Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Хенкин, В. Мишель, Обратная задача Дирихле–
Неймана для нодальных кривых, *УМН*, 2012, том 67,
выпуск 6, 101–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9501>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 17:22:08

УДК 517.54

Обратная задача Дирихле–Неймана для нодальных кривых

Г. Хенкин, В. Мишель

В работе получены прямые и обратные результаты в задачах Дирихле и Дирихле–Неймана для комплексных кривых с нодальными особенностями. В качестве одного из приложений предлагается метод восстановления конформной структуры на компактной поверхности постоянной скалярной проводимости в $\mathbb{R}^3$ по замерам плотности электрического тока в окрестности одной из точек на поверхности.

Библиография: 23 названия.

Ключевые слова: конформная структура, риманова поверхность, нодальная кривая, функция Грина, обратная задача Дирихле–Неймана.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	101
2. Прямые задачи для нодальных кривых.....	105
2.1. Нодальные кривые.....	105
2.2. Гармонические распределения.....	106
2.3. Функции Грина и задачи Дирихле.....	109
3. Обратные задачи для нодальных кривых.....	111
3.1. DN-данные: условия А и В.....	111
3.2. Доказательства в компактном случае.....	114
3.3. Единственность и восстановление нодальных кривых.....	115
4. Характеризация DN-данных.....	120
Список литературы.....	123

1. Введение

Пусть Z – компактная поверхность или открытая поверхность с краем в $\mathbb{R}^3$, рассматриваемая с комплексной структурой, индуцированной стандартной евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^3$. Этот подход к римановым поверхностям (восходящий к результату Гаусса 1822 года об изотермальных координатах) нисколько не ограничивает общности, поскольку Гарсия [7] (в компактном случае)

Первый автор поддержан ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (грант № 14.А18.21.0866).

и Рюди [19] (для поверхности с краем) показали, что всякая абстрактная риманова поверхность изоморфна такому многообразию. Пусть $\bar{\partial}$ – оператор Коши–Римана на Z , $d^c = i(\bar{\partial} - \partial)$ и $d = \partial + \bar{\partial}$. Если Z обладает постоянной скалярной проводимостью, на ней нет источников тока или “заземляющих” элементов и электрические характеристики постоянны по времени, то, как следует из уравнений Максвелла, потенциал электрического поля на открытом подмножестве Z является гладкой функцией U , удовлетворяющей уравнению $dd^c U = 0$; 1-форма $d^c U = i(\bar{\partial} U - \partial U)$ является математической моделью физической плотности тока, порожденного потенциалом U (см., к примеру, [21]). Конечный точечный заряд индуцирует электрический ток, плотность которого имеет простой полюс. Если теоретически мы допускаем, что у плотности тока $d^c U$ могут быть особенности на дискретном множестве, то естественно ограничиться случаем, когда эти особенности – простые “заряженные” полюсы. Математически естественно, чтобы заряды в каком-то смысле компенсировали друг друга и возникали из простых полюсов, поскольку согласно предложению 2 потенциалы с такими особенностями можно трактовать как гармонические распределения на комплексных нодальных кривых. Ниже мы приводим теорему, дающую электростатическую интерпретацию аккуратно поставленной задачи Дирихле в ситуации, когда допускается присутствие зарядов, сконцентрированных на дискретном множестве.

ТЕОРЕМА (Риман, 1851; Клейн, 1882). Пусть Z – связная ориентированная гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$, компактная или с краем, с конформной структурой, индуцированной стандартной евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\bar{\partial}$ – оператор Коши–Римана для этой структуры, $d^c = i(\bar{\partial} - \partial)$ и $d = \partial + \bar{\partial}$. Пусть u – потенциал электрического поля на bZ (в случае компактной Z этого условия нет), и пусть на Z имеются вещественные электрические заряды $\pm c_j$, сосредоточенные в точках $a_j^\pm$, $1 \leq j \leq \nu$. Тогда существует единственный с точностью до константы потенциал электрического поля U , продолжающийся и на Z (если Z некомпактна), удовлетворяющий условию $dd^c U = 0$ на $Z \setminus \{a_j^\pm; 1 \leq j \leq \nu\}$ и такой, что вычет 1-формы $d^c U = i(\bar{\partial} - \partial)U$ в точке $a_j^\pm$, $\text{Res}_{a_j^\pm}(d^c U) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\text{dist}(\cdot, a_j^\pm) = \varepsilon} d^c U$ (где $\varepsilon > 0$ достаточно мало), равен $\pm c_j$, $1 \leq j \leq \nu$.

Впервые эту задачу рассмотрели Гаусс в 1840 г. и Томсон (лорд Кельвин) и Дирихле в 1847 г. В 1851 г. Риман дал доказательство, с математической точки зрения неполное. Клейн в 1882 г. предложил электростатическую интерпретацию, которая была воспринята физиками как достаточно убедительное обоснование. Верные конструктивные доказательства были получены Фредгольмом в 1900 г. и Гильбертом в 1901 г. История этой задачи хорошо изложена в книге де Сен-Жерве [5].

В 1962 г. Гельфанд [8] сформулировал обратную задачу восстановления комплексной структуры компактной поверхности в $\mathbb{R}^3$ по спектру соответствующего лапласиана и получил первый нетривиальный результат. Для большинства поверхностей задача была решена Бузером [4] в 1997 г. Близкая обратная

задача была впервые поставлена Вентворсом в 2010 г.: как восстановить конформную структуру на компактной римановой поверхности по данным типа Дирихле–Неймана для некоторой подобласти? Теорема 2, в которой мы разбиваем обратные результаты из работы [15; § 2], представляет собой вариант обращения компактного случая теоремы Римана–Клейна и дает конструктивный ответ на вопрос Вентворса.

Прежде чем сформулировать теорему 1, введем некоторые определения и обозначения. Пусть Z – связная компактная ориентированная поверхность в $\mathbb{R}^3$ с конформной структурой, индуцированной стандартной евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^3$. Пусть D_Z – множество пар (a, c) из $Z^6 \times \mathbb{R}^3$, где $a = (a_\ell^-, a_\ell^+)_{0 \leq \ell \leq 2}$ – набор из шести различных точек, а $c = (c_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2} \in \mathbb{R}^3$. Для $(a, c) \in D_Z$ обозначим через $U_{Z,\ell}^{a,c}$ гармоническую функцию на $Z \setminus \{a_\ell^-, a_\ell^+\}$, у которой $\partial U_{Z,\ell}^{a,c}$ имеет простые полюсы в точках $a_\ell^\pm$ с вычетами $\pm c_\ell$. На самом деле, $U_{Z,\ell}^{a,c}$ – стандартная двухполюсная функция Грина; хотя она определена с точностью до постоянного слагаемого, форма $\partial U_{Z,\ell}^{a,c}$ определена однозначно. Теперь, как объясняется в разделе 3, если у форм $\partial U_{Z,\ell}^{a,c}$ нет общих нулей, то можно определить отображение $F_Z^{a,c} = (\partial U_{Z,0}^{a,c} : \partial U_{Z,1}^{a,c} : \partial U_{Z,2}^{a,c})$ из $Z \setminus \{a_\ell^\pm; 0 \leq \ell \leq 2\}$ в $\mathbb{CP}_2$, у которого есть аффинное представление $\left(\frac{\partial U_{Z,1}^{a,c}}{\partial U_{Z,0}^{a,c}}, \frac{\partial U_{Z,2}^{a,c}}{\partial U_{Z,0}^{a,c}} \right)$ на множестве $\{\partial U_{Z,0}^{a,c} \neq 0\}$; частные тут корректно определены, поскольку $\dim Z = 1$. Обозначим через E_Z множество пар (a, c) из D_Z , для которых отображение $F_Z^{a,c}$ корректно определено и инъективно вне конечного подмножества Z . Ясно, что E_Z – открытое подмножество D_Z . Теперь можно сформулировать результат, обратный к компактному случаю теоремы Римана–Клейна.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Z и Z' – гладкие связные компактные ориентированные поверхности в $\mathbb{R}^3$ с конформными структурами, индуцированными стандартной евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^3$. Предположим, что пересечение $Z \cap Z'$ содержит некоторую поверхность S , и пусть $a = (a_\ell^-, a_\ell^+)_{0 \leq \ell \leq 2}$ – набор из 6 различных точек на S . Предположим, что для некоторого $c \in \mathbb{R}^3$ выполнено $(a, c) \in E_Z \cap E_{Z'}$ и $(U_{Z,\ell}^{a,c}|_S)_{0 \leq \ell \leq 2} = (U_{Z',\ell}^{a,c}|_S)_{0 \leq \ell \leq 2}$. Тогда Z и Z' изоморфны. Более того, Z явно восстанавливается по формам $(\partial U_{Z,\ell}^{a,c}|_S)_{0 \leq \ell \leq 2}$.

Этот результат представлял бы намного больший практический интерес, если бы множество E_Z было плотно в $Z^6 \times \mathbb{R}^3$. Хотя это и очень похоже на правду, доказательства пока не существует. Поэтому мы слегка изменим наш подход и разрешим небольшие возмущения. Точнее, для $n \in \mathbb{N}^*$ обозначим через $D_{Z,n}$ множество четверок (a, c, p, κ) из $Z^6 \times \mathbb{C}^3 \times (Z^n)^3 \times (\mathbb{C}^n)^3$, удовлетворяющих следующим условиям: $(a, c) \in D_Z$, $p = (p_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2}$ и $\kappa = (\kappa_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2}$, где каждое $p_\ell = (p_{\ell,j})_{1 \leq j \leq n}$ представляет собой набор различных точек из $Z \setminus \{a_0^-, a_0^+, a_1^-, a_1^+, a_2^-, a_2^+\}$, а каждая точка $\kappa_\ell = (\kappa_{\ell,j})_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{C}^n$ удовлетворяет условию $\sum_{1 \leq j \leq n} \kappa_{\ell,j} = 0$. Для $(a, c, p, \kappa) \in E_{Z,n}$ обозначим через $V_{Z,\ell}^{p,\kappa}$ такую гармоническую функцию на $Z \setminus \{p_{\ell,j}; 1 \leq j \leq n\}$, что $\partial V_{Z,\ell}^{p,\kappa}$ имеет простые полюсы в точках $p_{\ell,j}$ с вычетами $\kappa_{\ell,j}$; $V_Z^{p,\kappa}$ определена однозначно с точностью до постоянного слагаемого.

