Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. фон Вайцзеккер, О. Г. Смолянов, Формулы с логарифмическими производными мер, связанные с квантованием бесконечномерных гамильтоновых систем, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 2, 149–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm950>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 15:52:54

ФОРМУЛЫ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ МЕР, СВЯЗАННЫЕ С КВАНТОВАНИЕМ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Х. фон Вайцзеккер, О.Г. Смолянов

Формулы, содержащие логарифмические производные (гладких) мер на бесконечномерных пространствах, возникают в самых различных ситуациях. Так, логарифмические производные меры входят в уравнение Шрёдингера в пространстве, состоящем из функций, квадратично интегрируемых по этой мере, что позволяет очень просто описать процедуру (канонического) квантования бесконечномерных гамильтоновых систем с линейным фазовым пространством. Далее, задача восстановления меры по ее логарифмической производной (впервые поставленная независимо от каких-либо приложений в 1971 году [1]) может быть равносильна задаче нахождения “основного состояния” (понимаемого как некоторая мера) для бесконечномерного уравнения Шрёдингера или задаче нахождения инвариантной меры для стохастического дифференциального уравнения, или задаче восстановления гиббсовской меры по ее спецификации. Логарифмические производные мер появляются в формулах Камерона–Мартина–Гирсанова–Маруямы–Реймера и в их обобщениях, относящихся к произвольным гладким мерам; они же позволяют связать эти формулы с формулой Фейнмана–Каца.

1. Логарифмические производные, логарифмические плотности, обобщенные плотности гладких мер. Далее все векторные пространства предполагаются вещественными. Для каждого локально выпуклого пространства (ЛВП) E символ $\mathcal{B}(E)$ обозначает σ -алгебру его борелевских подмножеств, а символ $\mathfrak{M}(E)$ – векторное пространство счетноаддитивных вещественнозначных мер на $\mathcal{B}(E)$. Если h – векторное поле на ЛВП E (т.е. отображение E в E), то через T_h обозначается отображение E в E , определяемое так: $T_h(x) = x + h(x)$. Если еще $\nu \in \mathfrak{M}(E)$, то через ν_h обозначается образ ν при отображении T_h . Мера ν называется *дифференцируемой (по Фоминому) вдоль векторного поля h* , если функция $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathfrak{M}(E)$, $t \mapsto \nu_{th}$, дифференцируема в нуле при наделении пространства $\mathfrak{M}(E)$ топологией сходимости на каждом множестве из $\mathcal{B}(E)$; при этом мера $-f'(0)$, обозначаемая символом $d_h\nu$, называется производной (Фомина) меры ν вдоль векторного поля h (ср. [2]). Оказывается, что $d_h\nu$ абсолютно непрерывна относительно ν (ср. [1] и [2]), так что $d_h\nu = \beta_h^\nu \cdot \nu$; функция β_h^ν называется *логарифмической производной* меры ν вдоль векторного поля h . Если, в частности, $h(x) = k$ для всех $x \in E$, то вместо символа β_h^ν используется символ $\beta^\nu(k, \cdot)$. Отметим, что если $D(\nu) = \{k \in E : \exists \beta^\nu(k, \cdot)\}$, то отображение $k \mapsto \beta^\nu(k, \cdot)$, $D(\nu) \rightarrow L_1(E, \nu)$, линейно [1]. Если H – гильбертово подпространство пространства E , $H \subset D(\nu)$ и для каждого $x \in E$ $h(x) \in H$ (а также выполнены некоторые условия регулярности), то $\beta_h^\nu(x) = \beta^\nu(h(x), x) + \text{tr } h'(x)$, $x \in E$ (см. [2] и имеющиеся там ссылки).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если отображение $\beta^\nu: H \times H \rightarrow \mathbb{R}^1$, $(h, x) \mapsto \beta^\nu(h, x)$, непрерывно дифференцируемо, то существует функция $\sigma_\nu: H \rightarrow \mathbb{R}^1$, для которой при всех $h, x \in H$ справедливо равенство $\sigma'_\nu(x) = \beta^\nu(h, x)$.

Функцию σ_ν , определенную на H , естественно назвать *логарифмической плотностью* меры ν . Функцию $H \ni x \mapsto \exp \sigma_\nu(x)$ можно назвать *обобщенной плотностью* меры ν (ср. [3]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если Λ_ν – непрерывная вещественная функция на $H \times E$ ($H \subset D(\nu)$), сужение которой на $H \times H$ совпадает с функцией $(h, x) \mapsto \sigma_\nu(x + h) - \sigma_\nu(x)$, то $\Lambda_\nu(h, x) = \int_0^1 \beta^\nu(F'_1(\tau, x), F(\tau, x)) d\tau$, где F – отображение $\mathbb{R}^1 \times E \rightarrow E$ (удовлетворяющее некоторым условиям регулярности [4]), такое, что $F(0, x) = x$, $F(1, x) = x + h$.

