках $s(\lambda)$, $\lambda \in V_\alpha$. В попарных пересечениях $U_\alpha \cap U_\beta$ тогда $z_\beta = a_{\beta\alpha}z_\alpha + b_{\beta\alpha}$ с голоморфными коэффициентами, постоянными в слоях.

Если s_0, s_∞ – не пересекающиеся глобальные голоморфные сечения, то указанные функции z_α можно выбрать так, что $z_\alpha(s_0(\lambda)) = 0$, $z_\alpha(s_\infty(\lambda)) = \infty$, $\lambda \in V_\alpha$. Тогда в $U_\alpha \cap U_\beta$ имеем $z_\beta = a_{\beta\alpha}z_\alpha$, функции $a_{\alpha\beta}$, постоянные на слоях M_λ , образуют мультипликативный 1-коцикл на B (соответствующий покрытию $\{V_\alpha\}$) и, таким образом, определяют на B голоморфное линейное расслоение со слоями $M_\lambda \setminus s_\infty(\lambda)$. Теорема доказана.

И как следствие – достаточные условия тривиальности (= униформируемости в этом случае).

СЛЕДСТВИЕ 1.2. *Голоморфное семейство сфер $\pi: M \rightarrow B$ тривиально, если выполняется одно из следующих условий:*

- 1) π допускает глобальное голоморфное сечение и на B разрешима первая и вторая проблемы Кузена;
- 2) π допускает два глобальных голоморфных сечения с непересекающимися образами и на B разрешима вторая проблема Кузена;
- 3) π допускает три глобальных голоморфных сечения с попарно непересекающимися образами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие 2) достаточно потому, что тогда всякое голоморфное линейное расслоение на B тривиально, а значит, тривиально и семейство сфер, которое получается из него добавлением сечения $s_\infty(B)$.

Предположим теперь, что выполнено условие 1), z_α – мероморфные функции в U_α и, как выше, $z_\beta = a_{\beta\alpha}z_\alpha + b_{\beta\alpha}$. Тогда $a_{\alpha\beta} = 1/a_{\beta\alpha}$ и $z_\gamma = a_{\gamma\alpha}a_{\alpha\beta}z_\beta + (b_{\gamma\alpha} - b_{\beta\alpha}a_{\alpha\beta})$, откуда $a_{\gamma\beta}a_{\beta\alpha}a_{\alpha\gamma} = 1$ в $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Таким образом, функции $a_{\beta\alpha}$ образуют мультипликативный 1-коцикл на B , соответствующий покрытию $\{V_\alpha := \pi(U_\alpha)\}$. Ввиду разрешимости второй проблемы Кузена на B , существуют голоморфные функции c_α , постоянные на слоях M_λ , $\lambda \in V_\alpha$, нигде не равные нулю в U_α и такие, что $a_{\beta\alpha} = c_\alpha/c_\beta$ в $U_\alpha \cap U_\beta$. Положим $w_\alpha = c_\alpha z_\alpha$ в U_α . Тогда $w_\beta = c_\beta a_{\beta\alpha}z_\alpha + c_\beta b_{\beta\alpha} = w_\alpha + b_{\beta\alpha}^*$ и функции $b_{\beta\alpha}^*$ очевидно образуют аддитивный 1-коцикл на покрытии $\{V_\alpha\}$. Так как на B по условию разрешима первая проблема Кузена, то существуют голоморфные функции h_α в U_α , постоянные на слоях и такие, что $b_{\beta\alpha}^* = h_\alpha - h_\beta$. А тогда голоморфные функции $z_\alpha^* := w_\alpha + h_\alpha$ совпадают в попарных пересечениях, функция $z := \{z_\alpha^* \text{ в } U_\alpha\}$ мероморфна на M и отображение $p \mapsto (\pi(p), z(p))$ является послойным биголоморфизмом M на $B \times \widehat{\mathbb{C}}$. Следствие доказано.

Из доказательства видно, что точность (разрешимость) обоих построенных в нем коциклов является необходимым условием тривиальности, в частности, если на B не разрешима первая или вторая проблема Кузена, то над B есть нетривиальные голоморфные семейства сфер с одним или двумя глобальными голоморфными сечениями.

Различные комплексные торы в общем случае конформно не эквивалентны, есть модули, однако послойные универсальные накрывающие голоморфных семейств торов также локально тривиальны, как и в случае сфер.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $\pi: M \rightarrow B$ – голоморфное семейство торов над комплексным банаховым многообразием. Если π допускает глобальное голоморфное сечение и $\tilde{\pi}: \tilde{M} \rightarrow M$ – соответствующее ему послойно универсальное накрытие, то $\pi \circ \tilde{\pi}: \tilde{M} \rightarrow B$ биголоморфно эквивалентно семейству $B \times \mathbb{C} \rightarrow B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и выше, основным здесь является случай $B = \mathbb{D}$ с глобальным голоморфным сечением $s: \mathbb{D} \rightarrow M$.

Фиксируем универсальное накрытие $\phi_0: \mathbb{C} \rightarrow M_0$ с координатой w в $\mathbb{C}$, однозначно определяемой условием $\phi_0(0) = \phi_0(1) = s(0)$. Тогда тор M_0 конформно эквивалентен $\mathbb{C}/\Gamma_0$, где Γ_0 – решетка, содержащая 0, 1 (группу сдвигов по этой решетке обозначим так же; недоразумений не будет).

Опять по теореме Эресмана [22], существует сохраняющий ориентацию послойный диффеоморфизм $\mathbb{D} \times M_0 \rightarrow M$, который можно выбирать так, что $\lambda \times s(0) \mapsto s(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{D}$. Он индуцирует послойный диффеоморфизм $\tilde{\phi}: \mathbb{D} \times \mathbb{C} \rightarrow \tilde{M}$ с $\tilde{\phi}(0, \cdot) = \phi_0$.

Обозначим через J прообраз в $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ комплексной структуры на $\tilde{M}$ относительно отображения $\tilde{\phi}$. Тогда, по построению, J инвариантна относительно действия в $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ группы Γ_0 . Как и выше, сужение J на слой $\lambda \times \mathbb{C}$ определяется формой $dw + \mu(\lambda, \cdot) d\bar{w}$ типа $(1, 0)_{J|\lambda \times \mathbb{C}}$ с функцией μ , гладкой на $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$, $|\mu| < 1$. Так как J инвариантна относительно Γ_0 и μ по J определяется однозначно, то $\mu(\lambda, w + c) \equiv \mu(\lambda, w)$ для всех c из решетки Γ_0 . Из этого очевидно следует, что каждая частная производная μ по $\lambda, \bar{\lambda}$ равномерно ограничена в $\mathbb{C}$, т. е. отображение $\mathbb{D} \ni \lambda \mapsto \mu(\lambda, \cdot) \in L^\infty(\mathbb{C})$ гладкое.

По теореме Альфорса–Берса [1], [2], для всякой $\lambda \in \mathbb{D}$ существует единственное гомеоморфное в $\mathbb{C}$ решение $z(\lambda, \cdot)$ уравнения Бельтрами $z_{\bar{w}} = \mu(\lambda, \cdot) z_w$, нормированное условиями $z(\lambda, 0) \equiv 0$, $z(\lambda, 1) \equiv 1$ и гладкое по совокупности переменных λ, w .

Относительно координат λ, z в $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ структура J имеет $(1, 0)_J$ -базис $d\lambda$, $\partial_J z = dz - a(\lambda, z) d\bar{\lambda}$ с гладкой функцией a . Так как структура J – комплексная (= интегрируемая почти комплексная), то функция a голоморфна по z (см. выше шаг 1).

Так как μ инвариантна относительно сдвигов по Γ_0 то, ввиду единственности решения,

$$z(\lambda, w) = \frac{z(\lambda, w + c) - z(\lambda, c)}{z(\lambda, 1 + c) - z(\lambda, c)}$$

для любых $c \in \Gamma_0$. Таким образом, сдвигам $w \mapsto w + c$, $c \in \Gamma_0$, соответствуют аффинные преобразования

$$z \mapsto (z(\lambda, 1 + c) - z(\lambda, c)) z - z(\lambda, c) =: A(\lambda, c) z + B(\lambda, c).$$

При каждом фиксированном $\lambda \in \mathbb{D}$ они образуют дискретную группу $\Gamma'_\lambda \subset \text{Aut } \mathbb{C}_z$, изоморфную Γ_0 , элементы которой не имеют неподвижных точек. Из последнего следует, что $A(\lambda, c) \equiv 1$, т. е. Γ'_λ – группа сдвигов по решетке $\Gamma'_\lambda \ni 0$ с образующими $1 = z(\lambda, 1)$ и некоторой $\tau(\lambda)$.

Структура J инвариантна относительно таких преобразований координаты z , т. е. формы $d(z + B(\lambda)) - a(\lambda, z + B(\lambda)) d\bar{\lambda}$, $B(\lambda) = n + m\tau(\lambda)$, $n, m \in \mathbb{Z}$, должны иметь тип $(1, 0)_J$. Так как $d(z + B) = dz + B_{\bar{\lambda}} d\bar{\lambda} + B_\lambda d\lambda$, то это значит, что $a(\cdot, z + B) = a(\cdot, z) + B_{\bar{\lambda}}$. Отсюда $a_z(\lambda, z + n + m\tau) \equiv a_z(\lambda, z)$ для

всех $n, m \in \mathbb{Z}$ и, значит, функции $a_z(\lambda, \cdot)$ равномерно ограниченные. Так как a голоморфна по z , то из этого и теоремы Лиувилля следует, что она аффинная по z , т.е. $a(\cdot, z) = a_0 + a_1 z$.

Так как график $z = 0$ является J -голоморфным и сужение на него формы $\partial_J z$ равно $-a_0(\lambda) d\bar{\lambda}$, то $a_0 \equiv 0$. Аналогично, из J -голоморфности графика $z = 1$ следует, что $a_1 \equiv 0$ и, значит, $a \equiv 0$.

Таким образом, функция z является J -голоморфной на $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$, значит, $z \circ \phi^{-1}$ голоморфна на $\widetilde{M}$ и отображение $p \mapsto (\pi \circ \tilde{\pi}(p), z \circ \phi^{-1}(p))$ есть послойный биголоморфизм семейства $\pi \circ \tilde{\pi}: \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{D}$ на $\mathbb{D} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$.

Случай общей базы B при наличии глобального сечения $s: B \rightarrow M$ сводится к доказанному выше. Фиксируем $\lambda_0 \in B$, универсальное накрытие $\tilde{\pi}_0: \mathbb{C} \rightarrow M_{\lambda_0}$ и выберем аффинную координату w на $\mathbb{C}$ так, что точки $w = 0$, $w = 1$ проектируются в $s(\lambda_0)$ и 1 — одна из образующих решетки $\Gamma_0 = \tilde{\pi}_0^{-1}(s(\lambda_0))$. Обозначим через s_0, s_1 непрерывные сечения проекции $\pi \circ \tilde{\pi}$ такие, что $\tilde{\pi}(s_j) = s$ и $w(s_0(\lambda_0)) = 0$, $w(s_1(\lambda_0)) = 1$. Тогда в каждом слое $\widetilde{M}_\lambda$ однозначно определена голоморфная координата $z(\lambda, \cdot)$ такая, что $z(\lambda, s_j(\lambda)) \equiv j$, $j = 0, 1$, и остается показать, что z голоморфна не только вдоль слоев, но и на всем $\widetilde{M}$.

Пусть $f: \mathbb{D} \rightarrow \widetilde{M}$ — голоморфный диск и $h = \pi \circ \tilde{\pi} \circ f$. Тогда $h: \mathbb{D} \rightarrow B$ голоморфно и над $\mathbb{D}$ определен прообраз $\pi': \widetilde{M}' \rightarrow \mathbb{D}$ семейства $\widetilde{M} \rightarrow B$ относительно h , причем это π' имеет глобальное голоморфное сечение, которое является прообразом сечения s_0 . Прообраз функции z на $\widetilde{M}'$ обозначим через z' , а прообраз диска f — через f' . По доказанному выше, функция z' голоморфна на $\widetilde{M}'$, в частности, функция $z' \circ f'$ голоморфна в $\mathbb{D}$, а это эквивалентно тому, что функция $z \circ f$ голоморфна в $\mathbb{D}$. Таким образом, z — локально ограниченная на $\widetilde{M}$ функция, голоморфная на каждом голоморфном диске в $\widetilde{M}$ и, следовательно, голоморфная.

Первое утверждение теоремы вытекает из доказанного и того, что локально голоморфные сечения π существуют. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Как видно из доказательства (случай $B = \mathbb{D}$), сдвиги из групп Γ'_λ голоморфны по λ (поскольку $a \equiv 0$) и многообразие M является фактором комплексного многообразия $(\mathbb{D} \times \mathbb{C}, J)$ по действию группы Γ' , послойно действующей как Γ'_λ . Однако в общем случае не существует биголоморфных преобразований $\lambda \times \mathbb{C}$ в $\lambda' \times \mathbb{C}$, $\lambda' \neq \lambda$, коммутирующих с действиями этой группы в слоях, т.е. в общем случае семейства торов не являются локально голоморфно тривиальными.

Например, если λ лежит в верхней полуплоскости $\mathbb{H}$ и M_λ есть фактор $\mathbb{C}$ по решетке $\Gamma_\lambda \ni 0$ с образующими $1, \lambda$, то фактор $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ по группе голоморфных автоморфизмов, действующих послойно как Γ_λ , дает голоморфное семейство торов над $\mathbb{H}$. Но решетки с образующими $1, \lambda$ и $1, \lambda'$ при близких $\lambda \neq \lambda'$ можно перевести друг в друга лишь $\mathbb{R}$ -линейным преобразованием, но никаким $\mathbb{C}$ -аффинным преобразованием этого сделать нельзя.

С другой стороны, бывают и небезынтересные локально голоморфно тривиальные семейства торов. Например, пусть $M^0 = \mathbb{C}^2 \setminus \{z_2^2 = z_1^3\}$, $\pi(z) = z_2^2 - z_1^3$ и M_λ — пополнение M_λ^0 точкой на бесконечности. Тогда в таком образом послойно пополненном множестве $M \supset M^0$ есть комплексная структура, совпадающая с таковой на M^0 , и проекция $\pi: M_\lambda \rightarrow \lambda$ превращает M в голоморфное

семейство торов. Отображение $M_\lambda \rightarrow M_1$ по локально определенной формуле $(z_1, z_2) \mapsto (z_1\lambda^{-1/3}, z_2\lambda^{-1/2})$ является биголоморфизмом и, значит, семейство $\pi: M \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0$ локально голоморфно тривиальное.

СЛЕДСТВИЕ 1.3. Семейство торов $\pi: M \rightarrow B$ униформируемо, если выполнено одно из следующих условий:

- 1) на B разрешимы первая и вторая проблемы Кузена;
- 2) π допускает глобальное голоморфное сечение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай 2) разобран выше. Доказательство в случае 1) такое же, как в случае 1) следствия 1.2.

Как и в случае сфер, неразрешимость на B одной из проблем Кузена (как, например, для $B = \mathbb{CP}_n$, $n \geq 1$) гарантирует существование над B неуниформируемых голоморфных семейств торов.

При наличии глобального непрерывного сечения проекции π условия 1) можно слегка ослабить (по крайней мере, в случае конечномерной базы B), а именно оставить лишь условие разрешимости на B первой проблемы Кузена. В самом деле, комплексное многообразие $\widetilde{M}$, соответствующее этому непрерывному сечению, является голоморфным семейством комплексных плоскостей, локально голоморфно тривиальным (поскольку над малыми координатными шарами в B голоморфные сечения π существуют), с функциями переходов, аффинными в слоях и голоморфными по $\lambda \in V_\alpha \cap V_\beta$, $z_\beta = a_{\beta\alpha}(\lambda)z_\alpha + b_{\beta\alpha}(\lambda)$. Так как есть глобальное непрерывное сечение π , то на $\widetilde{M}$ есть глобальная непрерывная функция w , голоморфная и однолистная на каждом слое $\lambda \times \mathbb{C}$. А тогда $w = \tilde{a}_\alpha z_\alpha + \tilde{b}_\alpha$ с непрерывными $\tilde{a}_\alpha, \tilde{b}_\alpha$ в V_α и, значит, $a_{\beta\alpha} = \tilde{a}_\alpha / \tilde{a}_\beta$. Измельчая покрытие, можно считать, что множества V_α связные и односвязные и потому существуют непрерывные в V_α логарифмы $\log \tilde{a}_\alpha$. А тогда функции $\log a_{\beta\alpha} := \log \tilde{a}_\alpha - \log \tilde{a}_\beta$ образуют на B аддитивный голоморфный 1-коцикл. Если первая проблема Кузена на B разрешима, то $\log a_{\beta\alpha} = c_\beta - c_\alpha$ для некоторых голоморфных соответственно в V_α, V_β функций c_α, c_β и, заменяя z_α на $z_\alpha^* = e^{c_\alpha} z_\alpha$, мы получаем соотношения переходов $z_\beta^* = z_\alpha^* + b_{\beta\alpha}^*$, опять подправляемые решениями соответствующей первой проблемы до голоморфных функций в $U_\alpha = \pi^{-1}(V_\alpha)$, аффинных в слоях и уже совпадающих на попарных пересечениях.

Существование глобального непрерывного сечения, без дополнительных “комплексных” условий на базу, недостаточно для униформируемости семейства торов.

ПРИМЕР 1.4. Пусть $B = \mathbb{C}^2 \setminus (0, 0)$, $V_j = B \cap \{\lambda_j \neq 0\}$ и $U_j = V_j \times \mathbb{C}_{z_j}$. Склеивая комплексные карты U_j отождествлением $z_2 \equiv z_1 + 1/(\lambda_1 \lambda_2)$ на $U_1 \cap U_2$, мы получаем комплексное многообразие $\widetilde{M}$ с голоморфной проекцией $\tilde{\pi}: \widetilde{M} \rightarrow B$. Сечение $\tilde{\pi}$ – это пара функций $f_j: V_j \rightarrow \mathbb{C}$ таких, что $f_2(\lambda) - f_1(\lambda) = 1/(\lambda_1 \lambda_2)$ в $V_{12} := V_1 \cap V_2$.

В слоях $\widetilde{M}_\lambda$ введем соотношение эквивалентности: $z'_j \sim z_j$, если $z'_j - z_j = n + it$ с некоторыми $n, t \in \mathbb{Z}$. Фактор $\widetilde{M}$ по этой (голоморфной) эквивалентности является голоморфным семейством торов $\pi: M \rightarrow B$, причем все торы M_λ между собою конформно эквивалентны и $\widetilde{M}$ является универсальным накрывающим многообразием M .

Покажем, что семейство $\tilde{\pi}: \widetilde{M} \rightarrow B$ не эквивалентно $B \times \mathbb{C} \rightarrow B$. В самом деле, предположим, что существует голоморфная на $\widetilde{M}$ функция w , однолистная в слоях. Тогда $w = a_j z_j + b_j$ в U_j с коэффициентами, голоморфными в V_j , причем a_j не имеют нулей. В $U_1 \cap U_2$ получаем равенство $a_1 z_1 + b_1 = a_2(z_1 + 1/(\lambda_1 \lambda_2)) + b_2$, откуда $a_1 = a_2$ и, следовательно, $a := a_j$ в V_j есть целая функция без нулей в $\mathbb{C}^2$ (начало координат – устранимая особенность). Таким образом, $b_1 - b_2 = a/(\lambda_1 \lambda_2)$ в V_{12} . Из равенства $\lambda_1 \lambda_2 b_1 = a + \lambda_1 \lambda_2 b_2$ получаем, что функция $\lambda_1 b_1$ голоморфно продолжается в V_2 (как и правая часть равенства) и, значит, $\lambda_1 b_1$ продолжается до целой функции h_1 . Аналогично, $\lambda_2 b_2$ продолжается до целой функции h_2 . А тогда $\lambda_2 h_1 - \lambda_1 h_2 = a$ всюду в $\mathbb{C}^2$, в частности, в начале координат. Это противоречие (с тем, что a не имеет нулей) показывает, что $\widetilde{M}$ не эквивалентно $B \times \mathbb{C}$ и, следовательно, семейство торов $\pi: M \rightarrow B$ не униформируемо.

Вместе с тем, проекция $\tilde{\pi}$ допускает глобальное $\mathbb{R}$ -аналитическое сечение: $f_1(\lambda) = \bar{\lambda}_2/(\lambda_1 |\lambda|^2)$ в V_1 , $f_2(\lambda) = \bar{\lambda}_1/(\lambda_2 |\lambda|^2)$ в V_2 . Его проекция в M дает $\mathbb{R}$ -аналитическое сечение проекции π .

Таким образом, $\pi: M \rightarrow B$ – неуниформируемое голоморфное семейство торов, конформно эквивалентных между собою, голоморфно тривиальное над V_1 и V_2 , причем проекция π допускает глобальное $\mathbb{R}$ -аналитическое сечение.

И все дело здесь в том, что база B обладает одним “голоморфным” дефектом: первая проблема Кузена на ней для покрытия $B = V_1 \cup V_2$ и данных $1/(\lambda_1 \lambda_2)$ на V_{12} неразрешима (в классе голоморфных функций, конечно).

2. Голоморфные движения и униформизация

2.1. Классические голоморфные движения. Традиционное определение голоморфных движений (см. [45], [4], [5]) следующее.

Пусть E – подмножество сферы Римана $\widehat{\mathbb{C}}$ и $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ – единичный круг.

Отображение $\phi: \mathbb{D} \times E \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ называется **голоморфным движением** (множества E над $(\mathbb{D}, 0)$ или просто над $\mathbb{D}$), если

- (i) $\phi(0, z) = z$ для всех $z \in E$,
- (ii) для всякого $\lambda \in \mathbb{D}$ отображение $\phi(\lambda, \cdot): E \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ есть вложение,
- (iii) для всякого $z \in E$ отображение $\phi(\cdot, z): \mathbb{D} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ голоморфно.

Геометрически нагляднее отображение $\Phi: (\lambda, z) \mapsto (\lambda, w = \phi(\lambda, z))$. Его образ E_ϕ , который мы будем называть пространством движения ϕ , представляет собою объединение попарно непересекающихся (условие (ii)) мероморфных графиков $w = \phi(\lambda, z)$ (условие (iii)) над $\mathbb{D}$ с отмеченными точками $w = z \in E$ в пересечениях с $0 \times \widehat{\mathbb{C}}$ (условие (i)); по-другому: точки множества $0 \times E$, не сталкиваясь, двигаются в $\mathbb{D} \times \widehat{\mathbb{C}}$ голоморфно по “времени” $\lambda \in \mathbb{D}$ (отсюда и название).

Никакой непрерывности ϕ по совокупности переменных в определении а priori не предполагается, однако это следует из (i)–(iii), см. ниже.

Вместо круга $\mathbb{D}$ в качестве пространства параметров (базы) можно брать произвольное линейно связное комплексное банахово многообразие B с выделенной (базовой) точкой λ_0 (заменяющей $\lambda = 0$ в (i)).

Голоморфное движение ϕ множества $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$ над (B, λ_0) называется *нормированным*, если $0, 1, \infty \in E$ и $\phi(\lambda, 0) \equiv 0$, $\phi(\lambda, 1) \equiv 1$, $\phi(\lambda, \infty) \equiv \infty$ (точки $0, 1, \infty \in \widehat{\mathbb{C}}$ неподвижны при изменении $\lambda \in B$). Движение $\phi: B \times E \rightarrow \mathbb{C}$ подмножества $E \subset \mathbb{C}$ называем *нормированным*, если точки $0, 1 \in E$ остаются неподвижными при изменении $\lambda \in B$. Это важное свойство, поскольку для нормированного движения ϕ точки $z \in E \setminus \{0, 1, \infty\}$ голоморфно по λ меняются в гиперболической области $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Оно достигается стандартным дробно-линейным преобразованием $\widehat{\mathbb{C}}_w$: если $\psi_0, \psi_1, \psi_\infty$ – голоморфные отображения $B \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, графики которых попарно не пересекаются, то однозначно определено биголоморфное послойное преобразование многообразия $B \times \widehat{\mathbb{C}}$, переводящее графики функций ψ_j соответственно в графики постоянных функций $w' = 0, 1, \infty$. Таким образом, всякое голоморфное движение $B \times E \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, $\#E \geq 3$, над произвольным комплексным банаховым многообразием B допускает нормировку, и изучение голоморфных движений подмножеств $\widehat{\mathbb{C}}$ над B при $\#E \geq 3$ сводится к изучению голоморфных движений подмножеств комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т. е. систем соответствующих голоморфных (а не мероморфных) функций.

Большую роль в теории голоморфных движений играет гиперболическая геометрия, поэтому для удобства читателей приведем необходимый минимум о метрике Кобаяши (подробнее см., например, [38], [43], [51]).

Пусть B – произвольное линейно связное комплексное банахово многообразие. Очевидно, что любых точек λ', λ , лежащих в одном координатном шаре многообразия B , существует голоморфный диск $h: \mathbb{D} \rightarrow B$ такой, что $h(0) = \lambda'$, $h(\zeta) = \lambda$ для некоторой $\zeta \in \mathbb{D}$. Так как B линейно связное и любой путь $[0, 1] \rightarrow B$ покрывается конечным числом координатных шаров, то для любых $\lambda', \lambda \in B$ существует конечная цепочка голоморфных дисков $h_j: \mathbb{D} \rightarrow B$ и точек $\zeta_j \in \mathbb{D}$ таких, что $h_1(0) = \lambda'$, $h_{j+1}(0) = h_j(\zeta_j)$, $j = 1, \dots, N-1$, и

$h_N(\zeta_N) = \lambda$. Величина $\kappa_B(\lambda', \lambda) = \inf \sum_1^N \log \frac{1 + |\zeta_j|}{1 - |\zeta_j|}$, где инфимум берется по

всем описанным цепочкам голоморфных дисков (N может быть любым), называется *расстоянием Кобаяши* между точками λ', λ на многообразии B . Из определения легко следуют симметричность и неравенство треугольника, но невырожденности в общем случае нет, расстояния между некоторыми различными точками могут равняться нулю.

Топология на B , определяемая метрикой (расстоянием) κ_B , в общем слабее топологии банахова многообразия B , шары $B_R(\lambda) = \{\lambda': \kappa_B(\lambda, \lambda') < R\}$ являются открытыми подмножествами B . Для выделенной (базовой) точки λ_0 шар $B_R(\lambda_0)$ будем обозначать просто B_R .

Многообразия B , для которых κ_B есть настоящее расстояние (положительное вне диагонали в $B \times B$), называются *гиперболическими*. Например, если $B = \mathbb{B}$ – единичный шар в банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|)$, то $\kappa_{\mathbb{B}}(\lambda, 0) = \log \frac{1 + \|\lambda\|}{1 - \|\lambda\|}$, многообразие $\mathbb{B}$ гиперболическое и $\mathbb{B}_R = \mathbb{B}_R(0)$ есть шар $\|\lambda\| < \text{th}(R/2)$. Другой пример – все римановы поверхности, у которых универсальной накрывающей является круг $\mathbb{D}$.

Метрика Кобаяши естественно поднимается на произвольное покрывающее многообразие (поскольку любой диск поднимается), и это поднятие локально совпадает с метрикой Кобаяши покрывающего многообразия. Таким образом, для любой гиперболической римановой поверхности S поднятие метрики κ_S на $\mathbb{D}$ относительно универсального накрытия равно $\kappa_{\mathbb{D}}$, а для круга метрика $\kappa_{\mathbb{D}}$ совпадает с метрикой Пуанкаре $\rho_{\mathbb{D}}$, инвариантной относительно дробно-линейных автоморфизмов $\mathbb{D}$, с инфинитезимальным представлением $\rho_{\mathbb{D}} = \frac{2|d\zeta|}{1-|\zeta|^2}$ (кривизны $\equiv -1$).

Большую роль в изучении голоморфных движений играет гиперболическая область $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ с полной невырожденной гиперболической метрикой Пуанкаре $\rho_{0,1}$. При универсальном отображении $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ эта $\rho_{0,1}$ поднимается до метрики Пуанкаре $\rho_{\mathbb{D}}$. Так как поднятие в $\mathbb{D}$ метрики Кобаяши на $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ такое же, то $\rho_{0,1}$ совпадает с метрикой Кобаяши этой области.

Важнейшим свойством метрики Кобаяши является ее очевидное невозрастание при голоморфных отображениях: если $f: B \rightarrow X$ – такое отображение, то

$$\kappa_X(f(\lambda), f(\lambda')) \leq \kappa_B(\lambda, \lambda') \quad (1)$$

(это один из абстрактных вариантов *леммы Шварца*).

Лемма Шварца (1) показывает, что

относительно расстояний Кобаяши любое голоморфное отображение удовлетворяет условию Липшица с константой 1.

В частности, для произвольного нормированного голоморфного движения $\phi: B \times E \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ и любой точки $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ получаем оценку

$$\rho_{0,1}(\phi(\lambda', z), \phi(\lambda, z)) \leq \kappa_B(\lambda', \lambda), \quad (2)$$

которая означает, что гиперболическая скорость движения точки z во всех точках графика $w = \phi(\lambda, z)$ не превосходит единицы.

Более деликатное свойство голоморфных движений в “вертикальном” направлении связано с оценкой искажения двойных отношений четверок точек. Для упорядоченного множества $\Sigma = \{z_1, \dots, z_4\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ (точки z_j различные) обозначим через $\text{cr}(\Sigma)$ двойное отношение

$$\text{cr}(\Sigma) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4},$$

естественно сокращаемое ($\frac{\infty}{\infty} = 1$), если одна из точек равна ∞ , и инвариантное относительно дробно-линейных преобразований сферы Римана. Тогда $\text{cr}(\Sigma) \neq 0, 1, \infty$, т. е. точка $\text{cr}(\Sigma)$ лежит в гиперболической области $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

ЛЕММА 2.1. Пусть B – комплексное банахово многообразие, $\phi: B \times E \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ – голоморфное движение над (B, λ_0) множества $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$ и $\Sigma = \{z_1, \dots, z_4\}$ состоит из различных точек E . Тогда для всякого $\lambda \in B$ справедлива следующая оценка для двойных отношений:

$$\rho_{0,1}(\text{cr}(\phi(\lambda, \Sigma)), \text{cr}(\Sigma)) \leq \kappa_B(\lambda, \lambda_0), \quad (3)$$

где $\phi(\lambda, \Sigma) = \{\phi(\lambda, z_1), \dots, \phi(\lambda, z_4)\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $\lambda \mapsto \text{sg}(\phi(\lambda, \Sigma))$ из B в $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ голоморфно и равно $\text{sg}(\Sigma)$ при $\lambda = \lambda_0$, а метрика Кобаяши при таком отображении не возрастает (неравенство (1)).

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть f – голоморфная функция на B со значениями в $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ и $R, R' > 0$ – константы, причем $|f(\lambda_0)| \leq R'$. Тогда существует константа $M = M(R, R')$, зависящая только от R, R' , такая, что $|f(\lambda)| < M$ для всех $\lambda \in B_R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим неравенства (3) к голоморфному движению $0, 1, f(\lambda)$ множества $0, 1, f(\lambda_0)$ и воспользоваться тем, что расстояние до ∞ в метрике $\rho_{0,1}$ равно бесконечности.

Это свойство а priori совсем не очевидно, поскольку замкнутые шары Кобаяши не обязательно компактные даже в конечномерном случае.

Из леммы 2.1 и оценок снизу метрики Пуанкаре в $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ следует, что голоморфные движения удовлетворяют условию Гёльдера по z в сферической метрике. Точнее, справедливо следующее утверждение (доказательство см. в [15], [35]).

ЛЕММА 2.2. Пусть $\phi: B \times E \rightarrow \mathbb{C}$ – нормированное голоморфное движение над комплексным банаховым многообразием (B, λ_0) . Тогда для любых $R, R' > 0$ существует константа $C = C(R, R')$ такая, что

$$|\phi(\lambda, z) - \phi(\lambda, z')| \leq C|z - z'|^\alpha, \quad \alpha = e^{-R},$$

для всех $\lambda \in B_R$ и $z, z' \in E \cap R'\mathbb{D}$.

Вместе со следствием 2.1 это дает равностепенную оценку модуля непрерывности для всех нормированных голоморфных движений над (B, λ_0) .

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Для $\lambda, \lambda' \in B_R$ и $z, z' \in E \cap R'\mathbb{D}$

$$|\phi(\lambda, z) - \phi(\lambda', z')| \leq C_1 \kappa_B(\lambda, \lambda') + C_2 |z - z'|^\alpha \quad (4)$$

с константами C_1, C_2 , зависящими только от R, R' , и $\alpha = e^{-R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 2.1, $|\phi(\lambda, z') - \phi(\lambda', z')| \leq 2M$, где $M = M(R, R')$. Для точек $w, w' \in 2M\mathbb{D}$ евклидово расстояние не меньше, чем $C(M)\rho_{0,1}(w, w')$ с некоторой константой $C(M)$, и, значит, согласно неравенству (2),

$$|\phi(\lambda, z') - \phi(\lambda', z')| \leq C(M)\kappa_B(\lambda, \lambda').$$

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть $\{E_j \subset \mathbb{C}\}$ – возрастающая последовательность подмножеств, E – замыкание $\bigcup E_j$ и $\phi_j: B \times E_j \rightarrow \mathbb{C}$ – нормированные голоморфные движения над (B, λ_0) такие, что $\phi_{j+1}|_{B \times E_j} = \phi_j$ для всех j . Тогда существует единственное голоморфное движение $\phi: B \times E \rightarrow \mathbb{C}$ такое, что $\phi|_{B \times E_j} = \phi_j$ для всех j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{z_j \in E_j\}$ – последовательность различных точек множества E , сходящаяся к некоторой $z_0 \in E$. По лемме 2.2, $|\phi_j(\lambda, z_j) - \phi_k(\lambda, z_k)| \leq C_1|z_j - z_k|^\alpha$ для $\lambda \in B_R$ и, значит, по критерию Коши, последовательность функций $\phi_j(\lambda, z_j): B \rightarrow \mathbb{C}$ сходится равномерно на каждом B_R к некоторой функции $\psi(\lambda)$, голоморфной по теореме Вейерштрасса.

Так как это верно для любой последовательности точек $z_j \in E_j$, сходящейся к z_0 , то ψ зависит только от z_0 и мы определяем $\phi(\lambda, z_0) := \psi(\lambda)$. Прделав это для каждой предельной точки множества $\bigcup E_j$, получаем отображение $\phi: B \times E \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ такое, что ϕ голоморфно по λ и $\phi(\lambda_0, z) = z$ для всех $z \in E$.

Свойство (ii) голоморфных движений, а именно инъективность по z , достаточно проверить над произвольным голоморфным диском, т. е. можно считать, что $B_R = \mathbb{D}$ и $|\phi(\lambda, z)| \leq M$. Для $z, z' \in E$, $z \neq z'$, функция $u(\lambda) = \log(2M/|\phi(\lambda, z) - \phi(\lambda, z')|)$ является пределом положительных в $\mathbb{D}$ гармонических функций $\log(2M/|\phi_j(\lambda, z_j) - \phi_j(\lambda, z'_j)|)$ с $z_j, z'_j \in E_j$, $z_j \rightarrow z$, $z'_j \rightarrow z'$, $|z_j - z'_j| \geq |z - z'|/2 > 0$. Так как для них справедливы неравенства Харнака (см., например, [33]), то $u(\lambda)$ равномерно ограничена в $r\mathbb{D}$, $r < 1$, в частности, $\phi(\lambda, z) \neq \phi(\lambda, z')$ для всех $\lambda \in r\mathbb{D}$ и, значит, для всех $\lambda \in \mathbb{D}$, ввиду произвольности r . Следствие доказано.

Это упрощает многие доказательства. Например, для произвольного E в качестве E_j можно брать его конечные подмножества, объединение которых всюду плотно в E .

Неравенство (3) означает, пожалуй, важнейшее свойство голоморфных движений $\phi: B \times E \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, а именно, *квазиконформность* отображений $\phi(\lambda, \cdot): E \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ при каждом фиксированном λ .

Для произвольного множества $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$ одно из возможных определений квазиконформности отображения $f: E \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ (см. [59]) заключается как раз в том, что $\rho_{0,1}(\text{cr}(f(\Sigma)), \text{cr}(\Sigma)) < C$ для любой упорядоченной четверки Σ различных точек в E с некоторой единой константой $C = C(E) < \infty$. Для открытых множеств E из этого следует, как хорошо известно (см., например, [42]), квазиконформность f в любых ее традиционных определениях.

Квазиконформные отображения открытых подмножеств $\mathbb{C}$ дифференцируемы почти всюду и их первые частные производные (определенные почти всюду) совпадают с соответствующими частными производными в смысле распределений (см. [42]). Поэтому почти всюду определена *характеристика* (коэффициент Бельтрами) $\mu_f = f_{\bar{z}}/f_z$ такого отображения f , где $f_z, f_{\bar{z}}$ – формальные производные f по z и $\bar{z}$. Так как квазиконформные отображения сохраняют ориентацию, то почти всюду $|\mu_f| < 1$.

Берс и Ройден [12] показали, что для любого голоморфного движения ϕ открытого подмножества $\mathbb{C}$ характеристика (коэффициенты Бельтрами) квазиконформных отображений $z \mapsto \phi(\lambda, z)$ голоморфно зависит от $\lambda \in B$, точнее, справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 2.3. Пусть $\phi: B \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ – голоморфное движение открытого множества $\Omega \subset \mathbb{C}$ над почти комплексным банаховым многообразием B с отмеченной точкой λ_0 и $\mu(\lambda, \cdot) = (\phi_{\bar{z}}/\phi_z)(\lambda, \cdot)$. Тогда отображение $B \ni \lambda \mapsto \mu(\lambda, \cdot) \in L^\infty(\Omega)$ голоморфно.