Будем обозначать через $E_{Z,n}$ множество таких четверок $(a, c, p, \kappa) \in D_{Z,n}$, что отображение $F_{Z,n}^{a,c,p,\kappa} = (\partial U_{Z,0}^{a,c} + \partial V_{Z,0}^{p,\kappa} : \partial U_{Z,1}^{a,c} + \partial V_{Z,1}^{p,\kappa} : \partial U_{Z,2}^{a,c})$ корректно определено и инъективно вне некоторого конечного подмножества Z . Ясно, что $E_{Z,n}$ – открытое подмножество $D_{Z,n}$. В соответствии с предложением 1, скажем, что $E_{Z,n}$ состоит из элементов *общего положения*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть Z – гладкая компактная ориентированная поверхность в $\mathbb{R}^3$ с конформной структурой, индуцированной стандартной евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^3$, а S – подобласть Z . Рассмотрим пару (a, c) из D_Z , в которой $a \in S^6$. Тогда существует такое $n \in \mathbb{N}^*$, что для всякой окрестности W точки 0 из $\mathbb{C}$ найдется пара $(p, \kappa) \in (S^n)^3 \times (W^n)^3$, для которой $(a, c, p, \kappa) \in E_{Z,n}$.

Этот результат, как и предложение 4, будут доказаны в отдельной работе, поскольку используемые в их доказательстве методы и результаты комплексного анализа заслуживают внимания сами по себе. Сформулируем теперь вариант теоремы 1 для данных в общем положении.

ТЕОРЕМА 2. Пусть Z и Z' – гладкие компактные ориентированные поверхности в $\mathbb{R}^3$ с конформными структурами, индуцированными стандартной евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^3$. Предположим, что пересечение $Z \cap Z'$ содержит некоторую поверхность S , и пусть $a = (a_\ell^-, a_\ell^+)_{0 \leq \ell \leq 2}$ – набор из 6 различных точек S . Положим $U_{Z,l}^{a,c,p,\kappa} = U_{Z,l}^{a,c} + V_{Z,l}^{p,\kappa}$. Допустим, что для некоторой тройки $(c, p, \kappa) \in \mathbb{C}^3 \times (S^n)^3 \times (\mathbb{C}^n)^3$ выполнено $(a, c, p, \kappa) \in E_{Z,n} \cap E_{Z',n}$ и $(U_{Z,\ell}^{a,c,p,\kappa}|_S)_{0 \leq \ell \leq 2} = (U_{Z',\ell}^{a,c,p,\kappa}|_S)_{0 \leq \ell \leq 2}$. Тогда Z и Z' изоморфны. Кроме того, Z явно восстанавливается по формам $(\partial U_{Z,\ell}^{a,c,p,\kappa}|_S)_{0 \leq \ell \leq 2}$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Как следствие, род Z определяется участвующими в теореме данными S и $(U_{Z,\ell}^{a,c,p,\kappa}|_S)_{0 \leq \ell \leq 2}$. Однако соответствующая формула пока неизвестна.

2. Результаты теоремы 2 остаются верными и для компактных нодальных кривых, если рассматривать потенциалы, ассоциированные с допустимыми наборами общего положения для Z и Z' (см. определения в разделах 2 и 3).

3. Интересно сопоставить теорему 2 с результатами Гончара [9] по характеристике в терминах аппроксимаций Паде мероморфных продолжений в заданную область комплексной плоскости ростков голоморфных функций.

Следующая теорема обращает результат Римана–Клейна для поверхностей с краем. Для случая без электрических зарядов ее можно найти в [15; теоремы 1 и 2]. В третьем разделе мы дадим точное определение данных Дирихле–Неймана и объясним их связь с оператором Неймана. Вкратце, данные состоят из гладкой вещественной ориентированной кривой γ , являющейся краем открытой комплексной кривой Z , тройки $u = (u_0, u_1, u_2)$ гладких вещественных функций на γ и тройки $\theta u = (\theta u_0, \theta u_1, \theta u_2)$ гладких $(1, 0)$ -форм, где каждая форма θu_ℓ является граничным значением формы $\partial \tilde{u}_\ell^c$, а $\tilde{u}_\ell^c$ – такое гармоническое продолжение u_ℓ на $Z \setminus \{(a_j^-, a_j^+); 1 \leq j \leq \nu\}$, что $\partial \tilde{u}_\ell^c$ имеет вычет $\pm c_j$ в точке $a_j^\pm$, $1 \leq j \leq \nu$. Важным условием для того, чтобы набор

$(\gamma, u, \theta u)$ были данными Дирихле–Неймана, является требование, чтобы отображение $(\partial \tilde{u}_0^c : \partial \tilde{u}_1^c : \partial \tilde{u}_2^c)$ было корректно определено и инъективно вне конечного подмножества Z и вкладывало γ в $\mathbb{CP}_2$. Однако, как мы увидим ниже, это условие общего положения (см. предложение 4). Для простоты и поскольку информацию о зарядах нужно будет восстановить, договоримся считать, что заряды не зависят от ℓ .

ТЕОРЕМА 3. Пусть Z и Z' – гладкие ориентированные поверхности с краем в $\mathbb{R}^3$, с конформными структурами, индуцированными стандартной евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^3$. Зафиксируем на Z (и на Z') ν пар (соответственно ν' пар) различных точек $a_j^\pm$ (соответственно $a'_j^\pm$). Каждой паре $a_j^\pm$ (соответственно $a'_j^\pm$) припишем ненулевые комплексные “электрические” заряды $\pm c_j$ (соответственно $\pm c'_j$), удовлетворяющие условиям общего положения $|c_j^\pm| \neq |c_k^\pm|$ (соответственно $|c'_j^\pm| \neq |c'_k^\pm|$), $1 \leq j < k \leq \nu$.

Будем считать, что $(\gamma, u, \theta u)$ – данные Дирихле–Неймана для поверхности Z , на которой каждая пара точек $a_j^\pm$ несет заряды $c_j^\pm$, и в то же время данные Дирихле–Неймана для поверхности Z' , на которой каждая пара точек $a'_j^\pm$ несет заряды $c'_j^\pm$.

Тогда $\nu = \nu'$, $(c_j)_{1 \leq j \leq \nu} = (c'_j)_{1 \leq j \leq \nu}$ и существует изоморфизм римановых поверхностей $\varphi: Z \rightarrow Z'$ со следующими свойствами: $\varphi|_\gamma = \text{Id}_\gamma$ и $\varphi(a_j^\pm) = a'_j^\pm$, $1 \leq j \leq \nu$. Более того, Z , $\{a_j^\pm; 1 \leq j \leq \nu\}$ и $(c_j)_{1 \leq j \leq \nu}$ явно восстанавливаются по $(\gamma, u, \theta u)$.

Доказательство теоремы 2 приводится в п. 3.2. Поскольку пары $\{a_j^-, a_j^+\}$ можно рассматривать как особенности нодальной кривой, теорема 3 следует из теорем 4 и 5, относящихся к (обобщенным) нодальным кривым. Мы докажем ее в конце раздела 3, где сформулированы наши основные результаты по обратным задачам. Раздел 2 посвящен определению нодальных поверхностей и гармонических распределений, а также задачам Дирихле. Характеризация данных Дирихле–Неймана нодальной кривой приводится в разделе 4.

2. Прямые задачи для нодальных кривых

2.1. Нодальные кривые. В нашей статье *открытой римановой поверхностью с краем* называется внутренность одномерного компактного комплексного многообразия с краем, всякая связная компонента которого имеет нетривиальный гладкий край вещественной размерности 1. *Открытой нодальной кривой с краем* X назовем фактор открытой римановой поверхности с краем Z по отношению эквивалентности, отождествляющему конечное число внутренних точек; скажем, что поверхность Z лежит *над* X . Аналогичным образом определим *компактную нодальную кривую*, но в этом случае будем предполагать, что компактная риманова поверхность связна.

Точки особого множества $\text{Sing } X$ нодальной кривой X назовем нодальными. Таким образом, неприводимые компоненты X в нодальной точке являются ростками римановых поверхностей. Если a – точка X , то *ветвями* X

в a назовем семейство $(X_{a,j})_{1 \leq j \leq \nu(a)}$ связанных римановых поверхностей с единственной общей точкой a , объединение которых образует относительно компактную окрестность a в X . Таким образом, нодальные точки X – это точки a с $\nu(a) \geq 2$. Если во всех нодальных точках $\nu = 2$, то X оказывается нодальной кривой в смысле определения, распространенного в литературе. Однако для наших результатов это условие не важно, и, рассматривая нодальные кривые, мы, как правило, будем опускать уточнение *обобщенные*. Если X компактна, группа ее автоморфизмов тривиальна и $\nu \equiv 2$, то X называют *стабильной* (к примеру, см. [11]).