Второй автор пользовался поддержкой Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-011-1693) и Международного научного фонда (грант № ND 8000).

2. Квантование. Пусть Q и P – два экземпляра гильбертова пространства со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, $E = Q \times P$ и $\mathcal{H}$ – (вещественная) функция на E , определяемая равенством $\mathcal{H}(q, p) = (Ap, p) + V(q)$, где A – самосопряженный положительно определенный ядерный оператор в P . Далее, пусть ν – бесконечно дифференцируемая по гильбертову подпространству H мера из $\mathfrak{M}(Q)$, ψ_ν – обобщенная плотность меры ν . Мере η с обобщенной плотностью ψ_ν^2 (если такая мера существует) естественно назвать квадратом меры ν , так что можно написать $\eta = \nu^2$. Положим $G = L_2(Q, \nu^2)$ и определим линейный оператор $\widehat{\mathcal{H}}_\nu$ в G равенством $(\widehat{\mathcal{H}}_\nu g)\nu = \widehat{\mathcal{H}}(g\nu)$, где $\widehat{\mathcal{H}}$ – дифференциальный оператор в $\mathfrak{M}(E)$ с символом $\mathcal{H}$.

ТЕОРЕМА 1. Если $g \in \text{dom } \widehat{\mathcal{H}}_\nu$, то

$$(\widehat{\mathcal{H}}_\nu g)(x) = \text{tr}(A(g''(x) + \beta^\nu(\cdot, x) \otimes g'(x))) + \frac{d(\widehat{\mathcal{H}}\nu)}{d\nu}(x) \cdot g(x).$$

3. Сопряженные операторы, инвариантные меры и т. д.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $\widehat{\mathcal{H}}\nu = 0$, то $(\widehat{\mathcal{H}}_\nu g)(x) = \text{tr}(Ag''(x) + \beta^\nu(\cdot, x) \otimes g'(x))$.

Далее предполагается, что ν – основное состояние для оператора $\widehat{\mathcal{H}}$, т.е. $\widehat{\mathcal{H}}\nu = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если $\widehat{\mathcal{H}}_\nu^*$ – линейный оператор (не всюду определенный) в пространстве $\mathfrak{M}(Q)$, сопряженный к $\widehat{\mathcal{H}}_\nu$ относительно естественной двойственности между $L_1(Q, \nu) \cap \text{dom } \widehat{\mathcal{H}}_\nu$ и $\mathfrak{M}(Q)$, то $\widehat{\mathcal{H}}_\nu^* \mu = \text{tr } A(\mu'' + (\beta^\nu)'_2(\cdot, \cdot)\mu + \beta^\nu(\cdot, \cdot) \otimes \beta^\mu(\cdot, \cdot)\mu) = \text{tr } AD^*D\mu$, где D^* – оператор, сопряженный (относительно двойственности пространств функций на Q , определяемой мерой ν) к оператору дифференцирования D .

ТЕОРЕМА 2. Следующие соотношения и утверждения равносильны: (1) $\widehat{\mathcal{H}}\nu_0 = 0$; (2) $\widehat{\mathcal{H}}_\nu^* \nu_0 = 0$; (3) ν_0^2 – инвариантная мера для стохастического дифференциального уравнения $dx = \beta^\nu(\cdot, x)dt + dw$; (4) ν_0 – мера с логарифмической производной $\beta^\nu(\cdot, \cdot)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Операторы $\mathcal{H}_\nu$ и $\mathcal{H}_\nu^*$ входят, соответственно, в прямое и обратное уравнения Колмогорова, соответствующие уравнению из теоремы 2.

4. Формула Фейнмана–Каца. Если ν – вероятностная мера на E с плотным (в E) подпространством H дифференцируемости, ψ_ν – ее обобщенная плотность и g – (неотрицательная) функция на E , то вероятностная мера η с обобщенной плотностью $g \cdot \psi_\nu$ (если она существует) обозначается символом $g \cdot \nu$.

ТЕОРЕМА 3. Справедливо равенство $\exp(-t\widehat{\mathcal{H}}_\nu g)(x) = \int \exp\left(\int_0^t V(x + b(\tau))d\tau\right) \times g(x + b(t))\Lambda_\nu(b(t), x)w(db)$, где w – мера Винера на пространстве обращающихся в нуль в нуль непрерывных функций на $[0, t]$, принимающих значения в Q , переходная вероятность которой порождается корреляционным оператором A (ср. [5]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Авербух В. И., Смолянов О. Г., Фомин С. В. // Тр. ММО. 1971. Т. 24. С. 133–174.
- [2] Smolyanov O. G., von Weizsäcker H. // J. Funct. Anal. 1993. V. 188. №2. P. 455–476.
- [3] Кириллов А. И. // УМН. 1994. Т. 49. №3. [4] Smolyanov O. G., von Weizsäcker H. // C. R. A. Sci. Paris. Ser. 1. 1995. V. 321. P. 103–108. [5] Simon B. Functional integration and quantum physics. New York: Academic Press, 1979.