(Ограниченное отображение почти комплексного многообразия B голоморфно, если голоморфны его сужения на произвольные голоморфные диски $f: \mathbb{D} \rightarrow B$.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как пространство $L^\infty(\Omega)$ – сопряженное к $L^1(\Omega)$, то достаточно доказать, что ограниченная функция $\Psi(\lambda) = \int \mu(\lambda, z)\psi(z) dx dy$,

$z = x + iy$, голоморфна для всякой $\psi \in L^1(\Omega)$ с компактным носителем в Ω (такие ψ образуют тотальное множество непрерывных линейных функционалов на $L^\infty(\Omega)$).

По доказанному выше, отображение $\phi(\lambda, \cdot): \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ квазиконформно, в частности, дифференцируемо почти всюду в Ω и, значит,

$$\Psi(\lambda) = \int \psi(z) \frac{\phi_x + i\phi_y}{\phi_x - i\phi_y}(\lambda, z) dx dy = \int \psi(z) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + i\sigma}{1 - i\sigma}(\lambda, z, t) dx dy,$$

где

$$\sigma(\lambda, z, t) = \frac{\phi(\lambda, z + it) - \phi(\lambda, z)}{\phi(\lambda, z + t) - \phi(\lambda, z)}.$$

Для фиксированных $z \in K = \text{supp } \psi$ и $0 < t < \text{dist}(K, \partial\Omega)/2$ функция $\sigma(\lambda, z, t)$ определена, голоморфна по $\lambda \in B$, ее значения лежат в $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ и $\sigma(\lambda_0, z, t) = i$. По свойству невозрастания метрики Кобаяши, из этого следует, что

$$\rho_{0,1}(\sigma(\lambda, z, t), i) \leq \kappa_B(\lambda, \lambda_0) < r$$

на B_r и, значит, $|\sigma(\lambda, z, t) - i| < 1/2$, если $r > 0$ достаточно мало (такое r есть, единое для всех указанных z, t). Для $\lambda \in B_r$ имеем равномерную оценку $\left| \frac{1 + i\sigma}{1 - i\sigma}(\lambda, z, t) \right| < \frac{1}{3}$. По теореме Лебега об ограниченной сходимости, последовательность равномерно ограниченных на B_r голоморфных функций

$$\Psi_n(\lambda) = \int_K \psi(z) \frac{1 + i\sigma(\lambda, z, 1/n)}{1 - i\sigma(\lambda, z, 1/n)} dx dy$$

при $n \rightarrow \infty$ сходится поточечно в B_r к $\Psi(\lambda)$ и, значит, Ψ голоморфна в B_r . Таким образом, мы получаем, что отображение $\mu(\lambda, \cdot)|_{B_r} \rightarrow L^\infty(\Omega)$ голоморфно.

Пусть теперь $\lambda_1 \in B$ — произвольная точка, $\Omega_1 := \phi(\lambda_1, \Omega)$ и $\mu_1(z)$ — характеристика квазиконформного отображения $\phi(\lambda_1, \cdot): \Omega \rightarrow \Omega_1$. Тогда характеристика $\nu(\lambda, z)$ отображения $\phi(\lambda, \cdot) \circ \phi(\lambda_1, \cdot)^{-1}: \Omega_1 \rightarrow \Omega_\lambda$ в точке $\phi(\lambda_1, z)$ по известной формуле для композиции квазиконформных отображений (см. [1; IC]) равна

$$\frac{\mu(\lambda, z) - \mu_1(z)}{1 - \mu_1(z)\mu(\lambda, z)} \frac{\phi_z(\lambda_1, z)}{\phi_z(\lambda_1, z)}.$$

Применяя доказанное выше к голоморфному движению $\phi(\lambda, \cdot) \circ \phi(\lambda_1, \cdot)^{-1}$ множества Ω_1 над (B, λ_1) , получаем, что отображение $\nu(\lambda, \cdot): B_{r_1}(\lambda_1) \rightarrow L^\infty(\Omega_1)$ голоморфно, а из этого, очевидно, следует голоморфность $\mu(\lambda, \cdot)$ в $B_{r_1}(\lambda_1)$. Лемма доказана.

Напомним, что *расстояние Каратеодори* на комплексном банаховом многообразии B определяется как

$$c_B(\lambda, \lambda') = \sup \left\{ \log \frac{1 + |f(\lambda)|}{1 - |f(\lambda)|} \right\},$$

где супремум берется по всем голоморфным функциям $f: B \rightarrow \mathbb{D}$ таким, что $f(\lambda') = 0$. В общем случае $c_B \leq \kappa_B$, хотя в банаховом шаре (в частности, в $\mathbb{D}$) эти метрики совпадают.

Так как $\mu(\lambda_0, z) \equiv 0$ в Ω и $|\mu| < 1$, то из леммы Шварца получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Для всех $z \in \Omega$

$$\|\mu(\lambda, \cdot)\|_\infty \leq \operatorname{th} \frac{c_B(\lambda, \lambda_0)}{2}. \quad (5)$$

В частности, если B – единичный шар в комплексном банаховом пространстве с нормой $\|\cdot\|$ и $\lambda_0 = 0$, то $\|\mu(\lambda, \cdot)\|_\infty \leq \|\lambda\|$.

Для коэффициента квазиконформности $K_{\phi(\lambda, \cdot)} = \frac{1 + \|\mu(\lambda, \cdot)\|_\infty}{1 - \|\mu(\lambda, \cdot)\|_\infty}$ имеет место соответствующая оценка, $K_{\phi(\lambda, \cdot)} \leq e^{c_B(\lambda, \lambda_0)}$.

Между прочим, $\mu \equiv 0$, если на B нет непостоянных ограниченных голоморфных функций (такие многообразия называются *лиувиллевыми*). А тогда $\phi_{\bar{z}}(\lambda, \cdot) = 0$ почти всюду и из леммы Вейля следует, что ϕ голоморфно не только по λ , но и по z , т.е. $\phi: B \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ – глобально голоморфное отображение.

Доказанные в этом пункте свойства голоморфных движений составляют содержание так называемой λ -леммы (этот термин стал уже общепринятым), доказанной в основном в [45] для базового случая $B = \mathbb{D}$.

ЛЕММА 2.4 (λ -лемма). Пусть $\phi: B \times E \rightarrow \mathbb{C}$ – голоморфное движение множества $E \subset \mathbb{C}$ над единичным шаром $(B, 0)$ комплексного банахова пространства. Тогда

- 1) ϕ непрерывно по совокупности переменных (λ, z) ,
- 2) ϕ единственным образом продолжается до голоморфного движения замыкания множества E ,
- 3) если E открыто, то отображения $\phi(\lambda, \cdot): E \rightarrow \mathbb{C}$ квазиконформны при каждом фиксированном λ , причем отображение характеристики движения $\lambda \mapsto \mu(\lambda, \cdot)$ голоморфно и $\|\mu(\lambda, \cdot)\|_\infty \leq \|\lambda\|$.

2.2. Горизонтально голоморфные тривиализации. Пусть $\pi: M \rightarrow B$ – голоморфное семейство римановых поверхностей. Фиксируем точку $\lambda_0 \in B$ и множество $E \subset M_0 := M_{\lambda_0}$ (слой M_0 “базовый”). Отображение $\psi: B \times E \rightarrow M$ называется *голоморфным движением* (множества E над (B, λ_0)), если

- (i) $\psi(\lambda_0, z) \equiv z$ для всех $z \in E$,
- (ii) для всякой $\lambda \in B$ множество $\psi(\lambda, E)$ лежит в M_λ и отображение $\psi(\lambda, \cdot): E \rightarrow M_\lambda$ является вложением,
- (iii) для всякого $z \in E$ отображение $\psi(\cdot, z): B \rightarrow M$ голоморфно.

(E и ϕ из определения классического движения, с $M = B \times \widehat{\mathbb{C}}$, равны соответственно $\pi'(E)$ и $\pi' \circ \psi$, где π' – проекция на $\widehat{\mathbb{C}}$.)

Свойство (ii) в определении означает, в частности, что для каждого $z \in E$ отображение $\psi(\cdot, z)$ является сечением проекции π , т.е. $\pi \circ \psi(\lambda, z) \equiv \lambda$, а (iii) говорит, что это сечение голоморфно. Таким образом, геометрически, голоморфное движение в расслоенном пространстве $\pi: M \rightarrow B$ есть совокупность попарно непересекающихся образов $\Gamma_z, z \in E$, голоморфных сечений проекции π . Их объединение $E_\phi = \bigcup_{z \in E} \Gamma_z$, как и в декартовой ситуации, называем *пространством движения* ϕ . Если $E_\phi = M$, то мы говорим, что движение ϕ заполняет M (или M заполняется движением ϕ), а отображение $\phi: B \times M_0 \rightarrow M$ называем тогда *горизонтально голоморфной тривиализацией* семейства $\pi: M \rightarrow B$.

Возникает естественный вопрос о справедливости утверждений, доказанных в предыдущем разделе, для случая голоморфных движений в таких расслоенных пространствах.

Непрерывность по совокупности переменных – локальное свойство, поэтому она есть и в общем случае.

Вопрос о продолжении на замыкание более деликатный. Простой пример $M = \{(\lambda, z) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1 + |\lambda|\}$, $B = \mathbb{D}$, $\lambda_0 = 1/2$ и $E = \mathbb{D}$ показывает, что необходимо некоторое условие типа псевдовыпуклости M в “бесконечности вдоль слоев”, но далее это свойство движений не используется и мы лишь констатируем наличие некоторой проблемы.

Композиции квазиконформных отображений квазиконформны, поэтому отображения $E \rightarrow \phi(\lambda, E)$ локально квазиконформны и локально удовлетворяют соответствующим условиям Гёльдера. С глобальной квазиконформностью ситуация посложнее, и мы исследуем ее подробнее, поскольку именно квазиконформность является главным свойством, позволяющим применять голоморфные движения к униформизации семейств.

Пусть $\phi: B \times M_0 \rightarrow M$ – горизонтально голоморфная тривиализация голоморфного семейства $\pi: M \rightarrow B$, $M_0 := M_{\lambda_0}$ и $f_0: D \rightarrow M_0$ – голоморфное накрытие поверхности M_0 областью $D \subset \mathbb{C}$, обеспечивающее локальные голоморфные координаты на M_0 (далее нам понадобятся в основном общие универсальные накрытия f_0 , но односвязность D пока не нужна). Тогда $\tilde{\phi}: B \times D \rightarrow M$, где $\tilde{\phi}(\lambda, z) := \phi(\lambda, f_0(z))$ – топологическое накрытие, голоморфное по λ . Будучи локально квазиконформным по z , оно почти всюду дифференцируемо по z и определенные почти всюду в D первые частные производные совпадают с частными производными в смысле распределений.

Если w – голоморфная функция в окрестности точки $\tilde{\phi}(\lambda, z)$ на M такая, что $dw|_{M_\lambda} \neq 0$ в этой точке, и $W = w \circ \tilde{\phi}$, то $dW = a(z)(dz + \mu(\lambda, z) d\bar{z})$ с функцией μ , а priori зависящей от w . Однако, если w_1 – другая такая функция, то $dw_1|_{M_\lambda} = c(\lambda, w) dw|_{M_\lambda}$ и потому функция $\mu(\lambda, \cdot)$ при каждом $\lambda \in B$ определена почти всюду в D независимо от выбора локальных координат в M . Как и выше, мы называем ее *характеристикой* голоморфного движения (тривиализации) ϕ . При $\lambda = \lambda_0$ функция $W(\lambda_0, z)$, как выше, равна $w \circ f_0(z)$, поэтому она голоморфна по z и, значит, $\mu(\lambda_0, \cdot) = 0$.

Функция μ , конечно, зависит и от λ_0 , и от D , и от накрытия $f_0: D \rightarrow M_0$, и мы будем их указывать там, где это понадобится. Отметим, однако, что $|\mu|$ от выбора локальных “вертикальных” координат z не зависит.

ЛЕММА 2.5. Пусть $\pi: M \rightarrow B$ – голоморфное семейство римановых поверхностей над комплексным банаховым многообразием (B, λ_0) с базовым слоем $M_0 = \pi^{-1}(\lambda_0)$, $f_0: D \rightarrow M_0$ – фиксированное голоморфное накрытие областью $D \subset \mathbb{C}$, $\phi: B \times M_0 \rightarrow M$ – горизонтально голоморфная тривиализация и μ – соответствующая им характеристика. Тогда отображение $B \ni \lambda \mapsto \mu(\lambda, \cdot) \in L^\infty(D)$ голоморфно и $\|\mu(\lambda, \cdot)\|_\infty \leq \text{th}(c_B(\lambda, \lambda_0)/2)$.

Отметим сразу, что в единичном шаре $\mathbb{B}$ любого комплексного банахова пространства метрика Каратеодори c_B совпадает с метрикой Кобаяши k_B и равна

$\log \frac{1 + \|\lambda\|}{1 - \|\lambda\|} = 2 \operatorname{arctg} \|\lambda\|$. Таким образом, для $B = \mathbb{B}$ получается классическое неравенство Шварца: $\|\mu(\lambda, \cdot)\|_\infty \leq \|\lambda\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Удобно считать, что $\mu(\lambda, \cdot)$ продолжена нулем на $\mathbb{C} \setminus D$ и, таким образом, $\mu(\lambda, \cdot) \in L^\infty(\mathbb{C})$. Ограниченное отображение $\lambda \mapsto \mu(\lambda, \cdot)$ голоморфно тогда и только тогда, когда голоморфно его сужение на произвольный вложенный голоморфный диск $h: \mathbb{D} \rightarrow B$, т. е. когда голоморфно отображение $\zeta \mapsto \mu(h(\zeta), \cdot)$.

Шаг 1. Покажем сначала, что это верно для любого такого диска h с центром $h(0) = \lambda_0$.

Зафиксируем $0 < r < 1$ и положим $\tilde{\phi}(\zeta, z) = \phi(h(\zeta), f_0(z))$. Для любого $z_1 \in D$ голоморфный диск $S_1 = \{\tilde{\phi}(\zeta, z_1) : \zeta \in \mathbb{D}\}$ является многообразием Штейна. По теореме Сью [55], существует штейнова окрестность $V_1 \supset S_1$ в $\pi^{-1}(h(\mathbb{D}))$, стягиваемая на S_1 . Поэтому на V_1 есть голоморфная функция, равная ζ на S_1 , и голоморфная функция w такая, что $dw \wedge d\zeta \neq 0$ во всех точках S_1 . Поэтому существуют окрестности $U_1 \ni z_1$ в D и $V'_1 \supset S_1 \cap \{\zeta \in r\mathbb{D}\}$ в $\pi^{-1}(h(r\mathbb{D}))$ такие, что отображение $V'_1 \ni p \mapsto (\zeta(p), w(p)) \in r\mathbb{D} \times U_1$ биголоморфно.

Положим $W(\zeta, z) := w \circ \tilde{\phi}(\zeta, z)$; тогда $(W_{\bar{z}}/W_z)(\zeta, \cdot) = \mu(h(\zeta), \cdot)$ по определению характеристики. Так как $W(0, z) \equiv z$, то $W: r\mathbb{D} \times U_1 \rightarrow \mathbb{C}$ – обычное голоморфное движение. По теореме Берса–Ройдена (лемма 2.3) отображение $\zeta \mapsto (W_{\bar{z}}/W_z)(\zeta, \cdot) \in L^\infty(U_1)$ голоморфно. Так как $(W_{\bar{z}}/W_z)(\zeta, \cdot) = \mu(h(\zeta), \cdot)$, то отображение $\zeta \mapsto \mu(h(\zeta), \chi_1 \cdot) \in L^\infty(\mathbb{C})$, где χ_1 – характеристическая функция U_1 , голоморфно.

Уменьшая U_1 , можем считать, что это есть диадический квадрат. Так как точка $z_1 \in D$ в приведенном рассуждении произвольная, то существует покрытие D диадическими квадратами U_j с попарно непересекающимися внутренностями такое, что каждое отображение $\zeta \mapsto \mu(h(\zeta), \chi_j \cdot)$, где χ_j – характеристическая функция U_j , голоморфно.

Остается заметить, что $L^\infty(\mathbb{C}) = (L^1(\mathbb{C}))^*$ и, следовательно, отображение $\zeta \mapsto \mu(h(\zeta), \cdot)$ голоморфно тогда и только тогда, когда $\int_D \mu(h(\zeta), \cdot) \psi dS$ – голоморфная скалярная функция для всякой $\psi \in L^1(\mathbb{C})$. Но $\mu = \sum \chi_j \mu$ и ряд сходится к μ слабо-*, т. е. $\int \mu \psi dS = \sum \int \chi_j \mu \psi dS$. По доказанному выше, все члены ряда голоморфны по $\zeta \in r\mathbb{D}$ и, значит, функция $\int \mu(\lambda, z) \psi(z) dS_z$ голоморфна в $\mathbb{D}$ по теореме Вейерштрасса, ввиду произвольности r . По лемме Шварца, она по модулю не превосходит $|\zeta| \|\psi\|_1$ и потому $\|\mu(h(\zeta), \cdot)\|_\infty \leq |\zeta|$.

В качестве следствия получаем, что для любого координатного шара $\mathbb{B} \ni \lambda_0$ в B все отображения $\phi(\lambda, \cdot): M_0 \rightarrow M_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{B}$, квазиконформны.

Шаг 2. Теперь заменим базовую точку λ_0 на $\lambda_1 \in \mathbb{B}$ и тривиализацию ϕ на тривиализацию $\phi_1: B \times M_1 \rightarrow M$, $M_1 := M_{\lambda_1}$, определяемую по формуле

$\phi_1(\lambda, \cdot) = \phi(\lambda, \cdot) \circ \phi(\lambda_1, \cdot)^{-1}$. Область $D_1 \subset \mathbb{C}_\zeta$, накрывающую M_1 и необходимую для определения характеристики, зададим как $g(D)$, где g – гомеоморфное в $\mathbb{C}$ решение уравнения Бельтрами $g_{\bar{z}} = \mu(\lambda_1, \cdot) g_z$ с неподвижными точками $0, 1$, а накрытие $f_1 : D_1 \rightarrow M_1$ определим как композицию $f_1 = \tilde{\phi}(\lambda_1, \cdot) \circ g^{-1}$, где $\tilde{\phi}(\lambda, z) := \phi(\lambda, f_0(z))$, $z \in D$.

Если w – голоморфная координата в некоторой области на M_1 , однолистно накрываемой областью $U \subset D_1$, то $U \ni z \mapsto w \circ f_1(z)$ – квазиконформное отображение плоских областей. По определению, $\mu(\lambda_1, \cdot) = W_{\bar{z}}/W_z$, где $W = w \circ \tilde{\phi}(\lambda_1, \cdot)$. Так как и $g_{\bar{z}}/g_z = \mu(\lambda_1, \cdot)$, то $(W \circ g^{-1})_{\bar{z}}/(W \circ g^{-1})_z = 0$ почти всюду в U и, значит (по лемме Вейля для квазиконформных отображений), функция $W \circ g^{-1}$ голоморфна в U . Ввиду произвольности U это означает, что f_1 – голоморфное накрытие.

Пусть теперь w – голоморфная функция в окрестности точки $q \in M_1$ на M такая, что $dw|_{M_1} \neq 0$ в этой точке, $z_1 \in D_1$ такова, что $f_1(z_1) = q$, $\tilde{\phi}_1(\lambda, z) := \phi_1(\lambda, f_1(z))$, $z \in D_1$, и $W^1 := w \circ \tilde{\phi}_1$ (в окрестности (λ_1, z_1)). Тогда характеристика μ_1 тривиализации ϕ_1 , соответствующая накрытию f_1 , равна $W_{\bar{z}}^1/W_z^1$. Распишем W^1 при фиксированном λ :

$$\begin{aligned} W^1 &= w \circ \phi_1(\lambda, \cdot) \circ f_1 = w \circ \phi(\lambda, \cdot) \circ \phi(\lambda_1, \cdot)^{-1} \circ f_1 \\ &= w \circ \phi(\lambda, \cdot) \circ f_0 \circ g^{-1} = (w \circ \tilde{\phi}(\lambda, \cdot)) \circ g^{-1} = W \circ g^{-1}, \end{aligned}$$

где $W = w \circ \tilde{\phi}$. Так как $W_{\bar{z}}/W_z = \mu$, а $g_{\bar{z}}/g_z = \mu(\lambda_1, \cdot)$ не зависит от λ , то по формуле коэффициента Бельтрами для композиции (см. [1; IC])

$$\mu_1(\lambda, \cdot) \circ g = \frac{g_z}{g_{\bar{z}}} \frac{\mu(\lambda, \cdot) - \mu(\lambda_1, \cdot)}{1 - \overline{\mu(\lambda_1, \cdot)} \mu(\lambda, \cdot)}.$$

Согласно шагу 1, μ_1 (как отображение в $L^\infty(\mathbb{C})$) голоморфна на каждом голоморфном диске $h: \mathbb{D} \rightarrow B$ таким, что $h(0) = \lambda_1$. Из формулы для композиции следует, что μ тоже голоморфна на таких дисках и, значит, μ голоморфна в $\mathbb{B}$. Более того, формула показывает, что если μ голоморфна по λ над какой-нибудь областью в B (как элемент $L^\infty(\mathbb{C})$), то там же голоморфна и μ_1 , и наоборот.

Шаг 3. Так как B линейно связное, то для каждой точки $\lambda' \in B$ существует конечная цепочка координатных шаров $\mathbb{B}_j$, $j = 0, \dots, N$, и точек $\lambda_j, \lambda_{j+1} \in \mathbb{B}_j$ таких, что $\lambda_{N+1} = \lambda'$; следовательно, $\mu(\lambda, \cdot) \in L^\infty(\mathbb{C})$ голоморфна по λ всюду в B .

Это свойство эквивалентно тому, что $\psi_\mu(\lambda) := \int \mu(\lambda, \cdot) \psi dS$ – скалярная голоморфная функция для любой $\psi \in L^1(\mathbb{C})$, $\|\psi\|_1 \leq 1$, причем эта функция по модулю не превосходит 1. Так как расстояние Каратеодори не увеличивается при голоморфных отображениях, то $\log \frac{1 + |\psi_\mu(\lambda)|}{1 - |\psi_\mu(\lambda)|} \leq c_B(\lambda, \lambda_0)$, откуда $\|\mu(\lambda, \cdot)\|_\infty \leq \text{th}(c_B(\lambda, \lambda_0)/2)$. Лемма доказана.

Лемма 2.5 в основном (для $D = \mathbb{D}$) доказана в приложении к работе Эрла и Фоулера [20].

Имея такую замечательную функцию μ на $B \times D$, мы можем построить обычное голоморфное движение в $B \times \mathbb{C}$ с этой характеристикой, что, оказывается, приводит к одновременной униформизации семейства $\pi: M \rightarrow B$.

ЛЕММА 2.6. Пусть $\pi: M \rightarrow B$ – голоморфное семейство римановых поверхностей с базовым слоем M_0 над комплексным банаховым многообразием (B, λ_0) , $\phi: B \times M_0 \rightarrow M$ – горизонтально голоморфная тривиализация и $f_0: D \rightarrow M_0$ – голоморфное накрытие областью $D \subset \mathbb{C}$. Тогда существуют область $\Omega \subset B \times \mathbb{C}$ с $\Omega_{\lambda_0} = D$ и послойно голоморфное накрытие $f: \Omega \rightarrow M$ такое, что $f|_D = f_0$. При этом однозначно определено нормированное голоморфное движение $\psi: B \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, заполняющее $B \times \mathbb{C}$, голоморфное в $B \times (\mathbb{C} \setminus \bar{D})$ по совокупности переменных и такое, что $\phi(\lambda, f_0(z)) = f(\lambda, \psi(\lambda, z))$ для всех $(\lambda, z) \in B \times D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть μ – характеристика голоморфного движения ϕ , соответствующая f_0 , и $\psi(\lambda, \cdot)$ – гомеоморфное в $\mathbb{C}$ решение уравнения Бельтрами $\psi_{\bar{z}} = \mu(\lambda, \cdot) \psi_z$ с неподвижными точками 0, 1 (как и выше, мы предполагаем μ доопределенной нулем в $\mathbb{C} \setminus D$). Такое решение единственное. Положим

$$\Omega = \{(\lambda, \zeta): \lambda \in B, \zeta \in \psi(\lambda, D)\}$$

и $f(\lambda, \cdot) = \phi(\lambda, \cdot) \circ f_0 \circ \psi(\lambda, \cdot)^{-1}$. Так как ϕ и $\psi(\lambda, \cdot)$ – гомеоморфизмы, то f – топологическое накрытие.

Фиксируем λ . Пусть w – голоморфная функция в окрестности точки $p \in M_\lambda$ такая, что $dw|_{M_\lambda} \neq 0$ в этой точке, и $W := w \circ \phi(\lambda, \cdot) \circ f_0$. Тогда $W_{\bar{z}}/W_z = \mu(\lambda, \cdot)$ по определению μ и это же равно $\psi(\lambda, \cdot)_{\bar{z}}/\psi(\lambda, \cdot)_z$ по определению $\psi(\lambda, \cdot)$. Поэтому, как и выше, функция $W \circ \psi(\lambda, \cdot)^{-1} = w \circ f(\lambda, \cdot)$ голоморфна в Ω_λ и, значит, $f(\lambda, \cdot): \Omega_\lambda \rightarrow M_\lambda$ – голоморфные накрытия для каждого $\lambda \in B$.

С другой стороны, $S_z = \{(\lambda, \psi(\lambda, z)): \lambda \in B\} \subset \Omega$ – голоморфные графики и в каждой точке $(\lambda, \zeta) \in S_z$ функция $\psi(\lambda, \cdot)^{-1}$ равна z , т. е. сужение $f|_{S_z}$ равно $\phi(\lambda, f_0(z))$ и потому голоморфно. Фиксируем произвольную точку $(\lambda_1, \zeta_1) \in \Omega$, голоморфный диск $h: \mathbb{D} \rightarrow M$, $h(0) = \lambda_1$ и произвольную голоморфную функцию g в окрестности точки $f(\lambda_1, \zeta_1)$ на M . Тогда функция $F(\eta, \zeta) := g \circ f(h(\eta), \zeta)$ определена и непрерывна в окрестности точки $(0, \zeta_1) \subset \mathbb{C}^2$, голоморфна по ζ и на каждом графике $S'_z = \{(h(\eta), \psi(h(\eta), z)): \eta \in \mathbb{D}\}$, пересекающем окрестность этой точки. Так как слои $h(\eta) = \text{const}$ и поверхности S'_z взаимно трансверсальны, то из леммы Шварца легко следует, что F локально удовлетворяет условию Липшица (подробнее см. [16]). По теореме Радемахера, она дифференцируема почти всюду в окрестности $(0, \zeta_1)$ и этот определенный почти всюду дифференциал класса L^∞_{loc} совпадает с ее дифференциалом в смысле распределений. В точках дифференцируемости F (каковыми являются, например, все точки Лебега для поточечного дифференциала) имеем $\bar{\partial}F = 0$, поскольку F голоморфна и на слоях $h(\eta) = \text{const}$, и на S'_z . По лемме Вейля, функция F голоморфна в окрестности $(0, \zeta_1)$. Ввиду произвольности λ_1, ζ_1, h и g , это означает, что $f: \Omega \rightarrow M$ – голоморфное накрытие. Лемма доказана.

Классическое голоморфное движение $\psi: B \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ мы называем далее *каноническим накрытием* движения ϕ . Отображение f проектирует графики движения ψ в графики движения ϕ , и, таким образом, “декартово” голоморфное движение ψ является поднятием (прообразом) “криволинейного” голоморфного движения ϕ . При этом ψ определено на всем $B \times \mathbb{C}$ и дополнительно задает биголоморфное отображение $B \times (\mathbb{C} \setminus \bar{D}) \ni (\lambda, z) \mapsto (\lambda, \psi(\lambda, z)) \in (B \times \mathbb{C}) \setminus \bar{\Omega}$.

Через Φ обозначим преобразование $(\lambda, z) \mapsto (\lambda, \psi(\lambda, z))$ пространства $B \times \mathbb{C}$, голоморфное по λ и квазиконформное по z , которое будем называть *каноническим накрытием* тривиализации ϕ (соответствующим накрытию $f_0: D \rightarrow M_0$); по построению, Φ есть горизонтально голоморфная тривиализация и так тривиального $B \times \mathbb{C}$ и $f = \phi \circ F_0 \circ \Phi^{-1}$, где $F_0(\lambda, z) := (\lambda, f_0(z))$.

Построение накрытия f существенно опирается на конкретное голоморфное движение ϕ , однако фактически f зависит только от накрытия $f_0: D \rightarrow M_0$.

ЛЕММА 2.7. Пусть $\pi: M \rightarrow B$ – голоморфное семейство римановых поверхностей над комплексным банаховым многообразием (B, λ_0) с базовым слоем M_0 и $f_0: D \rightarrow M_0$ – голоморфное накрытие областью $D \subset \mathbb{C}$, не содержащей точек $0, 1$. Пусть $\phi_j: B \times M_0 \rightarrow M$, $j = 1, 2$, – горизонтально голоморфные тривиализации M , Φ_j – их поднятия в $B \times D$, соответствующие f_0 , $\Omega_j = \Phi_j(B \times D)$ и $f_j = \phi_j \circ F_0 \circ \Phi_j^{-1}: \Omega_j \rightarrow M$ – соответствующие голоморфные накрытия. Тогда $\Omega_1 = \Omega_2$, $f_1 \equiv f_2$, а $\Phi_1 \equiv \Phi_2$ в $B \times (\mathbb{C} \setminus D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{B} \ni \lambda_0$ – координатный шар в B и $D = \bigcup U_k$ – покрытие D кругами (с центрами z_k), настолько малыми, что $f_0|_{U_k}$ однолистно для каждого k . Положим $V_k = \Phi_1(\mathbb{B} \times U_k)$. Тогда $V_k \subset \Omega_1$ и $f_1|_{V_k} \rightarrow f_1(V_k) = \phi_1 \circ F_0(\mathbb{B} \times U_k)$ взаимно однозначно.

Так как область $f_1(V_k)$ односвязна и f_2 – накрытие, то существует однозначно определенная область $W_k \subset \Omega_2$, содержащая (λ_0, z_k) и такая, что $f_2|_{W_k} \rightarrow f_1(V_k)$ однолистно. Таким образом, для всякого k определено голоморфное отображение $g_k = (f_2|_{W_k})^{-1} \circ f_1$ с указанной ветвью f_2^{-1} . Так как $f_1 = f_2$ на $\lambda_0 \times D$ по условию, то $g_k(\lambda_0, z) \equiv (\lambda_0, z)$ для $z \in U_k$.

Пусть $U_k \cap U_l$ непусто. Тогда сужения $(f_2|_{W_k})^{-1}$, $(f_2|_{W_l})^{-1}$ на $f_1(V_k \cap V_l)$ равны, поскольку это поднятия относительно f_2 односвязной области, совпадающие в $f_1(\lambda_0 \times (U_k \cap U_l))$. Таким образом, полагая $g = g_k$ в V_k , мы получаем послойный гомеоморфизм $g: \Omega_1^0 \rightarrow \Omega_2^0$, где $\Omega_j^0 := \Omega_j \cap (\pi \circ f_j)^{-1}(\mathbb{B})$. Так как $f_2 \circ g = f_1$, то отображение g биголоморфное.

Определим в $\mathbb{B} \times \mathbb{C}$ отображение G , равное $g \circ \Phi_1$ в $\mathbb{B} \times D$ и Φ_2 в $B \times (\mathbb{C} \setminus D)$. Тогда $G(\lambda_0, z) \equiv z$, G инъективно по z и голоморфно по λ , т. е. G – голоморфное движение, нормированное вместе с Φ_2 , поскольку $0, 1 \notin D$.

Отображение $G \circ \Phi_1^{-1}$ такое же; в частности, при каждом фиксированном λ оно дифференцируемо почти всюду по z , будучи квазиконформным, причем его дифференциал принадлежит классу L_{loc}^2 (см. [42]). Так как $(\Phi_j(\lambda, \cdot))_{\bar{z}} = 0$ почти всюду в $\mathbb{C} \setminus D$, то $(\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(\lambda, \cdot))_{\bar{z}}$ тоже равно 0 почти всюду в $\mathbb{C} \setminus (\Omega_1)_\lambda$ (именно, в точках Лебега дифференциала $\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(\lambda, \cdot)$) при каждом фиксированном λ . Так как $G \circ \Phi_1^{-1} = g$ в Ω_1^0 голоморфно, то $(G \circ \Phi_1^{-1}(\lambda, \cdot))_{\bar{z}} = 0$ почти всюду в $\mathbb{C}$ при $\lambda \in \mathbb{B}$, и, значит, $G \circ \Phi_1^{-1}$ голоморфно по z по лемме Вейля. Так как $G \circ \Phi_1^{-1}(\lambda, \cdot)$ инъективно и нормировано, то $G \circ \Phi_1^{-1}$ тождественно по z , а значит, и в целом. В частности, оно тождественно на Ω_1^0 и на $(B \times \mathbb{C}) \setminus \Omega_1^0$, где равно соответственно g и $\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$.

Таким образом, доказано, что $\Omega_1^0 = \Omega_2^0$, $f_1 = f_2$ на Ω_1^0 и $\Phi_1 = \Phi_2$ на $\mathbb{B} \times (\mathbb{C} \setminus D)$. Так как Φ_j голоморфны по $\lambda \in B$, то, по теореме единственности, $\Phi_1 = \Phi_2$ в $B \times (\mathbb{C} \setminus D)$, из чего следует, в частности, что $\Omega_1 = \Omega_2$. А тогда $f_1 = f_2$ по теореме единственности. Лемма доказана.

Отображение $f: \Omega \rightarrow M$ мы называем далее *каноническим накрытием* семейства $\pi: M \rightarrow B$ (соответствующим накрытию f_0), а если $D = \mathbb{D}$, то однозначно определенное по лемме 2.7 отображение $f: \Omega \rightarrow M$ назовем *канонической униформизацией* семейства M . Из конструкции в лемме 2.6 очевидно следует, что все слои прообраза канонической униформизации являются квазикругами, а дополнение к $\bar{\Omega}$ в $B \times \mathbb{C}$ биголоморфно послойно эквивалентно $B \times (\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}})$, в частности, оно заполняется голоморфным движением (голоморфным по совокупности переменных!). По λ -лемме 2.4 это движение продолжается до голоморфного движения множества $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ над (B, λ_0) , и, значит, граница Ω заполняется голоморфным движением окружности $\partial \mathbb{D}$ над (B, λ_0) , т. е. является объединением однопараметрического семейства попарно непересекающихся голоморфных графиков над B .

Условие $D \neq 0, 1$ в лемме 2.7 существенно не только для доказательства. Например, для $D = \hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$ или $\mathbb{C} \setminus 0$ различные голоморфные движения $B \times D \rightarrow M = B \times D$ порождают, вообще говоря, различные отображения f . (Доказательство не проходит потому, что отображение G в этом случае не обязательно нормированное, условия $0, 1 \notin D$ нет.) Пусть, например, ϕ_1 – тождественное отображение $M = B \times D$ с такой D , $f_0: z \mapsto (\lambda_0, z)$ (тогда f_1 тоже тождественное) и $\alpha: B \times D \rightarrow D$ – голоморфное отображение, которое при каждом фиксированном $\lambda \in B$ является автоморфизмом D , причем $\alpha(\lambda_0, z) \equiv z$, но в целом $\alpha(\lambda, z) \neq z$. Тогда $\phi_2: (\lambda, z) \mapsto (\lambda, \alpha(\lambda, z))$ – голоморфное движение, заполняющее M . Так как оно голоморфно по z , то Φ_2 – тождественное отображение, и, значит, $f_2 = \phi_2 \circ \Phi_2^{-1}$ – нетождественный автоморфизм M . Для совпадения накрытий f_1, f_2 , соответствующих различным голоморфным движениям и одинаковому накрытию $f_0: D \rightarrow M_0$, при $D = \mathbb{C} \setminus 0$ достаточно, чтобы $\phi_1(\cdot, p) = \phi_2(\cdot, p)$ для какого-нибудь одного значения $p \in M_0$, для $D = \mathbb{C}$ нужно совпадение уже двух сечений, а для $D = \hat{\mathbb{C}}$ – трех.

2.3. Униформизация локально тривиализуемых семейств. Свойство единственности канонических накрытий позволяет воспользоваться стандартным методом аналитического продолжения для униформизации семейств, локально тривиализуемых голоморфными движениями.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\pi: M \rightarrow B$ – голоморфное семейство гиперболических римановых поверхностей над односвязным комплексным банаховым многообразием (B, λ_0) и $f_0: D \rightarrow M_0$ – голоморфное накрытие областью $D \subset \mathbb{C}$. Предположим, что существует покрытие B областями B_α такими, что каждое $\pi^{-1}(B_\alpha)$ заполняется некоторым голоморфным движением. Тогда существуют область $\Omega \subset B \times \mathbb{C}$, $\Omega_0 = D$, и сохраняющее проекцию голоморфное накрытие (униформизация) $f: \Omega \rightarrow M$, $f(\lambda_0, \cdot) = f_0$. При этом $(B \times \mathbb{C}) \setminus \bar{\Omega}$ послойно биголоморфно эквивалентно $B \times (\mathbb{C} \setminus \bar{D})$, и если $D = \text{int } \bar{D}$, то граница Ω в $B \times \mathbb{C}$ заполняется однозначно определенным голоморфным движением над (B, λ_0) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как D – гиперболическая область, то без ограничения общности можно считать, что $0, 1 \notin D$.

Пусть $\lambda(t)$, $t \in [0, 1]$, – путь в B с концами λ_0, λ_1 . Тогда существуют $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ такие, что $\lambda([t_\nu, t_{\nu+1}]) \subset B^\nu := B_{\alpha_\nu}$ для некоторых α_ν , $\nu = 0, \dots, N-1$. По условию и лемме 2.6, существуют голоморфное движение

$\phi_0: B^0 \times M_0 \rightarrow \pi^{-1}(B^0)$, область $\Omega^0 \in B^0 \times \mathbb{C}$, $\Omega_{\lambda_0}^0 = \lambda_0 \times D$, и каноническое накрытие $f^0: \Omega^0 \rightarrow \pi^{-1}(B^0)$ с $f^0(\lambda_0, z) = f_0(z)$, $z \in D$.