В дальнейшем для $X_{a,j} \setminus \{a\}$ мы используем обозначение $X_{a,j}^*$. Край X обозначим через bX ; по определению $\overline{X} = X \cup bX$ вне множества $\text{Sing } X$ представляет собой многообразие с краем; его регулярной частью $\text{Reg } \overline{X}$ называется объединение $bX \cup \text{Reg } X$, где $\text{Reg } X = X \setminus \text{Sing } X$. Заметим, что если X – открытая нодальная кривая с краем, а $\widehat{X} \xrightarrow{\pi} \overline{X}$ (или, для краткости, $\widehat{X} \xrightarrow{\pi} X$, хотя это и не вполне точно) – какая-то ее нормализация, то $\widehat{X}$ будет открытой римановой поверхностью с краем, а множество $\pi^{-1}(\text{Sing } X)$ конечно.

Будем говорить, что две открытые нодальные кривые с краем X и X' *изоморфны*, если имеется такое биективное отображение $\varphi: \overline{X} \rightarrow \overline{X}'$, являющееся изоморфизмом римановых поверхностей $\text{Reg } X$ и $\text{Reg } X'$ и диффеоморфизмом многообразий с краем в некоторых открытых окрестностях вещественных кривых bX и bX' в $\overline{X}$ и $\overline{X}'$, что для всякой нодальной точки a кривой X ветви (ростки ветвей) X' в $\varphi(a)$ являются образами относительно φ ветвей (ростков ветвей) X в a . В частности, φ должно быть гомеоморфизмом.

В нашей статье естественным образом возникает более слабое понятие эквивалентности нодальных кривых. Если отображение φ , введенное выше, обладает первыми двумя свойствами и просто биективно переводит семейство (ростков) ветвей X в семейство (ростков) ветвей X' , то мы скажем, что X и X' *грубо изоморфны*. Рассматривая X (и X') как фактор открытой римановой поверхности с краем Z (соответственно Z') с естественной проекцией $Z \xrightarrow{\pi} X$ (соответственно $Z' \xrightarrow{\pi} X'$), это можно выразить и по-другому, потребовав, чтобы имел место изоморфизм открытых римановых поверхностей с краем $\overline{Z}$ и $\overline{Z}'$, переводящий $\pi^{-1}(\text{Sing } X)$ на $\pi'^{-1}(\text{Sing } X')$.

Для аккуратной постановки задачи Дирихле мы определим в следующем пункте гармоническое распределение на нодальной кривой.

2.2. Гармонические распределения. Если нодальная кривая X является аналитическим подмножеством открытого множества в аффинном пространстве, то гладкими функциями можно считать ограничения на X гладких функций из объемлющего пространства. В простом частном случае, когда X – объединение двух прямых, функция будет гладкой на X , если и только если она гладкая на каждой ветви X и непрерывна в особой точке X . Учитывая, что всякую открытую нодальную кривую можно вложить в комплексное аффинное пространство (см. [23]), мы дадим общее определение, ориентируясь на эту модель. Если перевести алгебраические определения из [18], [10] и [20] на аналитический язык, то мы придем к тому же результату.

Пусть X – (обобщенная) нодальная кривая, W – открытое подмножество X , и $r \in [0, +\infty]$. Скажем, что функция u на W принадлежит классу C^r , если она непрерывна и $u|_B \in C^r(B)$ для всякой ветви B кривой X , лежащей в W . Мы обозначим пространство таких функций через $C^r(W)$ или $C_{0,0}^r(W)$.

Для $p, q \in \{0, 1\}$, $p + q > 0$, скажем, что (p, q) -форма ω из класса $C_{p,q}^r(W \cap \text{Reg } X)$ принадлежит классу C^r на W , если для всякой ветви B кривой X , лежащей в W , форма $\omega|_{B \cap \text{Reg } X}$ продолжается до элемента из $C_{p,q}^r(B)$. Пространство таких форм будет обозначаться символом $C_{p,q}^r(W)$. Заметим, что разговор о непрерывности формы в нодальных точках осмыслен только тогда, когда эта форма на самом деле является функцией, так как в нодальной точке касательные пространства к ветвям X могут быть разными.

Если K – компактное подмножество кривой X , а $p, q \in \{0, 1\}$, то в пространстве $C_{p,q}^\infty(K)$ гладких (p, q) -форм с носителем в K вводится топология, порожденная полунормами $\sup_{B \cap K} \|D^{(m)}\omega|_B\|$, где m – произвольное натуральное число, B – некоторая ветвь X , пересекающая K , а D – полный дифференциал, примененный к коэффициентам формы. В пространстве $D_{p,q}(W)$ гладких (p, q) -форм с компактным носителем в W вводится топология индуктивного предела пространств $C_{p,q}^\infty(K)$, где K – компактные подмножества W . Пространство $D'_{p,q}(W)$ потоков бистепени (p, q) на W топологически сопряжено к $D_{p,q}(W)$; элементы $D'_{1,1}(W)$ являются распределениями на W .

Внешний дифференциал d гладких форм, а также дифференциалы ∂ и $\bar{\partial}$ корректно определены на ветвях X . По двойственности эти операторы определяются и на потоках.

Распределение $u \in D'_{1,1}(W)$ (слабо) гармонично, если $i\partial\bar{\partial}u$ – нулевой поток, т. е. $\langle i\partial\bar{\partial}u, \varphi \rangle = 0$ для всех $\varphi \in C_c^\infty(W)$; это эквивалентно условию, что ∂u (слабо) голоморфно в смысле Розенлихта [18]. В окрестности регулярной точки такое распределение является обычной гармонической функцией. В то время как у гармонической функции на $\text{Reg } X$ могут быть сложные особенности в нодальной точке, следующее предложение показывает, что гармонические распределения имеют в худшем случае логарифмические особенности, которые в определенном смысле компенсируют друг друга.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (характеризация гармонических распределений). Пусть X – нодальная кривая, а u – гармоническое распределение в окрестности точки a из X . Обозначим через $(X_{a,j})_{1 \leq j \leq \nu(a)}$ ветви X в a и предположим, что они выбраны достаточно малыми, так что на всякой ветви $X_{a,j}$ имеется голоморфная координата z_j с нулем в a . Тогда существует такой набор $(c_{a,j})_{1 \leq j \leq \nu(a)}$ комплексных чисел, что $u|_{X_{a,j}^*} - 2c_{a,j} \ln |z_j|$ продолжается до обычной гармонической функции в окрестности a на $X_{a,j}$ и $\sum_{1 \leq j \leq \nu(a)} c_{a,j} = 0$.

В частности, ∂u – мероморфная $(1, 0)$ -форма, с особенностями типа простых полюсов в нодальных точках X с вычетами $c_{a,j}$ на $X_{a,j}$ для $a \in \text{Sing } X$. Наоборот, если ∂u и $(c_{a,j})$ удовлетворяют указанным условиям, то u будет гармоническим распределением.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие, что особенности ∂u могут быть только простыми полюсами и сумма вычетов в каждой нодальной точке равна нулю, является критерием (слабой) голоморфности ∂u . Это находится в соответствии с определением дуализирующих пучков, данным Гротендиком [10] и Хартсхорном [12] и отражающим алгебраический подход к (слабо) голоморфным формам.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всякого k допустим, что ветвь $X_{a,k}$ достаточно мала, так что z_k отображает $X_{a,k}$ биективно на $\mathbb{D} = D(0, 1)$, и зафиксируем некоторую функцию $\xi_k \in C_c^\infty(X_{a,k})$ с $\xi_k = 1$ в окрестности a на $X_{a,k}$. Рассмотрим j из множества $\{1, \dots, \nu(a)\}$. Оператор продолжения, ставящий в соответствие $\chi \in D_{1,1}(X_{a,j})$ форму $E_j \chi$, заданную условием $(E_j \chi)|_{X_{a,k}} = 0$ при $k \neq j$ и $(E_j \chi)|_{X_{a,j}} = \chi$, является непрерывным оператором из $D_{1,1}(X_{a,j})$ в $D_{1,1}(W)$, где $W = \bigcup_{1 \leq j \leq \nu(a)} X_{a,j}$. Значит, $u_j = u \circ E_j$ – распределение на $X_{a,j}$.

Так как $u|_{X_{a,j}^*}$ – обычная гармоническая функция, то $v_j = u_j \circ z_j^{-1}$ является обычной гармонической функцией на $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$, продолжающейся на $\mathbb{D}$ как распределение. Это возможно, только когда у голоморфной функции $\frac{\partial v_j}{\partial z}$ нет существенной особенности в 0. В самом деле, рассмотрим $\varepsilon \in]0, 1[$, $\xi \in C_c^\infty\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right], \mathbb{R}_+^*\right)$, $p \in \mathbb{Z} \cap]-\infty, -2]$, $\chi_\varepsilon = \chi\left(\frac{|\cdot|}{\varepsilon}\right)\left(\frac{z}{|\cdot|}\right)^{-p} \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}$

и $\chi_{\varepsilon,j} = (z_j)^* \chi_\varepsilon$. Тогда $E_j \chi_{\varepsilon,j} = 0$ на $\bigcup_{k \neq j} X_{a,k}$ и $\left\{|z_j| \leq \frac{\varepsilon}{4}\right\}$. Значит, если ряд

Лорана функции $\frac{\partial v_j}{\partial z}$ имеет вид $\left(\sum c_{j,n} z^n\right)$, то

$$\begin{aligned} \langle v_j, \chi_\varepsilon \rangle &= \langle u_j, \chi_{\varepsilon,j} \rangle = \langle u, E_j \chi_{\varepsilon,j} \rangle = \int_{\{\varepsilon/4 \leq |z_j| \leq 3\varepsilon/4\}} u \chi_\varepsilon \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\varepsilon/4}^{3\varepsilon/4} \int_0^{2\pi} c_{j,n} \chi\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) e^{i\pi(n-p)\chi_r} r^{n+1} dr d\chi \\ &= 2\pi c_{j,p} \int_{\varepsilon/4}^{3\varepsilon/4} \chi\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) r^{p+1} dr = I_p c_{j,p} \varepsilon^{p+2}, \end{aligned}$$