Область D_1 определим из условия $\Omega_{\lambda(t_1)}^0 = \lambda(t_1) \times D_1$ и положим $M_1 = M_{\lambda(t_1)}$ и $f_1 = \phi_0(\lambda(t_1), \cdot) \circ f_0 \circ \psi_0(\lambda(t_1), \cdot)^{-1}: D_1 \rightarrow M_1$. Опять по условию и лемме 2.6 существуют голоморфное движение $\phi_1: B^1 \times M_1 \rightarrow \pi^{-1}(B^1)$, его каноническое накрытие $\psi_1: B^1 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ и каноническое накрытие $f^1: \Omega^1 \rightarrow \pi^{-1}(B^1)$ семейства $\pi^{-1}(B^0)$ областью $\Omega^1 \subset B^1 \times \mathbb{C}$, которое по лемме 2.7 однозначно определяется условием, что $f^1 = f_1$ на $\Omega_{\lambda(t_1)}^0$. По лемме 2.6,

$$f^1(\lambda, \cdot) = \phi_1(\lambda, \cdot) \circ f_1 \circ \psi_1(\lambda, \cdot)^{-1} = \phi_1(\lambda, \cdot) \circ \phi_0(\lambda(t_1), \cdot) \circ f_0 \circ \psi_0(\lambda(t_1), \cdot)^{-1} \circ \psi_1(\lambda, \cdot)^{-1}.$$

Продолжая так по индукции, получаем области $\Omega^\nu \subset B^\nu \times \mathbb{C}$, и послойные биголоморфизмы $f^\nu: \Omega^\nu \rightarrow \pi^{-1}(B^\nu)$, причем $f^\nu = f^{\nu-1}$ на $\Omega_{\lambda(t_\nu)}^{\nu-1} = \lambda(t_\nu) \times D_\nu$ и $\Omega_\lambda^{\nu-1} = \Omega_\lambda^\nu$ для всех λ из связной компоненты $B^{\nu-1} \cap B^\nu$, содержащей $\lambda(t_\nu)$, $\nu = 1, \dots, N$. По построению, $f^\nu(\lambda, \cdot) = \tilde{\phi}_\nu(\lambda, \cdot) \circ f_0 \circ \tilde{\psi}_{\nu+1}(\lambda, \cdot)^{-1}$, где

$$\tilde{\phi}_\nu(\lambda, \cdot) = \phi_\nu(\lambda, \cdot) \circ \phi_{\nu-1}(\lambda(t_\nu), \cdot) \circ \dots \circ \phi_0(\lambda(t_1), \cdot): M_0 \rightarrow M_\lambda,$$

$$\tilde{\psi}_\nu(\lambda, \cdot) = \psi_\nu(\lambda, \cdot) \circ \psi_{\nu-1}(\lambda(t_\nu), \cdot) \circ \dots \circ \psi_0(\lambda(t_1), \cdot): D \rightarrow \Omega_\lambda.$$

Положим $\Omega = \bigcup \Omega^\nu$ и $f|_{\Omega^\nu} := f^\nu$. Тогда результат продолжения по цепочке, $f|_{\Omega^N}$, не зависит от выбора $\{t_\nu\}$: если $\{\tau_\mu\}$ – другой такой набор, то упорядочивая $\{t_\nu\} \cup \{\tau_\mu\}$ и повторяя описанный выше процесс продолжения для этого более мелкого разбиения $\{t'_j\} \subset [0, 1]$, по теореме единственности (лемме 2.7) получаем, что множество точек $t \in [0, 1]$ таких, что $\Omega_{\lambda(t)} = \Omega'_{\lambda(t)}$ и $f|_{\Omega_{\lambda(t)}} = f'|_{\Omega_{\lambda(t)}}$, открытое и замкнутое на $[0, 1]$.

Далее, если $\lambda'(t)$ – другой путь, соединяющий λ_0 с λ_1 и достаточно близкий к $\lambda(t)$, то точки t'_ν можно брать так, что $\lambda(t_\nu)$ и $\lambda'(t'_\nu)$ лежат в одной связной компоненте U_ν множества $B^{\nu-1} \cap B^\nu$, и тогда по теореме единственности $f|_{\Omega^\nu} = f'|_{\Omega^\nu}$, где f' – продолжение f_0 вдоль пути $\lambda'(t)$. Так как B односвязно, то отсюда, как в стандартной теореме о монодромии, получаем однозначно определенное накрытием f_0 голоморфное послойное накрытие $f: \Omega \rightarrow M$ областью $\Omega \subset B \times \mathbb{C}$.

По построению, $f(\lambda, \cdot)$ для $\lambda \in B_\alpha$ представляется в виде $\tilde{\phi}_\alpha(\lambda, \cdot) \circ f_0 \circ \tilde{\psi}_\alpha(\lambda, \cdot)^{-1}$, причем квазиконформные отображения $\tilde{\psi}_\alpha(\lambda, \cdot)$, вообще говоря, зависят от α . Однако $\tilde{\psi}_\alpha(\lambda, \cdot)$, $\lambda \in B_\alpha$, определены на всей плоскости $\mathbb{C}$ и в $\mathbb{C} \setminus D$ они от α не зависят. В самом деле, аналитически продолжая f^0 , мы одновременно продолжаем и каноническое накрытие $\psi_0|_{B^0 \times (\mathbb{C} \setminus \bar{D})} \rightarrow \mathbb{C}$, хотя и определяемое движением ϕ_0 , но зависящее только от f_0 по лемме 2.7. По определению, $\psi_0(\lambda, \cdot): \mathbb{C} \setminus D \rightarrow \mathbb{C} \setminus \Omega_\lambda^0$, $\lambda \in B^0$. Для пути $\lambda(t)$ с концами λ_0 и λ_1 и $0 = t_0 < \dots < t_N = 1$, как выше, отображение $\psi_\nu(\lambda, \cdot): \mathbb{C} \setminus D_\nu \rightarrow \mathbb{C} \setminus \Omega_\lambda$, $\lambda \in B^\nu$, однозначно определяется условием, что $\psi_\nu(\lambda(t_\nu), \cdot) = \psi_{\nu-1}(\lambda(t_\nu), \cdot)$ на $\mathbb{C} \setminus D_\nu$.

Положим $\tilde{\psi}_0 = \psi_0$ на $B^0 \times (\mathbb{C} \setminus \bar{D})$ и, по индукции, $\tilde{\psi}_\nu(\lambda, z) := \psi_\nu(\lambda, \cdot) \circ \tilde{\psi}_{\nu-1}(\lambda(t_\nu), \cdot)$ для $\lambda \in B^\nu$. По лемме 2.7 и теореме о монодромии, как выше, в результате такого аналитического продолжения получается биголоморфное отображение $B \times (\mathbb{C} \setminus \bar{D}) \rightarrow (B \times \mathbb{C}) \setminus \bar{\Omega}$. Если $D = \text{int } \bar{D}$, то по λ -лемме 2.4 оно продолжается до голоморфного движения $\tilde{\psi}$ множества $\mathbb{C} \setminus D$ над (B, λ_0) , в частности, граница Ω в $B \times \mathbb{C}$ заполняется голоморфным движением $\tilde{\psi}|_{B \times \partial D}$. Теорема доказана.

ДОПОЛНЕНИЕ 2.1. Пусть Γ есть накрывающая группа накрытия f_0 . Тогда накрывающая группа G накрытия f в каждом слое Ω_λ действует как $w_\lambda \Gamma w_\lambda^{-1}$, где $w_\lambda: D \rightarrow \Omega_\lambda$ – квазиконформное отображение, причем коэффициент Бельтрами $\mu(\lambda, \cdot) := (w_\lambda)_{\bar{z}} / (w_\lambda)_z$ инвариантен относительно Γ , точнее, $(\mu(\lambda, \cdot) \circ A) \bar{A}' / A' = \mu(\lambda, \cdot)$ для всех $A \in \Gamma$. Элементы G_λ являются дробно-линейными отображениями и, таким образом, G продолжается до подгруппы голоморфных послойных автоморфизмов многообразия $B \times \widehat{\mathbb{C}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению, $f(\lambda, \cdot) = \phi_0(\lambda, \cdot) \circ f_0 \circ \psi_0^{-1}(\lambda, \cdot)$ для $\lambda \in B_0$. Так как $fG = G$ и ϕ_0 – гомеоморфизм, то $(f_0 \circ \psi_0(\lambda, \cdot)^{-1}) G_\lambda = f_0 \circ \psi_0(\lambda, \cdot)^{-1}$. Отсюда $f_0(\psi_0(\lambda, \cdot)^{-1} G_\lambda \psi_0(\lambda, \cdot)) = f_0$, т.е. $\psi_0(\lambda, \cdot)^{-1} G_\lambda \psi_0(\lambda, \cdot) \subset \Gamma$, и потому $G_\lambda \subset \psi_0(\lambda, \cdot) \Gamma \psi_0(\lambda, \cdot)^{-1}$ для $\lambda \in B_0$.

Так как $\psi_0(\lambda, \cdot)$ – решение уравнения Бельтрами с коэффициентом $\mu_0(\lambda, \cdot)$, инвариантным относительно Γ , то для всякого $A \in \Gamma$ функция $\psi_0(\lambda, \cdot) \circ A$ – тоже решение этого уравнения, не обязательно нормированное, точки $0, 1, \infty$ не фиксированы. Так как нормированное решение единственное, то существует дробно-линейное отображение C_λ такое, что $\psi_0(\lambda, \cdot) \circ A = C_\lambda \circ \psi_0(\lambda, \cdot)$ и, значит, $\psi_0(\lambda, \cdot) A \psi_0(\lambda, \cdot)^{-1} = C_\lambda$ для $\lambda \in B_0$. Таким образом, при $\lambda \in B_0$ элементы группы $\psi_0(\lambda, \cdot) \Gamma \psi_0(\lambda, \cdot)^{-1}$, содержащей G_λ , являются дробно-линейными отображениями.

Производная Шварца любой дробно-линейной функции равна нулю, поэтому из голоморфности G и теоремы единственности следует, что все группы G_λ состоят из дробно-линейных отображений. Голоморфность элементов G означает, что локально (по λ) коэффициенты этих отображений можно выбирать голоморфными по λ и, таким образом, элементы G продолжаются до голоморфных послойных автоморфизмов $B \times \widehat{\mathbb{C}}$.

По построению f , отображение $f(\lambda, \cdot)$ для $\lambda \in B_\alpha$ равно $\tilde{\phi}_\alpha(\lambda, \cdot) \circ f_0 \circ \tilde{\psi}_\alpha^{-1}(\lambda, \cdot)^{-1}$, где $\tilde{\psi}_\alpha(\lambda, \cdot)|_D \rightarrow \Omega_\lambda$. Поэтому, как выше, $f_0 \circ \tilde{\psi}_\alpha(\lambda, \cdot)^{-1} G_\lambda = f_0 \circ \tilde{\psi}_\alpha(\lambda, \cdot)^{-1}$, откуда $G_\lambda \subset w_\lambda \Gamma w_\lambda^{-1}$, где $w_\lambda := \tilde{\psi}_\alpha(\lambda, \cdot)$. По определению,

$$w_\lambda = \psi_N(\lambda, \cdot) \circ \psi_{N-1}(\lambda(t_N), \cdot) \circ \dots \circ \psi_0(\lambda(t_1), \cdot)$$

(из процесса аналитического продолжения). Положим $G^\nu = G_{\lambda(t_\nu)}$. Тогда по индукции, как выше, $G^{\nu+1} \subset \psi_\nu(\lambda(t_{\nu+1}), \cdot) G^\nu \psi_\nu(\lambda(t_{\nu+1}), \cdot)^{-1}$ и, значит, для любого $A \in \Gamma$ найдется дробно-линейное преобразование C_λ такое, что $w_\lambda \circ A = C_\lambda \circ w_\lambda$. Из этого очевидно следует, что $(\mu(\lambda, \cdot) \circ A) \bar{A}' / A' = \mu(\lambda, \cdot)$ для $A \in \Gamma$.

Наконец, для каждого $\lambda \in B$ дробно-линейные преобразования $w_\lambda \circ A \circ w_\lambda^{-1}$, $A \in \Gamma$, принадлежат накрывающей группе накрытия $f(\lambda, \cdot): \Omega_\lambda \rightarrow M_\lambda$. Так как они голоморфно зависят от λ , то из этого следует, что они принадлежат G_λ и, значит, $G_\lambda = w_\lambda \Gamma w_\lambda^{-1}$ для всякого $\lambda \in B$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Отображения w_λ над каждым B_α можно брать голоморфно зависящими от λ (см. определение). В целом они определены по λ не однозначно, но их сужения на $\mathbb{C} \setminus D$ и группы $w_\lambda \Gamma w_\lambda^{-1}$ по доказанному выше не зависят от выбора w_λ (соответствующего выбору $B_\alpha \ni \lambda$), а зависят только от λ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Несмотря на то, что граница Ω заполняется голоморфным движением, сама область Ω может не содержать ни одного глобального голоморфного сечения проекции в B . Типичный пример – слоения Берса над

пространствами Тейхмюллера гиперболических римановых поверхностей (см. ниже).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Условие локального заполнения семейства $\pi: M \rightarrow B$ голоморфными движениями является основным для определения “маркировки” такого семейства по Эрлу–Фоулеру [20]. В общем для маркировки нужно еще условие согласования локальных голоморфных движений над попарными пересечениями $B_\alpha \cap B_\beta$, но для односвязной базы B оно излишнее [20; теорема 4].

ЛЕММА 2.8. Пусть $\pi: M \rightarrow B$ – голоморфное семейство гиперболических римановых поверхностей, $f_j: D_j \rightarrow M_0$, $j = 0, 1$, – голоморфные накрытия и $h: D_1 \rightarrow D_0$ – голоморфное отображение такое, что $f_1 = f_0 \circ h$. Пусть $f^j: \Omega^j \rightarrow M$ – соответствующие канонические накрытия. Тогда существует голоморфное послойное накрытие $g: \Omega^1 \rightarrow \Omega^0$ такое, что $g(\lambda_0, \cdot) = h$ и $f^1 = f^0 \circ g$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G^j – накрывающие группы накрытий f^j , $B = \bigcup B_\alpha$, $\phi_\alpha: B_\alpha \times M_{\lambda_\alpha} \rightarrow \pi^{-1}(B_\alpha)$ – горизонтальные голоморфные тривиализации и $\psi_\alpha^j: B_\alpha \times \Omega_{\lambda_\alpha}^j \rightarrow \Omega_\alpha^j$ – их канонические накрытия. Тогда $f^j(\lambda, \cdot) = \tilde{\phi}_\alpha(\lambda, \cdot) \circ f_j \circ \tilde{\psi}_\alpha^j(\lambda, \cdot)^{-1}$ для $\lambda \in B_\alpha$ (см. доказательство теоремы 2.1) и, значит,

$$f^1(\lambda, \cdot) \circ \tilde{\psi}_\alpha^1(\lambda, \cdot) = \tilde{\phi}_\alpha \circ f_1 = \tilde{\phi}_\alpha \circ f_0 \circ h = f^0(\lambda, \cdot) \circ \tilde{\psi}_\alpha^0(\lambda, \cdot) \circ h,$$

т. е. $f^1 = f^0 \circ g_\alpha$, где $g_\alpha(\lambda, \cdot) := \tilde{\psi}_\alpha^0(\lambda, \cdot) \circ h \circ \tilde{\psi}_\alpha^1(\lambda, \cdot)^{-1}: \Omega_\alpha^1 \rightarrow \Omega_\alpha^0$, $\lambda \in B_\alpha$, причем g_α голоморфно в Ω_α^1 по совокупности переменных.

Отсюда $f^0 \circ g_\alpha = f^0 \circ g_\beta$ в $\Omega_\alpha^1 \cap \Omega_\beta^1$.

Предположим, что $g_\alpha(\lambda', \cdot) = g_\beta(\lambda', \cdot)$ для некоторого $\lambda' \in B_\alpha \cap B_\beta$. Тогда для фиксированного $c \in \Omega_{\lambda'}^1$ из равенства $f^0 \circ g_\alpha(\lambda, c) = f^0 \circ g_\beta(\lambda, c)$ для λ , близких к λ' , следует, что существует $A_c(\lambda, \cdot) \in G_\lambda^0$ такое, что $g_\beta(\lambda, c) = A_c(\lambda, \cdot) \circ g_\alpha(\lambda, c)$. Так как $g_\beta(\lambda, \cdot) \rightarrow g_\alpha(\lambda', \cdot)$ при $\lambda \rightarrow \lambda'$, то $A_c(\lambda, \cdot) \rightarrow c$. Так как элементы $G_{\lambda'}^0$ не имеют неподвижных точек в $\Omega_{\lambda'}^0$, то $A_c(\lambda, \cdot) \rightarrow \text{id}$ при $\lambda \rightarrow \lambda'$. Так как группа G^0 дискретная, то из этого следует, что $A_c(\lambda, \cdot) = \text{id}$ при λ , близких к λ' . Отсюда и из теоремы единственности получаем, что $g_\alpha = g_\beta$ в связной компоненте множества $\Omega_\alpha^1 \cap \Omega_\beta^1$, содержащей $\Omega_{\lambda'}^1$.

Имея такую единственность, мы можем аналитически продолжать элемент g_0 , определенный над B_0 , по любому пути в B , как это описано в доказательстве теоремы 2.1. Так как B односвязно, то в результате получится глобальное голоморфное послойное отображение $g: \Omega^1 \rightarrow \Omega^0$. По теореме единственности, $f^1 = f^0 \circ g$, так как это верно над B_0 . Лемма доказана.

3. Голоморфные движения и пространства Тейхмюллера

3.1. Универсальные семейства. Пусть $\Gamma \subset \text{Aut } \mathbb{D}$ – фуксова группа, т. е. дискретная подгруппа дробно-линейных автоморфизмов круга. Всюду в дальнейшем предполагаем, что Γ не имеет кручения (это эквивалентно тому, что элементы группы Γ не имеют неподвижных точек в $\mathbb{D}$). Тогда $\mathbb{D}/\Gamma$ – риманова поверхность, факторотображение $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}/\Gamma$ является универсальным накрытием с накрывающей группой Γ , изоморфной фундаментальной группе $\pi_1(\mathbb{D}/\Gamma)$. По теореме Пуанкаре–Кёбе, всякая риманова поверхность конформно эквивалентна поверхности вида $\mathbb{D}/\Gamma$ для некоторой фуксовой группы Γ без кручения.

Обозначим через $L^\infty(\mathbb{D}, \Gamma)$ замкнутое подпространство в $L^\infty(\mathbb{D})$, состоящее из функций μ таких, что

$$(\mu \circ A) \overline{A'}' = \mu \quad (6)$$

для всех $A \in \Gamma$. Единичный шар в $L^\infty(\mathbb{D}, \Gamma)$ обозначим $\mathcal{M}_1(\Gamma)$. Элементы $\mu \in \mathcal{M}_1(\Gamma)$ продолжаем нулем в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, не меняя обозначений, и, таким образом, считаем, что $\mathcal{M}_1(\Gamma) \subset L^\infty(\mathbb{C})$.

По теореме Боярского [13], [14], для всякой $\mu \in \mathcal{M}_1(\Gamma)$ существует единственное гомеоморфное в $\mathbb{C}$ решение w^μ уравнения Бельтрами $w_{\bar{z}} = \mu w_z$, нормированное условием $w^\mu(z) = z + o(1)$ в окрестности ∞ (решение в классе Соболева $W_{\text{loc}}^{1,p}$ с некоторым $p > 2$, зависящим от $\|\mu\|_\infty$, см. ниже п. 4.1). Два элемента μ_1, μ_2 считаются эквивалентными по Тейхмюллеру, если $w^{\mu_1} = w^{\mu_2}$ на $\partial\mathbb{D}$ (а тогда и на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$). Факторпространство $\mathcal{M}_1(\Gamma)$ по этому отношению эквивалентности называется *пространством Тейхмюллера* фуксовой группы Γ и обозначается $T(\Gamma)$. Это в общем случае бесконечномерное комплексное банахово многообразие, комплексная структура которого однозначно определяется условием голоморфности факторотображения $\Phi: \mathcal{M}_1(\Gamma) \rightarrow T(\Gamma)$.

Согласно общей теории пространств Тейхмюллера (см. [26], [41], [47], [17]), $T(\Gamma)$ биголоморфно эквивалентно области в банаховом пространстве $\mathcal{B}_2(\Gamma)$ квадратичных дифференциалов на $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, т. е. голоморфных в $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ функций τ таких, что

$$(\tau \circ A)(A')^2 = \tau, \quad A \in \Gamma, \quad (7)$$

и норма $\|\tau\| := (1/6) \sup_{\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}} (|z|^2 - 1)^2 |\tau(z)|$ конечна (коэффициент $1/6$ – для удобной нам нормировки). Этот биголоморфизм переводит класс Тейхмюллера $[\mu]$ в производную Шварца $Sw^\mu \in \mathcal{B}_2(\Gamma)$ (не зависящую от представителя $\mu \in [\mu]$). По теореме Крауса [39] (Нехари [48]) образ $T(\Gamma)$ содержится в единичном шаре пространства $\mathcal{B}_2(\Gamma)$ и по теореме Альфорса ([1; VI C1]) содержит шар $\|\tau\| < 1/3$. Всюду далее мы отождествляем $T(\Gamma)$ с этой областью в $\mathcal{B}_2(\Gamma)$.

По определению классов Тейхмюллера, область $w^\mu(\mathbb{D})$ зависит только от класса $[\mu]$ функции $\mu \in \mathcal{M}_1(\Gamma)$ и, таким образом, в $T(\Gamma) \times \mathbb{C}$ естественно определяется область

$$F(\Gamma) = \{([\mu], z) : z \in w^\mu(\mathbb{D})\}$$

с голоморфной проекцией $([\mu], z) \mapsto [\mu]$, превращающей $F(\Gamma)$ в голоморфное семейство плоских жордановых областей. Голоморфное семейство $F(\Gamma) \rightarrow T(\Gamma)$ называется *расслоением Берса* фуксовой группы Γ (см. [10], [47]).

Дробно-линейные преобразования $A \in \Gamma$ действуют на $F(\Gamma)$ по правилу

$$([\mu], z) \mapsto ([\mu], w^\mu \circ A \circ (w^\mu)^{-1}(z))$$

(отображения $w^\mu \circ A \circ (w^\mu)^{-1}$ оказываются дробно-линейными и не зависят от μ из одного класса; см. дополнение 2.1 к теореме 2.1 или [1; VI A]). Это действие послойное и голоморфное. Фактор $V(\Gamma)$ многообразия $F(\Gamma)$ по этому действию Γ определяет голоморфное семейство римановых поверхностей $V(\Gamma)_{[\mu]} := F(\Gamma)_{[\mu]} / w^\mu \circ \Gamma \circ (w^\mu)^{-1}$ над $T(\Gamma)$, которое называют также *универсальной кривой Тейхмюллера* (фуксовой группы Γ). Пространства Тейхмюллера, как известно, односвязные (и даже стягиваемые), поэтому $F(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma)$ – универсальное накрытие над $V(\Gamma)$. Поскольку оно еще и послойное и $F(\Gamma) \subset$

$T(\Gamma) \times \mathbb{C}$, то факторпроекция в $V(\Gamma)$ является *униформизацией* голоморфного семейства $V(\Gamma) \rightarrow T(\Gamma)$.

Проекция $\mathcal{M}_1(\Gamma) \rightarrow T(\Gamma)$ допускает голоморфные сечения в окрестности каждой точки $\tau \in T(\Gamma)$ (что не очевидно ввиду бесконечной размерности “большинства” пространств $T(\Gamma)$). Если $\tau \mapsto \mu(\tau, \cdot)$ – такое сечение Φ над $U \subset T(\Gamma)$, то, по теореме Альфорса–Берса [1], [2], функции $w^{\mu(\tau, \cdot)}(z)$ на $U \times \mathbb{D}$ голоморфно зависят от τ при каждом фиксированном $z \in \mathbb{D}$ (будучи всего лишь квазиконформными при каждом фиксированном $\tau \in U$). Голоморфные сечения $(\tau, w^{\mu(\tau, \cdot)}(z))$, $z \in \mathbb{D}$, проекции $F(\Gamma) \rightarrow T(\Gamma)$ заполняют $F(\Gamma) \cap \{\tau \in U\}$ и тем самым задают горизонтально голоморфную тривиализацию $F(\Gamma)$ над U (с произвольным базовым слоем $F(\Gamma)_{\tau^0}$, $\tau^0 \in U$).

Накрывающая группа проекции $F(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma)$ в слое $F(\Gamma)_{\tau}$ действует как $w^{\mu(\tau, \cdot)} \Gamma (w^{\mu(\tau, \cdot)})^{-1}$ (см. конец п. 2.3). Пусть $A \in \Gamma$ и B – элемент накрывающей группы, действующий в слоях как $B_{\tau} = w^{\mu(\tau, \cdot)} A (w^{\mu(\tau, \cdot)})^{-1}$. Тогда $B_{\tau} \circ w^{\mu(\tau, \cdot)} = w^{\mu(\tau, \cdot)} \circ A$, т. е. B переводит сечение $w = w^{\mu(\tau, \cdot)}(z)$ в сечение $w = w^{\mu(\tau, \cdot)}(A(z))$ из того же голоморфного движения. Таким образом, построенная горизонтально голоморфная тривиализация $F(\Gamma)$ над U инвариантна относительно действия накрывающей группы, и потому ее факторотображение задает горизонтально голоморфную тривиализацию $V(\Gamma)$ над U .

В частности, над окрестностью базовой точки $[0] \in T(\Gamma)$ есть замечательное сечение

$$\tau \mapsto \mu(\tau, z) = \frac{(1 - |z|^2)^2 \tau(1/\bar{z})}{\bar{z}^4} \in \mathcal{M}_1(\Gamma),$$

определенное и голоморфное (по τ) в шаре $\{\|\tau\| < 1/3\} \subset \mathcal{B}_2(\Gamma)$ (функции $\tau \in \mathcal{B}_2(\Gamma)$ имеют в ∞ нуль порядка не меньше 4). Следуя [12], эти $\mu(\tau, \cdot)$ мы называем *гармоническими коэффициентами Бельтрами*. Это действительно сечение, так как производная Шварца от $w^{\mu(\tau, \cdot)}(z)$ в $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ равна τ (лемма Альфорса–Вейля [3]). Таким образом, расслоение Берса $F(\Gamma)$ горизонтально голоморфно тривиализуется над шаром $T_{1/3}(\Gamma) := \{\|\tau\| < 1/3\}$. Так как эта тривиализация инвариантна относительно действия Γ (орбиты переходят в орбиты), то корректно определена ее проекция в $V(\Gamma)$ и соответствующее голоморфное движение мы тоже называем гармоническим.

Все эти тривиализации голоморфны лишь по τ , а по z только квазиконформны. Однако вне $\mathbb{D}$ все функции w^{μ} голоморфны по z и зависят только от $[\mu]$. Так как локально представителей $\mu \in [\mu]$ можно выбирать голоморфно зависящими от τ , то дополнение к $F(\Gamma)$ в $T(\Gamma) \times \widehat{\mathbb{C}}$ вообще тривиально, отображение $(\tau, z) \mapsto (\tau, w^{\mu}(\tau, z))$ из $T(\Gamma) \times (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}})$ в $(T(\Gamma) \times \widehat{\mathbb{C}}) \setminus \overline{F(\Gamma)}$ является биголоморфизмом. В частности, дополнение к $F(\Gamma)$ заполняется голоморфным движением над всем $T(\Gamma)$. Согласно лемме 2.4, это движение продолжается на границу $\partial\mathbb{D}$, и, таким образом, мы получаем, что граница $F(\Gamma)$ расслаивается в однопараметрическое семейство (графиков) голоморфных сечений над $T(\Gamma)$. (В связи с этим отметим, что расслоения Берса, за единичными исключениями Γ , не допускают глобальных голоморфных сечений, см. [34].)

Вместо круга $\mathbb{D}$ в качестве универсальной накрывающей бывает удобно использовать также верхнюю полуплоскость $\mathbb{H}$. Переход от одной модели к другой получается дробно-линейной заменой координат в $\widehat{\mathbb{C}}$, и в качестве таковой

мы берем $h(z) = \frac{1-i}{2} \frac{z+1}{z-i}$. Отображение $h: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$ переводит точки $-1, 1, i$ на $\partial\mathbb{D}$ в точки $0, 1, \infty$, что удобно при использовании нормированных движений.

Фуксовой группе $\Gamma \subset \text{Aut } \mathbb{D}$ соответствует группа $\Gamma_+ := h\Gamma h^{-1} \subset \text{Aut } \mathbb{H}$. Обозначим через $\mathcal{M}_1(\Gamma_+) \subset L^\infty(\mathbb{C})$ множество функций ν , равных нулю вне $\mathbb{H}$ и таких, что $\|\nu\|_\infty < 1$ и $(\nu \circ B)\bar{B}'/B' = \nu$ для всех $B \in \Gamma_+$. Тогда $\mathcal{M}_1(\Gamma_+) \ni \nu \mapsto \mu := (\nu \circ h)\bar{h}'/h' \in \mathcal{M}_1(\Gamma)$ – биголоморфное отображение, изометричное относительно нормы в $L^\infty(\mathbb{C})$.

Обозначим через W^ν единственное гомеоморфное в $\mathbb{C}$ решение уравнения Бельтрами $W_{\bar{\zeta}} = \nu W_\zeta$ с неподвижными точками $0, 1, \infty$. Тогда $(W^\nu \circ h)_z = \mu(W^\nu \circ h)_z$, т.е. $W^\nu \circ h$ – однолистное мероморфное решение (вне простого полюса) уравнения Бельтрами $w_{\bar{z}} = \mu w_z$, в общем случае не нормированное. Так как w^μ – решение этого же уравнения, то

$$W^\nu \circ h = \frac{w^\mu - w^\mu(-1)}{w^\mu - w^\mu(i)} \frac{w^\mu(1) - w^\mu(i)}{w^\mu(1) - w^\mu(-1)}.$$

Так как $j = -1, 1, i \in \partial\mathbb{D}$, то значения $w^\mu(j)$ зависят только от класса Тейхмюллера $[\mu]$, и, значит, $w^{\mu_1} = w^{\mu_2}$ на $\partial\mathbb{D}$ тогда и только тогда, когда $W^{\nu_1} = W^{\nu_2}$ на $\mathbb{R}$. Таким образом, определяя $T(\Gamma_+)$ как множество классов эквивалентности “ $\nu_1 \sim \nu_2$, если $W^{\nu_1} = W^{\nu_2}$ на $\mathbb{R}$ ”, мы получаем биголоморфное отображение $T(\Gamma_+) \rightarrow T(\Gamma)$, $[\nu] \mapsto [\mu := (\nu \circ h)\bar{h}'/h']$.

Так как w^μ и $W^\nu \circ h$ – однолистные решения одного уравнения Бельтрами, то $l_\nu := w^\mu \circ h^{-1} \circ (W^\nu)^{-1}$ – однолистная мероморфная и, значит, дробно-линейная функция. Полагая

$$F(\Gamma_+) = \{([\nu], \zeta) : \nu \in \mathcal{M}_1(\Gamma_+), \zeta \in W^\nu(\mathbb{H})\},$$

мы получаем, что $l_\nu|_{F(\Gamma_+)[\nu]} \rightarrow F(\Gamma)_{[\mu]}$ – конформные отображения. Так как $w^\mu|_{\partial\mathbb{D}}$ и $W^\nu|_{\mathbb{R}}$ зависят только от классов Тейхмюллера и так как представителей классов $\mu(\tau, \cdot)$, а с ними и $\nu(\tau_+, \cdot)$, можно выбирать голоморфно зависящими от точек пространств Тейхмюллера, то таким образом определено биголоморфное послойное отображение

$$F(\Gamma_+) \ni ([\nu], \zeta) \mapsto ([\mu = (\nu \circ h)\bar{h}'/h'], z = w^\mu \circ h^{-1} \circ (W^\nu)^{-1}(\zeta)) \in F(\Gamma).$$

Оно переводит орбиты действия Γ_+ на $F(\Gamma_+)$ в орбиты действия Γ на $F(\Gamma)$. Таким образом, тройка $F(\Gamma_+) \rightarrow V(\Gamma_+) \rightarrow T(\Gamma_+)$, где $V(\Gamma_+)$ – фактор $F(\Gamma_+)$ по действию Γ_+ , биголоморфно эквивалентна $F(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma) \rightarrow T(\Gamma)$, что позволяет отождествлять эти две модели по существу одного и того же набора расслоенных пространств.

Доказательство теоремы 2.1 во многом повторяет схему доказательства следующей теоремы Эрла–Фоулера [20], [21], которую мы здесь дополним универсальностью расслоений Берса.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\pi: M \rightarrow B$ – голоморфное семейство гиперболических римановых поверхностей над односвязным комплексным банаховым многообразием B , допускающее локальную тривиализацию голоморфными движениями, $\lambda_0 \in B$, $f_0: \mathbb{D} \rightarrow M_0$ – универсальное накрытие с накрывающей группой Γ и $f: \Omega \rightarrow M$ – соответствующая каноническая униформизация. Тогда существуют единственные голоморфные отображения $\kappa: B \rightarrow T(\Gamma)$, $\lambda_0 \mapsto [0]$

(классифицирующее отображение), и $H: M \rightarrow V(\Gamma)$ такие, что семейство $\pi: M \rightarrow B$ эквивалентно прообразу универсального семейства $V(\Gamma) \rightarrow T(\Gamma)$ относительно κ , а накрытие $f: \Omega \rightarrow M$ эквивалентно прообразу расслоения Берса $F(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma)$ относительно отображения H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi: M \rightarrow B$ допускает горизонтально голоморфные тривиализации над областями B_α , покрывающими B , $f_+ := f_0 \circ h^{-1}: \mathbb{H} \rightarrow M_0$ с h как выше и G_+ – накрывающая группа соответствующего f_+ накрытия $f^+: \Omega^+ \rightarrow M$. Согласно дополнению 2.1 к теореме 2.1, $G_\lambda^+ = w_\lambda \Gamma_+ w_\lambda^{-1}$ для некоторых нормированных квазиконформных гомеоморфизмов w_λ плоскости $\mathbb{C}$, голоморфных в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{H}$, причем над каждой B_α эти w_λ можно брать голоморфно зависящими от λ , сужения $w_\lambda|_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{H}}$ от различного выбора в одном классе коэффициентов Бельтрами не зависят и $\nu(\lambda, \cdot) := (w_\lambda)_\zeta / (w_\lambda)_\bar{\zeta} \in \mathcal{M}_1(\Gamma_+)$. В частности, $w_\lambda = W^{\nu(\lambda, \cdot)}$. По построению Ω^+ , имеем $W^{\nu(\lambda, \cdot)}(\mathbb{H}) = \Omega_\lambda^+$.

Положим $\tau_+(\lambda) = [\nu(\lambda, \cdot)]$; тогда $\lambda \mapsto \tau_+(\lambda)$ – голоморфное отображение B в $T(\Gamma_+)$, а сужение отображения $(\lambda, z) \mapsto (\tau_+(\lambda), z)$ на Ω^+ переводит эту область в $F(\Gamma_+)$, так как $\Omega_\lambda^+ = F(\Gamma_+)_{[\nu(\lambda, \cdot)]}$ по построению.

Положим $\tau(\lambda) = [\mu(\lambda, \cdot) = (\nu(\lambda, \cdot) \circ h) \bar{h}'/h']$; тогда $\lambda \mapsto \tau(\lambda)$ – голоморфное отображение B в $T(\Gamma)$. По лемме 2.8, существует биголоморфное отображение $g: \Omega \rightarrow \Omega^+$ такое, что $f = f^+ \circ g$. Поэтому

$$\Omega \ni (\lambda, z) \mapsto (\tau(\lambda), w^\mu \circ h^{-1} \circ (W^\nu)^{-1} \circ g(\lambda, z)) \in F(\Gamma)$$

– голоморфное послойное отображение, конформное на слоях. При этом орбиты действия Γ на Ω_λ переходят в орбиты действия Γ на $F(\Gamma)_{\tau(\lambda)}$, и, таким образом, это отображение индуцирует голоморфное послойное отображение $M \rightarrow V(\Gamma)$, биголоморфное на каждом слое.

Остальное очевидно.

3.2. Редукция базы. Бесконечномерные базы голоморфных семейств требуют известной осторожности при применении результатов многомерного комплексного анализа, поэтому весьма полезной может быть следующая редукция к комплексно двумерным базам.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\pi: M \rightarrow B$ – голоморфное семейство гиперболических римановых поверхностей над односвязным комплексным банаховым многообразием. Предположим, что для всякого вложенного голоморфного двумерного шара $h: \mathbb{B}_2 \rightarrow B$ семейство $\pi^{-1}(h(\mathbb{B}_2))$ локально тривиализуется голоморфными движениями. Тогда семейство $\pi: M \rightarrow B$ тоже локально тривиализуется голоморфными движениями и, значит, оно канонически униформизуемо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что B – единичный шар в соответствующем банаховом пространстве и $\lambda_0 = 0$.

Фиксируем универсальное накрытие $f_0: \mathbb{D} \rightarrow M_0$. Для каждой комплексной прямой $l \ni 0$ по условию существует локальная тривиализация семейства $\pi^{-1}(B \cap l)$ голоморфными движениями. По теореме 3.1, она определяет голоморфное отображение $\kappa_l: B \cap l \rightarrow T(\Gamma)$, где Γ – накрывающая группа накрытия f_0 , и согласованное с проекцией голоморфное отображение $H_l: \pi^{-1}(B \cap l) \rightarrow V(\Gamma)$. По лемме 2.7 и теореме единственности, отображения κ_l, H_l не зависят

от выбора локальной тривиализации над $B \cap l$. Обозначим через κ и H отображения, соответственно равные κ_l и H_l на $B \cap l$.

Пусть $\Pi \ni 0$ – комплексная двумерная плоскость. По условию и тем же аргументам, существует голоморфное отображение $\kappa_\Pi: B \cap \Pi \rightarrow T(\Gamma)$. Тогда $\kappa_\Pi|l = \kappa_l$ для всех $l \ni 0$ и, значит, $\kappa_\Pi = \kappa|_\Pi$, из чего следует, ввиду произвольности Π , что отображение κ голоморфно на каждом линейном диске, содержащемся в B . Так как κ ограничено (вместе с $T(\Gamma) \subset \mathcal{B}_2(\Gamma)$), то это означает, что $\kappa: B \rightarrow T(\Gamma)$ – голоморфное отображение. Точно так же голоморфно и отображение $H: M \rightarrow V(\Gamma)$.

Как показано выше, $V(\Gamma)$ допускает локальную тривиализацию голоморфными движениями. Так как прообразы голоморфных движений такие же, то M тоже локально тривиализуется голоморфными движениями. По теореме 2.1 с универсальным накрытием $f_0: \mathbb{D} \rightarrow M_0$, семейство $\pi: M \rightarrow B$ канонически униформируемо. Лемма доказана.

Автор не знает, можно ли в этом общем утверждении заменить двумерные шары на голоморфные диски, однако это верно при дополнительном условии на поверхности M_λ .

Обозначим через $\mathbb{D}_+^-$ полузамкнутый полукруг $\{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 1, \operatorname{Im} z > 0\}$. Мы говорим, что риманова поверхность S не имеет края (или S – без края), если не существует непрерывного собственного (т. е. прообраз компакта – компакт) вложения $\mathbb{D}_+^- \rightarrow S$, голоморфного внутри. Если S гиперболическая, то в терминах накрывающей группы Γ универсального накрытия $\mathbb{D} \rightarrow S$ это эквивалентно тому, что Γ – фуксова группа первого рода, т. е. ее предельное множество совпадает с $\partial\mathbb{D}$ (= неподвижные точки преобразований из Γ образуют всюду плотное подмножество $\partial\mathbb{D}$).

Напомним, что униформизацию $f: \Omega \rightarrow M$ областью $\Omega \subset B \times \mathbb{C}$ мы называем канонической (а семейство $\pi: M \rightarrow B$ – канонически униформируемым отображением f), если

- а) все слои Ω_λ – квазикруги, т. е. образы $\mathbb{D}$ при квазиконформных гомеоморфизмах плоскости, и $\Omega_{\lambda_0} = \mathbb{D}$,
- б) граница Ω состоит из однопараметрического семейства попарно непересекающихся голоморфных графиков над B ,
- в) область $(B \times \mathbb{C}) \setminus \Omega$ биголоморфно послойно эквивалентна $B \times (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\pi: M \rightarrow B$ – голоморфное семейство гиперболических римановых поверхностей без края над односвязным комплексным банаховым многообразием. Предположим, что для всякого вложенного голоморфного диска $h: \mathbb{D} \rightarrow B$ семейство $\pi^{-1}(h(\mathbb{D}))$ локально тривиализуемо голоморфными движениями. Тогда

- 1) для произвольной $\lambda_0 \in B$ семейство $\pi: M \rightarrow B$ тривиализуется голоморфным движением над шаром Кобаяши $\{\kappa_B(\lambda, \lambda_0) < \log 2\}$,
- 2) семейство $\pi: M \rightarrow B$ канонически униформируемо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если B одномерное, то доказывать нечего, утверждения следуют из теоремы 2.1 с $D = \mathbb{D}$. Ключевым здесь является случай, когда B есть единичный шар в $\mathbb{C}^2$, что мы сначала и предположим.

Шаг 1. Классифицирующее отображение. Пусть Γ – накрывающая группа накрытия $f_0: \mathbb{D} \rightarrow M_0$. Для каждой комплексной прямой $l \ni 0$ семейство $\pi^{-1}(l \cap B)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1 (с $D = \mathbb{D}$) и теоремы 3.1. Поэтому определено голоморфное отображение семейства $\pi^{-1}(l \cap B) \rightarrow l \cap B$ в $V(\Gamma) \rightarrow T(\Gamma)$, конформное в каждом слое, $\lambda \mapsto \tau_l(\lambda)$, $M_0 \rightarrow V_{[0]} = \mathbb{D}/\Gamma$. Над шаром $T_{1/3}(\Gamma) := \{\tau \in \mathcal{B}_2(\Gamma): \|\tau\| < 1/3\}$ проекция $\mathcal{M}_1(\Gamma) \rightarrow T(\Gamma)$ имеет голоморфное сечение, состоящее из гармонических коэффициентов Бельтрами $\mu(\tau, z) = (1 - |z|^2)^2 \tau(1/\bar{z})/\bar{z}^4$ (см. п. 3.1). Прообраз этого сечения относительно отображения $\lambda \mapsto \tau_l(\lambda)$ обозначим через $\mu_l(\lambda, \cdot)$. По лемме Шварца, это сечение определено над $l \cap \frac{1}{3}B$.

По теореме 2.1, существует область $\Omega^l \subset (l \cap B) \times \mathbb{C}$ со свойствами а)–в) и голоморфное послойное накрытие $f^l: \Omega^l \rightarrow \pi^{-1}(l \cap B)$.

Гармонические коэффициенты определяют горизонтальную голоморфную тривиализацию $T_{1/3}(\Gamma)$, прообразом которой является голоморфное движение $\phi_l: (l \cap \frac{1}{3}B) \times M_0 \rightarrow \pi^{-1}(l \cap B)$, причем его характеристика, соответствующая накрытию f_0 , – коэффициент Бельтрами квазиконформного отображения $\phi_l(\lambda, \cdot): M_0 \rightarrow M_\lambda$ – равна как раз $\mu_l(\lambda, \cdot)$.

Шаг 2. Непрерывность. Приведенная выше конструкция имеет место для любого вложенного голоморфного диска $h: \mathbb{D} \rightarrow B$, и мы покажем, что она непрерывно зависит от h .

Пусть $h_j: \mathbb{D} \rightarrow B$ сходятся к h равномерно внутри $\mathbb{D}$, $\phi_j: (h(\frac{1}{3}\mathbb{D})) \times M_0 \rightarrow \pi^{-1}(h(\frac{1}{3}\mathbb{D}))$ – соответствующие прообразы “гармонических” голоморфных движений в $V(\Gamma)$ над $T(\Gamma)$ и $\psi_j: (\frac{1}{3}\mathbb{D}) \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ – их канонические поднятия до нормированных голоморфных движений круга $\mathbb{D}$ (см. лемму 2.6). По лемме 2.2, такие движения равностепенно непрерывны, и, следовательно, существует подпоследовательность $\{\psi_{j_k}\}$, равномерно сходящаяся на каждом $r\mathbb{D} \times \mathbb{D}$, $r < 1/3$, к некоторому голоморфному движению ψ^1 .

Характеристики $\mu_j(\zeta, \cdot)$ движений ψ_j , будучи гармоническими коэффициентами Бельтрами при фиксированных ζ и голоморфными по ζ , тоже образуют нормальное семейство, и, значит, мы можем считать, что $\mu_{j_k} \rightarrow \mu^1$ равномерно внутри $(\frac{1}{3}\mathbb{D}) \times \mathbb{D}$, причем $\|\mu(\zeta, \cdot)\|_\infty \leq |\zeta|$ по лемме Шварца. Тогда μ^1 – характеристика ψ^1 , которая при каждом фиксированном ζ , $|\zeta| < 1/3$, является гармоническим коэффициентом Бельтрами.

Обозначим через ψ движение, соответствующее, как выше, диску h , и пусть μ есть характеристика ψ . По лемме 2.7, $\psi^1 = \psi$ на $\frac{1}{3}\mathbb{D} \times \partial\mathbb{D}$, следовательно, при фиксированном ζ коэффициенты μ^1 и μ лежат в одном классе Тейхмюллера, $[\mu^1] = [\mu]$. Но они оба гармонические, а гармонические коэффициенты над $T_{1/3}(\Gamma)$ образуют сечение. Поэтому $\mu^1 = \mu$ и $\psi^1 = \psi$.

Так как это верно для любой сходящейся подпоследовательности в $\{h_j\}$, то из этого следует, что $\psi_j \rightarrow \psi$ (а тогда и $\phi_j \rightarrow \phi$), когда $h_j \rightarrow h$.

Шаг 3. Вариация дисков. Пусть D_a обозначает диск $\{\lambda \in B: \lambda_2 = \lambda_1(\lambda_1 - a)\}$ и покажем, что при $|a| < 1/5$ образы точки $(a, 0)$ в $T(\Gamma)$ относительно описанных выше классифицирующих отображений вдоль дисков $\mathbb{D} \times 0$ и D_a совпадают.

Положим $D^t = \{\lambda \in B: \lambda_2 = t\lambda_1(\lambda_1 - a)\}$, так что $D^0 = \mathbb{D} \times 0$, $D^1 = D_a$, и $\frac{1}{5}D^t = D^t \cap \{|\lambda_1| < 1/5\}$. Пусть $\phi_t: \frac{1}{5}D^t \times M_0 \rightarrow \pi^{-1}(\frac{1}{5}D^t)$ – прообразы гармонического голоморфного движения над $T_{1/3}(\Gamma)$, соответствующие классифицирующим отображениям $D^t \rightarrow T(\Gamma)$, как описано выше. Проекция круга D^t в плоскость $\mathbb{C}_{\lambda_1}$ содержит круг $|\lambda_1| < 0.6$, и потому, по лемме Шварца, образ $\frac{1}{5}D^t$ при классифицирующем отображении лежит в $T_{1/3}(\Gamma)$. По построению, $\phi_t(\lambda, \cdot)$ – квазиконформные отображения M_0 в M_λ с гармоническими коэффициентами Бельтрами $\mu_t(\lambda, \cdot)$, так что при $|\lambda_1| < 1/5$ классифицирующее отображение $D^t \rightarrow T(\Gamma)$ совпадает с $\lambda \mapsto [\mu_t(\lambda, \cdot)]$.

Положим $w(t, \cdot) = \phi_t((a, 0), \cdot)^{-1} \circ \phi_0((a, 0), \cdot)$. Тогда $w(t, \cdot): M_0 \rightarrow M_0$ – квазиконформные отображения и $w(0, z) \equiv z$. Обозначим через $\nu(t, \cdot)$ их характеристики, соответствующие накрытию $f_0: \mathbb{D} \rightarrow M_0$, а через $W(t, \cdot)$ – квазиконформный автоморфизм $\mathbb{D}$ с дифференциалом Бельтрами $\nu(t, \cdot)$ и неподвижными точками $-1, 1, i$ на $\partial\mathbb{D}$ (всякий квазиконформный автоморфизм $\mathbb{D}$ является сужением соответствующего квазиконформного автоморфизма $\mathbb{C}$ и потому непрерывно продолжается на $\mathbb{D}$; см. [1]). Такое $W(t, \cdot)$ определено однозначно. При каждом фиксированном t $W(t, \cdot)$ переводит орбиты Γ в орбиты Γ (так как $(\nu(t, \cdot) \circ A)\overline{A'}/A' = \nu(t, \cdot)$, $A \in \Gamma$), и, таким образом, $W(t, \cdot)$ является поднятием отображения $w(t, \cdot)$ относительно универсального накрытия $f_0: \mathbb{D} \rightarrow M_0$, т.е. $f_0 \circ W(t, \cdot) = w(t, \cdot) \circ f_0$.

Согласно шагу 2, $w: [0, 1] \times M_0 \rightarrow M_0$ – непрерывное отображение, и, значит, $W: [0, 1] \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ тоже непрерывно. Так как характеристики $\nu(t, \cdot)$ тоже непрерывны по t и $|\nu(t, \cdot)| < 1/3$, то W продолжается до непрерывного отображения $W: [0, 1] \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$.

Так как для всякого $A \in \Gamma$ функция $W(t, \cdot) \circ A$ является решением уравнения Бельтрами с тем же коэффициентом $\nu(t, \cdot)$, то, ввиду единственности, существует дробно-линейное отображение $A_t \in \text{Aut } \mathbb{D}$ такое, что $A_t^{-1} \circ W(t, \cdot) \circ A$ имеет неподвижные точки $-1, 1, i$ и, значит, совпадает с $W(t, \cdot)$, т.е. $W(t, \cdot) \circ A = A_t \circ W(t, \cdot)$. Так как

$$f_0 \circ A_t = f_0 \circ W(t, \cdot) \circ A \circ W(t, \cdot)^{-1} = w(t, \cdot) \circ f_0 \circ A \circ W(t, \cdot)^{-1} = f_0,$$

то $A_t \in \Gamma$.

Так как A_t непрерывно зависят от t , а группа Γ дискретная, то $A_t \equiv A_0 = A$ и, значит, $W(t, \cdot) \circ A = A \circ W(t, \cdot)$. Отображение A имеет на $\partial\mathbb{D}$ одну или две неподвижные точки. Если z_0 – одна из них, то $W(t, z_0) = A \circ W(t, z_0)$, т.е. $W(t, z_0)$ – тоже неподвижная точка A для любого $t \in [0, 1]$. Так как $W(0, z) \equiv z$, то ввиду непрерывности это означает, что $W(t, z) = z$ в неподвижных точках любого преобразования $A \in \Gamma$. Так как Γ – фуксова группа первого рода, то такие точки всюду плотны на $\partial\mathbb{D}$ и, значит, $W(t, z) \equiv z$ на $\partial\mathbb{D}$.

Положим $H = W(1, \cdot)^{-1} \circ W(0, \cdot)$ в $\mathbb{D}$, $H(z) = z$ в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ и рассмотрим квазиконформное отображение $\tilde{H} = w^{\nu(1, \cdot)} \circ H \circ (w^{\nu(0, \cdot)})^{-1}$ плоскости $\mathbb{C}$, голоморфное в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$. Так как $W(t, \cdot)$ и $w^{\nu(t, \cdot)}$ удовлетворяют одному уравнению Бельтрами, то функция $w^{\nu(t, \cdot)} \circ W(t, \cdot)^{-1}$ голоморфна в $\mathbb{D}$. Поэтому $\tilde{H} = w^{\nu(1, \cdot)} \circ W(1, \cdot)^{-1} \circ W(0, \cdot) \circ (w^{\nu(0, \cdot)})^{-1}$ голоморфно и в $\mathbb{D}$. Так как отображение $\tilde{H}$ непрерывное, то оно голоморфное в $\mathbb{C}$ и, значит, аффинное, а так как $\tilde{H}(z) = z + o(1)$ в окрестности ∞ , то $\tilde{H}(z) \equiv z$. Следовательно, $w^{\nu(1, \cdot)} = w^{\nu(0, \cdot)}$

в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, в частности на $\partial\mathbb{D}$. По определению классов Тейхмюллера, $[\nu(1, \cdot)] = [\nu(0, \cdot)]$.

Шаг 4. Голоморфность классифицирующего отображения. Вместо диска $B \cap \{\lambda_2 = 0\}$ в предыдущем шаге можно было рассматривать любой диск $B \cap \{\lambda_2 = c\lambda_1\}$ с малым $|c|$ и с теми же дисками D_a . Соответственно меняя гомотопию D^t так, что все D^t содержат точку $D_a \cap \{\lambda_2 = c\lambda_1\}$, мы получаем, как выше, что образ этой точки при классифицирующих отображениях дисков $B \cap \{\lambda_2 = c\lambda_1\}$ и D_a в $T(\Gamma)$ совпадают.

Таким образом, классифицирующее отображение $\kappa: B \rightarrow T(\Gamma)$ из шага 1 голоморфно не только вдоль дисков $B \cap \{\lambda_2 = c\lambda_1\}$, но – вблизи $(0, 0)$ – и вдоль дисков D_a . Так как оба семейства голоморфны (по параметрам c и f), то по теореме Гартогса κ голоморфно в секторе $\{\lambda: |\lambda_1| < 1/5, |\lambda_2| < \delta|\lambda_1|\}$ с некоторым $\delta > 0$. Унитарным преобразованием $\mathbb{C}^2$ любую прямую $l \ni 0$ можно перевести в $\{\lambda_2 = 0\}$, поэтому κ голоморфно в проколотом шаре $\frac{1}{5}B \setminus 0$. Так как $T(\Gamma)$ содержится в единичном шаре банахова пространства $\mathcal{B}_2(\Gamma)$, то особенность в 0 устранима и, значит, κ голоморфно в $\frac{1}{5}B$. Так как оно голоморфно и на каждом диске $l \cap B \ni 0$, то по лемме Гартогса κ голоморфно в B .

Шаг 5. Общий случай. По доказанному и лемме 3.1, семейство $\pi: B \rightarrow M$ локально тривиализуется голоморфными движениями. Остальное очевидно следует из теоремы 2.1 (с $D = \mathbb{D}$) и теоремы 3.1: метрика Кобаяши не увеличивается при голоморфных отображениях, поэтому образ шара Кобаяши $B_{\log 2} = \{\kappa_B(\lambda, \lambda_0) < \log 2\}$ при классифицирующем отображении B в единичный шар пространства $\mathcal{B}_2(\Gamma)$, содержащий $T(\Gamma)$, лежит в $T_{1/3}(\Gamma)$, так как расстояние Кобаяши до 0 в этом шаре равно $\log((1 + \|\tau\|)/(1 - \|\tau\|))$ и $\|\tau\| < 1/3$, если это выражение меньше $\log 2$. Теорема доказана.

Ключевая часть доказательства, шаг 3, взята из доказательства леммы II в работе Берса и Ройдена [12].

3.3. Теорема Берса–Ройдена. Гармонические коэффициенты Бельтрами существенно используются также в доказательстве теоремы Берса–Ройдена [12] о продолжении голоморфных движений.

Несколько слов о терминологии. Пусть Γ – накрывающая группа универсального накрытия $\mathbb{D} \rightarrow D$ плоской области $D \subset \mathbb{C}_z$ и $\mu \in \mathcal{M}_1(\Gamma)$ – коэффициент Бельтрами в $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}_z$. Тогда дифференциал Бельтрами $\mu d\bar{z}/dz$ инвариантен относительно Γ и, значит, является поднятием однозначно определенного дифференциала Бельтрами $\nu d\bar{z}/dz$ в D . Метрика Пуанкаре $2|d\zeta|/(1 - |\zeta|^2)$ в $\mathbb{D}$ является поднятием в $\mathbb{D}$ гиперболической метрики (= метрики Кобаяши) $\rho_D |dz|$ на D . Если коэффициент μ гармонический, то функция $\mu/(1 - |\zeta|^2)$ антиголоморфна в $\mathbb{D}$ по определению и, значит, функция $\rho_D^2 \nu$ антиголоморфна в D . Поэтому гармоническими коэффициентами Бельтрами в области $D \subset \mathbb{C}$ называются функции вида $\bar{h}/\rho_D^2$, где h голоморфна в D и $\|h/\rho_D^2\|_\infty < 1$.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $\phi: B \times E \rightarrow \mathbb{C}$ – нормированное голоморфное движение множества $E \subset \mathbb{C}$ над односвязным комплексным банаховым многообразием (B, λ_0) . Тогда существует голоморфное движение $\tilde{\phi}: B_{\log 2} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

такое, что $\tilde{\phi} = \phi$ на $B_{\log 2} \times E$. Движение $\tilde{\phi}$ определяется однозначно дополнительным условием, что его характеристика при каждом фиксированном $\lambda \in B_{\log 2}$ является гармоническим коэффициентом Бельтрами в каждой связной компоненте множества $\mathbb{C} \setminus \bar{E}$. При этом, если D – такая компонента и в области $\{(\lambda, w) : \lambda \in B_{\log 2}, w = \phi(\lambda, z), z \in D\}$ действует группа G биголоморфных послыйных автоморфизмов $(\lambda, w) \mapsto (\lambda, g_\lambda(w))$, то это единственное движение $\tilde{\phi}$ инвариантно относительно G , точнее, $g_\lambda \circ \tilde{\phi}(\lambda, \cdot) = \tilde{\phi}(\lambda) \circ g_{\lambda_0}$ для всех $g_\lambda \in G_\lambda$, $\lambda \in B_{\log 2}$, $z \in D$.

Здесь $B_{\log 2}$ есть шар Кобаяши $\{\lambda \in B : \kappa_B(\lambda, \lambda_0) < \log 2\}$; если B – шар $\{\|\lambda\| < R\}$ в банаховом пространстве, то $B_{\log 2}$ есть шар $\{\|\lambda\| < R/3\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приводим сокращенное доказательство, отсылая за подробностями к [12].

Сначала разберем случай конечного множества $E = \{0, 1, z_1, \dots, z_n\}$ (если $E = \{0, 1\}$, то доказывать нечего). Голоморфное движение ϕ определяет тогда голоморфное отображение $\Phi: B \rightarrow \mathbb{C}^n$, $\Phi(\lambda) = (\phi(\lambda, z_1), \dots, \phi(\lambda, z_n))$. Так как значения функций $\phi(\cdot, z_j)$ при различных z_j различные, то значения Φ лежат в области

$$M_n = (\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})^n \setminus \bigcup_{j \neq k} \{z_j = z_k\}.$$

Пусть Γ – накрывающая группа универсального накрытия $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \setminus E$. Тогда, как легко понять, пространство Тейхмюллера $T(\Gamma)$ биголоморфно эквивалентно факторпространству функций $\mu \in L^\infty(\mathbb{C})$ по отношению эквивалентности “ $\mu_1 \equiv \mu_2$, если $w^{\mu_1} = w^{\mu_2}$ во всех точках множества E ”. Из этого несложно вывести, что $T(\Gamma)$ является универсальным накрывающим многообразием области $\mathbb{C} \setminus E$, причем универсальное накрытие определяется как $[\mu] \mapsto (w^\mu(z_1), \dots, w^\mu(z_n))$; это “хорошо известно” (см. [12] и [47]).

Так как B односвязно, то отображение $\Phi: B \rightarrow M_n$ поднимается до голоморфного отображения $\tilde{\Phi}: B \rightarrow T(\Gamma)$, однозначно определяемого условием $\lambda_0 \mapsto [0]$. По лемме Шварца для метрики Кобаяши (п. 2.1), $\tilde{\Phi}(B_{\log 2})$ содержится в $T_{1/3}(\Gamma) = \{\tau \in \mathcal{B}(\Gamma) : \|\tau\| < 1/3\}$.

Над $T_{1/3}(\Gamma)$ есть голоморфное сечение $\mu(\tau, \cdot)$ проекции $\mu \mapsto [\mu]$, состоящее из гармонических коэффициентов Бельтрами в $\mathbb{C} \setminus E$ (см. выше) при $\tau \in T_{1/3}(\Gamma)$. Положим $\tilde{\phi}(\lambda, \cdot) = w^{\mu(\tilde{\Phi}(\lambda), \cdot)}$. Тогда $\tilde{\phi}: B_{\log 2} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ – голоморфное движение $\mathbb{C}$ над $(B_{\log 2}, \lambda_0)$. Так как $\tilde{\Phi}(\lambda) \mapsto (\tilde{\phi}(\lambda, z_1), \dots, \tilde{\phi}(\lambda, z_n))$ при универсальном накрытии $T(\Gamma) \rightarrow M_n$ (см. выше) и $\tilde{\Phi}$ есть поднятие Φ , то $(\tilde{\phi}(\lambda, z_1), \dots, \tilde{\phi}(\lambda, z_n)) = (\phi(\lambda, z_1), \dots, \phi(\lambda, z_n))$, т. е. $\tilde{\phi}$ – искомое продолжение ϕ .

Пусть теперь $E \subset \mathbb{C}$ произвольно и $\{0, 1\} \subset E_1 \subset E_2 \subset \dots$ – конечные подмножества E такие, что $\bigcup E_j$ всюду плотно в E . Пусть $\tilde{\phi}_n$ – описанные выше продолжения голоморфных движений $\phi|_{B \times E_n} \rightarrow \mathbb{C}$. Предположим сначала, что B конечномерно. Пусть $\{w_i\}$ – последовательность, всюду плотная в $\mathbb{C} \setminus E$. Согласно следствию 2.2, из $\{\tilde{\phi}_n\}$ можно выделить (диагональным процессом) подпоследовательность $\{\tilde{\phi}_{n_k}\}$ такую, что голоморфные в $B_{\log 2}$ функции $\tilde{\phi}_{n_k}(\lambda, w_i)$ сходятся равномерно внутри B к соответствующим голоморфным функциям $\tilde{\phi}^i$. Из неравенств Харнака легко следует (см., например, [18]), что в каждой точке λ значения функций $\tilde{\phi}^i$ и $\tilde{\phi}^j$ различны, если $w_i \neq w_j$.

Таким образом, полагая $\tilde{\phi}(\lambda, w_i) = \tilde{\phi}^i(\lambda)$, мы получаем голоморфное движение над $B_{\log 2}$ множества $(\bigcup E_n) \cup \{w_i\}$, всюду плотного в $\mathbb{C}$. По лемме 2.4, оно однозначно продолжается до искомого голоморфного движения всей плоскости $\mathbb{C}$.

Если B бесконечномерно, то это рассуждение не проходит (скажем, в таком банаховом шаре даже линейные функции не образуют нормальное семейство). Здесь надо вернуться к гармоническим коэффициентам Бельтрами и использовать единственность $\tilde{\phi}$ с такой характеристикой, доказанную в [12; с. 275–278] для $B = \mathbb{D}$.

Пусть $\tilde{\phi}_n$ определены как выше, D – связная компонента $\mathbb{C} \setminus \bar{E}$ и ρ_n – гиперболическая метрика в $\mathbb{C} \setminus E_n$, а ρ_D – в D . Тогда $\rho_n|_D \rightarrow \rho_D$ при $n \rightarrow \infty$ (это несложно [12; с. 274–275]). Так как характеристики μ_n движений $\tilde{\phi}_n$ при каждом фиксированном $\lambda' \in B_{\log 2}$ являются гармоническими коэффициентами Бельтрами, то из $\{\tilde{\phi}_n(\lambda', \cdot)\}$ выделяется подпоследовательность, сходящаяся к некоторому квазиконформному отображению $\psi_{\lambda'}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, причем сужение $\psi_{\lambda'}$ на каждую связную компоненту $\mathbb{C} \setminus \bar{E}$ имеет гармонический коэффициент Бельтрами. Пусть $h: \mathbb{D} \rightarrow B$, $h(0) = \lambda_0$, – голоморфный диск, содержащий λ' . Согласно указанной выше единственности, предельная функция $\psi_{\lambda'}$ не зависит от выбора подпоследовательности в $\{\tilde{\phi}_n(\lambda', \cdot)\}$, т. е. $\{\tilde{\phi}_n(\lambda', \cdot)\} \rightarrow \psi_{\lambda'}$ равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{C}$. Таким образом, если $\mathbb{B} \subset B$ – координатный шар в B , содержащий λ_0 , то последовательность $\{\tilde{\phi}_n\}$ сходится в $\mathbb{B} \times \mathbb{C}$. Так как $\tilde{\phi}_n(\cdot, z)$ равномерно ограничены на шарах Кобаяши многообразия $B_{\log 2}$ (лемма 2.2), то предельная функция $\tilde{\phi}$ голоморфна по λ и, как выше, $\tilde{\phi}: \mathbb{B} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ есть голоморфное движение, продолжающее ϕ над $\mathbb{B}$.

Покрывая произвольный путь $[0, 1] \rightarrow B_{\log 2}$ конечным числом координатных шаров, мы получаем, что последовательность $\{\tilde{\phi}_n(\lambda, \cdot)\}$ сходится при любом фиксированном $\lambda \in B_{\log 2}$ и предельное голоморфное движение – искомое.

Концовка об инвариантности очевидно следует из единственности, поскольку конформные автоморфизмы слоев сохраняют гиперболическую метрику и, значит, переводят гармонические коэффициенты Бельтрами в такие же.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Всякое голоморфное движение $\phi: U \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ всей плоскости определяет горизонтально голоморфную тривиализацию $(\lambda, z) \mapsto (\lambda, \phi(\lambda, z))$ семейства $U \times \mathbb{C} \rightarrow U$: так как образ $\mathbb{C}$ относительно любого квазиконформного отображения $\phi(\lambda, \cdot)$ односвязен и не существует квазиконформного отображения $\mathbb{C}$ на $\mathbb{D}$, то, по теореме Римана, $\phi(\lambda, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$ для каждого $\lambda \in U$.

Теорема 3.3 доказана Берсом и Ройденом для $B = \mathbb{D}$ (см. также [11]). Сугава [58] отметил, не вдаваясь в детали, что их доказательство проходит и для шаров в банаховых пространствах, но, как видим, оно работает и в самом общем случае.

Для $B = \mathbb{D}$ теорема о продолжении движений существенно усилена Слодовским, который доказал (см. [56], [57]), что *всякое голоморфное движение $\phi: \mathbb{D} \times E \rightarrow \mathbb{C}$ над $(\mathbb{D}, 0)$ продолжается до голоморфного движения $\tilde{\phi}$ всей плоскости $\mathbb{C}$ над всем $(\mathbb{D}, 0)$, причем это продолжение можно выбирать инвариантным относительно действий послойных биголоморфизмов связных компонент дополнения к пространству движения ϕ .*

Есть уже несколько различных доказательств этой важной для приложений теоремы (см. [5], [27]; простое доказательство существования $\tilde{\phi}$ см. в [15]), и мы здесь не будем повторяться. Теорема Слодковского не распространяется на движения уже над двумерными односвязными базами, поэтому в многомерных задачах с локальными движениями удобнее пользоваться теоремой Берса–Ройдена.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $\pi: M \rightarrow B$ – голоморфное семейство гиперболических римановых поверхностей без края над комплексным банаховым многообразием. Предположим, что есть область $\Omega \subset B \times \mathbb{C}$ с ограниченными односвязными слоями такими, что $\Omega_\lambda = \text{int } \overline{\Omega}_\lambda$ для всех $\lambda \in B$, и есть голоморфное послойное накрытие $f: \Omega \rightarrow M$. Тогда семейство $\pi: M \rightarrow B$ локально тривиализуется голоморфными движениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s: U \rightarrow M$ – голоморфное сечение π над односвязной областью $U \subset B$, $\lambda_0 \in U$ и G – накрывающая группа накрытия f . Тогда $f^{-1}(s)$ состоит из счетного числа попарно непересекающихся голоморфных графиков над U . Так как M_λ не имеют края и $\Omega_\lambda = \text{int } \overline{\Omega}_\lambda$, то множество предельных точек орбиты $f^{-1}(s(\lambda))$ группы G_λ совпадает с $\partial\Omega_\lambda$ (см. конформное отображение Ω_λ на $\mathbb{D}$).

Графики из $f^{-1}(s)$ образуют голоморфное движение множества $f^{-1}(s(\lambda_0))$ над (U, λ_0) . По λ -лемме 2.4, оно продолжается до голоморфного движения замыкания этого множества, в частности до голоморфного движения ϕ границы $\partial\Omega_{\lambda_0}$, включающего все графики, предельные для $f^{-1}(s)$. По теореме Берса–Ройдена, существует голоморфное движение $\tilde{\phi}: U_{\log 2} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, продолжающее ϕ и инвариантное относительно G в Ω . Поэтому в $\pi^{-1}(U_{\log 2})$ есть тривиализующее голоморфное движение (включающее $s|_{U_{\log 2}}$). Так как голоморфные сечения проекции π локально существуют всюду, то утверждение доказано.

В некотором смысле это утверждение показывает необходимость локальной тривиализуемости семейства $\pi: M \rightarrow B$ голоморфными движениями для существования его более-менее хорошей униформизации и служит еще одной мотивацией естественности этого свойства в задачах униформизации семейств.

Вместе с тем, само существование локальной горизонтально голоморфной тривиализации представляется на первый взгляд столь же туманным, как сама проблема униформизации (см. [20; с. 251]).

В следующем разделе мы подготовим технику, позволяющую строить тривиализации голоморфными движениями при некоторых условиях на семейства $\pi: M \rightarrow B$ типа псевдовыпуклости, обычных для многомерного комплексного анализа.

4. Почти голоморфные движения

4.1. Квазилинейные уравнения Бельтрами. Почти комплексная структура на гладком банаховом многообразии M – это непрерывный послойный оператор J в касательном расслоении TM , $\mathbb{R}$ -линейный в слоях и такой, что $J^2 = -I$, где I – тождественное отображение.

Комплексифицированное кокасательное пространство $\mathbb{C}T_p^*M$ в точке $p \in M$ – это пространство всех комплекснозначных $\mathbb{R}$ -линейных функций на T_pM . Пространства $\mathbb{C}T_p^*M$ образуют комплексифицированное кокасательное расслоение $\mathbb{C}T^*M$. Если J – оператор почти комплексной структуры на M и $\alpha \in \mathbb{C}T_p^*M$, то, полагая $(J^*\alpha)(v) := \alpha(Jv)$ для любых $v \in T_pM$, мы получаем аналогичный, но уже $\mathbb{C}$ -линейный в слоях оператор J^* с $(J^*)^2 = -I$. По существу J и J^* – это один и тот же объект (почти комплексная структура) на многообразии M , поэтому далее оператор J^* тоже называется почти комплексной структурой на M и обозначается той же буквой J .

Структура J в $\mathbb{C}T^*M$ определяет разложение этого расслоения в прямую сумму дифференциалов (1-форм) типа $(1, 0)_J$ (“голоморфных”) и типа $(0, 1)_J$ (“антиголоморфных”): α имеет тип $(1, 0)_J$, если $J\alpha = i\alpha$, и тип $(0, 1)_J$, если $J\alpha = -i\alpha$. Таким образом, $(1, 0)_J$ -компонента общей 1-формы α равна $(\alpha - iJ\alpha)/2$, а компонента типа $(0, 1)_J$ равна $(\alpha + iJ\alpha)/2$.

Функция f класса C^1 в области U называется J -голоморфной, если ее дифференциал в каждой точке U имеет тип $(1, 0)_J$, т. е. выполняется условие Коши–Римана $Jdf = i df$.

Нас интересуют почти комплексные структуры J в областях $\Omega \in \mathbb{C}_{\lambda, w}^2$, относительно которых функция λ (проекция в $\mathbb{C}_\lambda$) голоморфна, а сужение J на слои Ω_λ сохраняет ориентацию. Такие структуры мы называем далее *согласованными* (с проекцией в $\mathbb{C}_\lambda$).

В каждой точке Ω формы типа $(1, 0)_J$ образуют комплексное двумерное пространство. Если J согласована, то базис $(1, 0)_J$ -форм в Ω состоит из $d\lambda$ и однозначно определенной формы $\alpha = dw - \mu d\bar{w} - a d\bar{\lambda}$ с коэффициентами, непрерывными, гладкими и т. п., как сам оператор J . Так как J сохраняет ориентацию в слоях Ω_λ , то $|\mu| < 1$. С другой стороны, любая такая форма α вместе с $d\lambda$ определяет в Ω согласованную почти комплексную структуру J , относительно которой α имеет тип $(1, 0)_J$, так как любая 1-форма в Ω поточечно есть $\mathbb{C}$ -линейная комбинация $d\lambda$, α и $d\bar{\lambda}$, $\bar{\alpha}$. Поэтому всюду далее эта α называется *определяющей формой* структуры J .

Принадлежащий Ω график $S: w = \phi(\lambda)$ функции ϕ класса $C^1(U)$ в некоторой области $U \subset \mathbb{C}_\lambda$ является J -голоморфным, если сужения на него форм $d\lambda$ и α линейно зависимы в каждой точке, т. е. $(dw - \mu d\bar{w} - a d\bar{\lambda}) \wedge d\lambda \equiv 0$ в U . Это условие переписывается в виде квазилинейного уравнения Бельтрами

$$\phi_{\bar{\lambda}} - \mu(\cdot, \phi) \overline{\phi_{\lambda}} = a(\cdot, \phi), \quad (8)$$

которое мы исследуем в этом пункте. Нам понадобятся такие уравнения с кусочно непрерывными по λ коэффициентами μ , ϕ , поэтому наряду с функциями класса C^1 и их графиками мы будем использовать также кусочно C^1 -функции, а уравнение (8) удобнее решать вообще в классах Соболева $W^{1,p}(U)$ (с подходящими $p > 2$), состоящих из непрерывных функций, первые частные производные которых в смысле распределений принадлежат $L^p(U)$. Графики таких решений будем называть *J -голоморфными*. Они составляют сравнительно простой подкласс общих псевдоголоморфных кривых, введенных Громовым [31].

Псевдоголоморфные кривые обладают многими свойствами голоморфных кривых, и на эту тему есть довольно богатая литература (см., например, [6]). Однако нам понадобятся лишь простейшие свойства, которые мы приведем с доказательствами для полноты изложения.

Доопределяя μ и a нулем вне Ω (т.е. полагая там J равной J_{st} , стандартной структуре в $\mathbb{C}^2$), мы можем решать уравнение (8) во всей плоскости $\mathbb{C}$, не обращая внимания на форму конкретной области Ω .

Обозначим (следуя И. Н. Векуа) через Π плоский сингулярный оператор Гильберта

$$(\Pi h)(\lambda) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{h(\zeta) dS_{\zeta}}{(\zeta - \lambda)^2},$$

который действует из $L^p(\mathbb{C})$ в $L^p(\mathbb{C})$ при любом $p > 1$, причем его норма $\|\Pi\|_p$ в L^p является непрерывной функцией от p и $\|\Pi\|_2 = 1$. С плоским оператором Коши

$$(Th)(\lambda) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{h(\zeta) dS_{\zeta}}{\zeta - \lambda}$$

оператор Π связан замечательным соотношением $(Th)_{\lambda} = \Pi h$ в смысле распределений (см. [60; гл. 1]).