где $I_p = 2\pi \int_{1/4}^{3/4} \chi(s) s^{p+1} ds$. С другой стороны, так как v_j – распределение на $\mathbb{D}$, то существует такая пара $(C_j, n_j) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$, что

$$|\langle u_j, \theta \rangle| \leq C_j \sup_{0 \leq m \leq n_j} \|D^m \theta\|_\infty$$

для всякой функции $\theta \in C_c^\infty\left(\frac{3}{4}\mathbb{D}\right)$. Поскольку $\|\chi_\varepsilon\|_{n_j} \leq \frac{Cte}{\varepsilon^{n_j}}$, то $c_{j,p} = 0$ при $p < -d_j = -n_j - 2$ в силу последнего равенства. Итак, если δ_0 – мера Дирака, то $\frac{\partial^2 v_j}{\partial z \partial \bar{z}} = \sum_{1 \leq n \leq d_j} \tilde{c}_{j,-n} \frac{\partial^{n-1} \delta_0}{\partial z^{n-1}}$, где $\tilde{c}_{j,-n} = \pi \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} c_{j,-n}$, так как $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z} = \pi \delta_0$.

Пусть теперь χ – произвольная гладкая функция с компактным носителем в $\bigcap_k \{\xi_k = 1\}$. В силу определения, $(1, 1)$ -форму $i\partial\bar{\partial}\chi$ можно выразить как

сумму гладких форм $E_j(i\partial\bar{\partial}\chi_j)$, где $\chi_j = \chi|_{X_{a,j}}$. Итак, полагая $\theta_j = \chi_j \circ z_j^{-1}$, получим

$$\begin{aligned} 0 &= \langle i\partial\bar{\partial}u, \chi \rangle = \langle u, i\partial\bar{\partial}\chi \rangle = \sum_{1 \leq j \leq \nu(a)} \langle u, E_j(i\partial\bar{\partial}\chi_j) \rangle \\ &= \sum_{1 \leq j \leq \nu(a)} \langle u_j, i\partial\bar{\partial}\chi_j \rangle = \sum_{1 \leq j \leq \nu(a)} \langle i\partial\bar{\partial}v_j, \theta_j \rangle \\ &= \chi(0) \sum_{1 \leq j \leq \nu(a)} \tilde{c}_{j,-1} + \sum_{1 \leq j \leq \nu(a)} \sum_{2 \leq n \leq d_j} \tilde{c}_{j,-n} \frac{\partial^{n-1}\theta_j}{\partial z^{n-1}}(0). \end{aligned}$$

Последовательность комплексных чисел $\left(\frac{\partial^m \theta_j}{\partial z^m}(0)\right)_{m \geq 1}$ может быть произвольной, так что из этого равенства следует, что $c_{j,-n} = 0$ при $n \leq 2$ и $\sum_{1 \leq j \leq \nu(a)} c_{j,-1} =$

0. Обратное утверждение предложения очевидно, что завершает доказательство.

2.3. Функции Грина и задачи Дирихле. Поскольку в доказательствах мы используем основные функции Грина на гладких кривых и поскольку в обратных задачах требуются эффективные методы, в этой работе нам кажется уместным вспомнить, как эти функции строятся конструктивными методами. В 1928 г. Грин выдвинул гипотезу о существовании таких функций в областях в $\mathbb{R}^3$. Напомним, что функция Грина на открытой римановой поверхности с краем Z – это такая симметричная функция g , определенная на $\bar{Z} \times \bar{Z}$ вне диагонали, что для каждого $z \in Z$ функция $g_z = g(\cdot, z)$ гармонична на $Z \setminus \{z\}$, гладкая на $\bar{Z} \setminus \{z\}$ и имеет особенность $(2\pi)^{-1} \ln \text{dist}(\cdot, z)$ в точке z , где расстояние определяется относительно произвольной эрмитовой метрики на Z . Назовем ее основной функцией Грина, если $g_z|_{bZ} = 0$ для всякой точки $z \in Z$. Существование функций Грина на гладких римановых поверхностях с краем следует из классических результатов Фредгольма и Гильберта. В [16] даже была предъявлена явная конструкция для римановых поверхностей с особенностями, основанная на формулах типа Коши. Ниже мы приводим теорему, напоминающую, как построить основную функцию Грина по обычной.

ТЕОРЕМА. Пусть Z – открытая риманова поверхность с краем, а g – некоторая функция Грина в Z . Будем считать, что $\bar{Z}$ лежит в комплексной кривой $\tilde{Z}$, к примеру в своем дубле. Рассмотрим оператор $T: C^\infty(\gamma) \rightarrow C^\infty(\tilde{Z} \setminus \gamma)$, заданный формулой $Tv: z \mapsto 2i \int_\gamma v \bar{\partial} g_z$. Если $v \in C^\infty(\gamma)$, то через T^+v обозначим ограничение Tv на $Z^+ = Z$ и через T^-v – ограничение Tv на $Z^- = \tilde{Z} \setminus Z$. Тогда имеют место следующие результаты.

1. Для всякой $v \in C^\infty(\gamma)$ функция $T^\pm v$ гармонична на $Z^\pm$ и непрерывно продолжается на γ .

2. (Схоуцки-1873 для $Z \subset \mathbb{C}$) Для всякой $v \in C^\infty(\gamma)$ имеет место равенство $v = (T^+v)|_\gamma - (T^-v)|_\gamma$.

3. (Фредгольм-1900 для $Z \subset \mathbb{C}$) Для всякой $u \in C^\infty(\gamma)$ однозначно определенное гармоническое продолжение $E u$ функции u на Z является решением в интегрального уравнения $u = v + (T^-v)|_\gamma$.

4. Основная функция Грина на Z – это функция G , заданная равенством $G(z, \zeta) = g(z, \zeta) - (Eg_z|_\gamma)(\zeta)$ для $(z, \zeta) \in Z^2$ таких, что $z \neq \zeta$.

В дальнейшем допустимым набором для открытой нодальной кривой с краем X назовем набор $(c_{a,j})_{a \in \text{Sing } X, 1 \leq j \leq \nu(a)}$ комплексных чисел, удовлетворяющих условиям $\sum_{1 \leq j \leq \nu(a)} c_{a,j} = 0$ для всякой нодальной точки a на X . Следующее утверждение обобщает исходную формулировку Римана–Клейна во введении. Оно является следствием вышеприведенного классического результата и предложения 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 (решение задачи Дирихле с нодальными особенностями). Пусть X – компактная нодальная кривая или открытая кривая с краем, а $c = (c_{a,j})_{a \in \text{Sing } X, 1 \leq j \leq \nu(a)}$ – допустимый набор. Для всякой достаточно малой ветви $X_{a,j}$ в нодальной точке a на X зафиксируем голоморфную координату z_j на $X_{a,j}$ с нулем в a . Если X некомпактна, зафиксируем также $u \in C^0(bX)$. Тогда существует единственное (или определенное с точностью до постоянного слагаемого, если X компактна) гармоническое распределение $\tilde{u}^c$ на X , для которого $\tilde{u}^c|_{bX} = u$ (если X некомпактна) и $\tilde{u}^c|_{X_{a,j}^*} - 2c_{a,j} \ln |z_j|$ продолжается как обычная гармоническая функция в окрестность a на $X_{a,j}$. Иными словами, $\tilde{u}^c$ совпадает с таким гармоническим распределением U , продолжающим u на X , что ∂U оказывается мероморфной $(1, 0)$ -формой с особенностями типа простых полюсов в нодальных точках X , с вычетами $c_{a,j}$ на $X_{a,j}$ для $a \in \text{Sing } X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X некомпактна, и пусть $\hat{g}$ – функция Грина нормализации $\hat{X} \xrightarrow{\pi} X$ кривой X такая, что $\hat{g}_\zeta \stackrel{\text{def}}{=} \hat{g}(\zeta, \cdot) = 0$ на $b\hat{X}$ для всякой точки $\zeta \in \hat{X}$. Поскольку $\overline{X}$ – гладкое многообразие с краем в окрестности bX , то $b\hat{X} \xrightarrow{\pi} bX$ является диффеоморфизмом и $v = \pi^*u$ – корректно определенная непрерывная функция на $b\hat{X}$. Пусть V – распределение на $\hat{X}$, заданное формулой

$$V = \tilde{v} + \sum_{a \in \text{Sing } X} \sum_{1 \leq j \leq \nu(a)} c_{a,j} \hat{g}_{a,j},$$

где $\tilde{v}$ – гармоническое продолжение v на $\hat{X}$ и для всякого $a \in \text{Sing } X$ имеют место равенства $\{a_1, \dots, a_{\nu(a)}\} = \pi^{-1}(a)$ и $X_{a,j} = \pi(W_j)$, где W_j – окрестность a_j на $\hat{X}$. Тогда $\tilde{u}^c = \pi_*V$ – распределение на X , представляющее собой на $\text{Reg } \overline{X}$ обычную гармоническую функцию, продолжающую u . Вычисления, аналогичные проделанным в предложении 2, показывают, что $\tilde{u}^c$ – гармоническое распределение на X . Поскольку у $\overline{X}$ гладкий край, то в окрестности bX на $\overline{X}$ распределение $\tilde{u}^c$ имеет ту же гладкость, что и u .