ЛЕММА 4.1. Пусть функции μ и a определены и измеримы в $\mathbb{C}_w$ при почти каждом фиксированном λ , причем μ имеет компактный носитель, $\|\mu\|_{\infty} < 1$ и функция $a(\lambda, w)(1 + |\lambda|^2)$ равномерно ограничена. Пусть $p > 2$ таково, что $\|\Pi\|_p \|\mu\|_{\infty} < 1$. Тогда для любой $\lambda_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ и любого $z \in \mathbb{C}$ уравнение (8) имеет непрерывное в $\hat{\mathbb{C}}$ решение ϕ такое, что $\phi_{\bar{\lambda}} \in L^p(\mathbb{C})$ и $\phi(\lambda_0) = z$. При этом $|\phi - z|$ и $\|\phi_{\bar{\lambda}}\|_p$ не превосходят $C\|a\|_{\infty}$ с константой C , зависящей только от p и $\|\mu\|_{\infty}$.

(Здесь и далее $\|\cdot\|_p$ означает норму в соответствующем L^p .)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$(T_0 h)(\lambda) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} h(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - \lambda} - \frac{1}{\zeta - \lambda_0} \right) dS.$$

Если уравнение (8) имеет решение $\phi \in W^{1,p}(\mathbb{C})$, то это решение представляется в виде $\phi = z + T_0 \phi_{\bar{\lambda}}$. Для таких ϕ (8) переписывается в виде

$$(1 - \mu(\cdot, \phi)Q\Pi) \phi_{\bar{\lambda}} = a(\cdot, \phi),$$

где Q – оператор комплексного сопряжения. Если $p > 2$ таково, что выполнено условие $\|\Pi\|_p \|\mu\|_{\infty} < 1$, то оператор $1 - \mu(\cdot, \phi)Q\Pi$ в $L^p(\mathbb{C})$ обратим (при каждой фиксированной ϕ), $(1 - \mu(\cdot, \phi)Q\Pi)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(\cdot, \phi)Q\Pi)^n$. Фиксируем такое p ; тогда (8) эквивалентно уравнению $\phi_{\bar{\lambda}} = (1 - \mu(\cdot, \phi)Q\Pi)^{-1} a(\cdot, \phi)$.

Так как $(T_0 h)_{\bar{\lambda}} = h$, то при фиксированном $z \in \mathbb{C}$ уравнение (8) с указанным “начальным условием” эквивалентно интегральному уравнению $\phi = K_0 \phi$, где

$$K_0 \phi = z + T_0(1 - \mu(\cdot, \phi)Q\Pi)^{-1} a(\cdot, \phi)$$

в классе функций $\phi \in C(\hat{\mathbb{C}})$ таких, что $\phi_{\bar{\lambda}} \in L^p$. Это банахово пространство с нормой $\|\phi\| = |\phi(\lambda_0)| + \|\phi_{\bar{\lambda}}\|_p$. Так как μ имеет компактный носитель и функция $a(\lambda, w)(1 + |\lambda|^2)$ равномерно ограничена, то оператор K_0 имеет ограниченный образ, $\|K_0 \phi\| \leq R$ с константой $R > 0$, не зависящей от ϕ . Так как оператор T переводит функции $h \in L^p(\mathbb{C})$, для которых $|h(\lambda)|(1 + |\lambda|^2)$ ограничено, в функции, удовлетворяющие условию Гёльдера и стремящиеся к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$

(см. [60; теорема 1.24]), а $T_0h = Th - Th(\lambda_0)$, то K_0 – компактный оператор. По теореме Шаудера о неподвижной точке, в указанном пространстве существует функция ϕ такая, что $\phi = K_0\phi$, а это и есть решение ϕ уравнения (8) с $\phi(\lambda_0) = z$.

Указанные оценки очевидным образом следуют из представления $\phi = z + T_0(1 - \mu(\cdot, \phi)Q\P)^{-1}a(\cdot, \phi)$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Если ϕ – решение уравнения (8) из леммы 4.1, то $\phi_{\bar{\lambda}} \in L^q(\mathbb{C})$ для всех q таких, что $\|\Pi\|_q\|\mu\|_{\infty} < 1$ (окрестность $q = 2$ в $\mathbb{R}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по доказанному, $\phi = z + T_0(1 - \mu Q\P)^{-1}C$, где $C \in L^s(\mathbb{C})$ для всех $s > 1$ по условию леммы 4.1. Оператор Π действует в каждом $L^s(\mathbb{C})$ и при указанных q оператор $1 - \mu Q\P$ в L^q обратим.

Для единственности решения нужны дополнительные условия.

ЛЕММА 4.2. Пусть функции μ, a и p такие, как в условии леммы 4.1, причем $\mu(\lambda, \cdot)$ и $(1 + |\lambda|^2)a(\lambda, \cdot)$ для почти всех $\lambda \in \mathbb{C}$ удовлетворяют условию Липшица по w с константой, не зависящей от λ . Пусть ϕ_1, ϕ_2 – непрерывные в $\widehat{\mathbb{C}}$ решения уравнения (8) такие, что $(\phi_j)_{\bar{\lambda}} \in L^p(\mathbb{C})$ и $\phi_1(\lambda_0) = \phi_2(\lambda_0)$ в некоторой точке $\lambda_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$. Тогда $\phi_1 \equiv \phi_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $f = \phi_1 - \phi_2$. Тогда $f_{\bar{\lambda}} \in L^p(\mathbb{C})$. Из указанных условий Липшица получаем, что

$$f_{\bar{\lambda}} - \mu_1 \overline{f_{\bar{\lambda}}} = (\mu(\cdot, \phi_1) - \mu(\cdot, \phi_2))\overline{(\phi_2)_{\bar{\lambda}}} - (a(\cdot, \phi_1) - a(\cdot, \phi_2)) =: Cf$$

с $\mu_1 := \mu(\cdot, \phi_1)$, причем функция $C(\lambda)(1 + |\lambda|^2)$ равномерно ограничена вне проекции носителя μ и, значит, $C \in L^p(\mathbb{C})$.

Положим $\mu_2 = \mu_1 \bar{f}/f$ там, где $f \neq 0$, и $\mu_2 = 0$, где $f = 0$, и пусть $c = T(1 - \mu_2 Q\P)^{-1}C$. Тогда $c_{\bar{\lambda}} - \mu_2 \overline{c_{\bar{\lambda}}} = C$ там, где $f \neq 0$, и значит, $(c_{\bar{\lambda}} - \mu_2 \overline{c_{\bar{\lambda}}})f = Cf$ в $L^p(\mathbb{C})$. Так как $C \in L^p(\mathbb{C})$, то $(1 - \mu_2 Q\P)^{-1}C = C + B$, где B – финитная функция из $L^p(\mathbb{C})$, и поэтому функция c непрерывна в $\widehat{\mathbb{C}}$ (см. [60; гл. 1]).

Для обобщенных производных по $\lambda, \bar{\lambda}$ функции $f e^{-c}$ применимо правило Лейбница: если $f_{\varepsilon}, c_{\varepsilon}$ – стандартные усреднения, то $c_{\varepsilon} \rightarrow c$, $f_{\varepsilon} e^{-c_{\varepsilon}} \rightarrow f e^{-c}$ равномерно и, значит,

$$(f e^{-c})_{\bar{\lambda}} - e^{\bar{c}-c} \mu_1 \overline{(f e^{-c})_{\bar{\lambda}}} = e^{-c}(f_{\bar{\lambda}} - \mu_1 \overline{f_{\bar{\lambda}}}) - (c_{\bar{\lambda}} - \mu_2 \overline{c_{\bar{\lambda}}})f = 0.$$

Положим $h = f e^{-c}$. Функция h непрерывна в $\widehat{\mathbb{C}}$, равна нулю при $\lambda = \lambda_0$ и $h_{\bar{\lambda}} \in L^p(\mathbb{C})$, поэтому $h = T_0 h_{\bar{\lambda}}$. Так как она удовлетворяет уравнению $h_{\bar{\lambda}} - e^{\bar{c}-c} \mu_1 \overline{h_{\bar{\lambda}}} = 0$ и оператор $1 - e^{\bar{c}-c} \mu_1 Q\P$ в $L^p(\mathbb{C})$ обратим, то $h_{\bar{\lambda}} = 0$ в смысле распределений и, значит, h постоянна по лемме Вейля и теореме Лиувилля.

Так как $h(\lambda_0) = 0$, то $h \equiv 0$ и, значит, $\phi_1 \equiv \phi_2$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть функции μ и a удовлетворяют условиям лемм 4.1 и 4.2 и пусть $\phi(\cdot, z)$ – непрерывное в $\widehat{\mathbb{C}}$ решение уравнения (8) такое, что $\phi_{\bar{\lambda}} \in L^p(\mathbb{C})$ и $\phi(0, z) = z$. Тогда $\phi: \widehat{\mathbb{C}}_{\lambda} \times \mathbb{C}_z \rightarrow \mathbb{C}_w$, $(\lambda, z) \mapsto w = \phi(\lambda, z)$, есть почти голоморфное движение плоскости $\mathbb{C}_z$ над сферой $(\widehat{\mathbb{C}}_{\lambda}, 0)$, заполняющее все $\widehat{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$, точнее:

– графики всех функций $\phi(\cdot, z)$ являются J -голоморфными относительно согласованной почти комплексной структуры J с определяющей формой $dw - \mu d\bar{w} - a d\bar{\lambda}$,

– эти графики при различных z попарно не пересекаются и $\bigcup_z \{(\lambda, w) : w = \phi(\lambda, z)\} = \widehat{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение вытекает из определения J -голоморфных графиков, второе – из леммы 4.2. Остается последнее. Пусть $(\lambda_0, w_0) \in \widehat{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$ и ψ – непрерывное в $\widehat{\mathbb{C}}$ решение уравнения (8) такое, что $\phi_{\bar{\lambda}} \in L^p(\mathbb{C})$ и $\psi(\lambda_0) = w_0$ (существует по лемме 4.1). Полагая $z_0 = \psi(\lambda_0)$, по лемме 4.2 получаем, что $\psi = \phi(\cdot, z_0)$, т. е. $w_0 = \phi(\lambda_0, z_0)$. Следствие доказано.

Последнее утверждение о заполнении $\widehat{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$ очень важное (оно означает, что $(\widehat{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}, J)$ тривиализуется J -голоморфным движением ϕ). Условие Липшица на функции μ и a при этом существенно ослабить нельзя.

ПРИМЕР 4.1. Графики функций $\phi(\cdot, z)$, равных соответственно $z/(1+|z|^2|z|)$ при $|\lambda| < 1$ и $z/(1+|z|)$ при $|\lambda| \geq 1$, являются J -голоморфными относительно согласованной почти комплексной структуры J в $\mathbb{C}^2$ с определяющей $(1, 0)$ -формой α , равной $dw + w|w|\lambda d\bar{\lambda}$ при $|\lambda| < 1$ и dw при $|\lambda| \geq 1$. Они определяют J -голоморфное движение над $(\widehat{\mathbb{C}}, 0)$ всей плоскости $\mathbb{C}$, однако пространство этого движения есть множество $\{(\lambda, w) : |\lambda| < 1, |w||\lambda|^2 < 1\} \cup ((\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}) \times \mathbb{D})$.

Разрывность J здесь ни при чем; стандартно усредняя α по λ , получим тот же эффект, только без явных формул. Существенным здесь является квадратичный рост коэффициента a (при $\mu \equiv 0$), несовместимый с условием Липшица.

Теперь – о решениях уравнения (8) в круге $\mathbb{D}$, что-то в духе принципа максимума. Обозначим $\|\phi\|_{\partial\mathbb{D}} := \lim_{|\lambda| \rightarrow 1} |\phi(\lambda)|$.

ЛЕММА 4.3. Пусть ϕ – равномерно ограниченное решение класса $W^{1,p}(\mathbb{D})$ уравнения (8) в $\mathbb{D}$, где $p > 2$ таково, что $\|\Pi\|_p \|\mu\|_{\infty} =: \theta < 1$. Предположим, что $a(\lambda, 0) \equiv 0$ и a удовлетворяет условию Липшица по w с константой, не зависящей от $\lambda \in \mathbb{D}$. Тогда существует константа M , зависящая только от θ и этой константы Липшица, такая, что $|\phi| \leq M \|\phi\|_{\partial\mathbb{D}}$ всюду в $\mathbb{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\nu = \mu(\cdot, \phi) \overline{\phi_{\lambda}} / \phi_{\lambda}$, где $\phi_{\lambda} \neq 0$, и $\nu = 0$, где $\phi_{\lambda} = 0$, а также $C = a(\cdot, \phi) / \phi$ там, где $\phi \neq 0$, и $C = 0$, где $\phi = 0$. Тогда $|C| \leq \|a(\cdot, w)/w\|_{\infty}$, в частности, $C \in L^p(\mathbb{D})$, и $\phi_{\bar{\lambda}} - \nu \phi_{\lambda} = C\phi$. Доопределим C нулем вне $\mathbb{D}$ и положим $s = T(1 - \nu\Pi)^{-1}C$. Тогда $s_{\bar{\lambda}} - \nu s_{\lambda} = C$ в $\mathbb{D}$ и $|s| \leq M_1 \|C\|_{\infty}$ с константой M_1 , зависящей только от θ . Так как функции s, ϕ ограничены и принадлежат $W^{1,p}(\mathbb{D})$, то функция $\Phi := e^{-c}\phi$ принадлежит $W^{1,p}(\mathbb{D})$ и удовлетворяет в $\mathbb{D}$ уравнению Бельтрами $\Phi_{\bar{\lambda}} = \nu \Phi_{\lambda}$.

Пусть g есть квазиконформный гомеоморфизм круга $\mathbb{D}$, удовлетворяющий этому же уравнению, $g_{\bar{\lambda}} = \nu g_{\lambda}$. Тогда функция $h = \Phi \circ g^{-1}$ голоморфна в $\mathbb{D}$ и $\|h\|_{\infty} \leq \|\Phi\|_{\partial\mathbb{D}}$ по принципу максимума. Следовательно, $\|\Phi\|_{\infty} \leq \|\Phi\|_{\partial\mathbb{D}}$, и значит, $\|\phi\|_{\infty} \leq e^{2\|c\|_{\infty}} \|\phi\|_{\partial\mathbb{D}}$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Пусть ϕ_1, ϕ_2 – решения уравнения (8) такие, как в лемме 4.3. Предположим дополнительно, что μ также удовлетворяет условию Липшица по w с константой, не зависящей от $\lambda \in \mathbb{D}$. Тогда $|\phi_1 - \phi_2| \leq M_1 \|\phi_1 - \phi_2\|_{\partial\mathbb{D}}$ с константой M_1 , зависящей только от θ , констант Липшица для μ, a и $\|(\phi_1)_{\bar{\lambda}}\|_{L^p(\mathbb{D})}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $f = \phi_2 - \phi_1$. Тогда $f_{\bar{\lambda}} - \nu f_{\lambda} = Cf$, где ν равно $\mu(\cdot, \phi_1)\overline{f_{\lambda}}/f_{\lambda}$ при $f_{\lambda} \neq 0$ и 0 при $f_{\lambda} = 0$, а Cf равно $(\mu(\cdot, \phi_2) - \mu(\cdot, \phi_1))\overline{\phi_{1\lambda}} + a(\cdot, \phi_2) - a(\cdot, \phi_1)$ при $f \neq 0$ и 0 при $f = 0$. Тогда $C \in L^p(\mathbb{D})$ и остальное – как выше.

Далее нам понадобится следующее локальное свойство.

ЛЕММА 4.4. Пусть J – согласованная почти комплексная структура в $\mathbb{C}^2$, удовлетворяющая условиям лемм 4.1 и 4.2 и $S_j: w = \phi_j(\lambda)$, $j = 1, 2$, – различные J -голоморфные графики над областью $U \subset \mathbb{C}_{\lambda}$. Тогда множество $S_1 \cap S_2$ дискретное и в каждой точке этого множества индекс пересечения поверхностей S_1, S_2 есть целое положительное число.

(Поверхности S_j естественно ориентированы так, что проекция в U сохраняет ориентацию.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что U ограничена и $\phi_j \in W^{1,p}(U)$ с некоторым $p > 2$, как выше. Положим $f = \phi_1 - \phi_2$; тогда, как в лемме 4.2, $f_{\bar{\lambda}} - \mu_1 \overline{f_{\lambda}} = Cf$ с функцией $C \in L^p(U)$. Доопределим ее нулем вне U и найдем, как в лемме 4.2, функцию $c \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ такую, что $c_{\bar{\lambda}} - \mu_2 \overline{c_{\lambda}} = C$. Тогда функция $h = fe^{-c}$ удовлетворяет в U уравнению $h_{\bar{\lambda}} - e^{\bar{c}-c} \mu_1 \overline{h_{\lambda}} = 0$. Положим $\nu = e^{\bar{c}-c} \mu_1 \overline{h_{\lambda}}/h_{\lambda}$ там, где $h_{\lambda} \neq 0$, и $\nu = 0$, где $h_{\lambda} = 0$. Тогда $h_{\bar{\lambda}} = \nu h_{\lambda}$ и потому h представляется в виде $H \circ g$, где H – голоморфная функция и g – квазиконформный гомеоморфизм U с коэффициентом Бельтрами ν (см. [60; теорема 3.30]).

Поэтому нули h в U изолированы, и если λ_0 – единственный нуль h в круге $V: |\lambda - \lambda_0| \leq r$, то по теореме Руше приращение аргумента $\Delta_{\partial V} \arg h$ равно $2\pi k$, где $k \in \mathbb{N}$ – порядок нуля голоморфной функции H в точке $g(\lambda_0)$. А это и есть индекс пересечения S_1 и S_2 в точке $(\lambda_0, \phi_1(\lambda_0))$. Лемма доказана.

Наконец, нам понадобится следующее граничное свойство гладкости.

ЛЕММА 4.5. Пусть $\mathbb{D}_+ = \mathbb{D} \cap \{\operatorname{Im} \lambda > 0\}$ и ϕ – решение в классе $W^{1,p}(\mathbb{D}_+)$ уравнения (8), в котором $\mu, a \in L^\infty(\mathbb{D}_+ \times \mathbb{C})$, причем $\|\mu\|_\infty < 1$ и $\|\Pi\|_p \|\mu\|_\infty < 1$. Предположим, что ϕ ограничено в $\mathbb{D}_+$ и все его предельные значения на интервале $(-1, 1)$ вещественные. Тогда для всякого $r < 1$ функция ϕ удовлетворяет в $r\mathbb{D}_+$ условию Гёльдера с показателем $1 - 2/p$ и константой, зависящей только от r, p , нормы a в $L^\infty(\mathbb{D}_+ \times \mathbb{C})$ и $\|\phi\|_\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $f = \phi$ в $\mathbb{D}_+$ и $f(\lambda) = \overline{\phi(\bar{\lambda})}$ в $\mathbb{D}_- := \mathbb{D} \cap \{\operatorname{Im} \lambda < 0\}$. Тогда $f_{\bar{\lambda}} = (\phi_{\bar{\lambda}})(\bar{\lambda})$ и $f_{\lambda} = (\phi_{\lambda})(\bar{\lambda})$ в $\mathbb{D}_-$. Таким образом, f удовлетворяет в $\mathbb{D}_-$ уравнению $f_{\bar{\lambda}} - \mu(\bar{\lambda}, \phi(\bar{\lambda})) f_{\lambda} = a(\bar{\lambda}, \phi(\bar{\lambda}))$.

Пусть g – гладкая финитная в $\mathbb{D}$ функция и D – какая-нибудь первая частная производная. Тогда

$$\int f Dg dS = - \int g Df dS + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^1 ((gf)(\xi + i\varepsilon) - (gf)(\xi - i\varepsilon)) d\xi = - \int g Df dS,$$

так как $f(\xi + i\varepsilon) - f(\xi - i\varepsilon) = 2i \operatorname{Im} \phi(\xi + i\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Таким образом, первые частные производные f в смысле распределений в $\mathbb{D}$ принадлежат $L^p(\mathbb{D})$, т. е. f принадлежит $W^{1,p}(\mathbb{D})$ и удовлетворяет в $\mathbb{D}$ уравнению $f_{\bar{\lambda}} - \nu f_{\lambda} = b$ с равномерно ограниченными ν, b и с $\|\nu\|_\infty = \|\mu\|_\infty$.

Тогда $f(\lambda) = h(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int \frac{f_{\bar{\zeta}} dS}{\zeta - \lambda}$, где h – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция. Так как $f_{\bar{\lambda}} \in L^p(\mathbb{D})$, то плоский интеграл Коши $f - h$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $1 - 2/p$ и константой, зависящей только от $\|f_{\bar{\lambda}}\|_p$ (см. [60; теорема 1.19]).

Пусть χ – стандартная гладкая финитная функция в $\mathbb{D}$, равная 1 в $r\mathbb{D}$. Доопределяя $f\chi$ равной нулю вне $\mathbb{D}$, мы получаем, что $(f\chi)_{\bar{\lambda}} - \nu \overline{(f\chi)_{\lambda}} = b + f\chi_{\bar{\lambda}} - \nu \overline{f\chi_{\lambda}} =: C$, где $\|C\|_p$ оценивается сверху константой, зависящей только от r и норм b, f в $L^\infty(\mathbb{D})$. Так как $(f\chi)_{\bar{\lambda}} = (1 - \nu Q\Pi)^{-1}C$, то $\|(f\chi)_{\bar{\lambda}}\|_p$ ограничена такой же константой. Остается заметить, что $f\chi = T(f\chi)_{\bar{\lambda}}$, где T – плоский интеграл Коши; так как $(f\chi)_{\bar{\lambda}} \in L^p(\mathbb{C})$, то $f\chi$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $1 - 2/p$ и с константой, допускающей указанную оценку. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. Пусть $\phi \in W^{1,p}(\mathbb{D})$ – решение уравнения Бельтрами (8) в $\mathbb{D}$ с μ, a , как в лемме 4.5. Предположим, что ϕ ограничена и не имеет нулей в $\mathbb{D}$ и $|\phi(\lambda)| \rightarrow 1$ при $|\lambda| \rightarrow 1$. Тогда ϕ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $1 - 2/p$ и константой, зависящей только от p и норм μ, a в $L^\infty(\mathbb{D} \times \mathbb{C})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяем доказательство леммы 4.5 с отражением относительно единичной окружности вместо $\mathbb{R}$. В результате функция f , продолжающая ϕ по симметрии, принадлежит $W^{1,p}(\mathbb{C})$ (возле $\partial\mathbb{D}$ – как в лемме 4.5) и удовлетворяет уравнению $f_{\bar{\lambda}} - \nu \overline{f_{\lambda}} = b$ типа (8) уже во всей плоскости, причем функция $(1 + |\lambda|^2)b$ равномерно ограничена (при дифференцировании функции $1/\phi(1/\bar{\lambda})$ появляются множители $1/\lambda^2$ и $1/\bar{\lambda}^2$; подробности см. ниже в доказательстве леммы 4.6).

Остальное следует из леммы 4.5.

4.2. Краевая задача Римана–Гильберта. Решаемая в этом пункте задача заключается в следующем:

- (*) Пусть $T \subset \partial\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ – гладкий 2-мерный тор с регулярной проекцией на $\partial\mathbb{D}$ такой, что $T_\lambda = \{w : (\lambda, w) \in T\}$ для каждого $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ есть гладкая замкнутая жорданова кривая, отделяющая 0 от ∞ , и пусть J – гладкая согласованная почти комплексная структура в $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$. Для данного значения $s \in T_1$ доказать существование и описать свойства J -голоморфного диска $w = \phi(\lambda)$ такого, что ϕ непрерывна и не имеет нулей в $\overline{\mathbb{D}}$, $\phi(\lambda) \in T_\lambda$ для всех $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ и $\phi(1) = s$.

(Более общая постановка заключается в том, что ϕ имеет нули в заданных точках, но ее решение является легким следствием решения поставленной задачи, см. ниже.)

Если $\alpha = dw - \mu d\bar{w} - a d\bar{\lambda}$ – определяющая форма структуры J , то решение задачи (*) эквивалентно решению уравнения (8)

$$\phi_{\bar{\lambda}} - \mu(\cdot, \phi) \overline{\phi_{\lambda}} = a(\cdot, \phi)$$

в классе $C(\overline{\mathbb{D}}) \cap W^{1,p}(\mathbb{D})$ с указанными граничными свойствами.

Что касается гладкости J и T , то это требование можно существенно ослабить, не ухудшая результатов. Для приложений нам достаточно гладкости

и разрешимости в классе C^∞ , но приводимые ниже доказательства используют лишь гладкость C^2 .

Для обычной комплексной структуры в $\mathbb{C}^2$ эта задача решена (см. [24], [54]) при помощи теоремы о неявной функции в банаховых пространствах. Таким же образом можно решать и общую задачу $(\star)$, но поставленная задача без дополнительных условий разрешима не для любой (даже интегрируемой $\mathbb{R}$ -аналитической) структуры J .

ПРИМЕР 4.2. Почти комплексная структура J в $\mathbb{C}^2$ с определяющей формой $dw + w^2 d\bar{\lambda}$ – интегрируемая и $\mathbb{R}$ -аналитическая (нестандартная комплексная структура в $\mathbb{C}^2$); см. примеры 1.1–1.3. В качестве T возьмем тор $\partial\mathbb{D} \times \{|w| = 2\}$. Предположим, что существует J -голоморфный график $w = \phi(\lambda)$ с границей на T и непрерывной в $\overline{\mathbb{D}}$ функцией ϕ без нулей. Тогда $\phi_{\bar{\lambda}} = -\phi^2$, т. е. $1/\phi = \bar{\lambda} - h$, где h – непрерывная в $\overline{\mathbb{D}}$ функция, голоморфная в $\mathbb{D}$. Но тогда $|\bar{\lambda} - h| = 1/2$ на $\partial\mathbb{D}$, что приводит к противоречию, например,

$$2\pi = \left| \int_{\partial\mathbb{D}} \bar{\lambda} d\lambda \right| = \left| \int_{\partial\mathbb{D}} (\bar{\lambda} - h) d\lambda \right| \leq \pi.$$

Задача $(\star)$ легко сводится к случаю, когда $T = (\partial\mathbb{D})^2$ – стандартный тор (и в этом – преимущество постановки задачи для общих структур J). Для этого надо просто сделать послыйный диффеоморфизм $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$, переводящий T в $(\partial\mathbb{D})^2$ и тождественный в окрестности $\mathbb{D} \times 0$ и $\mathbb{D} \times \infty$. Структура J в измененных координатах имеет определяющую форму с теми же свойствами гладкости, финитности и т. п., что и исходные μ, a . Поэтому далее мы ограничимся случаем $T = (\partial\mathbb{D})^2$.

ЛЕММА 4.6. Пусть J – согласованная почти комплексная структура в $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ с определяющей формой $dw - \mu d\bar{w} - a d\bar{\lambda}$. Предположим, что $\mu \in C^2$ в окрестности $0 \times \mathbb{C}$, μ, a равны нулю при $|w| > R > 1$, удовлетворяют условию Липшица по w с константой, не зависящей от $\lambda \in \mathbb{D}$, причем $\|\mu\|_\infty < 1$ и $a(\lambda, 0) \equiv 0$. Тогда для любой $c \in \partial\mathbb{D}$ задача $(\star)$ с $T = (\partial\mathbb{D})^2$ однозначно разрешима, графики решений $\phi(\lambda, c)$, $|c| = 1$, попарно не пересекаются и образуют J -голоморфное движение $\partial\mathbb{D}$ над $\mathbb{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию, $\mu \in C^2$ в некотором бикруге $|\lambda| < r$, $|w| < R$. Пусть $\chi(\lambda)$ – гладкая функция в $\mathbb{D}$, равная 1 при $|\lambda| < r/2$ и 0 при $|\lambda| > 2r/3$, и пусть $\eta = \eta(\lambda, w)$ есть гомеоморфное в $\mathbb{C}_w$ решение уравнения Бельтрами $\eta_{\bar{w}} = -\chi\mu\eta_w$ такое, что $\eta_{\bar{w}} \in L^p(\mathbb{C})$ и $\eta = w + o(1)$ в окрестности $w = \infty$. Тогда $\eta = w$ при $|\lambda| > 2r/3$. Так как $\chi\mu$ имеет компактный носитель, то отображение $\mathbb{D} \ni \lambda \mapsto \chi(\lambda)\mu(\lambda, \cdot) \in L^\infty(\mathbb{C})$ дважды гладкое и потому $\eta \in C^2(r\mathbb{D} \times \mathbb{C})$ по теореме Альфорса–Берса [1], [2]. Так как $d\eta = \eta_w(dw - \mu dw)$ при каждом фиксированном $\lambda \in \frac{r}{2}\mathbb{D}$, то в координатах λ, η структура J над $\frac{r}{2}\mathbb{D}$ имеет определяющую форму $d\eta - (\eta_{\bar{\lambda}} + \eta_w a) d\bar{\lambda}$, в которой коэффициент при $d\bar{\eta}$ равен нулю. Так как функция η голоморфна по w при $|w| > R$, то, по теореме Кёбе, образ круга $|w| < R$ при отображении $w \mapsto \eta$ содержится в круге $|\eta| < 4R$. Чтобы не менять обозначений, мы просто предположим далее, что в исходной определяющей форме $dw - \mu d\bar{w} - a d\bar{\lambda}$ коэффициент μ равен нулю при $|\lambda| < r/2$ и функции μ, a равны нулю при $|w| > R$. Гладкость $\mu \in C^2$ нам далее не понадобится.

Продолжим J_1 на все $\mathbb{C}^2$ до структуры J' , исходя из условия, что если $w = f(\lambda)$ есть J' -голоморфный график над $\mathbb{D}$, то $w = 1/\overline{f(1/\bar{\lambda})}$ должен быть таковым над $\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$. Так как

$$\left(\frac{1}{f(1/\bar{\lambda})}\right)_{\bar{\lambda}} = \frac{\overline{f_{\bar{\lambda}}(1/\bar{\lambda})}}{(\lambda f(1/\bar{\lambda}))^2}, \quad \left(\frac{1}{f(1/\bar{\lambda})}\right)_{\lambda} = \frac{\overline{f_{\lambda}(1/\bar{\lambda})}}{(\lambda f(1/\bar{\lambda}))^2}$$

при $|\lambda| > 1$, то это условие выполняется, если в качестве определяющей формы над $\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$ взять

$$dw - \mu\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}, \frac{1}{\bar{w}}\right)\left(\frac{w}{\bar{w}}\right)^2 d\bar{w} - a\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}, \frac{1}{\bar{w}}\right)\left(\frac{w}{\bar{\lambda}}\right)^2 d\bar{\lambda}.$$

Обозначим через $a'(\lambda, w)$ коэффициент этой формы при $\bar{\lambda}$. Тогда $a'(\lambda, 0) \equiv 0$. Так как функция $a(1/\bar{\lambda}, \eta)$ удовлетворяет условию Липшица по η , то она дифференцируема почти всюду и ее первые частные производные по $\eta, \bar{\eta}$ не превосходят константы Липшица. Так как

$$|a'(\lambda, w)_{\bar{w}}| = \left| \frac{a_{\bar{w}}(1/\bar{\lambda}, 1/\bar{w})}{\lambda^2} \right|, \quad a'(\lambda, w)_w = a_{\bar{w}}\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}, \frac{1}{\bar{w}}\right) \frac{w^2}{\bar{\lambda}^2} + a\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}, \frac{1}{\bar{w}}\right) \frac{2w}{\bar{\lambda}^2}$$

и $|a(1/\bar{\lambda}, 1/\bar{w})| \leq C/|w|$, то a' удовлетворяет условию Липшица по w с константой, не зависящей от $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$.

Таким образом, коэффициенты определяющей формы структуры J' в $\mathbb{C}^2$ удовлетворяют условиям следствия 4.2, поэтому решения $f(\cdot, z)$ уравнения (8) с так продолженными μ, a и с $f(1, z) = z$ определяют J' -голоморфное движение, заполняющее $\mathbb{C}^2$, $f(\lambda, 0) \equiv 0$. Если f – одно из этих решений, то на графике $w = 1/\overline{f(1/\bar{\lambda})}$ имеет место равенство

$$\left(\frac{1}{f(1/\bar{\lambda})}\right)_{\bar{\lambda}} + \mu\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}, f\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right)\right)\left(\frac{f(1/\bar{\lambda})}{f(1/\bar{\lambda})}\right) \cdot \left(\frac{1}{f(1/\bar{\lambda})}\right)_{\lambda} = \frac{a(1/\bar{\lambda}, f(1/\bar{\lambda}))}{(\lambda f(1/\bar{\lambda}))^2},$$

т.е. $1/\overline{f(1/\bar{\lambda})}$ – тоже одна из построенных функций, а именно $f(\lambda, 1/\overline{f(1/\bar{\lambda})})$ по теореме единственности. Таким образом, при $|z| = 1$ имеет место равенство $f(\lambda, z) = 1/\overline{f(1/\bar{\lambda}, z})$, в частности, $|f(\lambda, z)| \equiv 1$ при $|\lambda| = 1$, т.е. $f(\cdot, z)$ – решение задачи $(\star)$ для структуры J' при $|z| = 1$. Графики этих функций над $\hat{\mathbb{C}}$ по лемме 4.2 попарно не пересекаются и образуют J' -голоморфное движение $\mathbb{C}_z$ над $(\mathbb{C}_{\lambda}, 1)$. Так как $f(\lambda, \cdot) \equiv 0$, то функции $f(\lambda, z)$ при $z \neq 0$ не имеют нулей. Таким образом, $\phi(\cdot, c) := f(\cdot, c)$, $|c| = 1$, – искомые решения. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.5. При условиях леммы 4.6, задача $(\star)$ с $T = \partial\mathbb{D} \times |c|\partial\mathbb{D}$ однозначно разрешима для каждого $c \in \mathbb{C}$. Решения непрерывно зависят от c относительно метрики в $C(\mathbb{D})$. Графики этих решений над $\mathbb{D}$ при различных c попарно не пересекаются и заполняют все $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $t > 0$ функции $\mu_t = \mu(\cdot, tw)$ и $a(\cdot, tw)/t$ удовлетворяют условиям леммы 4.6 и поэтому для всякого $b \in \partial\mathbb{D}$ существует единственное решение ψ уравнения $\psi_{\bar{\lambda}} - \mu_t \psi_{\lambda} = a_t$, непрерывное в $\mathbb{D}$ и класса $W^{1,p}(\mathbb{D})$ такое, что $|\psi| = 1$ на $\partial\mathbb{D}$ и $\psi(1) = b$. А тогда функция $\phi_c := t\psi$, $c = tb$, является решением уравнения (8) с граничными данными $|\phi_c| = |c|$, $\phi_c(1) = c$, причем графики этих решений при фиксированном $t = |c|$ попарно не пересекаются.

По следствию 4.3, семейство решений уравнения (8) равностепенно непрерывно. Из этого и теоремы единственности (лемма 4.2) очевидно вытекает непрерывность отображения $c \mapsto \phi_c \in C(\overline{\mathbb{D}})$.

По теореме единственности, $\phi_c \equiv c$ при $|c| > R$. Графики функций $\phi_{c'}$ и ϕ_c при $|c'| < R$ и больших $|c|$ не пересекаются. Так как границы графиков при различных c тоже не пересекаются, то из этого следует, что индексы пересечения таких графиков равны нулю. Так как индекс пересечения в каждой возможной общей точке различных графиков положителен по лемме 4.4, то графики различных ϕ_c вообще не пересекаются.

Наконец, отображение $c \mapsto \phi_c(\lambda)$ при каждом фиксированном λ непрерывно и взаимно однозначно, образ содержит окрестность бесконечности и потому совпадает с $\mathbb{C}$. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 4.6. Если J удовлетворяет условиям леммы и $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – заданные точки в $\mathbb{D}$, выписанные с учетом кратностей, то для любого $c \in \partial\mathbb{D}$ существует единственная непрерывная в $\overline{\mathbb{D}}$ функция f с J -голоморфным графиком над $\mathbb{D}$ такая, что $|f| = 1$ на $\partial\mathbb{D}$, $f(1) = c$ и $f(\lambda_\nu) = 0$, $\nu = 1, \dots, n$ (с нулями соответствующих кратностей), причем $f(\lambda) \neq 0$, если $\lambda \neq \lambda_\nu$, $\nu = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия не меняются при дробно-линейном автоморфизме $\mathbb{D}$, близком к тождественному, поэтому можно считать, что все λ_ν отличны от нуля. Обозначим через b произведение Бляшке $\prod_1^n \frac{\lambda - \lambda_\nu}{1 - \overline{\lambda_\nu} \lambda}$ и рассмотрим в $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ почти комплексную структуру J_1 с определяющей формой $dw - \mu_1 d\bar{w} - (a(\cdot, w)/b) d\bar{\lambda}$, где $\mu_1(\cdot, w) := \mu(\cdot, wb) \bar{b}'/b'$. Структура J_1 удовлетворяет всем условиям леммы 4.6, и потому существует единственная непрерывная в $\overline{\mathbb{D}}$ функция g без нулей, с J_1 -голоморфным графиком над $\mathbb{D}$ такая, что $|g| = 1$ на $\partial\mathbb{D}$ и $g(1) = c/b(1)$. А тогда $f := bg$ – искомая функция. Следствие доказано.

Почти комплексную структуру J в $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ назовем *диск-выпуклой над $\partial\mathbb{D}$* , если выполняется следующее условие: существует $r_0 > 0$ такое, что для всякого $r > r_0$ найдется $R > 0$ такое, что если функция f непрерывна в $\overline{\mathbb{D}}$, ее график J -голоморфен над $\mathbb{D}$ и $r_0 < |f| \leq r$ на $\partial\mathbb{D}$, то $|f| < R$ всюду в $\mathbb{D}$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть J – диск-выпуклая над $\partial\mathbb{D}$ согласованная почти комплексная структура в $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ с определяющей формой $dw - \mu d\bar{w} - a d\bar{\lambda}$. Предположим, что $\mu \in C^2$ в окрестности $0 \times \mathbb{C}$, $a \in L_{\text{loc}}^\infty$ и для всякого $R > 0$ существует $\theta_R < 1$ такое, что $|\mu| < \theta_R$ при $|w| < R$. Предположим также, что μ и a локально по w удовлетворяют условиям Липшица с константами, не зависящими от $\lambda \in \mathbb{D}$, и $a(\lambda, 0) \equiv 0$. Тогда для всякого $z \in \mathbb{C} \setminus 0$ существует единственный J -голоморфный над $\mathbb{D}$ график $w = \phi(\lambda, z)$, $\lambda \in \mathbb{D}$, с непрерывной в $\overline{\mathbb{D}}$ функцией ϕ без нулей такой, что $\phi(1, z) = z$ и $|\phi(\cdot, z)| = |z|$ на $\partial\mathbb{D}$. Эти графики попарно не пересекаются и их объединение равно $(\partial\mathbb{D} \times \mathbb{C}) \cup \mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ – некоторая область в $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ с односвязными слоями $\mathcal{D}_\lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $r > r_0$, и пусть R – соответствующее ему число из определения диск-выпуклости над $\partial\mathbb{D}$. Пусть $\chi(w)$ – гладкая функция, равная 1 при $|w| < 2R$ и 0 при $|w| > 3R$.

Так как $a(\lambda, 0) \equiv 0$, то диск $\mathbb{D} \times 0$ является J -голоморфным. Согласно следствию 4.5, существует единственное решение ϕ_c уравнения

$$\phi_{\bar{\lambda}} - \chi(\phi)\mu(\cdot, \phi)\overline{\phi_{\bar{\lambda}}} = \chi(\phi)a(\cdot, \phi), \quad (9)$$

непрерывное в $\bar{\mathbb{D}}$ и класса $W^{1,p}(\mathbb{D})$, с граничными данными $|\phi_c| \equiv |c|$ на $\partial\mathbb{D}$ и $\phi_c(1) = c$. Если модуль $|c|$ достаточно мал, то $|\phi_c| < R$ по лемме 4.3 и потому ϕ_c – решение уравнения (8). Обозначим через R_0 верхнюю грань чисел $t > 0$ таких, что $|\phi_c| < 2R$ для всех $c \in t\mathbb{D}$. Если $R_0 < r$, то на самом деле $|\phi_c| \leq R$ при $c \in t\mathbb{D}$, $t \leq R_0$, – по определению диск-выпуклости над $\partial\mathbb{D}$. В частности, это верно при $t = R_0$. Так как решения уравнения (9) непрерывно зависят от c , то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $|\phi_c| < 2R$ для всех c таких, что $|c| < R_0 + \varepsilon$. Это противоречие с определением R_0 показывает, что $R_0 \geq r$, т. е. ϕ_c – решения уравнения (8) и при $|c| = r$. Таким образом, существование доказано.

Остальное – как в следствии 4.5, в частности, каждое отображение $c \mapsto \phi_c(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{D}$, – непрерывное и однолистное, поэтому его образ $\mathcal{D}_\lambda$ односвязный. Теорема доказана.

Структуру J в $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ назовем *трансверсально диск-выпуклой*, если для всякого $R > 0$ найдется $R' \geq R$ такое, что если $w = f(\lambda)$ – произвольный график, J -голоморфный над некоторым кругом $U \subset \mathbb{D}$, функция f непрерывна в $\bar{U}$ и $|f| \leq R$ на ∂U , то $|f| \leq R'$ в U . (Если J – комплексная структура, то это есть условие трансверсальной диск-выпуклости голоморфного семейства $(\mathbb{D} \times \mathbb{C}, J) \rightarrow \mathbb{D}$.)

ДОПОЛНЕНИЕ 4.1. *Предположим, что структура J , дополнительно к условиям теоремы, гладкая и трансверсально диск-выпуклая. Тогда область $\mathcal{D}$ из теоремы универсальная: если функция $f \in C(\mathbb{D}) \cap C^2(\mathbb{D})$ не имеет нулей и ее график над $\mathbb{D}$ является J -голоморфным, то этот график принадлежит $\mathcal{D}$; более того, если $R = \max_{\partial\mathbb{D}} |f|$, то $|f(\lambda)| \leq \max\{|\phi(\lambda, z)| : |z| \leq R\}$ для всех $\lambda \in \mathbb{D}$, где ϕ – функция из теоремы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Диффеоморфизм $(\lambda, w) \mapsto (\lambda, w' := w/f(\lambda))$ класса C^2 переводит график $w = f(\lambda)$ в график $w' = 1$. Образ J' структуры J относительно этого преобразования удовлетворяет всем условиям теоремы над любым кругом $r\mathbb{D}$, $r \in (0, 1)$. Фиксируем такое r . По теореме, существует J' -голоморфное движение $\psi' : r\mathbb{D} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ над $(r\mathbb{D}, r)$ такое, что $|\psi(\lambda, z')| \equiv |z'|$ при $|\lambda| = r$. Прообраз ψ этого движения является J -голоморфным движением над $(r\mathbb{D}, r)$, включающим график f над $r\mathbb{D}$. Положим $f_t := \psi(\cdot, t)$; тогда $f_1 = f$, $f_0 = 0$, $|f_t(\lambda)| = t|f(\lambda)|$ при $|\lambda| = r$ и графики всех f_t являются J -голоморфными над $r\mathbb{D}$.

Обозначим через E множество таких $t \in [0, 1]$, что график f_t принадлежит $\mathcal{D}$. Так как f_t непрерывны на $r\bar{\mathbb{D}}$, то E открыто в $[0, 1]$. Обозначая $R_r := \max_{r\partial\mathbb{D}} |f|$, мы получаем, что графики f_t , $t \in E$, над $r\partial\mathbb{D}$ не пересекают $w = \phi(\lambda, z)$ с $|z| > R_r$. Если $t \in E$, то $f_t(r\mathbb{D}) \subset \mathcal{D}$ и потому существует $R(t) > 0$ такое, что график f_t не пересекает графики $w = \phi(\lambda, z)$ с $|z| > R(t)$. Так как индексы пересечения J -голоморфных кривых положительны (лемма 4.4) и не меняются при малых деформациях, то $|f_t(\lambda)| \leq \max\{|\phi(\lambda, z)| : |z| \leq R_r\}$ для всех $\lambda \in \mathbb{D}$. Отсюда очевидно следует, что предельные точки множества E

тоже принадлежат E и, значит, $E = [0, 1]$. В частности, график f принадлежит $\mathcal{D}$, $|f(\lambda)| \leq \max\{|\phi(\lambda, z)| : |z| \leq R_r\}$ и это верно для всех $r \in (0, 1)$, что и доказывает утверждение.

В этом смысле $\mathcal{D}$ является дополнительной *диск-выпуклой оболочкой* множества $\partial\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ в $(\mathbb{D} \times \mathbb{C}, J)$.

Как видно из доказательства, свойство $|\phi(\lambda, z)| \equiv |z|$ движения ϕ удобно, но не является существенным, – важна только непрерывность вплоть до границы. Поэтому, если $\psi: \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$ – другое непрерывное движение, J -голоморфное над $\mathbb{D}$, и $\mathcal{D}'$ – заполняемая им область над $\mathbb{D}$, то по той же причине все диски $w = \phi(\lambda, z)$ принадлежат $\mathcal{D}'$ и, следовательно, $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$ не зависит от выбора такого движения.

Область $\mathcal{D}$ в теореме совсем не обязана совпадать с $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$.

ПРИМЕР 4.3. Пусть J – согласованная почти комплексная структура в $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ с $(1, 0)_J$ -формами $d\lambda$ и $d(w\sqrt{2 - |\lambda|^2}/\sqrt{1 + |w|^2})$. Тогда $(\mathbb{D} \times \mathbb{C}, J)$ – комплексное многообразие, биголоморфно послойно эквивалентное области $\{(\lambda, z) : |\lambda| < 1, |\lambda|^2 + |z|^2 < 2\}$ в обычном $\mathbb{C}^2$. J -голоморфные графики из теоремы соответствуют при этом плоским графикам $z = c$ над $\mathbb{D}$, заполняющим единичный бикруг. Следовательно, область $\mathcal{D}$ из теоремы в этом примере совпадает с областью $\{(\lambda, w) : |w| < 1/\sqrt{1 - |\lambda|^2}\}$.

Этот пример показывает, что если $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ в теореме все-таки заполняется J -голоморфным движением, то структура J “на бесконечности” не только диск-выпуклая, но в определенном смысле и диск-вогнутая (так сказать, Леви-плоская); подробнее см. п. 5.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. В приложениях теоремы бывает удобным иметь аналогичное J -голоморфное движение не в $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$, а в $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ с согласованной почти комплексной структурой J . Это очевидно сводится к уже доказанному диффеоморфизмом $(\lambda, w) \mapsto (\lambda, w/\sqrt{1 - |w|^2})$, который является биголоморфным отображением почти комплексного многообразия $(\mathbb{D}^2, J)$ на $(\mathbb{D} \times \mathbb{C}, J')$ с соответствующей J' . Структура J' удовлетворяет условиям теоремы, если структура J диск-выпуклая над $\partial\mathbb{D}$ (т. е. для всякого $r \in (r_0, 1)$ найдется $R \in (0, 1)$ такое, что если $w = f(\lambda)$ – непрерывный в $\overline{\mathbb{D}}$ график, J -голоморфный над $\mathbb{D}$, и $r_0 < |f| < r$ на $\partial\mathbb{D}$, то $|f| < R$ в $\mathbb{D}$) и коэффициенты определяющей формы $dw - \mu d\bar{w} - a d\bar{\lambda}$ типа $(1, 0)_J$ аналогичные: a, μ локально по w удовлетворяют условию Липшица с константой, не зависящей от λ , $\mu \in C^2$ в окрестности $0 \times \mathbb{D}$, $a \in L_{\text{loc}}^\infty$ и для всякого $r \in (0, 1)$ существует константа $\theta_r < 1$ такая, что $|\mu| < \theta_r$ при $|w| < r$. Тогда прообраз ϕ построенного в теореме движения ϕ' будет J -голоморфным движением, непрерывным над $\overline{\mathbb{D}}$ и заполняющим $(\partial\mathbb{D} \times \mathbb{D}) \cup \mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ – некоторая область в $\mathbb{D}^2$ с односвязными слоями $\mathcal{D}_\lambda$.

Базовую точку движения ϕ тоже бывает удобнее сместить в $\lambda = 0$, заменяя $\phi(\lambda, \cdot)$ на J -голоморфное движение $\psi(\lambda, z) = \phi(\lambda, \phi(0, \cdot)^{-1}(z))$, $z \in \mathcal{D}_0$, с теми же J -голоморфными графиками.

Пусть G – некоторая группа послойных гомеоморфизмов $\mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ вида $g(\lambda, z) = (\lambda, g_\lambda(z))$. Движение $\phi: \mathbb{D} \times E \rightarrow \mathbb{D}$ множества $E \subset \mathbb{D}$ над $(\mathbb{D}, 0)$ называется *инвариантным* относительно G (G -инвариантным), если $g_\lambda \circ \phi(\lambda, \cdot) = \phi(\lambda, \cdot) \circ g_0$ для всякого $g \in G$.

Следующее утверждение о продолжении J -голоморфных движений – в духе теоремы Слодковского (см. п. 3.3).

СЛЕДСТВИЕ 4.7. Пусть J – почти комплексная структура в $U \times \mathbb{D}$, $U \supset \bar{\mathbb{D}}$, со всеми свойствами, описанными в замечании 4.1, и G – некоторая группа послойных J -голоморфных преобразований $U \times \mathbb{D}$, элементы которой, кроме тождественного, не имеют неподвижных точек. Пусть $\phi^0: U \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ есть J -голоморфное движение над $(\mathbb{D}, 0)$, заполняющее $U \times \mathbb{D}$, E – подмножество в $\mathbb{D}$ такое, что сужение $\phi^0|_{U \times E}$ инвариантно относительно G , и E' – некоторое счетное подмножество в $\mathbb{D}$. Тогда существует J -голоморфное и G -инвариантное движение $\phi: \mathbb{D} \times (E \cup \tilde{E}) \rightarrow \mathbb{D}$, где $\tilde{E} := \bigcup_{g \in G} g_0(E')$, совпадающее с ϕ^0 на $\bar{\mathbb{D}} \times E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не меняя $\tilde{E}$, можно уменьшить $E' = \{z_n\}_1^\infty$ так, что $(0 \times E') \cap g(0 \times E')$ пусто для каждого $g \in G \setminus \text{id}$.

Так как E дискретное и графики движения ϕ^0 попарно не пересекаются, то существует послойный диффеоморфизм h^0 области $U \times D$, переводящий пространство движения $\phi^0|_{U \times E}$ в $U \times E$ и сохраняющий все свойства J из замечания над любым кругом $R\mathbb{D} \Subset U$. Образ J относительно h^0 обозначим через J_1 . Пусть $\{R_n\}$ – произвольная убывающая последовательность чисел $R_n > 1$ такая, что $R_1\mathbb{D} \Subset U$ и $\lim R_n > 1$. Так как движение ϕ^0 заполняет $U \times \mathbb{D}$ по условию, то его образ $\phi^0 \circ (h^0)^{-1}$ тоже заполняет $U \times \mathbb{D}$.

Пусть ϕ^1 есть J_1 -голоморфное движение над $R_1\mathbb{D}$, непрерывное над $R_1\bar{\mathbb{D}}$ и состоящее из решений краевой задачи $(\star)$ для стандартных торов $R_1\partial\mathbb{D} \times r\partial\mathbb{D}$, $r \in (0, 1)$. По построению, пространство движения ϕ^1 содержит множество $R_1\mathbb{D} \times E$. Согласно дополнению 4.1 к теореме 4.1, ϕ^1 тоже заполняет $R_1\mathbb{D} \times \mathbb{D}$, и, значит, существует J_1 -голоморфный диск $w' = \phi^1(\lambda, z'_1)$, содержащий точку $(0, z'_1) = h^0(0, z_1)$.

Положим $\phi(\lambda, z_1) := \phi^1 \circ (h^0)^{-1}(\lambda, z'_1)$. Тогда диск $w = \phi(\lambda, z_1)$ не пересекает диски $w = \phi^0(\lambda, z)$, $z \in E$. Пусть $g \in G$ и $z_1^g := g_0(z_1) \in \tilde{E}$. Положим $\phi(\lambda, z_1^g) := g_\lambda \circ \phi(\lambda, z_1)$. Так как движение $\phi^0|_{U \times E}$ инвариантно относительно G , то графики $w = \phi(\lambda, z_1^g)$ тоже не пересекают пространство движения $\phi^0|_{R_1\mathbb{D} \times E}$ (поскольку это верно для $g = \text{id}$ по построению).

Если для некоторых $\lambda_0 \in R_1\bar{\mathbb{D}}$ и $g, g' \in G$ выполнено равенство $\phi(\lambda_0, z_1^g) = \phi(\lambda_0, z_1^{g'})$, то $(\lambda_0, \phi(\lambda_0, z_1^g))$ – неподвижная точка отображения $g^{-1} \circ g' \in G$ и, значит, $g = g'$ по условию на G . Таким образом мы продолжили движение $\phi^0|_{R_1\mathbb{D} \times E}$ до J -голоморфного и G -инвариантного движения множества E_1 , содержащего $E \cup z_1$.

Множество E_1 такое же, как E . По доказанному, построенное движение E_1 над $(R_1\mathbb{D}, 0)$ продолжается до J -голоморфного и G -инвариантного движения над $(R_2\mathbb{D}, 0)$ множества $E_2 \supset E_1 \cup z_2$ – и т. д. по индукции.

Функция на $\bar{\mathbb{D}} \times (E \cup \tilde{E})$, равная построенной ϕ на $R_n\mathbb{D} \times E_n$, определяет искомое движение $E \cup \tilde{E}$ над $(\bar{\mathbb{D}}, 0)$. Следствие доказано.

Вопрос о продолжении построенного движения на замыкание множества $E \cup \tilde{E}$ немного выпадает из дальнейшей тематики, и мы оставляем его открытым.

5. Униформизация некоторых семейств

5.1. Компактные поверхности с проколами. Пусть $\pi: M \rightarrow B$ – голоморфное семейство компактных римановых поверхностей рода ≥ 2 , $\lambda_0 \in B$ – базовая точка, $f_0: \mathbb{D} \rightarrow M_0$ – универсальное накрытие и Γ – соответствующая накрывающая группа. Если B конечномерное и односвязное, то по теореме Гротендика ([32], 1960), существуют голоморфные отображения $\kappa: B \rightarrow T(\Gamma)$ и $H: M \rightarrow V(\Gamma)$ такие, что $\Pi \circ H = \kappa \circ \pi$, где $\Pi: V(\Gamma) \rightarrow T(\Gamma)$ – универсальное голоморфное семейство над пространством Тейхмюллера фуксовой группы Γ (см. п. 3.1). Примерно в то же время Берс доказал униформизируемость этого универсального семейства [7], [8], определил и описал расслоение $F(\Gamma) \rightarrow T(\Gamma)$. Эти два результата вместе составляют теорему Гротендика–Берса:

Любое голоморфное семейство компактных римановых поверхностей рода ≥ 2 над односвязным комплексным многообразием канонически униформизуемо.

(Размерность базы B не существенна, классифицирующее отображение κ определено и голоморфно и для бесконечномерных многообразий, см. ниже.)

Эрл [19] распространил эту теорему на семейства компактных поверхностей с проколами, голоморфно зависящими от точек базы. Точнее, он доказал следующее утверждение.

Пусть $\hat{\pi}: \hat{M} \rightarrow B$ – голоморфное семейство компактных римановых поверхностей рода ≥ 2 над односвязным многообразием, $s_1, \dots, s_n$ – глобальные голоморфные сечения проекции $\hat{\pi}$ с попарно не пересекающимися образами, $M = \hat{M} \setminus \bigcup_{j=1}^n s_j(B)$ и $\pi = \hat{\pi}|_M$. Тогда семейство $\pi: M \rightarrow B$ канонически униформизуемо.

Доказательства этих утверждений легко следуют из результатов раздела 3 (см. ниже теорему 5.1), согласно которым достаточно доказать локальную тривиализуемость описанных выше семейств голоморфными движениями (теорема 3.1). На этом пути условия в теореме Эрла можно слегка ослабить, а утверждение – усилить, но для этого предварительно надо доказать следующую в общем понятную лемму, для которой, к сожалению, не нашлось подходящей ссылки.

ЛЕММА 5.1. *Пусть E – замкнутое подмножество бикруга $\mathbb{D}^2$, не пересекающее $\mathbb{D} \times \partial\mathbb{D}$ и такое, что все слои E_λ , $\lambda \in \mathbb{D}$, вполне разрывные. Предположим, что семейство плоских областей $\mathbb{D}^2 \setminus E \rightarrow \mathbb{D}$ топологически тривиальное и трансверсально диск-выпуклое. Тогда E является объединением попарно непересекающихся голоморфных графиков, образующих голоморфное движение E_0 над $(\mathbb{D}, 0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого круга $U \Subset \mathbb{D}$ обозначим через E_U множество $E \cap (\bar{U} \times \mathbb{D})$. Пусть $\hat{E}_U$ есть множество точек $(\lambda', w') \in \bar{U} \times \mathbb{D}$ таких, что, для любого многочлена $P(\lambda)$, величина $|w' - P(\lambda')|$ не превосходит максимума $|w - P(\lambda)|$ на вертикальной границе $bE_U := E \cap (\partial U \times \mathbb{D})$ множества E_U . Покажем, что $E_U \subset \hat{E}_U$.

Предположим, что множество $E_U \setminus \widehat{E}_U$ непусто. Тогда найдутся многочлен P и точка $(\lambda_0, w_0) \in E_U \setminus \widehat{E}_U$ такие, что

$$|w_0 - P(\lambda_0)| = \max_{E_U} |w - P| > \max_{bE_U} |w - P|.$$

Пусть $\sigma := \{\lambda \in U : \max_{E_\lambda} |w - P| = |w_0 - P(\lambda_0)|\}$. Тогда σ – компакт и если λ_0 – центр круга U , то существует точка $\lambda_1 \in \sigma$ такая, что $|\lambda_1 - \lambda_0| \geq |\lambda - \lambda_0|$ для всех $\lambda \in \sigma$. Тогда $|\lambda + \lambda_1 - 2\lambda_0| < 2|\lambda - \lambda_0|$ для всех $\lambda \in \sigma \setminus \lambda_1$ и поэтому существует $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что максимум модуля функции $g(\lambda, w) := w - P(\lambda) - e^{i\alpha}(\lambda + \lambda_1 - 2\lambda_0)$ на E_U достигается только на множестве E_{λ_1} , скажем, в точке $(\lambda_1, w_1) \in E_{\lambda_1}$. В частности, $|g(\lambda_1, w_1)| \geq (1 + \delta) \max_{bE_U} |g|$ с некоторым $\delta > 0$. А тогда границы голоморфных графиков $S_\varepsilon: g(\lambda, w) = (1 + \varepsilon)g(\lambda_1, w_1)$ при $0 \leq \varepsilon \leq \delta/2$ и достаточно малом δ образуют компакт в $\mathbb{D}^2$, не пересекающий E , все S_ε с $\varepsilon > 0$ его тоже не пересекают, а предельный график S_0 содержит точку $(\lambda_1, w_1) \in E_U$. Это противоречие с условием трансверсальной диск-выпуклости показывает, что на самом деле $E_U \subset \widehat{E}_U$ для любого круга $U \in \mathbb{D}$.

Теперь докажем утверждение в ключевом случае, когда $\#E_\lambda \equiv 1$, т.е. E – непрерывный график $w = f(\lambda)$. Тогда, по доказанному, для любого круга $U \in \mathbb{D}$ и любого многочлена $P(\lambda)$ справедливо неравенство $|(f - P)(\lambda)| \leq \max_{\partial U} |f - P|$ для всех $\lambda \in U$.

Фиксируем произвольный круг $U \in \mathbb{D}$. Функции вида $cf - h$, где c – константа и h голоморфна в U и непрерывна в $\overline{U}$, образуют замкнутое подпространство в ∂U , содержащее 1. Линейный функционал $cf - h \mapsto (cf - h)(\lambda_0)$, где λ_0 – центр U , непрерывен на этом подпространстве и имеет норму 1. По теореме Хана–Банаха, существует (комплексная) мера μ на ∂U такая, что $\int (cf - h) d\mu = (cf - h)(\lambda_0)$ для всех c, h . Так как $\int 1 d\mu = 1 = \|\mu\|$, то μ – вероятностная мера. Так как $\int h d\mu = h(\lambda_0)$ для всех указанных h , то

$$d\mu = d\theta/(2\pi), \text{ где } \theta = \arg(\lambda - \lambda_0), \lambda \in \partial U. \text{ А тогда } f(\lambda_0) = \int_{\partial U} \frac{f d\theta}{2\pi}, \text{ т.е. } f \text{ удо-}$$

влетворяет теореме о среднем для любого круга $U \in \mathbb{D}$. Из этого легко следует (см., например, [33]), что f – комплексная гармоническая функция в $\mathbb{D}$, т.е. $f = h + \bar{g}$, где функции h, g голоморфны в $\mathbb{D}$. Предположим, что g не константа. Тогда функцию g можно выбрать так (добавляя к h, g соответствующие константы), что $g(a) = 0, g'(a) \neq 0$ в некоторой точке $a \in \mathbb{D}$. Пусть $g = u + iv$, где $u = \operatorname{Re} g$. Тогда функция $\bar{g} - g + g^2 = u^2 - v^2 - 2i(v - uv)$ в окрестности a не принимает вещественных отрицательных значений и, значит, $\bar{g} - g + g^2 + \varepsilon$ не имеет там нулей, если $\varepsilon > 0$. Положим $F_\varepsilon = h + g - g^2 - \varepsilon$. Так как функция $f - F_\varepsilon = \bar{g} - g + g^2 + \varepsilon$ не имеет нулей в окрестности a при $\varepsilon > 0$ и a – изолированный нуль этой функции при $\varepsilon = 0$, то существует круг $U \in \mathbb{D}$ с центром a такой, что границы голоморфных графиков $S_\varepsilon: w = F_\varepsilon(\lambda), \lambda \in U, \varepsilon \in [0, \delta]$, при достаточно малом δ образуют компактное множество, не пересекающее E . Однако объединение графиков S_ε по $\varepsilon \in (0, \delta)$ не содержится ни в каком компактном подмножестве в $\mathbb{D}^2 \setminus E$. Полученное противоречие показывает, что на самом деле $g \equiv \text{const}$, т.е. f – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция.

Теперь разберем общую ситуацию. Так как семейство $\pi: \mathbb{D}^2 \setminus E \rightarrow \mathbb{D}$ топологически тривиальное, то E есть объединение попарно непересекающихся

непрерывных графиков (так сказать, непрерывное движение E_0 над $(\mathbb{D}, 0)$). Зафиксируем произвольную точку $(0, w_0) \in E_0$ и обозначим через f непрерывную в $\mathbb{D}$ функцию с $f(0) = w_0$, график S которой принадлежит E . Из топологической тривиальности следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность $V \supset S$ в $\mathbb{D}^2$ такая, что $\partial V \cap E$ пусто и $V_0 \subset \{|w - w_0| < \varepsilon\}$. Положим $E^\varepsilon = E \cap V$. Дословно повторяя первую часть доказательства и выбирая δ в конце настолько малым, что описанные там поверхности S_ε лежат в V , мы получаем, что $E_U^\varepsilon \subset \widehat{E}_U^\varepsilon$ для любого круга $U \Subset \mathbb{D}$. Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем, что график $S: w = f(\lambda)$ тоже обладает этим свойством, т. е. $|(f - P)(\lambda)| \leq \max_{\partial U} |f - P|$ для всех $\lambda \in U$ и всех многочленов P . А тогда, как показано во второй части доказательства, функция f голоморфна в $\mathbb{D}$. Так как $(0, w_0)$ – произвольная точка E_0 , то утверждение доказано.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $\hat{\pi}: \widehat{M} \rightarrow B$ – голоморфное семейство компактных римановых поверхностей над односвязным банаховым комплексным многообразием, E – замкнутое (возможно, пустое) подмножество $\widehat{M}$ с вполне разрывными слоями $E_\lambda = E \cap \widehat{M}_\lambda$, $M = \widehat{M} \setminus E$ и $\pi = \hat{\pi}|_M$. Предположим, что семейство $\pi: M \rightarrow B$ локально топологически тривиальное и трансверсально диск-выпуклое, а все слои M_λ гиперболические. Тогда это семейство канонически униформизуемо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 3.1 и следствию 3.1, достаточно доказать тривиализуемость M голоморфным движением над окрестностью 0 для случая, когда $B = \mathbb{B}_2$ – единичный шар в $\mathbb{C}^2$.

Сначала предположим, что E непусто. Так как E_0 вполне разрывно, то существуют его конечное покрытие односвязными областями $V_j \subset M_0$ с попарно непересекающимися замыканиями. По лемме 1.1, существуют шар $U = rB$ и области $W_j \subset \hat{\pi}^{-1}(U)$, биголоморфно послойно эквивалентные $U \times \mathbb{D}$, такие, что $W_j \cap \widehat{M}_0 = V_j$, $\overline{W_j} \cap \widehat{M}_0 = \overline{V_j}$. Уменьшая U , если надо, можем считать, что множества $\partial W_j \cap \hat{\pi}^{-1}(U)$ не пересекают E .

Пусть V есть окрестность $\widehat{M}_0 \setminus \bigcup V_j$ в M_0 , замыкание которой не пересекает E_0 . Опять по лемме 1.1, существуют шар $U' = r'B$ и окрестность W множества V в $\widehat{M}$, замыкание которой биголоморфно послойно эквивалентно $U' \times V$, в частности, W заполняется голоморфным движением V над $(U', 0)$. Еще уменьшая U, U' можем считать, что $U = U'$, $\overline{W}$ не пересекает E , все $\partial W_j \cap \hat{\pi}^{-1}(U)$ принадлежат W и, значит, $\partial W \cap \hat{\pi}^{-1}(U)$ принадлежит $\bigcup W_j$.

Согласно лемме 5.1, множества $E \cap W_j$ являются объединениями попарно непересекающихся голоморфных графиков над U . Так как $\partial W \cap \hat{\pi}^{-1}(U)$ не пересекает E , то в каждом W_j определено объединенное голоморфное движение, заполняющее как $E \cap W_j$, так и $\partial W \cap W_j$. Так как W_j биголоморфно послойно эквивалентны $U \times \mathbb{D}$, то по теореме Берса–Ройдена (теорема 3.3) существует голоморфное движение множества $V_j \setminus V$ над $\frac{1}{3}U$, заполняющее $W_j \setminus W$. Объединяя эти движения в W_j с движением, заполняющим W , и удаляя из него $E \cap \hat{\pi}^{-1}(U)$, получаем горизонтально голоморфную тривиализацию семейства M над шаром $\frac{1}{3}U$.

Если E пустое, то надо просто фиксировать какое-нибудь голоморфное сечение $\hat{\pi}$ над окрестностью $U \ni 0$, дополнить его, как описано выше, до голо-

морфного движения, заполняющего $\hat{\pi}^{-1}(\frac{1}{3}U)$ и ничего не удалять. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Если поверхности M_λ компактные (E пустое) и база конечномерная (ситуация теоремы Гротендика–Берса), то условие трансверсальной диск-выпуклости выполняется автоматически и доказательство, очевидно, не требует ни леммы, ни пространств Тейхмюллера; нужны только лемма 1.1, теорема Берса–Ройдена (теорема 3.3) и теорема 2.1 или 3.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Теорема 5.1 не охватывает семейства сфер с не более чем двумя проколами и семейства торов. Сферы и торы (без проколов) разобраны в п. 1.3. Если $\hat{\pi}: \widehat{M} \rightarrow B$ – голоморфное семейство сфер и $M := \widehat{M} \setminus E$, где $E = s(B)$ – образ непрерывного сечения, то из трансверсальной диск-выпуклости M следует (как в лемме), что s – голоморфное сечение, и мы получаем ситуацию теоремы 1.1 и следствия 1.2, по которой семейство $\pi: M \rightarrow B$ тривиальное, если на B разрешимы первая и вторая проблемы Кузена (односвязность B здесь ни при чем, как и в случае сфер). Если же $E = s_1(B) \sqcup s_2(B)$, то сечения s_1, s_2 опять-таки голоморфны (при трансверсальной диск-выпуклости M). Согласно следствию 1.2, 2), семейство M тривиальное, если на B разрешима вторая проблема Кузена; в этом случае послойно универсальное накрытие $\widehat{M}$ тоже тривиальное.

Согласно лемме 5.1, условие на E можно переформулировать, как в теореме Эрла.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть $\hat{\pi}: \widehat{M} \rightarrow B$ – голоморфное семейство компактных римановых поверхностей рода ≥ 2 над односвязным банаховым комплексным многообразием, E – замкнутое (возможно, пустое) подмножество $\widehat{M}$ с вполне разрывными слоями $E_\lambda = E \cap \widehat{M}_\lambda$, $M = \widehat{M} \setminus E$ и $\pi = \hat{\pi}|_M$. Предположим, что связные компоненты множества E являются образами голоморфных сечений проекции $\hat{\pi}$ над B . Тогда семейство $\pi: M \rightarrow B$ канонически униформируемо.

В связи с этой теоремой возникает естественный вопрос: а зачем униформизовать уже униформизованное? Ведь если $\hat{f}: \widehat{\Omega} \rightarrow \widehat{M}$ – униформизация семейства $\widehat{M}$ и $M = \widehat{M} \setminus E$, как выше, то $\hat{f}|\widehat{\Omega} \setminus \hat{f}^{-1}(E) \rightarrow M$ – вполне приличная униформизация семейства $\pi: M \rightarrow B$, содержащая даже больше видимой информации об M , чем универсальная (только что слои не односвязные). Тем не менее теорема может быть полезна в задачах униформизации именно *универсальных* накрывающих многообразий, которые строятся канонически (с помощью фундаментальной группы) для любого комплексного многообразия. Как, например, в следующей теореме Гриффитса [30].

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $M \subset \mathbb{CP}_N$ – неприводимое алгебраическое множество размерности n , Σ_0 – его алгебраическое подмножество и a – гладкая точка $M \setminus \Sigma_0$. Тогда существует алгебраическое подмножество $\Sigma \subset M$, не содержащее точку a , но содержащее Σ_0 и особенности M и такое, что универсальная накрывающая многообразия $M \setminus \Sigma$ биголоморфно эквивалентна ограниченной стягиваемой области Рунге в $\mathbb{C}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение индукцией по n ; при $n = 1$ утверждение верное.

Можно считать, что $M_0 := M \setminus \Sigma_0 \subset \mathbb{C}^N$. Так как a – регулярная точка M , то существуют многочлены $p_1, \dots, p_n$ в $\mathbb{C}^N$ такие, что $p_j(a) = 0$, $j = 1, \dots, n$, $dp_1 \wedge \dots \wedge dp_n(a) \neq 0$ и множество $\{w \in M \cap \mathbb{C}^N : p_j(w) = 0, j = 1, \dots, n\}$ конечное. Пусть p_{n+1} – многочлен, принимающий различные значения в различных точках этого множества, и $P := (p_1, \dots, p_{n+1})$. Замыкание в $\mathbb{C}^{n+1}$ множества $P(M_0)$ обозначим через M^1 ; это неприводимое аффинное алгебраическое множество.

Заменяя z_j на $z_j + \varepsilon_j z_{n+1}$, $j = 1, \dots, n$, с подходящими малыми $\varepsilon_j \in \mathbb{C}$, можем считать, что проекция M^1 в пространство $\mathbb{C}^n$ переменных $z' = (z_1, \dots, z_n)$ собственная и $dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \neq 0$ во всех точках множества $\{z \in M^1 : z' = 0\}$. Тогда M^1 есть множество нулей многочлена Вейерштрасса

$$Q(z', z_{n+1}) = z_{n+1}^k + \sum_{j=0}^{k-1} c_j(z') z_{n+1}^j.$$

Обозначим через σ его дискриминантное множество как многочлена от z_{n+1} . Тогда при каждом $\zeta' \in \mathbb{C}^n \setminus \sigma$ число геометрически различных корней многочлена $Q(\zeta', z_{n+1})$ равно k . В частности, это верно для $\zeta' = 0$.

Множество σ или пустое, или является алгебраическим подмножеством в $\mathbb{C}^n$ размерности $n - 1$. Сделав подходящую линейную замену координат, можем считать, что проекция множества σ в пространство $\mathbb{C}^{n-1}$ переменных $\lambda := (z_1, \dots, z_{n-1})$ тоже собственная и что число s точек множества $\sigma \cap \{\lambda = 0\}$ максимально возможное (равно степени проекции σ в $\mathbb{C}^{n-1}$).

Обозначим через σ' множество точек $\lambda \in \mathbb{C}^{n-1}$ таких, что

$$\#(\sigma \cap \{(z_1, \dots, z_{n-1}) = \lambda\}) < s;$$

тогда σ' – алгебраическое подмножество в $\mathbb{C}^{n-1}$ размерности $\leq n - 2$. Положим

$$\Sigma^1 = \{z \in M^1 : z' \in \sigma \text{ или } (z_1, \dots, z_{n-1}) \in \sigma'\}$$

и определим $M_\lambda^1 = \{z \in M^1 \setminus \Sigma^1 : (z_1, \dots, z_{n-1}) = \lambda\}$. Так как M^1 неприводимое, то $M^1 \setminus \Sigma^1$ связное, но его одномерные слои M_λ^1 хоть и гладкие, но а priori не обязательно связные.

Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus \sigma'$, $\mathbb{B}$ – шар $|\lambda - \lambda_0| < r$, непересекающий σ' , и $\pi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ – проекция $z' \mapsto (z_1, \dots, z_{n-1})$. Тогда $\sigma \cap \pi^{-1}(\mathbb{B})$ состоит из s попарно непересекающихся голоморфных графиков над $\mathbb{B}$, т.е. является пространством голоморфного движения множества $\sigma \cap \{\lambda = \lambda_0\}$ над $\mathbb{B}$. По теореме Берса–Ройдена (теорема 3.3), это движение продолжается до голоморфного движения $z_n = \phi(\lambda, \zeta) : \frac{1}{3}\mathbb{B}(\lambda_0) \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, которое определяет горизонтально голоморфную тривиализацию $\pi^{-1}(\frac{1}{3}\mathbb{B}(\lambda_0))$.

При каждом фиксированном $w \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\lambda_0}$ множество точек $z \in M^1 \setminus \Sigma^1$ таких, что $z' = (\lambda, \phi(\lambda, w))$, состоит из k попарно непересекающихся графиков над $\frac{1}{3}\mathbb{B}(\lambda_0)$ и, таким образом, семейство одномерных комплексных многообразий M_λ^1 горизонтально голоморфно тривиализуется над $\frac{1}{3}\mathbb{B}(\lambda_0)$.

По предположению индукции, существуют ограниченная стягиваемая область Рунге $\Omega' \in \mathbb{C}^{n-1}$ и голоморфное накрытие $h : \Omega' \rightarrow \mathbb{C}^{n-1} \setminus \sigma'$. Обозначим через M^2 связную компоненту прообраза голоморфного семейства $M^1 \setminus \Sigma^1 \rightarrow$

$\mathbb{C}^{n-1} \setminus \sigma'$ относительно h . Тогда M^2 есть связное голоморфное семейство одномерных комплексных многообразий над односвязной областью Ω' и потому все слои M_λ^2 связные, т. е. являются римановыми поверхностями.

По построению, существует голоморфное послойное накрытие $H: M^2 \rightarrow M^1$. Поэтому, по доказанному, семейство $M^2 \rightarrow \Omega'$ локально тривиализуется голоморфными движениями, и, следовательно, это семейство канонически униформируется, т. е. существует область $\Omega \subset \Omega' \times \mathbb{C}$ с односвязными слоями и также голоморфное послойное накрытие $f: \Omega \rightarrow M^2$. При этом дополнение к $\bar{\Omega}$ в $\Omega' \times \mathbb{C}$ биголоморфно послойно эквивалентно $\Omega' \times (\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}})$ и $\Omega_0 = \mathbb{D}$. Из этого очевидно следует, что область Ω стягиваемая и полиномиально выпуклая (т. е. является областью Рунге).