Для доказательства единственности надо показать, что если U – гармоническое распределение на X , обращающееся в нуль на bX и продолжающееся на всякую ветвь X как обычная гармоническая функция, то $U = 0$. Рассмотрим такое распределение U . Тогда $V = \pi^*U$ – корректно определенная функция;

если $a_j \in \pi^{-1}(a)$ – замыкание $\pi^{-1}(X_{a,j}^*)$, то $V(a_j)$ является значением гармонического продолжения $U|_{X_{a,j}^*}$ в точке a . Разумеется, V гармонична на $\hat{X}$ и непрерывна вплоть до границы, на которой V обращается в нуль. Значит, $V = 0$ и потому $U = 0$.

Для компактной кривой X классическую схему построения функции Грина с двумя полюсами можно модифицировать для построения на нормализации X функции Грина с несколькими полюсами, которую можно рассматривать как гармоническое распределение на X благодаря свойствам допустимых наборов.

В частности, предложение 3 показывает, что у всякой непрерывной функции на крае X имеется много продолжений (слабо) гармоническими распределениями на X , если не конкретизировать данные в нодальных точках. Такая неединственность имеет место и для основных функций Грина на нодальных поверхностях.

3. Обратные задачи для нодальных кривых

Обратная задача Дирихле–Неймана (обратная DN-задача) на заданной (гладкой) римановой поверхности X с гладким краем γ состоит в восстановлении X по данным γ , $T_\gamma X$ и оператору Дирихле–Неймана, т.е. оператору, ставящему в соответствие гладкой функции на γ значение на γ нормальной производной гармонического продолжения этой функции на X . Впервые этот вопрос был рассмотрен в нестационарной постановке Белишевым и Курылевым [3]. В стационарном случае результаты о единственности были получены в [17] и [2] при условии, что DN-оператор известен полностью. Здесь мы распространим конструктивную схему восстановления из [15] на нодальные римановы поверхности, как компактные, так и некомпактные.

3.1. DN-данные: условия А и В. Пусть X – открытая нодальная кривая с краем. Поскольку у $\bar{X}$ гладкий край, вдоль bX мы можем выбрать два гладких векторных поля, τ и ν , где τ – гладкое базисное сечение касательного расслоения $T(bX)$ над bX и для всякой точки x из bX векторы (ν_x, τ_x) образуют положительно ориентированный ортонормированный базис в $T_x \bar{X}$. Тогда оператор Дирихле–Неймана (DN-оператор) на X с допустимым набором $c = (c_{a,j})_{a \in \text{Sing } X, 1 \leq j \leq \nu(a)}$ – это оператор $N_{X,c}$, определенный формулой

$$N_{X,c}u = \frac{\partial \tilde{u}^c}{\partial \nu} \Big|_{bX}$$

для всякой функции $u \in C^1(bX)$, где $\tilde{u}^c$ – гармоническое распределение, продолжающее u на X , с производной $\partial \tilde{u}^c$, имеющей вычет $c_{a,j}$ в точке a для всех $a \in \text{Sing } X$ и $1 \leq j \leq \nu(a)$.

Поскольку допустимые наборы не чувствуют комплексной структуры на X , а просто отражают существование нодальных точек, естественной постановкой обратной задачи Дирихле–Неймана будет поиск процедуры, восстанавливающей X по данным, состоящим из bX и действия некоторого оператора $N_{X,c}$ на некоторую функцию $u \in C^1(bX)$, где c – элемент априори неизвестного множества допустимых наборов.

Вопрос, можно ли по граничным данным выяснить, какие наборы являются допустимыми, возникает совершенно естественным образом, если принять во внимание физический первоисточник задачи, который мы обсуждали во введении: такие наборы соответствуют зарядам, размещенным в нодальных точках.

Вместе с подобными обратными задачами восстановления возникает вопрос о единственности открытой нодальной кривой с заданными краевыми данными. Итак, пусть γ – гладкая компактная ориентированная вещественная кривая, не имеющая компонент, выродившихся в точку. Пусть τ – гладкое базисное сечение $T\gamma$, а ν – еще одно векторное поле вдоль γ , причем расслоение $\mathcal{T}$, порожденное $(\nu_x, \tau_x)_{x \in \gamma}$, имеет ранг 2; мы считаем, что ориентация на γ задана полем τ , а $\mathcal{T}$ ориентировано репером (ν, τ) . Рассмотрим оператор N , действующий из $C^1(\gamma)$ в пространство потоков степени 0 и порядка 1 на γ (т.е. функционалов на C^1 -гладких 1-форм на γ). Как и в [15], в нашей постановке будет подчеркнута связь с комплексным анализом. Для данного N мы вводим еще два оператора, L и θ , действие которых на $u \in C^1(\gamma)$ задается формулами

$$Lu = \frac{1}{2}(Nu - iTu) \quad \text{и} \quad \theta u = (Lu)(\nu^* + i\tau^*), \quad (3.1)$$

где T – дифференцирование вдоль τ , а (ν_x^*, τ_x^*) – двойственный базис к (ν_x, τ_x) в точках $x \in \gamma$.

Заметим, что если γ на самом деле является гладким краем нодальной кривой с краем X и (ν_x, τ_x) – положительно ориентированный ортонормальный базис в $T_x \bar{X}$, то равенство $Nu = N_{X,c}u$ эквивалентно тождеству $(\partial \tilde{u}^c)|_{\gamma_s} = \theta u$.

Как известно из [15], в гладком случае, чтобы восстановить соответствующую риманову поверхность, если таковая существует, достаточно знать γ и действие N на всего лишь три непрерывные функции общего положения (смысл которого будет разъяснен ниже). Поскольку допустимые наборы $(c_{a,j})$ не привязаны к комплексной структуре на X , естественно считать, что заданные граничные данные соответствуют различным допустимым наборам и, значит, различным операторам N . Итак, мы приходим к рассмотрению следующей ситуации.

А. Мы рассматриваем три оператора N_0 , N_1 и N_2 из $C^1(\gamma)$ в пространстве потоков степени 0 и порядка 1 на γ соответствующих им операторов $\theta_\ell = (\nu^* + i\tau^*)L_\ell$, где $L_\ell = (N_\ell - iT)/2$, и трех вещественнозначных функций $u_0, u_1, u_2 \in C^\infty(\gamma)$, на которые накладывается единственное условие:

$$f = (f_1, f_2) = \left(\frac{L_\ell u_\ell}{L_0 u_0} \right)_{\ell=1,2} = \left(\frac{\theta_\ell u_\ell}{\theta_0 u_0} \right)_{\ell=1,2} \quad (3.2)$$

является вложением γ в $\mathbb{C}^2$, рассматриваемое как дополнение к прямой $\{w_0 = 0\}$ в комплексной проективной плоскости $\mathbb{CP}_2$ с однородными координатами $(w_0 : w_1 : w_2)$. Это в общем-то условие общего положения, поскольку предложение 4 ниже, в частности, утверждает, что если γ – гладкий край комплексной кривой, а N – оператор Дирихле–Неймана, то множество таких $(u_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2} \in C^\infty(\gamma)^3$, что вышеуказанное отображение f является вложением, есть плотное открытое подмножество $C^\infty(\gamma)^3$.

Прежде чем дать определение DN-данных, поясним, каким образом тройка $\omega = (\omega_0, \omega_1, \omega_2)$ гладких $(1, 0)$ -форм, не обращающихся в нуль одновременно, индуцирует отображение из X в $\mathbb{CP}_2$; такие тройки действительно существуют, так как они имеются на нормализации X . Определим отображение из X в $\mathbb{CP}_2$, обозначаемое $[\omega]$ или $(\omega_0 : \omega_1 : \omega_2)$, формулами $[\omega] = \left(1 : \frac{\omega_1}{\omega_0} : \frac{\omega_2}{\omega_0}\right)$ при $\{\omega_0 \neq 0\}$, $[\omega] = \left(\frac{\omega_0}{\omega_1} : 1 : \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$ при $\{\omega_1 \neq 0\}$ и $[\omega] = \left(\frac{\omega_0}{\omega_2} : \frac{\omega_1}{\omega_2} : 1\right)$ при $\{\omega_2 \neq 0\}$; все приведенные частные корректно определены (на каждой ветви) как мероморфные функции, поскольку $\dim X = 1$. В [15] мы отождествили $[\omega]$ и $[\omega]|_{\{\omega_0 \neq 0\}}$ с аффинными координатами $\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}, \frac{\omega_2}{\omega_0}\right)$ в аффинной гиперплоскости $\{\omega_0 \neq 0\}$, хотя это и не совсем корректно.

Пусть теперь $u = (u_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2} \in C^\infty(\gamma)^3$, и пусть $\theta u = (\theta_\ell u_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2}$. Назовем $(\gamma, u, \theta u)$ DN-данными открытой нодальной кривой с краем X , если $(\gamma, u, \theta u)$ удовлетворяют условиям из **A** и еще следующим условиям.

B1. У X имеется гладкий край γ .

B2. Для всякого $\ell \in \{0, 1, 2\}$ имеет место равенство $\theta_\ell u_\ell = (\partial \tilde{u}_\ell^{c_\ell})|_\gamma$ для любого допустимого набора c_ℓ .

B3. У форм $\partial \tilde{u}_\ell^{c_\ell}$ нет общих нулей и отображение

$$F = (\partial \tilde{u}_0^{c_0} : \partial \tilde{u}_1^{c_1} : \partial \tilde{u}_2^{c_2})$$

продолжает отображение $(1 : f_1 : f_2)$, определенное в (3.2), на X в следующем смысле: для всякой точки $x_0 \in \gamma$ существует предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in X} \left(\frac{\partial \tilde{u}_1^{c_1}}{\partial \tilde{u}_0^{c_0}}(x), \frac{\partial \tilde{u}_2^{c_2}}{\partial \tilde{u}_0^{c_0}}(x) \right),$$

равный $(f_1(x_0), f_2(x_0))$; если γ и f вещественно-аналитические, то это условие автоматически выполнено.

B4. Существует такое конечное подмножество A кривой X , что F вкладывает $Z \setminus A$ в $\mathbb{CP}_2$.

В случае, когда надо сделать акцент на допустимых наборах c_ℓ , мы будем говорить, что $(\gamma, u, \theta u)$ и набор c_ℓ ассоциированы. Если всякая нодальная точка a_n , $1 \leq n \leq N$, кривой X получена отождествлением точек из подмножества $(a_{n,j})_{1 \leq j \leq \nu_n}$ на римановой поверхности Z и если $(c_{\ell,n,j})_{1 \leq j \leq \nu_n}$ – набор зарядов (или вычетов), соответствующих a_n и u_ℓ ($0 \leq \ell \leq 2$), то будем также говорить, что $(\gamma, u, \theta u)$ являются DN-данными для Z и для $a_{n,j}$ с зарядами $c_{\ell,n,j}$ (или $c_{n,j}$, если $c_{\ell,n,j}$ не зависят от ℓ).

Условие **B4** может показаться ограничительным, но это открытое плотное условие в следующем смысле.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть γ – край открытой нодальной римановой поверхности X и $c = (c_\ell)_{0 \leq \ell \leq 2}$ – тройка допустимых наборов. Тогда множество $E_{X,c}$ таких u из $C^\infty(\gamma)^3$, что тройка $(\gamma, u, \theta u)$ представляет собой данные для X и c , является плотным открытым подмножеством пространства $C^\infty(\gamma)^3$.

Как отмечалось во введении, этот результат вместе с предложением 1 мы докажем в отдельной статье, поскольку используемые в доказательстве методы и результаты комплексного анализа заслуживают внимания сами по себе.

Если X гладкая, то нодальных точек нет и единственной тройкой допустимых наборов является пустая тройка. Если в определении, данном выше, опустить все упоминания допустимых наборов, то мы приходим к понятию DN-данных в гладкой ситуации. Отметим, что благодаря условию B4 DN-данные, определенные здесь, носят более специальный характер, чем DN-данные, введенные в [15]. На самом деле, в случае, когда набор $(\gamma, u, \theta u)$ удовлетворяет только условиям B1–B3, может получиться, что прямой образ относительно F потока интегрирования на X не всегда является потоком интегрирования по подмногообразию $\mathbb{CP}_2 \setminus f(\gamma)$, несмотря на наше утверждение в доказательстве леммы 7 из [15]. Дело в том, что в общем случае $F_*[X]$ даже не обязательно будет локально плоским потоком в смысле [6]. Однако все результаты из [15] выполняются, если использовать усовершенствованное определение DN-данных, которое дано здесь.

Как вытекает из определений, если X – открытая нодальная кривая с краем, полученная отождествлением некоторых точек открытой римановой поверхности Z , а $\pi: Z \rightarrow X$ – естественная проекция, то π проецирует гармоническую функцию на Z , непрерывную вплоть до края $\bar{Z}$, в гармоническое распределение на X , решающее задачу Дирихле для нулевого допустимого набора. Значит, из дифференциала такого распределения вдоль кривой bX нельзя извлечь никакой информации о нодальной кривой кроме информации о ее нормализации. Это объясняет следующее определение. Скажем, что конечный набор $(w_s)_{s \in \Sigma}$ комплексных чисел находится в общем положении относительно разбиения $\{\Sigma_1, \dots, \Sigma_N\}$ множества индексов Σ , если

$$(i) \sum_{s \in \Sigma_j} w_s = 0 \text{ для всех } j;$$

$$(ii) \text{ для любого набора подмножеств } (T_j)_{1 \leq j \leq N}, \text{ удовлетворяющего условиям } T_j \subsetneq \Sigma_j \text{ при всех } j \text{ и } \bigcup_{1 \leq j \leq N} T_j \neq \emptyset, \text{ выполнено } \sum_{1 \leq j \leq N} \sum_{t \in T_j} w_t \neq 0.$$

Скажем, что допустимый набор $c = (c_{a,j})_{(a,j) \in \Sigma}$ ($\Sigma = \bigcup_{a \in \text{Sing } X} \Sigma_a$, $\Sigma_a = \{a\} \times \{1, \dots, \nu(a)\}$) на открытой нодальной кривой с краем X находится в общем положении относительно X , если он в общем положении относительно разбиения $\{\Sigma_a; a \in \text{Sing } X\}$, т. е. если равенств $\sum_{a \in \text{Sing } X} \sum_{j \in J_a} c_{a,j} = 0$ для всех $a \in \text{Sing } X$ с $J_a \subset \{1, \dots, \nu(a)\}$ можно добиться только при $J_a = \{1, \dots, \nu(a)\}$ или $J_a = \emptyset$ для всех a .

3.2. Доказательства в компактном случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Без ограничения общности предположим, что S имеет гладкий край и на $\gamma = bS$ введена ориентация, индуцированная с $Z \setminus S$. Положим $u = (U_{Z,\ell}^{a,c}|_\gamma)_{0 \leq \ell \leq 2}$ и $\theta u = (\partial_Z U_{Z,\ell}^{a,c}|_\gamma)_{0 \leq \ell \leq 2}$ (соответственно $u' = (U_{Z',\ell}^{a,c}|_\gamma)_{0 \leq \ell \leq 2}$ и $\theta' u' = (\partial_{Z'} U_{Z',\ell}^{a,c}|_\gamma)_{0 \leq \ell \leq 2}$), где $\bar{\partial}_Z$ и $\bar{\partial}_{Z'}$ – операторы

Коши–Римана на Z и Z' . По предположению, комплексные структуры, индуцированные с Z и Z' , совпадают на S с комплексной структурой, индуцированной ограничением на S стандартной метрики из $\mathbb{R}^3$. Значит, равенство $(\gamma, u, \theta u) = (\gamma, u', \theta' u')$ следует из равенства $(U_{Z, \ell}^{a, c}|_S)_{0 \leq \ell \leq 2} = (U_{Z', \ell}^{a, c}|_S)_{0 \leq \ell \leq 2}$. Поскольку по предположению (a, c) принадлежит $E_Z \cap E_{Z'}$, набор $(\gamma, u, \theta u)$ оказывается ограниченными данными как для $Z \setminus S$, так и для $Z' \setminus S$. Теперь можно применить теорему 1 из [15], используя определение DN-данных, которое мы дали выше, или теорему 4 из п. 3.3. Это обеспечивает существование изоморфизма $\varphi_1: Z \setminus S \rightarrow Z' \setminus S$, тождественного на bS . В силу теоремы Морера, склейка φ_1 с Id_S дает требуемый изоморфизм $\varphi: Z \rightarrow Z'$.

Утверждение о восстановлении кривой непосредственно следует из применения теоремы 2 из [15] к $Z \setminus S$. Формулы восстановления выводятся как в теореме 5, адаптирующей теорему 2 из [15] к нодальному случаю.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если на самом деле Z и Z' – компактные нодальные кривые, а потенциалы ассоциированы с допустимыми наборами общего положения, то благодаря теоремам 4 и 5 можно использовать то же доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. В условиях теоремы 2 можно непосредственно использовать доказательство теоремы 1.

3.3. Единственность и восстановление нодальных кривых. Из нижеследующей теоремы 4 видно, на какую единственность можно рассчитывать в обратной задаче Дирихле–Неймана.

ТЕОРЕМА 4 (единственность в обратных DN-задачах). Пусть X и X' – нодальные кривые с краем, а $(\gamma, u, \theta u)$ – DN-данные на них, с которыми ассоциированы допустимые наборы c_0, c_1, c_2 для X и c'_0, c'_1, c'_2 для X' . Тогда выполнены следующие результаты.

1. X и X' получены отождествлением конечных подмножеств точек одной и той же римановой поверхности с краем.
2. Если в каком-то из двух допустимых наборов, ассоциированных с $(\gamma, u, \theta u)$, все коэффициенты ненулевые, то $X \cup \gamma$ и $X' \cup \gamma$ грубо изоморфны с помощью отображения, тождественного на γ .
3. Если какое-то c_ℓ и какое-то c'_ℓ находятся в общем положении для X и X' соответственно, то существует изоморфизм нодальных кривых с краем $X \cup \gamma$ и $X' \cup \gamma$, тождественный на γ .

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Если $E \subset \gamma$ и $h^1(E \cap c) > 0$ для всякой связной компоненты c вещественной кривой γ , то мероморфные функции однозначно определены своими значениями на E и выводы теоремы 4 верны, даже когда равенство $N_{X', c'} u_\ell = N_{X, c} u_\ell$ выполняется только на E , а мероморфные функции $(\partial \tilde{u}_\ell^{c_\ell})/(\partial \tilde{u}_0^{c_0})$ и $(\partial \tilde{u}_\ell^{c'_\ell})/(\partial \tilde{u}_0^{c'_0})$ непрерывны вблизи γ .

2. Утверждение 2 теоремы показывает, что если для двух нодальных кривых с краем X и X' DN-данные $(\gamma, u, \theta u)$ одни и те же, то различие между X и X' определяется конечным числом параметров.