Теперь положим $\Sigma = \{w \in \mathbb{C}^N: P(w) \in \Sigma^1\}$. Тогда $M \setminus \Sigma = \{w: P(w) \in M^1 \setminus \Sigma^1\}$, отображение $P: M \setminus \Sigma \rightarrow M^1 \setminus \Sigma^1$ биголоморфное, а

$$\Omega \ni Z \mapsto f(Z) \mapsto H(f(Z)) \mapsto P^{-1}(H(f(Z))) \in M \setminus \Sigma$$

является универсальным накрытием многообразия $M \setminus \Sigma \ni a$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Из доказательства видна структура универсальной покрывающей Ω . Это область в $\Omega' \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^n$, $\Omega_0 = \mathbb{D}$, ее граница покрывается однопараметрическим семейством попарно непересекающихся голоморфных графиков над Ω' , а дополнение к замыканию $(\Omega' \times \mathbb{C}) \setminus \bar{\Omega}$ биголоморфно послойно эквивалентно $\Omega' \times (\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}})$. Область Ω' аналогичным образом устроена над своей проекцией в $\mathbb{C}^{n-2}$ и т. д. В целом Ω удобно представлять как “квазиголоморфный поликруг” $(\mathbb{D}^n, J)$ с нестандартной комплексной структурой J , базовые $(1, 0)$ -формы которой имеют вид $dz_1, dz_2 - \mu_2 d\bar{z}_2 - a_{21} d\bar{z}_1, \dots, dz_n - \mu_n d\bar{z}_n - a_{n1} d\bar{z}_1 - \dots - a_{nn-1} d\bar{z}_{n-1}$ с гладкими коэффициентами и $|\mu_j| < 1$.

5.2. Семейства с диск-плоскими границами. Голоморфное семейство $\pi: M \rightarrow B$ римановых поверхностей назовем *трансверсально диск-вогнутым*, если для каждой точки $\lambda' \in B$ существует окрестность $U' \ni \lambda'$ со следующим свойством: для любого вложенного голоморфного диска $h: \bar{\mathbb{D}} \rightarrow U'$, любого компакта $K \subset \pi^{-1}(h(\mathbb{D}))$ и любого $r \in (0, 1)$ найдется компакт $K' \subset \pi^{-1}(h(\bar{\mathbb{D}}))$ такой, что если $f: \mathbb{D} \rightarrow M$ – голоморфный диск, $\pi \circ f = h$ и $f(\mathbb{D} \setminus r\mathbb{D})$ не пересекает K' , то $f(\mathbb{D})$ не пересекает K .

У автора нет уверенности в том, что для трансверсальной диск-вогнутости справедлив аналог леммы 1.3, т. е. что это свойство автоматически распространяется на семейство $\widetilde{M} \rightarrow B$, где $\widetilde{M} \rightarrow M$ – голоморфное послойно универсальное накрытие. Однако это верно при дополнительных условиях.

Будем говорить, что семейство $\pi: M \rightarrow B$ имеет *диск-плоскую границу*, если оно одновременно трансверсально диск-выпуклое и трансверсально диск-вогнутое.

ТЕОРЕМА 5.3. *Топологически тривиальное голоморфное семейство $\pi: M \rightarrow \mathbb{D}$ гиперболических римановых поверхностей с диск-плоской границей канонически униформируемо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_0: \mathbb{D} \rightarrow M_0$ – универсальное накрытие. Так как семейство M топологически тривиальное, то оно гладко тривиальное (см. [46])

и потому универсальной накрывающей M является комплексное многообразие $(\mathbb{D} \times \mathbb{D}, J)$, где J – согласованная комплексная структура с определяющей формой $dw - \mu d\bar{w} - a d\bar{\lambda}$ с гладкими коэффициентами и $|\mu| < 1$ (см. 4.1). Универсальное накрытие M , равное f_0 над M_0 , обозначим через f .

Пусть $\lambda_0 \in B$ и $U = \{|\lambda - \lambda_0| < r\} \in \mathbb{D}$ – круг из определения диск-плоской границы, над замыканием которого есть голоморфное сечение s_0 проекции π . Покажем, что семейство $\pi_1^{-1}(U)$ тривиализуется J -голоморфным движением. Сделав подходящую гладкую замену вертикальной координаты w над окрестностью $\bar{U}$, можем считать, что функция w постоянна на каждом диске из множества $f^{-1}(s(U))$ и $w = 0$ на одном из этих дисков. Тогда $a(\lambda, 0) \equiv 0$ в U . Так как структура J трансверсально диск-выпуклая по лемме 1.3, то структура J – такая, как в замечании 4.1 к теореме 4.1, и потому над U существует голоморфное движение $w = \phi(\lambda, z)$, $z \in \mathcal{D}_0$, непрерывное над $\bar{U}$, заполняющее $\partial U \times \mathbb{D}$ и некоторую область $\mathcal{D}$ с односвязными слоями $\mathcal{D}_\lambda$. По конструкции (см. теорему 4.1), область $\mathcal{D}$ содержит также все множество $f^{-1}(s_0(U))$.

Покажем, что область $\mathcal{D}$ инвариантна относительно накрывающей группы G универсального накрытия $f: (\mathbb{D}^2, J) \rightarrow M$. Пусть $s_1: w = \phi(\lambda, z_1)$ и $g \in G$. Соединим s_1 и s_0 непрерывным семейством J -голоморфных дисков $s_t: w = \phi(\lambda, z_t)$. Обозначим через E множество таких $t \in [0, 1]$, что $g(s_t) \in \mathcal{D}$. Так как $\mathcal{D}$ – область и $\phi(\cdot, z_t)$ непрерывны в $\bar{U}$, то множество E открыто в $[0, 1]$. Согласно дополнению к теореме 4.1, для $t \in E$ справедлива оценка $|w \circ s_t(\lambda)| \leq \max \{|\phi(\lambda, z)|: |z| \leq R\}$, где $R = \max_{\partial U} |w \circ s_t|$. Из нее очевидно следует, что множество E замкнуто и потому совпадает с $[0, 1]$.

Так как многообразие $(\mathcal{D}, J)$ тривиализовано голоморфным движением, то по лемме 2.6 существует послойное биголоморфное отображение $F: \Omega \rightarrow (\mathcal{D}, J)$ с заданным универсальным накрытием $F(\lambda_0, \cdot): \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{D}_0$, где Ω – область в $U \times \mathbb{C}$ (каноническая униформизация). Прообраз группы G относительно F обозначим $\tilde{G}$. Тогда (см. п. 3.1) элементы $\tilde{G}$ продолжаются до послойных биголоморфизмов $U \times \hat{\mathbb{C}}$, дробно-линейных по вертикальной переменной. Так как Ω инвариантна относительно $\tilde{G}$, то голоморфное движение $\partial \mathbb{D}$ над (U, λ_0) , заполняющее границу $\partial \Omega$ в $U \times \mathbb{C}$, тоже инвариантно относительно $\tilde{G}$. По теореме Слодковского [57] (см. п. 3.3, следствие 4.7 и λ -лемму 2.4), существует голоморфное движение, заполняющее Ω и $\tilde{G}$ -инвариантное. Его прообраз $\psi: U \times \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathbb{D}$ относительно F является G -инвариантным и заполняет всю $\mathcal{D}$.

Положим $\mathcal{D}'_0 := f(0 \times \mathcal{D}_0) \subset M_0$. Тогда существует однозначно определенное голоморфное движение $\psi': U \times \mathcal{D}'_0 \rightarrow \pi^{-1}(U)$, непрерывное в $\bar{U} \times \mathcal{D}'_0$, заполняющее область $f(\mathcal{D}) =: \mathcal{D}'$ и такое, что $f(\lambda, \psi(\lambda, z)) \equiv \psi' \circ f(\lambda, z)$ в $U \times \mathcal{D}_0$ (проекция движения ψ в M).

Пусть $a \in M_\lambda$, $\lambda \in U$, – предельная точка для $\mathcal{D}'_\lambda$, $a_\nu \in \mathcal{D}_\lambda$, $a_\nu \rightarrow a$, K – компактная окрестность a в M_λ и $s_\nu = \psi'(\cdot, b_\nu)$ таковы, что $a_\nu = s_\nu(\lambda)$. Так как области $\mathcal{D}_\lambda$ стремятся к $\mathbb{D}$, заполняя каждый диск $\theta \mathbb{D}$, $\theta < 1$, при $|\lambda - \lambda_0| \rightarrow r$, то для любого компакта $K' \subset \pi^{-1}(U)$ найдется $r' \in (0, r)$ такое, что $K' \cap \{r' \leq |\lambda - \lambda_0| < r\}$ содержится в $\mathcal{D}'$. Так как s_ν непрерывны в $\bar{U}$ и последовательность образов сечений s_ν не имеет предельных точек в $\mathcal{D}'$, то для любого компакта $K' \subset \pi^{-1}(\bar{U})$ найдутся $r' \in (0, r)$ и номер ν' такой, что кольцо $s_\nu(\{r' \leq |\lambda - \lambda_0| \leq r\})$ не пересекает K' при $\nu > \nu'$. Это противоречие с трансверсальной диск-вогнутостью семейства M показывает, что на самом деле

$\mathcal{D} = U \times \mathbb{D}$ и, значит, семейство M горизонтально голоморфно тривиализуется над U . Так как это верно для любого малого круга $U \in \mathbb{D}$, то по теореме 2.1 семейство $\pi: M \rightarrow B$ канонически униформируемо. Теорема доказана.

Автору не известно, справедливо ли утверждение теоремы для семейств с диск-плоскими границами над произвольной базой B , так как теорема 3.2 о редукции базы доказана лишь для семейств римановых поверхностей без края. Конечно, с каждым семейством поверхностей M_λ с краем можно связать семейство дублей Шоттки $\widehat{M}_\lambda$, $\lambda \in B$, уже не имеющих края, однако определение на нем комплексной структуры, превращающей это семейство в голоморфное, совсем не очевидно. Впрочем, если $B = \mathbb{D}$, то это следует из доказанной теоремы. В самом деле, если $f_0: \mathbb{D} \rightarrow M_0$ – универсальное накрытие с накрывающей группой Γ и $f: \Omega \rightarrow M$, $f(0, \cdot) = f_0$, – каноническая униформизация, то в $\mathbb{D} \times \widehat{\mathbb{C}}$ действует группа G голоморфных послойных автоморфизмов, относительно которой Ω , а следовательно и $(\mathbb{D} \times \widehat{\mathbb{C}}) \setminus \Omega$, инвариантны. Сужение этой группы на слой $\lambda \times \widehat{\mathbb{C}}$ обозначим G_λ . Пусть $E := \bigcup E_\lambda$ – предельное множество группы G . Так как все M_λ имеют непустой край, то множества $\widehat{\mathbb{C}} \setminus E_\lambda$ связные. Фактор области $(\mathbb{D} \times \widehat{\mathbb{C}}) \setminus E$ по действию группы G является комплексным многообразием, расслоенным над $\mathbb{D}$ в семейство римановых поверхностей $\widehat{M}_\lambda := (\widehat{\mathbb{C}} \setminus E_\lambda)/G_\lambda$, каждая из которых является дублем Шоттки соответствующей M_λ . Так как $\widehat{\mathbb{C}} \setminus E_\lambda \rightarrow \widehat{M}_\lambda$ – накрытия и E_λ вполне разрывные, то $\widehat{M}_\lambda$ не имеют края.

Комбинируя теорему 5.2 с теоремой 3.2, получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. *Топологически локально тривиальное голоморфное семейство $\pi: M \rightarrow B$ с диск-плоской границей гиперболических римановых поверхностей без края над произвольным односвязным комплексным банаховым многообразием канонически униформируемо.*

5.3. Плоскости. Теорема Нишино. Голоморфные семейства $\pi: M \rightarrow B$ римановых поверхностей, конформно эквивалентных плоскости $\mathbb{C}$, выпадают из разобранной выше схемы, основанной на теории пространств Тейхмюллера, и требуют самостоятельного изучения. Первое ощущение, что такие семейства являются локально голоморфно тривиальными (как семейства сфер), опровергается простыми примерами (см. пример 4.1). Более того, пример 1.2 показывает, что в общем такие семейства не униформируются даже областями в $B \times \widehat{\mathbb{C}}$.

Вместе с тем, Т. Нишино доказал, что если $B = \mathbb{D}$, все M_λ конформно эквивалентны $\mathbb{C}$, проекция π допускает глобальное голоморфное сечение и M – многообразие Штейна, то семейство $\pi: M \rightarrow \mathbb{D}$ является голоморфно тривиальным, т. е. биголоморфно эквивалентным семейству $\mathbb{D} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ (см. [49; с. 253]).

Здесь мы докажем аналогичное утверждение (для общей базы B) при более слабых условиях на M .

ТЕОРЕМА 5.4. *Пусть $\pi: M \rightarrow B$ – голоморфное трансверсально диск-выпуклое семейство римановых поверхностей над комплексным банаховым многообразием, со слоями M_λ , конформно эквивалентными плоскости $\mathbb{C}$. Тогда это семейство локально голоморфно тривиальное и оно глобально голоморфно тривиальное, если выполнено одно из следующих условий:*

- 1) на B разрешимы первая и вторая проблемы Кузена;
- 2) π допускает глобальное голоморфное сечение и на B разрешима вторая проблема Кузена;
- 3) π допускает два глобальных голоморфных сечения с непересекающимися образами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ШАГ 1. Вертикальная координата. Предположим, что π допускает два глобальных голоморфных сечения s_0, s_1 с непересекающимися образами. Тогда для каждого $\lambda \in B$ однозначно определено однолистное голоморфное отображение $W_\lambda: M_\lambda \rightarrow \mathbb{C}$ такое, что $W_\lambda \circ s_0 = 0$, $W_\lambda \circ s_1 = 1$. Наша задача – показать, что функция W на M , равная W_λ на M_λ , $\lambda \in B$, голоморфна. Это совсем неочевидно, даже непрерывность W надо доказывать (ср. с [49; с. 225–228]), чем мы сейчас и займемся. Нам достаточно доказать это при дополнительном предположении, что многообразие B конечномерное.

Фиксируем произвольную точку $\lambda_0 \in B$. По теореме Сью [55], существует штейнова окрестность $U \supset M_{\lambda_0}$ на M . Уменьшая ее, можно считать, что существует голоморфная в U функция z такая, что $z = W$ на M_{λ_0} и отображение $p \mapsto (\pi(p), z(p))$ биголоморфно переводит U в некоторую область $U' \subset B \times \mathbb{C}$. Заменяя z на $(z - z \circ s_0)/(z \circ s_1 - z \circ s_0)$, можем считать, что $z \circ s_0 \equiv 0$ и $z \circ s_1 \equiv 1$ (там, где это определено).

Образ функции W при этом отображении обозначим через $W(\lambda, z)$. Так как $U' \supset \lambda_0 \times \mathbb{C}$, то существует функция $R(\lambda) > 0$ такая, что $R(\lambda) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ и функция $W(\lambda, \cdot)$ определена, голоморфна и однолистка на $R(\lambda)\mathbb{D}$, причем $W(\lambda, 0) \equiv 0$, $W(\lambda, 1) \equiv 1$. Тогда $W(\lambda, \cdot)$ отображает проколотые круги $\{z: |z| < R(\lambda), z \neq 0, 1\}$ в гиперболическую область $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. По лемме Шварца для метрики Кобаяши (п. 2.1) и принципу максимума, для всякого $R > 0$ найдется окрестность $V \ni \lambda_0$ в B такая, что семейство таких функций $W(\lambda, \cdot)$, $\lambda \in V$, равномерно непрерывно в круге $|z| < R$. Поэтому из произвольной последовательности $W(\lambda_j, \cdot)$, $\lambda_j \rightarrow \lambda_0$, можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся внутри $\mathbb{C}$ к некоторой голоморфной функции. Эта предельная функция однолистка, равна 0, 1 в точках 0, 1 соответственно и потому совпадает с W_{λ_0} . Так как это верно для любой последовательности $\lambda_j \rightarrow \lambda_0$, то $W(\lambda, \cdot) \rightarrow W(\lambda_0, \cdot)$ равномерно внутри $\mathbb{C}$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0$.

ШАГ 2. Одномерная база. Теперь докажем голоморфную тривиальность в одномерной ситуации, когда B – круговая окрестность $\overline{\mathbb{D}}$ в $\mathbb{C}$, предположив, что π допускает два глобальных голоморфных сечения s_0, s_1 с непересекающимися образами и что комплексная структура на M диск-вышуклая над $\mathbb{D}$.

Так как все M_λ диффеоморфны $\mathbb{R}^2$, то существует диффеоморфизм $M \rightarrow B \times \mathbb{C}$, сохраняющий проекции и ориентации (см. [46]). Таким образом, M биголоморфно послойно эквивалентно многообразию $(B \times \mathbb{C}, J)$ с комплексной (= интегрируемой почти комплексной) структурой J , относительно которой проекция $(\lambda, w) \mapsto \lambda$, т. е. функция λ , голоморфна. Определяющая форма структуры J имеет вид $dw - \mu d\bar{w} - a d\lambda$; единственное, что мы знаем о μ и a , – это что они гладкие и $|\mu| < 1$, но отнюдь не обязательно равномерно. Указанный диффеоморфизм можно подправить так, чтобы сечения s_0, s_1 переходили соответственно в $w = 0, 1$. Тогда $a(\lambda, 0) \equiv a(\lambda, 1) \equiv 1$, что мы и предполагаем в дальнейшем. Образ функции W из шага 1 на $B \times \mathbb{C}_w$ обозначим через $W(\lambda, z)$.

Так как W голоморфна на M_λ при каждом $\lambda \in B$, то $W(\lambda, \cdot)$ удовлетворяет уравнению Бельтрами $W_{\bar{z}} = \mu(\lambda, \cdot)W_z$, вообще говоря вырожденному, так как $\|\mu(\lambda, \cdot)\|_\infty$ может равняться 1. Тем не менее $W(\lambda, w) \rightarrow \infty$ при $w \rightarrow \infty$ локально равномерно по λ , так как функция W на M непрерывна – по доказанному выше.

Структура J удовлетворяет условиям теоремы 4.1, согласно которой существует J -голоморфное движение $\phi: \mathbb{D} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, заполняющее $\partial\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ и некоторую область $\mathcal{D}$ над $\mathbb{D}$ с односвязными слоями $\mathcal{D}_\lambda$. Вертикальную параметризацию движения ϕ удобнее перенести в $\lambda = 0$, т. е. заменить $\phi(\lambda, \cdot)$ на $\phi_0(\lambda, \cdot) := \phi(\lambda, \cdot) \circ \phi(0, \cdot)^{-1}$. Тогда $\phi_0: \mathbb{D} \times \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ – обычное J -голоморфное движение $\mathcal{D}_0$ над $(\mathbb{D}, 0)$, непрерывное в $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$. По построению и теореме единственности (лемма 4.2), $\phi_0(\lambda, 0) \equiv 0$ и $\phi_0(\lambda, 1) \equiv 1$.

Покажем, что $\mathcal{D}_0 = \mathbb{C}$. Если это не так, то $\mathcal{D}_0$ конформно эквивалентно кругу $\mathbb{D}$ и, предположив это, мы фиксируем конформное отображение $f_0: \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{D}_0$. Так как структура J интегрируема (комплексна), то ей соответствует характеристика $\nu(\lambda, z)$ движения ϕ_0 , которая по лемме 2.5 голоморфна по $\lambda \in \mathbb{D}$ (как отображение $\lambda \mapsto \nu(\lambda, \cdot) \in L^\infty(\mathbb{D})$; см. п. 2.2). Так как $|\nu| < 1$ и $\nu(0, \cdot) = 0$, то $\|\nu(\lambda, \cdot)\|_\infty \leq \lambda$ и, следовательно, все отображения $\phi_0(\lambda, \cdot): \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{D}_\lambda$ являются J -квазиконформными, т. е. квазиконформными относительно координаты $W(\lambda, \cdot)$.

Пусть $\psi: \mathbb{D} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ – каноническое накрытие движения ϕ_0 (см. 2.2), т. е. $\psi(\lambda, \cdot): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ – квазиконформные отображения с коэффициентами Бельтрами $\nu(\lambda, \cdot)$, сосредоточенными в $\mathbb{D}$, нормированные условием $\psi(\lambda, z) = z + o(1)$ в окрестности ∞ . Так как $\psi(\lambda, \cdot)$ голоморфно и однолистно в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, то по теореме Кёбе образ круга $\mathbb{D}$ при таком отображении (с произвольной $\lambda \in \mathbb{D}$) лежит в круге $4\mathbb{D}$.

Положим $F(\lambda, \cdot) = \psi(\lambda, \cdot) \circ f_0^{-1} \circ \phi_0(\lambda, \cdot)^{-1}$. Тогда функция F определена и J -голоморфна в области $\mathcal{D}$, $F(0, \cdot) = f_0^{-1}$ и для всякого $\lambda \in \mathbb{D}$ функция $F(\lambda, \cdot)$ однолистка в $\mathcal{D}_\lambda$, причем $F(\lambda, \mathcal{D}_\lambda) = \psi(\lambda, \mathbb{D})$.

Функция $F(\lambda, 1) - F(\lambda, 0)$ голоморфна, ограничена (ее модуль не превосходит 8) и не имеет нулей в $\mathbb{D}$. Поэтому у нее есть ненулевые угловые предельные значения почти в каждой точке из $\partial\mathbb{D}$. Пусть $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ – такая точка. Положим $G(\lambda, \cdot) := (F(\lambda, \cdot) - F(\lambda, 0))/(F(\lambda, 1) - F(\lambda, 0))$ и определим функцию $g(\lambda, W)$ условием $g(\lambda, W(\lambda, w)) = G(\lambda, z(\lambda, w))$. Тогда g голоморфна по W уже в обычном смысле (хотя голоморфность по λ – под вопросом), $g(\lambda, 0) \equiv 0$, $g(\lambda, 1) \equiv 1$ и $|g(\lambda, W)| \leq M$ с некоторой константой M для всех $\lambda = t\zeta$, $t \in (0, 1)$, и $W \in W(\lambda, \mathcal{D}_\lambda)$. Но движение ϕ_0 непрерывно в $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ и заполняет все граничное множество $\partial\mathbb{D} \times \mathbb{C}$. Поэтому существует $\theta < 1$ такое, что $W(\lambda, \mathcal{D}_\lambda)$ содержит круг $2M\mathbb{D}$ при $|\lambda| > \theta$. Итак, если $t > \theta$, то $g(t\zeta, \cdot): 2M\mathbb{D} \rightarrow M\mathbb{D}$ и, значит, $|g(t\zeta, W)| \leq |W|/2$ по лемме Шварца, в частности, $|g(t\zeta, 1)| \leq 1/2$. Полученное противоречие (с $g(\lambda, 1) \equiv 1$) показывает, что $\mathcal{D}_0 = \mathbb{C}$. А тогда и все $\mathcal{D}_\lambda$ равны $\mathbb{C}$, поскольку отображения $\phi_0(\lambda, \cdot)$ J -квазиконформные.

Таким образом, функция F определена уже всюду на $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ и отображение $(\lambda, w) \mapsto (\lambda, F(\lambda, w))$ биголоморфно относительно структуры J в $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ и обычной комплексной структуры в $\mathbb{C}^2$.

ШАГ 3. Два глобальных сечения. Предположим теперь, что B произвольное, но есть два сечения s_0, s_1 , как выше. Фиксируем произвольную точку $\lambda_0 \in B$. Пусть $U \ni \lambda_0$ – окрестность из определения трансверсальной диск-выпуклости и $h: \mathbb{D} \rightarrow U$ – вложенный голоморфный диск. Согласно шагу 1, существует биголоморфное отображение $\pi^{-1}(h(\mathbb{D})) \rightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{C}$ вида $p \mapsto (\pi(p), H(p))$, $H \circ s_0 \equiv 0$, $H \circ s_1 \equiv 1$. Но тогда $H|_{M_\lambda} = W_\lambda$ для всех $\lambda \in h(\mathbb{D})$, т.е. функция W из шага 1 голоморфна в $\pi^{-1}(h(\mathbb{D}))$. Так как она локально ограничена в $B \times \mathbb{C}$, то отсюда следует голоморфность W в произвольном координатном шаре в $U \times \mathbb{C}$ и, значит, отображение $M \ni p \mapsto (\pi(p), W(p)) \in B \times \mathbb{C}$ биголоморфно.

ШАГ 4. Проблемы Кузена. Локально голоморфные сечения π существуют в любом количестве. Поэтому, согласно шагу 3, семейство $\pi: M \rightarrow B$ локально голоморфно тривиализуется, т.е. для каждого $\alpha \in B$ существуют окрестность $V_\alpha \ni \alpha$ (координатный шар) и голоморфная в $U_\alpha := \pi^{-1}(V_\alpha)$ функция W_α , однолистная в слоях M_λ , $\lambda \in V_\alpha$. Если π допускает глобальное голоморфное сечение s , то все W_α можно выбирать так, что $W_\alpha \circ s \equiv 0$. А тогда в $U_\alpha \cap U_\beta$ имеем $W_\beta = c_{\beta\alpha} W_\alpha$ с голоморфной функцией $c_{\beta\alpha}$, постоянной на слоях M_λ . Эти $c_{\beta\alpha}$ образуют мультипликативный 1-коцикл на B (соответствующий покрытию $\{V_\alpha\}$). Если на B разрешима вторая проблема Кузена, то существуют голоморфные в U_α функции c_α , постоянные на слоях M_λ и нигде не равные нулю, такие, что $c_{\beta\alpha} = c_\alpha / c_\beta$ в $U_\alpha \cap U_\beta$. А тогда, полагая $W = c_\alpha W_\alpha$ в U_α , $\alpha \in B$, получаем глобальную голоморфную функцию W на M , однолистную в слоях, а с нею и биголоморфизм $M \rightarrow B \times \mathbb{C}$.

Наконец, если на B разрешимы и вторая, и первая проблемы Кузена, то просто повторим доказательство следствия 1.2 (заменяя в нем z_α на W_α). Теорема 5.4 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Голоморфное семейство $\pi: M \rightarrow B$ со слоями, конформно эквивалентными $\mathbb{C}$, допускает локальную голоморфную тривиализацию тогда и только тогда, когда оно продолжается до голоморфного семейства сфер, т.е. существуют голоморфное семейство $\hat{\pi}: \hat{M} \rightarrow B$ со слоями, конформно эквивалентными сфере Римана $\hat{\mathbb{C}}$, и биголоморфное послойное отображение $M \rightarrow \hat{M} \setminus s(B)$, где s – некоторое глобальное голоморфное сечение проекции $\hat{\pi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\hat{M}_\lambda = M_\lambda \sqcup \infty$, $\hat{M} = \bigsqcup_\lambda \hat{M}_\lambda$ и $\hat{\pi}: \hat{M} \rightarrow B$. Локальные “вертикальные” координаты W^α из шага 3 очевидно продолжаются до однолистных мероморфных функций в каждом слое $\hat{M}_\lambda$, $W(\infty) := \infty$. Функции W^α , которые по определению считаем мероморфными в U_α , вместе с функциями вида $h \circ \hat{\pi}$, где h голоморфна в V_α , определяют на $\hat{M}$ комплексную структуру (очевидно, не зависящую от индексов α). Таким образом определено голоморфное семейство $\hat{\pi}: \hat{M} \rightarrow B$, включающее, как описано, исходное семейство плоскостей.

Обратное утверждение очевидно ввиду теоремы 1.1. Следствие доказано.

Интересно, можно ли условие типа псевдовыпуклости в теореме Нишино заменить условием другого типа, обеспечивающим голоморфность особенностей

при наличии в них комплексной структуры, например условием плюриполярности (существуют замкнутое множество $X \subset M$ с компактными слоями и функция u , плюрисубгармоническая в $M \setminus X$ и такая, что $u(p_j) \rightarrow -\infty$ для любой последовательности $\{p_j\} \subset M$, не имеющей предельных точек в M). По этому поводу см. [53].

6. Об устранимых особенностях комплексных структур

6.1. Семейства проколотых дисков. Согласно следствию 5.3, теорему Нишино можно рассматривать как теорему о продолжении комплексной структуры с многообразия M , состоящего из плоскостей, на объемлющее его многообразие $\widehat{M}$, слоями которого являются сферы. В общем случае $\widehat{M}$ – лишь гладкое многообразие, но псевдовыпуклость (трансверсальная диск-выпуклость) семейства M позволяет наделить $\widehat{M}$ комплексной структурой, совпадающей с таковой на M . При этом множество “бесконечно удаленных точек” $\widehat{M}$ оказывается голоморфным сечением проекции семейства $\widehat{M}$ на базу, что видно из доказательства теоремы 5.4 (вертикальная мероморфная координата z на нем равна ∞), а также следует из классической теоремы Гартогса об аналитичности особенностей (см. [51]) после того, как комплексная структура продолжена на $\widehat{M}$.

Теорема Гартогса утверждает, что если $S: w = f(\lambda)$ – непрерывный график над B , $|f| < 1$ и область $(B \times \mathbb{D}) \setminus S$ псевдовыпуклая, то функция f голоморфна. В этой ситуации область $(B \times \mathbb{D}) \setminus S$ над B расслаивается в семейство проколотых кругов и теорема утверждает, что проколы голоморфно зависят от параметра $\lambda \in B$. Объемлющее многообразие $B \times \mathbb{D}$ здесь имеет комплексную структуру всюду, включая проколы.

В связи с теоремой Нишино естественно возникает вопрос о справедливости аналогичного утверждения на комплексных многообразиях, состоящих из проколотых дисков: можно ли и структуру продолжить и получить аналитичность особенностей? Положительный ответ на этот вопрос при $B = \mathbb{D}$ фактически следует из теоремы Нишино, а в общем случае нужны дополнительные соображения, как в теореме 5.4. Следующая теорема представляет локальный вариант теоремы Нишино.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $\pi: M \rightarrow B$ – голоморфное семейство римановых поверхностей M_λ , конформно эквивалентных проколотому кругу. Если многообразие B конечномерное и семейство M трансверсально диск-выпуклое, то существуют комплексное многообразие $\widehat{M}$, голоморфная проекция $\hat{\pi}: \widehat{M} \rightarrow B$ со слоями, конформно эквивалентными кругу, и голоморфное послойное вложение $F: M \rightarrow \widehat{M}$ такие, что $\widehat{M} \setminus F(M)$ есть образ голоморфного сечения проекции $\hat{\pi}$ над B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что семейство M топологически тривиальное. Тогда существует послойный диффеоморфизм M на $B \times (\mathbb{D} \setminus 0)$ (см. [46]). Образ комплексной структуры M при этом отображении обозначим через J ; таким образом, многообразие M биголоморфно эквивалентно $(B \times (\mathbb{D} \setminus 0), J)$. При этом гладкую вертикальную координату w можно выбрать так,

что для фиксированной λ_0 функция w голоморфна на $\lambda_0 \times (\mathbb{D} \setminus 0)$ относительно структуры J .

По теореме Сю [55], существует штейнова окрестность $\mathcal{U}$ проколотого диска $\lambda_0 \times (\mathbb{D} \setminus 0)$ в $(B \times (\mathbb{D} \setminus 0), J)$. Уменьшая $\mathcal{U}$, если надо, можем считать, что в $\mathcal{U}$ существует J -голоморфная функция f такая, что $f(\lambda_0, w) = w$ и $df \neq 0$ на слоях $(\lambda \times \mathbb{D}) \cap \mathcal{U}$. Пусть $U \ni \lambda_0$ – координатная окрестность, настолько малая, что уровни $\{f(\lambda, w) = c\}$ с $\lambda \in U$ и $1/4 < |c| < 3/4$ являются графиками над U и их объединение содержит множество $U \times \{1/3 \leq |w| \leq 2/3\}$. Тогда в $U \times \mathbb{D}$ есть гладкая функция z , однолистная в $\mathbb{D}$ при каждом фиксированном $\lambda \in U$, равная 0 при $w = 0$ и равная f при $1/3 \leq |w| \leq 2/3$. Так как f является J -голоморфной в $\mathcal{U}$, то структура J в координатах $\lambda_1, \dots, \lambda_n, z$ имеет определяющую форму $dz - \mu d\bar{z} - \sum a_j d\bar{\lambda}_j$ с $\mu = 0 = a_j$ при $1/3 \leq |z| \leq 2/3$. Доопределяя μ и a_j нулями при $|z| \geq 2/3$, получаем комплексную структуру в $U \times (\widehat{\mathbb{C}} \setminus 0)$, для которой сохраним обозначение J . Тогда слои проекции $U \times (\widehat{\mathbb{C}} \setminus 0)$ в U – J -голоморфные, односвязные и потому конформно эквивалентные $\mathbb{C}$ по теореме Римана.

Здесь удобно заменить z на $\zeta = 1/z$ и перейти к соответствующей структуре J' в $U \times \mathbb{C}$. Так как семейство M трансверсально диск-выпуклое, то, уменьшая, если надо U , можем считать, что структура J' диск-выпуклая над ∂U . По теореме 4.1, существует J' -голоморфное над U движение, непрерывное над $\bar{U}$, которое заполняет $\partial U \times \mathbb{C}$ и некоторую область $\mathcal{D}$ над U с односвязными слоями. Повторяя шаг 2 доказательства теоремы Нишино 5.4, получаем, что на самом деле $\mathcal{D} = U \times \mathbb{C}$ и $(U \times \mathbb{C}, J')$ послойно биголоморфно эквивалентно обыкновенному цилиндру $U \times \mathbb{C}$. Возвращаясь к координате z , получаем окрестность $V \ni 0$ в $\mathbb{C}$ и послойное непрерывное вложение $F_0: U \times V \rightarrow U \times \mathbb{D}$, J -голоморфное в $U \times (V \setminus 0)$. Отображение F_0 задает на $U \times V$ комплексную карту с координатами, J -голоморфными в $U \times (V \setminus 0)$.

Так как семейство M локально топологически тривиальное, то, добавляя к каждому слою M_λ прокол, получаем семейство кругов $\widehat{M}_\lambda \supset M_\lambda$ над B , которое локально имеет топологическую структуру прямого произведения. Это очевидно порождает на множестве $\widehat{M}$ топологию и $\widehat{M}$ становится топологическим многообразием. Положим $S = \widehat{M} \setminus M$ и естественно определим $\hat{\pi}(\widehat{M}_\lambda) = \lambda$.

По доказанному, для каждой точки $p \in S$ существуют окрестность $W \ni p$ в $\widehat{M}$ и послойный гомеоморфизм $W \rightarrow \hat{\pi}(W) \times \mathbb{D}$ такой, что сужение $W \setminus S \rightarrow \hat{\pi}(W) \times (\mathbb{D} \setminus 0)$ голоморфно. Покроем S системой таких окрестностей W_α ; координатные отображения, описанные выше, обозначим соответственно через F_α . Если $W_\alpha \cap W_\beta$ непусто, то отображение $F_\beta \circ F_\alpha^{-1}$ является тогда послойным гомеоморфизмом $F_\alpha(W_\alpha \cap W_\beta) \rightarrow F_\beta(W_\alpha \cap W_\beta)$, голоморфным вне $F_\alpha(S)$ и потому голоморфным во всем $F_\alpha(W_\alpha \cap W_\beta)$ по теореме об устранимой особенности. Таким образом, система описанных комплексных карт, покрывающих окрестность S в $\widehat{M}$, определяет в этой окрестности структуру комплексного многообразия, которая вместе с таковой на M задает комплексную структуру на многообразии $\widehat{M}$.

Голоморфность S – локальное свойство, доказанное выше. Теорема доказана.

Вопрос об униформируемости построенного семейства $\widehat{M}$ никак не связан с теоремой, это отдельная общая проблема униформизации косых цилиндров. Одной псевдовыпуклости и даже штейновости многообразия $\widehat{M}$ недостаточно (см. пример в [28]), нужны дополнительные условия.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Пусть $\pi: M \rightarrow B$ – трансверсально диск-выпуклое голоморфное семейство римановых поверхностей, конформно эквивалентных проколотов плоскости $\mathbb{C} \setminus 0$, над конечномерным комплексным многообразием B . Тогда семейство M локально голоморфно тривиальное. Оно глобально тривиальное, если B односвязное и на нем разрешима вторая проблема Кузена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Над каждым координатным шаром $U \subset B$ семейство M топологически тривиальное, и, значит, $\pi^{-1}(U)$ биголоморфно послойно эквивалентно многообразию $(U \times (\mathbb{C} \setminus 0), J)$ с некоторой гладкой согласованной комплексной структурой J . Повторяя доказательство теоремы, продолжаем J до комплексной структуры $\hat{J}$ в $U \times \widehat{\mathbb{C}}$. Таким образом, в общем случае получается голоморфное семейство сфер $\hat{\pi}: \widehat{M} \rightarrow B$ и голоморфное послойное вложение $F: M \rightarrow \widehat{M}$, причем $\widehat{M} \setminus F(M)$ локально (по $\lambda \in B$) состоит из непересекающихся образов двух голоморфных сечений проекции $\hat{\pi}$. Глобально, многообразие $\widehat{M} \setminus F(M)$, двулистно накрывающее B , может быть связным, но если B односвязное, то оно состоит из образов двух глобальных голоморфных сечений $\hat{\pi}$.

Остальное следует из теоремы 1.1. Следствие доказано.

6.2. Устранение послойно дискретных особенностей. Следующее утверждение является абстрактным аналогом теоремы Э. Леви об аналитичности особенностей (см. [51]).

ЛЕММА 6.1. Пусть E – замкнутое подмножество бикруга $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$, слои E_λ , $\lambda \in \mathbb{D}$, которого имеют не более k точек, причем проекция E в $\mathbb{D}$, $E_\lambda \rightarrow \lambda$, собственная, а множество $U = \{\lambda: \#E_\lambda = k\}$ непустое и открытое. Пусть J – непрерывная комплексная структура в $\mathbb{D}^2 \setminus E$, согласованная с проекцией в $\mathbb{D}$, трансверсально диск-выпуклая над U и такая, что римановы поверхности $(\mathbb{D} \setminus E_\lambda, J)$ конформно эквивалентны кругу с не более чем k проколами. Тогда существует непрерывная комплексная структура $\hat{J}$ в $\mathbb{D}^2$, совпадающая с J в $\mathbb{D}^2 \setminus E$ и такая, что E – комплексно-аналитическое подмножество комплексного многообразия $(\mathbb{D}^2, \hat{J})$.