3. Если какое-то из чисел c_ℓ находится в общем положении для X , то существует голоморфное сюръективное отображение из X на X' , т. е. непрерывное

отображение, голоморфное на каждой ветви X и переводящее нодальные точки X в нодальные точки X' . Так что X' можно рассматривать как фактор X , а X – соответственно как частичную нормализацию X' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Z \xrightarrow{\pi} X$ – нормализация X , а $g = f \circ \pi$, где f определена в (3.2). Тогда $\hat{\gamma} = \pi^{-1}(\gamma)$ – гладкая ориентированная вещественная кривая, являющаяся гладким краем $\bar{Z}$. В силу условия **A**, $\delta = f(\gamma) = g(\hat{\gamma})$ – гладкая компактная ориентированная вещественная кривая в $\mathbb{CP}_2$, не имеющая компонент, выродившихся в точку. Из условия **B2** следует, что $G = F \circ \pi$ – мероморфное продолжение g на Z . Для доказательства утверждения 1 вспомним доказательство теоремы 1 в [15], ключевым моментом которого является мероморфное продолжение вложения g вещественной кривой $\hat{\gamma}$ в $\mathbb{CP}_2$ до отображения G комплексной кривой Z . Пробела в доказательстве, возникающего в условиях леммы 7 из [15], теперь удастся избежать благодаря усовершенствованному определению DN-данных, которое тем не менее является условием общего положения.

Поскольку $(\gamma, u, \theta u)$ удовлетворяет условию **B4**, а X – нодальная кривая, в Z есть такое конечное подмножество A , что G – изоморфизм $Z \setminus A$ и $G(X) \setminus G(A)$. Значит, $Y = G(X) \setminus \delta$ оказывается комплексной кривой в $\mathbb{CP}_2 \setminus \delta$, для которой $d[Y] = [\delta]$. Она не содержит компактных комплексных кривых, поскольку X их не содержит, и имеет конечную массу по теореме Виртингера (см. [13]). Заметим, что A может пересекаться с $G^{-1}(\delta)$, но у всякой точки $\bar{Z}$ есть окрестность V в $\bar{Z}$, в которой $F: V \rightarrow F(V)$ является диффеоморфизмом многообразий с гладкими краями. Значит, выполняются результаты леммы 7 из [15].

Положим $Z_o = Z \setminus G^{-1}(\delta)$, $B = \text{Sing } \bar{Y}$ и $\hat{A} = G^{-1}(B)$; заметим, что $S = \pi^{-1}(\text{Sing } X) \subset \hat{A}$. Из доказательства леммы 9 в [15] получаем, что $G: Z_o \setminus \hat{A} \rightarrow Y \setminus B = \text{Reg } Y$ – изоморфизм комплексных многообразий, $G: \bar{Z} \rightarrow \bar{Y}$ – собственное отображение и $G: \bar{Z} \setminus A \rightarrow \bar{Y} \setminus B = \text{Reg } \bar{Y}$ – изоморфизм многообразий с гладким краем. Ту же конструкцию можно выполнить для X' . Пометив штрихом все обозначения для объектов, связанных с X' , мы можем повторить заключительную часть доказательства теоремы 1 из [15] и получить, что $\bar{Z}$ и $\bar{Z}'$ изоморфны, а соответствующее отображение $\Phi: X \rightarrow X'$ тождественно на γ . Тем самым мы доказали первое утверждение теоремы.

(1,0)-формы $U_1 = \pi^* \partial \tilde{u}_1^{c_1}$ и $U'_1 = \Phi^* \pi'^* \partial \tilde{u}_1^{c'_1}$ мероморфны на Z и совпадают на $\gamma = bZ$. Значит, они совпадают на всем Z . В частности, у них одинаковые полюсы и вычеты в них. Если у c_1 или c'_1 коэффициент ненулевой, то $\Phi^{-1}(S') = S$. Тем самым мы доказали второе утверждение теоремы.

Положим $\Sigma = \bigcup_{a \in \text{Sing } X} \{a\} \times \{1, \dots, \nu(a)\}$ и $\Sigma' = \bigcup_{a' \in \text{Sing } X'} \{a'\} \times \{1, \dots, \nu(a')\}$. Для всякого a из $\text{Sing } X$ (и всякого a' из $\text{Sing } X'$) зафиксируем нумерацию $(X_{a,j})_{1 \leq j \leq \nu(a)}$ (соответственно $(X'_{a',j'})_{1 \leq j' \leq \nu(a')}$) ветвей X в точке a (соответственно ветвей X' в a'). Пусть (a, j) – пара из Σ и $W_{a,j} = \pi^{-1}(X_{a,j})$. Тогда ограничение $\pi_j = \pi|_{W_{a,j}}^{X_{a,j}}$ биективно и мы можем определить $s_j = \pi_j^{-1}(a) \in S$, $s'_j = \Phi(s_j)$, $b(a, j) = \pi'(s'_j) = \pi'(\Phi_j(\pi_j^{-1}(a)))$ и $\sigma(a, j) = (b(a, j), k(a, j))$, где $k(a, j)$ – такое целое число, что у $\pi'(\Phi(W_{a,j}))$ и $X'_{b(a,j), k(a,j)}$ один и тот же росток в $b(a, j)$. По построению $\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ биективно; положим $\sigma^{-1} = (b', k')$.

Отображение $\varphi = \pi' \circ \Phi \circ \pi_r^{-1} \left(\pi_r \stackrel{\text{def}}{=} \pi|_{\pi^{-1}(\text{Reg } X)}^{\text{Reg } X} \right)$ непрерывно продолжается вдоль всякой ветви X как многозначное (за которым мы сохраняем обозначение φ), если продолжить $\varphi|_{X_{a,j}^*}$ в точку a значением $b(a, j)$. Аналогично, обозначим через ψ такое многозначное продолжение отображения $\pi \circ \Phi^{-1} \circ \pi_r'^{-1} \left(\pi_r' \stackrel{\text{def}}{=} \pi'|_{\pi'^{-1}(\text{Reg } X')}^{\text{Reg } X'} \right)$, что для всякой пары $(a', j') \in \Sigma'$ ограничение $\psi|_{X_{a',j'}^*}$ непрерывно и, значит, принимает значение $b'(a', j')$ в (a', j') . Чтобы увидеть, что X и X' на самом деле изоморфны, проверим, что если a – заданная нодальная точка X , то $b(a, 1) = \dots = b(a, \nu(a)) \stackrel{\text{def}}{=} a'$ и $\nu(a') = \nu(a)$.

Пусть c_1 находится в общем положении относительно X , и пусть a' – нодальная точка X' . Семейство $(X_{a',j'}^*)_{1 \leq j' \leq \nu'(a')}$ соответствующих ветвей можно разбить на непересекающиеся подсемейства $(X_{a',j'}^*)_{j' \in J_{a'}^m}$, $1 \leq m \leq \mu$, так, чтобы для всякого m и любого $j' \in J_{a'}^m$ множество $\{a_m\} \cup \varphi^{-1}(X_{a',j'}^*)$ оказалось ветвью $X_{a_m, \ell_m(j')}$ кривой X в некоторой нодальной точке a_m на X . Поскольку $\tilde{u}_1^{c'_1}$ – гармоническое распределение, решающее задачу Дирихле, ассоциированную с допустимым набором (c'_1) , нам известно, что

$$0 = \sum_{1 \leq j \leq \nu'(a')} c'_{1,a',j} = \sum_{1 \leq j \leq \nu'(a')} c_{1,\sigma^{-1}(a',j')} = \sum_{1 \leq m \leq \mu} \sum_{j' \in J_{a'}^m} c_{1,a_m, \ell_m(j')}.$$

Поскольку (c_1) находится в общем положении относительно X , отсюда следует, что ℓ_m является биекцией из $J_{a'}^m$ на $\{1, \dots, \nu(a_m)\}$. Так что если a – какая-то из точек a_m , то отображение φ переводит любую ветвь $X_{a,j}$ кривой X в a в ветвь кривой X' в a' . Поскольку φ переводит нодальные точки X в нодальные точки X' , это показывает, что φ действительно непрерывно. Если вдобавок какое-то из (c'_ℓ) находится в общем положении относительно X' , то те же выводы можно сделать и относительно ψ .

Теперь, когда мы установили некоторую осмысленную единственность в обратной DN-задаче, встает вопрос о восстановлении решений по граничным данным. Во втором пункте следующей ниже теоремы 5 показано, как можно сначала восстановить $F(X)$ и $\partial \tilde{u}_\ell$ по θ_{u_ℓ} и пересечениям $F(X)$ с прямыми $\Delta_\xi = \{z_2 := \frac{w_2}{w_0} = \xi\}$, $\xi \in \mathbb{C}$. После этого третий пункт предлагает процедуру восстановления нормализации $F(X)$. Четвертое утверждение позволяет восстановить саму кривую X , если допустимый набор находится в общем положении.

ТЕОРЕМА 5. Пусть X – открытая нодальная кривая с краем и DN-данными (γ, u, θ_i) , ассоциированными с допустимым набором без нулевых коэффициентов. Рассмотрим нормализацию $\hat{X} \xrightarrow{\pi} X$ кривой X . Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Отображение $\pi^* f$, где f определена в (3.2), имеет мероморфное продолжение $\hat{F}$ на X , и существуют такие дискретные подмножества $\hat{T}$ и S кривых $\hat{X}$ и $Y = F(X) \setminus f(\gamma)$ соответственно, что отображение $F: \hat{X} \setminus \hat{T} \rightarrow Y \setminus S$ взаимно однозначно.