(Комплексная структура в области в $\mathbb{C}^n$ называется непрерывной, гладкой и т. п., если функции, голоморфные относительно этой структуры, непрерывные, гладкие и т. п.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение достаточно доказать в окрестности каждой точки E ; функции перехода новых координатных карт будут голоморфными, как в конце доказательства теоремы 6.1. Поэтому, по теореме Сюю [55] и рассуждая далее как в теореме 6.1, можно считать, что существует непрерывная вертикальная координата ζ в $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ такая, что структура J относительно координат λ, ζ совпадает с обычной комплексной структурой в $\mathbb{D} \times \{1/2 < |\zeta| < 1\}$ и таким образом продолжается до обычной комплексной структуры в $\mathbb{D} \times (\mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{D})$ и $E \subset \mathbb{D} \times \frac{1}{2}\mathbb{D}$.

По условию, для каждой $\lambda \in \mathbb{D}$ существует функция $w(\lambda, \cdot)$, непрерывная в $\overline{\mathbb{D}}$, биголоморфно отображающая $(\mathbb{D} \setminus E_\lambda, J)$ на $\mathbb{D} \setminus E'_\lambda$, где $\#E'_\lambda = \#E_\lambda$, и однозначно определяемая условием, что точки $\pm 1, i$ при этом отображении неподвижны.

Функция $w(\lambda, \zeta)$ непрерывна в $\mathbb{D}^2$. В самом деле, пусть $\lambda_j \rightarrow \lambda_0$. Так как функции $w(\lambda_j, \cdot)$ равномерно ограничены и $\mathbb{D}^2 \setminus E$ – комплексное многообразие, то, используя локальные J -голоморфные координаты (среди которых λ) и переходя к подпоследовательности, можем считать, что последовательность функций $w(\lambda_j, \cdot)$ сходится равномерно внутри $\mathbb{D} \setminus E_{\lambda_0}$ к некоторой J -голоморфной функции w^0 . Так как все $w(\lambda_j, \cdot)$ голоморфно и однолистно продолжаются в кольцо $1/2 < |\zeta| < 2$ по принципу симметрии и имеют там неподвижные точки $\pm 1, i$, то функция w^0 не постоянная и однолистная. Множество предельных значений w^0 на E_{λ_0} конечно (по условию), $|w^0| = 1$ на $\partial\mathbb{D}$ и поэтому $w^0 = w(\lambda_0, \cdot)$ (функция $w^0 \circ w(\lambda_0, \cdot)^{-1}$ голоморфна в $\mathbb{D}$ по теореме об устранимой особенности, поэтому она дробно-линейная и имеет неподвижные точки $\pm 1, i$).

Фиксируем $\lambda_0 \in U$. По следствию 6.1, существуют круг $V \ni \lambda_0$ в U и комплексная структура $\hat{J}$ в $V \times \mathbb{C}$, совпадающая с J в $(V \times \mathbb{C}) \setminus E$ (этим условием она определена однозначно) и такая, что E над V состоит из k $\hat{J}$ -голоморфных графиков. При $k = 1$ утверждение доказано в теореме 6.1, поэтому далее считаем, что $k > 1$. По теореме об устранимой особенности, функция $w(\lambda, \zeta)$ является $\hat{J}$ -голоморфной в $\lambda \times 2\mathbb{D}$ при любом фиксированном $\lambda \in U$.

В окрестности $V \times \partial\mathbb{D}$ определено $\hat{J}$ -голоморфное движение с графиками $\zeta = \text{const}$. Уменьшая, можем считать в силу леммы 1.1, что в $V \times 2\mathbb{D}$ есть $\hat{J}$ -голоморфная функция w_V , совпадающая с $w(\lambda_0, \cdot)$ на $\lambda_0 \times 2\mathbb{D}$ и задающая голоморфное послойное вложение $(V \times \mathbb{D}, \hat{J})$ в $V \times \mathbb{C}$. Поэтому, еще уменьшая V (если надо), по теореме Берса–Ройдена (теорема 3.3) получаем $\hat{J}$ -голоморфное движение $\zeta = \phi(\lambda, z)$, заполняющее $V \times \overline{\mathbb{D}}$, с графиками $\zeta = \text{const}$ в окрестности $V \times \partial\mathbb{D}$. Обозначим через μ его характеристику, соответствующую фиксированному биголоморфизму $f_0 := w(\lambda, \cdot) : \mathbb{D} \rightarrow (\lambda_0 \times \mathbb{D}, \hat{J})$.

Так как отображение $\lambda \mapsto \mu(\lambda, \cdot)$ голоморфно в V (лемма 2.5), то для каждого $\lambda \in V$, по теореме Альфорса–Берса [1], [2], существуют два канонических гомеоморфных в $\mathbb{D}$ решения уравнения Бельтрами $w_{\bar{z}} = \mu(\lambda, \cdot)w_z$: одно, $w^\mu(\lambda, \cdot)$, голоморфное по $\lambda \in V$ (как в лемме 2.6), и другое, $w_\mu(\lambda, \cdot) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, с неподвижными точками $\pm 1, i$, гладкое (и даже $\mathbb{R}$ -аналитическое) по λ . Так как w^μ и w_μ – решения одного уравнения Бельтрами и отображения $\lambda \mapsto w^\mu(\lambda, \cdot)$, $\lambda \mapsto w_\mu(\lambda, \cdot)$ гладкие, то существует гладкая в соответствующей области функция $h(\lambda, \eta)$, голоморфная по η и такая, что $w^\mu(\lambda, z) \equiv h(\lambda, w_\mu(\lambda, z))$ в $V \times \overline{\mathbb{D}}$.

Положим $\psi_1(\lambda, \zeta) = \phi(\lambda, \cdot)^{-1}(\zeta)$. По определению характеристики (п. 2.2), функция $w_\mu(\lambda, \psi_1(\lambda, \zeta))$ является $\hat{J}$ -голоморфной по ζ , $|w_\mu| = 1$ при $|\zeta| = 1$ и точки $\pm 1, i$ неподвижные. Так как функция $w(\lambda, \zeta)$, определенная выше, такая же, то $w_\mu(\lambda, \psi_1(\lambda, \zeta)) \equiv w(\lambda, \zeta)$. Обозначая $w(\lambda, \cdot)^{-1}(\eta) := \psi_2(\lambda, \eta)$, получаем, что $w_\mu(\lambda, \psi_1(\lambda, \psi_2(\lambda, w))) \equiv w$ в $\mathbb{D}$ при любом $\lambda \in V$. Следовательно, $w^\mu(\lambda, \psi_1(\lambda, \psi_2(\lambda, w))) \equiv h(\lambda, w)$ в $V \times \overline{\mathbb{D}}$, т. е. функция w^μ гладкая относительно координат (λ, w) в $V \times \overline{\mathbb{D}}$. Так как локально $\hat{J}$ -голоморфные функции разлагаются в степенные ряды по λ и w^μ , то отсюда следует, что структура $\hat{J}$ в $U \times \overline{\mathbb{D}}$ гладкая относительно координат (λ, w) .

Так как функция $w(\lambda, \zeta)$ является $\hat{J}$ -голоморфной на слоях $\lambda \times \bar{\mathbb{D}}$, то определяющая форма структуры $\hat{J}$ в $U \times \mathbb{D}$ относительно координат λ, w имеет вид $dw - a(\lambda, w) d\bar{\lambda}$ с гладкой функцией $a = -h_{\bar{\lambda}}/h_w$, голоморфной по w и равномерно ограниченной в $U \times r\mathbb{D}$ для любого $r < 1$. (Голоморфность a по w эквивалентна интегрируемости J как почти комплексной структуры, см. начало п. 1.3.)

Над каждым кругом $V \subset U$ множество $E \cap (V \times \mathbb{D})$ является объединением k попарно непересекающихся $\hat{J}$ -голоморфных графиков $w = f_j(\lambda)$. $\hat{J}$ -голоморфность означает, что каждая f_j является решением над V уравнения $f_{\bar{\lambda}} = a(\cdot, f)$ (см. п. 4.1). Функция $F := \prod_{i \neq j} (f_i - f_j)^2$ определена уже на всем множестве U

и стремится к нулю при $\lambda \rightarrow \partial U \cap \mathbb{D}$, так как над точками из $\partial U \cap \mathbb{D}$ множества E_{λ} содержат меньше чем k точек (и проекция E в $\mathbb{D}$ собственная по условию). Так как

$$F_{\bar{\lambda}} = 2 \sum_{i \neq j} \frac{a(\cdot, f_i) - a(\cdot, f_j)}{f_i - f_j} F$$

в V , а функция a ограничена и голоморфна по w (и $|f_j| \leq 1/2$), то существует непрерывная и ограниченная в U функция C такая, что $F_{\bar{\lambda}} = CF$. Доопределяя C нулем вне U и полагая $c = TC$, где T – плоский интеграл Коши (оператор, обратный к $\partial/\partial\bar{\lambda}$, см. п. 4.1), мы получаем, что $c_{\bar{\lambda}} = C$ и потому функция $e^{-c}F$ голоморфна в U . Доопределяя F нулем в $\mathbb{D} \setminus U$, получаем непрерывную в $\mathbb{D}$ функцию $e^{-c}F$, голоморфную вне своих нулей. По теореме Радо, эта функция голоморфна в $\mathbb{D}$, и, следовательно, множество $\mathbb{D} \setminus U$ дискретное.

Таким образом, остается показать, что $\hat{J}$ продолжается до комплексной структуры в окрестности изолированных точек $(\lambda_0, w_0) \in E$ с $\lambda_0 \in \mathbb{D} \setminus U$, вне которых структура уже есть.

Заменяя a на χa , где χ – гладкая функция с носителем в $\mathbb{D}^2$, равная 1 в окрестности (λ_0, w_0) , мы получаем почти комплексную структуру J' в $\hat{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$ с определяющей формой $dw - \chi a d\bar{\lambda}$, удовлетворяющей условиям следствия 4.2. Поэтому $\hat{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$ заполняется J' -голоморфным движением. В окрестности (λ_0, w_0) , где $\chi = 1$, все графики этого движения $\hat{J}$ -голоморфны вне $\lambda_0 \times \mathbb{D}$. Поэтому существует круг $V \ni \lambda_0$ в $\mathbb{D}$ и окрестность $W \ni (\lambda_0, w_0)$ такие, что сужение описанного движения на W является $\hat{J}$ -голоморфным движением над V . По лемме 2.5, характеристика этого движения (соответствующая тождественному отображению $w: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$) голоморфна по $\lambda \in V \setminus \lambda_0$ и потому, по теореме об устранимой особенности, голоморфно по λ продолжается в $V \times W_{\lambda_0}$. По лемме 2.6, существует послыйный гомеоморфизм W на некоторую область $\Omega \subset V \times \mathbb{C}$, J -голоморфный в $W \setminus (\lambda_0 \times \mathbb{D})$, т. е. существует непрерывная в W функция w^* , $\hat{J}$ -голоморфная вне $\lambda = \lambda_0$, которая вместе с λ задает на W комплексную карту. Опять же по теореме об устранимой особенности, w^* является J -голоморфной в $W \setminus (\lambda_0, w_0)$. Объявляя ее $\hat{J}$ -голоморфной в W по определению, мы продолжаем $\hat{J}$ до комплексной структуры в W , порождаемой голоморфными функциями от λ и w^* . Лемма доказана.

Одномерность базы в доказательстве используется по существу лишь для простого решения $\bar{\partial}$ -проблемы. Используя в полной мере условие интегрируемости J и линейные операторы решения $\bar{\partial}$ -проблемы, скажем, в шаре в $\mathbb{C}^n$,

доказанную лемму можно распространить на случай любой конечномерной комплексной базы B (вместо $\mathbb{D}$). Однако это требует дополнительного исследования квазилинейных $\bar{\partial}$ -уравнений в многомерных областях и мы оставляем это на будущее.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $\pi: M \rightarrow \mathbb{D}$ – голоморфное семейство римановых поверхностей M_λ , конформно эквивалентных кругу с конечным числом проколов (зависящих от λ), причем число проколов равномерно ограничено для всех $\lambda \in \mathbb{D}$. Предположим также, что существует замкнутое подмножество $X \subset M$ такое, что проекция $\pi|_{\partial X} \rightarrow \mathbb{D}$ собственная и область $M \setminus X$ послойно гомеоморфна $\mathbb{D} \times (\mathbb{D} \setminus \frac{1}{2}\bar{\mathbb{D}})$. Тогда, если семейство M является трансверсальным и вертикально диск-выпуклым (например, если многообразие M псевдовыпуклое), то существуют комплексное многообразие $\widehat{M}$, голоморфная проекция $\hat{\pi}: \widehat{M} \rightarrow \mathbb{D}$ со слоями, конформно эквивалентными кругу, и голоморфное послойное вложение $F: M \rightarrow \widehat{M}$ такие, что $\widehat{M} \setminus F(M)$ есть комплексно-аналитическое подмножество в $\widehat{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многообразие $\widehat{M}$ определим как $(\mathbb{D}^2, \hat{J})$ с непрерывной комплексной структурой $\hat{J}$, которую будем строить, послойно вкладывая M в $\mathbb{D}^2$.

По условию, существует послойный гомеоморфизм $f: M \setminus X \rightarrow \mathbb{D} \times (\mathbb{D} \setminus \frac{1}{2}\bar{\mathbb{D}})$. Окружность $M_\lambda \cap \{|f(\lambda, \cdot)| = 2/3\}$ на каждом M_λ ограничивает область M'_λ , конформно эквивалентную кругу с конечным числом проколов. Обозначим через w_λ функцию, конформно отображающую M'_λ на $\frac{2}{3}\mathbb{D} \setminus E_\lambda$, $\#E_\lambda < \infty$, и однозначно определяемую нормировкой $w(M_\lambda \cap \{f = c\}) = c$ для $c = \pm 2/3, (2/3)i$. Из единственности такого отображения так же, как в доказательстве леммы 6.1, следует, что функция w , равная w_λ на M'_λ , непрерывна на области $M' = \bigsqcup M'_\lambda$. При помощи гомеоморфизма f она естественно продолжается до непрерывной функции на M , однолистной на слоях и такой, что $p \mapsto (\lambda(p), w(p))$ – гомеоморфизм M на $\mathbb{D}^2 \setminus E$, где E – замкнутое подмножество с конечными слоями E_λ . Комплексная структура на M индуцирует непрерывную комплексную структуру J на $\mathbb{D}^2 \setminus E$. Покажем, что она удовлетворяет условию леммы 6.1. Так как семейство M трансверсально диск-выпуклое, то достаточно показать, что множество $U = \{\lambda: \#E_\lambda = k\}$, где $k = \sup \#E_\lambda$, открыто в $\mathbb{D}$.

Предположим противное. Тогда существуют $\lambda_0 \in \mathbb{D}$ и последовательность точек $\lambda_j \rightarrow \lambda_0$ таких, что $\#E_{\lambda_j} \leq k - 1$. Пусть V^i – замкнутые попарно непересекающиеся круги в $\mathbb{D}$, покрывающие окрестность E_{λ_0} , и $f_0: \mathbb{D} \setminus E_{\lambda_0} \rightarrow M_{\lambda_0}$ – конформное отображение. По лемме 1.1, в окрестности $f_0(\partial V_i)$ на M существует голоморфная, однолистная в слоях функция h , равная f_0^{-1} на M_{λ_0} , с уровнями, трансверсальными слоям M_λ . Поэтому множество $\gamma_j^i := \{p \in M_{\lambda_j}: h(p) \in \partial V^i\}$ для каждого i и $j \gg 1$ является замкнутой жордановой кривой. Так как M_λ имеют род 0 (конформно эквивалентны плоским областям) и число этих окружностей на M_{λ_j} больше числа проколов, то, переходя к подпоследовательности и перенумеровав V^i , можно считать, что каждая кривая γ_j^1 ограничивает в M_{λ_j} голоморфный диск D_j . Границы этих дисков равномерно сходятся при $j \rightarrow \infty$ к γ_0^1 . По условию вертикальной диск-выпуклости, подходяще параметризованные диски D_j должны равномерно сходить к некоторому диску в M_{λ_0} с границей γ_0^1 . Но γ_0^1 ограничивает на M_{λ_0} лишь проколотый диск $f_0(V^1 \setminus E_{\lambda_0})$,

и это противоречие показывает, что множество U открытое. Остальное следует из леммы 6.1. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Условие равномерной ограниченности числа проколов в теореме излишне. Его несложно вывести из вертикальной диск-выпуклости и доказательства леммы 6.1, но я не вижу в этом особого интереса.

6.3. Комментарии. 1. Представляется правдоподобным, что для семейств римановых поверхностей без края условие диск-плоской границы в теореме 5.3 можно заменить более слабым “односторонним” условием трансверсальной диск-выпуклости (и тогда, по теореме 3.2, ее можно распространить на семейства над любой базой B).

2. Интересно, можно ли в теореме 5.1 убрать условие существования комплексной структуры на самом множестве E , т. е. обобщить теорему 6.1 на топологически тривиальные семейства M , слои M_λ которых конформно эквивалентны $\mathbb{D} \setminus E_\lambda$, где E_λ – замкнутые дискретные подмножества $\mathbb{D}$. В этой связи приведем следующую теорему Ямагучи [61].

Пусть $\pi: M \rightarrow \mathbb{D}$ – топологически тривиальное голоморфное семейство римановых поверхностей M_λ , конформно эквивалентных соответственно $\widehat{\mathbb{C}} \setminus E_\lambda$, где E_λ – замкнутые подмножества сферы Римана, устранимые для голоморфных функций с конечным интегралом Дирихле. Тогда, если M – многообразие Штейна, то оно биголоморфно послойно эквивалентно некоторой области $\Omega \subset \mathbb{D} \times \widehat{\mathbb{C}}$.

(Условие на E_λ здесь означает, что не существует непостоянных голоморфных в $\widehat{\mathbb{C}} \setminus E_\lambda$ функций f таких, что $\int i df \wedge d\bar{f} < +\infty$; такие множества вполне разрывны, но их хаусдорфова размерность может равняться 2.)

Это теорема – одновременно и о продолжении комплексной структуры, и об униформизации. По лемме 5.1, множество $(\mathbb{D} \times \widehat{\mathbb{C}}) \setminus \Omega$ заполняется голоморфным (мероморфным) движением, нормируя которое, область Ω переводим в $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ и тогда дополнение к Ω состоит из попарно не пересекающихся голоморфных графиков над $\mathbb{D}$.

Условие на E_λ в теореме Ямагучи локальное, поэтому она частично обобщается до следующей теоремы о продолжении комплексной структуры.

Пусть $\pi: M \rightarrow \mathbb{D}$ – топологически тривиальное голоморфное семейство римановых поверхностей M_λ , конформно эквивалентных $\mathbb{D} \setminus E_\lambda$, где E_λ устранимы для голоморфных функций в $\mathbb{D} \setminus E_\lambda$ с конечным интегралом Дирихле. Предположим, что M есть многообразие Штейна. Тогда существуют комплексное многообразие $\widehat{M}$ с сюръективной голоморфной проекцией $\hat{\pi}: \widehat{M} \rightarrow \mathbb{D}$ и голоморфное послойное вложение $\iota: M \rightarrow \widehat{M}$ такое, что $\widehat{M} \setminus \iota(M)$ есть объединение попарно непересекающихся образов голоморфных сечений проекции $\hat{\pi}$.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Так как семейство топологически тривиальное, то M послойно гомеоморфно множеству $\mathbb{D} \times (\mathbb{D} \setminus E_0)$, где E_0 – замкнутое вполне разрывное подмножество в $\mathbb{D}$. Таким образом, можно считать, что $M = (\mathbb{D} \times (\mathbb{D} \setminus E_0), J)$ с соответствующей комплексной структурой J . В качестве $\widehat{M}$ берем, естественно, $\mathbb{D}^2$. Для произвольной $\lambda_0 \in \mathbb{D}$, по лемме 1.1, существует J -голоморфная функция h в окрестности $\lambda_0 \times (\mathbb{D} \setminus E_0)$ в M , однолистная

на слоях и равная 1 по модулю на $\lambda_0 \times r\partial\mathbb{D}$, где $r < 1$ таково, что $E_0 \subset r\mathbb{D}$. Тогда над малым кругом $V \ni \lambda_0$ есть область $W \supset \lambda_0 \times r\mathbb{D}$ и непрерывная функция ζ , равная h в окрестности множества $\{|h| = 1\}$, однолистная в каждом слое и такая, что образ W в координатах λ, ζ равен $V \times \mathbb{D}$. Образ J ввиду J -голоморфности h при этом преобразовании совпадает со стандартной комплексной структурой в окрестности $V \times \partial\mathbb{D}$ и, таким образом, продолжается до комплексной структуры в $V \times (\widehat{\mathbb{C}} \setminus E_0)$. По теореме Ямагучи, эта структура продолжается на $V \times \widehat{\mathbb{C}}$, и, следовательно, структура J продолжается до непрерывной комплексной структуры на W . Так как E_λ устранимы для однолистных функций, то такие локальные комплексные карты согласованы на пересечениях.

3. Следующая теорема Майтани–Ямагучи [44] тоже является теоремой об одновременном устранении особенностей комплексных структур и униформизации.

Пусть $\pi: M \rightarrow \mathbb{D}$ – голоморфное семейство римановых поверхностей и M – многообразие Штейна. Обозначим через X множество точек $\lambda \in \mathbb{D}$ таких, что каждая M_λ , $\lambda \in X$, конформно эквивалентна $\widehat{\mathbb{C}} \setminus E_\lambda$, где E_λ – замкнутое полярное подмножество в $\widehat{\mathbb{C}}$, и предположим, что множество X непольное. Тогда $X = \mathbb{D}$ и M биголоморфно послойно эквивалентно области в $\mathbb{D} \times \widehat{\mathbb{C}}$.

Эта теорема по описанной выше схеме частично распространяется на общие семейства римановых поверхностей.

Пусть $\pi: M \rightarrow \mathbb{D}$ – голоморфное семейство римановых поверхностей и M – многообразие Штейна. Предположим, что каждая M_λ конформно эквивалентна $\widehat{M}_\lambda \setminus E_\lambda$, где $\widehat{M}_\lambda$ – некоторая риманова поверхность и E_λ – ее компактное дискретное подмножество. Обозначим через X множество точек $\lambda \in \mathbb{D}$ таких, что E_λ полярно в $\widehat{M}_\lambda$, и предположим, что само X не полярное. Тогда $X = \mathbb{D}$ и на дизъюнктном объединении $\widehat{M}$ множеств $M_\lambda \sqcup E_\lambda$ существует комплексная структура, совпадающая с таковой на $M = \bigsqcup M_\lambda$.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Фиксируем $\lambda_0 \in \bar{X} \cap \mathbb{D}$. Множество E_{λ_0} покрывается конечным числом кругов V_j , границы которых не пересекают E . Фиксируем j . По лемме 1.1, существует окрестность $W \supset \partial V_j$ в M , биголоморфно послойно эквивалентная области $U \times A$, где U – окрестность λ_0 и A – кольцо $r < |\zeta| < 1/r$ (см. выше) с обычной комплексной структурой. К этому кольцевому цилиндру послойно подклеивается $U \times (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D})$, и в результате образуется семейство римановых поверхностей из теоремы Майтани–Ямагучи. По этой теореме, $U \subset X$, и, следовательно, $X = \mathbb{D}$. По той же теореме, на дизъюнктном объединении поверхностей $M_\lambda \sqcup E_\lambda$, $\lambda \in U$, вводятся и топология, и комплексная структура. Так как полярные множества устранимы для ограниченных голоморфных функций, то таким образом построенные карты вместе с M задают на $\bigsqcup (M_\lambda \sqcup E_\lambda)$ структуру комплексного многообразия, совпадающую с таковой на M .

4. При доказательстве леммы 6.1 мы столкнулись с задачей продолжения комплексной структуры в изолированную особенность. Общая постановка здесь такова:

Пусть J – гладкая комплексная структура в проколотой окрестности $U \setminus 0$ в $\mathbb{C}^n$. Найти условия, достаточные для продолжения J до непрерывной комплексной структуры в U , т.е. для существования непрерывных в некоторой окрестности $V \ni 0$ функций $f_1, \dots, f_n$, J -голоморфных в $V \setminus 0$ и таких, что $V \ni z \mapsto (f_1, \dots, f_n)(z) \in \mathbb{C}^n$ – вложение.

Простые примеры показывают, что в общем случае это невозможно. По теореме об устранимой особенности, это невозможно, если существует J -голоморфная в V функция, разрывная в 0. Например, если J – структура, порождаемая алгеброй непрерывных в $\mathbb{C}^n \setminus 0$ функций с образующими $z_j(1 + |z|)/|z|$, $j = 1, \dots, n$, то многообразие $(\mathbb{C}^n \setminus 0, J)$ биголоморфно эквивалентно области $\mathbb{C}^n \setminus \overline{\mathbb{B}}_n$ (дополнению к шару) с обычной структурой, никакого непрерывного продолжения в 0 нет.

Естественно возникает вопрос, не является ли такая разрывность единственным препятствием, и уж очень оптимистическая гипотеза:

Если J – гладкая комплексная структура в $U \setminus 0$ такая, что соответствующая ей почти комплексная структура продолжается до непрерывной почти комплексной структуры в U , то J продолжается до комплексной структуры в U .

Конечно, это вопрос уже при $n = 2$.

Кстати, если условие гипотезы выполнено, то после подходящего $\mathbb{R}$ -линейного преобразования $\mathbb{C}^n$ почти комплексная структура в окрестности 0 определяется вектором 1-форм $dz + \mu d\bar{z}$ (типа $(1, 0)_J$), где μ – непрерывная матрица размера $n \times n$, $\mu(0) = 0$, гладкая в проколотой окрестности 0.

Вместо этого условия можно предложить еще ряд интересных гипотетически достаточных условий (например, условие полной плюриполярности точки 0, т.е. существование J -плюрисубгармонической функции u в $U \setminus 0$ такой, что $u > -\infty$, но $\lim_{z \rightarrow 0} u(z) = -\infty$). Одна из таких гипотез доказана: если почти комплексная структура в $\mathbb{C}^2 \setminus 0$, соответствующая J , ортогональна относительно евклидовой метрики и в некотором смысле ограничена, то J продолжается до ортогональной комплексной структуры в $\mathbb{C}^2$ (см. [50]).

Список литературы

- [1] Л. Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям*, Мир, М., 1969, 133 с.; пер. с англ.: L. V. Ahlfors, *Lectures on quasiconformal mappings*, Van Nostrand Mathematical Studies, **10**, D. Van Nostrand Co., Inc., Toronto–New York–London, 1966, v+146 pp.
- [2] L. Ahlfors, L. Bers, “Riemann’s mapping theorem for variable metrics”, *Ann. of Math.* (2), **72** (1960), 385–404.
- [3] L. Ahlfors, G. Weill, “A uniqueness theorem for Beltrami equation”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 975–978.
- [4] K. Astala, T. Iwaniec, G. Martin, *Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane*, Princeton Math. Ser., **48**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2009, xviii+677 pp.
- [5] K. Astala, G. J. Martin, “Holomorphic motions”, *Papers on analysis*, Rep. Univ. Jyväskylä Dep. Math. Stat., **83**, Univ. Jyväskylä, Jyväskylä, 2001, 27–40.
- [6] M. Audin, J. Lafontaine (eds.), *Holomorphic curves in symplectic geometry*, Progr. Math., **117**, Birkhäuser, Basel, 1994, xii+328 pp.

- [7] Л. Берс, “Одновременная униформизация”, *Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения*, ИЛ, М., 1961, 91–96; пер. с англ.: L. Bers, “Simultaneous uniformization”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 94–97.
- [8] Л. Берс, “Голоморфные дифференциалы как функции модулей”, *Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения*, ИЛ, М., 1961, 99–103; пер. с англ.: L. Bers, “Holomorphic differentials as functions of moduli”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **67** (1961), 206–210.
- [9] Л. Берс, “Униформизация, модули и клейновы группы”, *УМН*, **28:4**(172) (1973), 153–198; пер. с англ.: L. Bers, “Uniformization, moduli and Kleinian groups”, *Bull. London Math. Soc.*, **4** (1972), 257–300.
- [10] L. Bers, “Fiber spaces over Teichmüller spaces”, *Acta Math.*, **130:1** (1973), 89–126.
- [11] L. Bers, “Holomorphic families of isomorphisms of Möbius groups”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **26:1** (1986), 73–76.
- [12] L. Bers, H. Royden, “Holomorphic families of injections”, *Acta Math.*, **157:3-4** (1986), 259–286.
- [13] Б. В. Боярский, “Гомеоморфные решения систем Бельтрами”, *Докл. АН СССР*, **102** (1955), 661–664.
- [14] Б. В. Боярский, “Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами”, *Матем. сб.*, **43(85):4** (1957), 451–503.
- [15] Е. М. Чирка, “О распространении голоморфных движений”, *Докл. РАН*, **397:1** (2004), 37–40; англ. пер.: E. M. Chirka, “On the propagation of holomorphic motions”, *Dokl. Math.*, **70:1** (2004), 516–519.
- [16] Е. М. Чирка, “Вариации теоремы Гартогса”, *Комплексный анализ и приложения*, Сборник статей, Тр. МИАН, **253**, Наука, М., 2006, 232–240; англ. пер.: E. M. Chirka, “Variations of Hartogs’ theorem”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **253** (2006), 212–220.
- [17] Е. М. Чирка, “Пространства Тейхмюллера”, *Лекц. курсы НОЦ*, **15**, МИАН, М., 2010, 3–150.
- [18] Е. М. Чирка, “Неравенства Харнака, расстояния Кобаяши и голоморфные движения”, *Тр. МИАН*, **279** (2012), 206–216.
- [19] C. J. Earle, “On holomorphic families of pointed Riemann surfaces”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **79** (1973), 163–166.
- [20] C. J. Earle, R. S. Fowler, “Holomorphic families of open Riemann surfaces”, *Math. Ann.*, **270:2** (1985), 249–273.
- [21] C. J. Earle, R. S. Fowler, “A new characterization of infinite dimensional Teichmüller spaces”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **10** (1985), 149–153.
- [22] C. Ehresmann, “Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable”, *Colloque de topologie (espaces fibrés)* (Bruxelles, 1950), Georges Thone, Paris; Masson et Cie., 1951, 29–55.
- [23] W. Fischer, H. Grauert, “Lokal-triviale Familien kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten”, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II*, **1965** (1965), 89–94.
- [24] F. Forstnerič, “Holomorphic hulls of sets fibered over the circle”, *Indiana Univ. Math. J.*, **37** (1988), 869–889.
- [25] R. C. Gunning, R. Narasimhan, “Immersion of open Riemann surfaces”, *Math. Ann.*, **174** (1967), 103–108.
- [26] F. Gardiner, *Teichmüller theory and quadratic differentials*, Pure Appl. Math. (N. Y.), John Wiley & Sons, Inc., New York, 1987, xviii+236 pp.
- [27] F. Gardiner, Y. Jiang, Z. Wang, “Holomorphic motions and related topics”, *Geometry of Riemann surfaces*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **368**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010, 156–193.

- [28] A. Glutsyuk, “Nonuniformizable skew cylinder. A counterexample to the simultaneous uniformization problem”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **332**:3 (2001), 209–214.
- [29] A. Glutsyuk, “On simultaneous uniformization and local nonuniformizability”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **334** (2002), 489–494.
- [30] P. Griffiths, “Complex-analytic properties of certain Zariski open sets on algebraic varieties”, *Ann. of Math.* (2), **94**:1 (1971), 21–51.
- [31] M. Gromov, “Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds”, *Invent. Math.*, **82** (1985), 307–347.
- [32] A. Grothendieck, “Techniques de construction en géométrie analytique”, *Familles d’espaces complexes et fondements de la géométrie analytique*, Séminaire H. Cartan, **13**, 1960/61, № 7–17, Paris, 1962.
- [33] У. Хейман, П. Кеннеди, *Субгармонические функции*, т. 1, Мир, М., 1980, 304 с.; пер. с англ.: W. K. Hayman, P. B. Kennedy, *Subharmonic functions*, v. 1, London Math. Soc. Monographs, **9**, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London–New York, 1976, xvii+284 pp.
- [34] J. Hubbard, “Sur la non-existence de sections analytiques à la courbe universelle de Teichmüller”, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B*, **274** (1972), A978–A979.
- [35] Ю. С. Ильяшенко, “Слоения на аналитические кривые”, *Матем. сб.*, **88**:4 (1972), 558–577; англ. пер.: Yu. S. Ilyashenko, “Fiberings into analytic curves”, *Math. USSR-Sb.*, **17**:4 (1972), 551–569.
- [36] Yu. S. Ilyashenko, “Covering manifolds for analytic families of leaves of foliations by analytic curves”, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **11**:2 (1998), 361–373.
- [37] Ю. С. Ильяшенко, А. А. Щербаков, “О косых цилиндрах и одновременной униформизации”, *Дифференциальные уравнения с вещественным и комплексным временем*, Сборник статей, Тр. МИАН, **213**, Наука, М., 1997, 112–122; англ. пер.: Yu. S. Ilyashenko, A. A. Shcherbakov, “Differential equations with real and complex time”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **213** (1966), 104–114.
- [38] Ш. Кобаяши, “Гиперболические многообразия и голоморфные отображения”, Математика (сб. пер.), **17**, № 1, ИЛ, М., 1973, 47–96; англ. пер.: S. Kobayashi, *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings*, Pure Appl. Math., **2**, Marcel Dekker, Inc., New York, 1970, ix+148 pp.
- [39] W. Kraus, “Über den Zusammenhang einiger Charakteristiken eines einfach zusammenhängenden Bereichs mit der Kreisabbildungen”, *Mitt. Math. Semin. Univ. Giessen*, **21** (1932), 1–28.
- [40] M. Kuranishi, *Deformations of compact complex manifolds*, Séminaire de Mathématiques Supérieures, **39**, Les Presses de l’Université de Montréal, Montréal, Que., 1971, 99 pp.
- [41] O. Lehto, *Univalent functions and Teichmüller spaces*, Grad. Texts in Math., **109**, Springer-Verlag, New York, 1987, xii+257 pp.
- [42] O. Lehto, K. I. Virtanen, *Quasikonforme Abbildungen*, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1965, xi+269 pp.
- [43] S. Leng, *Introduction to complex hyperbolic spaces*, Springer-Verlag, New York, 1987, viii+271 pp.
- [44] F. Maitani, H. Yamaguchi, “Variation of Bergman metrics on Riemann surfaces”, *Math. Ann.*, **330**:3 (2004), 477–489.
- [45] R. Mañé, P. Sad, D. Sullivan, “On the dynamics of rational maps”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **16**:2 (1983), 193–217.
- [46] G. Meigniez, “Submersions et fibrations localement triviales”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **321**:10 (1995), 1363–1365.
- [47] S. Nag, *The complex analytic theory of Teichmüller spaces*, Canad. Math. Soc. Ser. Monogr. Adv. Texts, J. Wiley & Sons, Inc., New York, 1988, xiv+427 pp.

- [48] Z. Nehari, “The Schwarzian derivative and schlicht functions”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1949), 545–551.
- [49] T. Nishino, “Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes. II. Fonctions entières qui se réduisent à celles d’une variable”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **9** (1969), 221–274.
- [50] S. Salamon, J. Viaclovsky, “Orthogonal complex structures on domains in $\mathbb{R}^4$ ”, *Math. Ann.*, **343**:4 (2009), 853–899; 2007, arXiv:0704.3422.
- [51] Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, т. 1, 2, 3-е изд., Наука, М., 1985, 336, 464 с.; англ. пер.: B. V. Shabat, *Introduction to complex analysis. Part II. Functions of several variables*, Transl. Math. Monogr., **110**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, x+371 pp.
- [52] А. А. Шербаков, “Метод исчерпания косых цилиндров”, *Алгебра и анализ*, **12**:5 (2000), 178–206; англ. пер.: A. A. Shcherbakov, “The exhaustion method for skew cylinders”, *St. Petersburg Math. J.*, **12**:5 (2001), 847–867.
- [53] N. Shcherbina, “Pluripolar graphs are holomorphic”, *Acta Math.*, **194**:2 (2005), 203–216.
- [54] А. И. Шнирельман, “Степень квазилинейчатого отображения и нелинейная задача Гильберта”, *Матем. сб.*, **89(131)**:3(11) (1972), 366–389; англ. пер.: A. I. Šnirel’man, “The degree of a quasi-ruled mapping and the nonlinear Hilbert problem”, *Math. USSR-Sb.*, **18**:3 (1972), 373–396.
- [55] Y.-T. Siu, “Every Stein subvariety admits a Stein neighbourhood”, *Invent. Math.*, **38**:1 (1976/77), 89–100.
- [56] Z. Slodkowski, “Holomorphic motions and polynomial hulls”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **111**:2 (1991), 347–355.
- [57] Z. Slodkowski, “Extensions of holomorphic motions”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **22**:2 (1995), 185–210.
- [58] T. Sugawa, “The Bers projection and λ -lemma”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **32**:4 (1992), 701–713.
- [59] D. Sullivan, W. Thurston, “Extending holomorphic motions”, *Acta Math.*, **157**:1 (1986), 243–257.
- [60] И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции*, 2-е изд., Наука, М., 1988, 510 с.; англ. пер. 1-го изд.: I. N. Vekua, *Generalized analytic functions*, Pergamon Press, London–Paris–Frankfurt; Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, MA, 1962, xxix+668 pp.
- [61] H. Yamaguchi, “Variations de surfaces de Riemann”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, **286**:23 (1978), A1121–A1124.
- [62] H. Yamaguchi, “Variations of pseudoconvex domains over $\mathbb{C}^n$ ”, *Michigan Math. J.*, **36**:3 (1989), 415–457.

Е. М. Чирка (Е. М. Chirka)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: chirka@mi.ras.ru

Поступила в редакцию

08.10.2012