2) Почти у всякой точки $\xi_* \in \mathbb{C}$ есть такая окрестность W_{ξ_*} , что для всех ξ из W_{ξ_*} имеет место равенство $Y_\xi = Y \cap \Delta_\xi = \bigcup_{1 \leq j \leq p} \{(h_j(\xi), \xi)\}$, где $h_1, \dots, h_p$ суть p различных голоморфных функций на W_{ξ_*} , элементарные симметрические функции от которых, $S_{h,m} = \sum_{1 \leq j \leq p} h_j^m$, восстанавливаются с помощью интегралов типа Коши по формулам

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_1^m}{f_2 - \xi} df_2 = S_{h,m}(\xi) + P_m(\xi), \quad m \in \mathbb{N}, \quad (E_{m,\xi})$$

где при условии общего положения $(0 : 1 : 0) \notin Y$ функция $P_m(\xi)$ является многочленом степени не выше m . Точнее, система соотношений $E_\xi = (E_{m,\xi_\nu})_{\substack{0 \leq m \leq M-1 \\ 0 \leq \nu \leq N-1}}$ позволяет явно вычислить подходящее $h_j(\xi_\nu)$ и P_m при $N \geq M \geq 2p + 1$, если все точки $\xi_0, \dots, \xi_N$ различны.

3) Рассмотрим $\widehat{U}_\ell = \pi_* \tilde{u}_\ell^{c_\ell}$, $0 \leq \ell \leq 2$. Тогда $\partial \widehat{U}_\ell$ – мероморфные $(1, 0)$ -формы и для почти всех $\xi_* \in \mathbb{C}$ можно выбрать такую окрестность W_{ξ_*} , что $S \cap \bigcup_{\xi \in W_{\xi_*}} Y_\xi = \emptyset$ и $\partial \widehat{U}_\ell$ восстанавливаются на множестве $\widehat{F}^{-1}(\bigcup_{\xi \in W_{\xi_*}} Y_\xi)$ по корректно определенному мероморфному частному $(\partial \widehat{U}_\ell)/(\partial \widehat{F}_2)$, в силу формул типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_1^m}{f_2 - \xi} \theta_{u_\ell} = \sum_{1 \leq j \leq p} h_j(\xi)^m \frac{\partial \widehat{U}_\ell}{\partial \widehat{F}_2}(\widehat{F}^{-1}(h_j(\xi), \xi)) + Q_m(\xi), \quad (T_{m,\xi})$$

где m – произвольное целое число, а Q – многочлен степени не выше m .

4) Пусть y – особая точка Y , а C – представитель неприводимой компоненты роста Y в y с краем, являющимся гладкой вещественной кривой, лежащей в $\text{Reg } Y$. Тогда C оказывается F -образом ветви X , если и только если $\int_{\partial C} \partial F_* \tilde{u}_\ell^{c_\ell} \neq 0$. В этом случае $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C} \partial F_* \tilde{u}_\ell^{c_\ell} = c_{a,j}$, где a – nodальная точка X , а j – индекс, для которого $X_{a,j} = F^{-1}(C)$ оказывается некоторой ветвью X в a . Точно так же C будет F -образом ветви кривой X , если и только если $\int_C (\partial F_* \tilde{u}_\ell^{c_\ell}) \wedge \overline{(\partial F_* \tilde{u}_\ell^{c_\ell})} = +\infty$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Пусть p_2 – вторая естественная проекция $\mathbb{C}^2$ на $\mathbb{C}$, а γ_2 – вещественная кривая $p_2(f(\gamma))$. Тогда ξ_* во втором утверждении может быть любой точкой из $\mathbb{C} \setminus \gamma_2$, не принадлежащей дискретному множеству Δ . Точнее, пусть Γ – связная компонента $\mathbb{C} \setminus \gamma_2$, а H – такая голоморфная функция в $\mathbb{C} \times \Gamma$, что $Y \cap p_2^{-1}(\Gamma) = \{H = 0\} \cap p_2^{-1}(\gamma)$, а $H_{z_2} = H(\cdot, z_2)$ – многочлен со старшим коэффициентом единица для всякого фиксированного $z_2 \in \Gamma$. Тогда ξ_* может быть любой точкой, где дискриминант $\text{discr } H_{z_2}$ многочлена H_{z_2} не обращается в нуль, т.е. лежит в дополнении к дискретному множеству. Если ξ_* выбрана таким образом, то в качестве W_{ξ_*} можно взять $\{\text{discr } H_{z_2} \neq 0\}$. Заметим, что H можно восстановить с помощью равенств $(E_{m,\xi})$.

2. Первые три утверждения сформулированной выше теоремы эквивалентны теореме 2 из [15]. Утверждение 4 дает нам инструменты для выяснения, какие особенности Y лежат в множестве $\pi^{-1}(\text{Sing } X)$, а какие возникли из-за того,

что F – не обязательно вложение. Заметим, что полученные нами характеристики C имеют инвариантную интерпретацию. В самом деле, если $C = F(B)$, где B – ветвь X в точке a , то $\int_C (\partial F_* \tilde{u}_\ell^{c_\ell}) \wedge \overline{(\partial F_* \tilde{u}_\ell^{c_\ell})} = \int_B (\partial \tilde{u}_\ell^{c_\ell}) \wedge \overline{(\partial \tilde{u}_\ell^{c_\ell})}$ и $\int_{\partial C} \partial F_* \tilde{u}_\ell^{c_\ell} = \int_{\partial B} \partial \tilde{u}_\ell^{c_\ell}$.

3. Если допустимый набор содержит нулевой коэффициент, то с помощью изложенного метода восстанавливаются ветви, соответствующие ненулевым коэффициентам, но остальные ветви определить нельзя. В частности, этим методом нельзя найти нодальные точки, соответствующие нулевому допустимому набору.

4. Четвертое утверждение теоремы позволяет восстановить в $Z = \hat{X}$ такие множество $S = \pi^{-1}(\text{Sing } X)$ и отображение $\mu: S \rightarrow \mathbb{N}$, что $X_{\pi(s), \mu(s)} = \pi(W_s)$ для некоторой окрестности W_s всякой точки s из S и

$$c_{\ell, \pi(s), \mu(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial F(W_s)} \partial F_* \tilde{u}_\ell^{c_\ell} \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_{\ell, s}.$$

Если известно, что один из допустимых наборов находится в общем положении, то существует единственный способ разбить S на такие непустые подмножества $S_1, \dots, S_k$, что X является фактором Z , полученным отождествлением точек из S_j для каждого j . Это разбиение S можно также задать следующим условием: если $T_1, \dots, T_\ell$ – другое разбиение S , для которого выполнены равенства $\sum_{s \in T_m} \kappa_{\ell, s} = 0$ для всех m , то каждое из множеств T_m оказывается объединением некоторых из $S_1, \dots, S_k$. Если ни про один из допустимых наборов не известно, что он в общем положении, то X грубо изоморфна нодальной кривой X_S , задаваемой Z и $S_1, \dots, S_k$, и получается дополнительными отождествлениями на множестве нодальных точек X_S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через F мероморфное продолжение f на X и положим $Y = F(X) \setminus \delta$, где $\delta = f(\gamma)$. Пусть $\hat{X} \xrightarrow{\pi} X$ – нормализация X . Тогда $\hat{X} \xrightarrow{\hat{F}=F \circ \pi} Y$ – нормализация Y , а $\hat{\gamma} = \pi^{-1}(\gamma)$ – вещественная кривая, диффеоморфная γ . Функции $\hat{u}_\ell = \pi^* u_\ell$ корректно определены на $\hat{\gamma}$ и продолжаются на $\hat{X} \setminus \pi^{-1}(\text{Sing } X)$ как гармонические функции $\hat{U}_\ell$ и на $\hat{X}$ как распределения с логарифмическими особенностями в точках из $\pi^{-1}(\text{Sing } X)$. Однако формы $\partial \hat{u}_\ell$ продолжаются на $\hat{X}$ как мероморфные $(1, 0)$ -формы с простыми полюсами. Значит, $\hat{f} = \pi^* f$ продолжается на $\hat{X}$ как мероморфная функция, которая, разумеется, совпадает с $\hat{F}$. Теперь мы можем применить теорему 2 из [15], утверждения которой мы воспроизводим здесь в качестве пунктов 1)–3). Заметим, что часть точек $\hat{F}^{-1}(\text{Sing } Y)$ лежат в $\pi^{-1}(\text{Sing } X)$, а другая часть возникла просто потому, что F – не обязательно вложение.

Поскольку по предположению допустимые семейства не содержат нулевых коэффициентов, у гармонических распределений $\tilde{u}_\ell^{c_\ell}$ имеются логарифмические особенности на каждой ветви, проходящей через каждую нодальную точку X , и они являются обычными гармоническими функциями в гладких точках X . Это означает, что у функции $\hat{U}_\ell = \pi_* \tilde{u}_\ell^{c_\ell}$ имеются особенности в каждой

точке, лежащей над нодальной точкой X , и она ограничена в окрестности точек из $\widehat{F}^{-1}(\text{Sing } Y) \setminus \pi^{-1}(\text{Sing } X)$. Поскольку в 3) описано, как восстановить отношение $(\partial \widehat{U}_\ell)/(\partial F_2)$, и, значит, форма $\Theta_\ell = \partial \widehat{U}_\ell$ восстанавливается с помощью явных формул по граничным данным, множество $\pi^{-1}(\text{Sing } X)$ также можно восстановить.

Пусть теперь $y \in Y$ – особая точка Y , а C – неприводимая компонента Y в y , ограниченная гладкой вещественной кривой, лежащей в $\text{Reg } Y$. Пусть C является F -образом ветви $X_{a,j}$ кривой X , где a – нодальная точка X . Тогда C гладкая, и поскольку для голоморфной координаты z_j на $X_{a,j}$ с нулем в a функция $\tilde{u}_\ell^{c_\ell}|_{X_{a,j}^*} - 2c_{a,j} \ln |z_j|$ продолжается до обычной голоморфной функции на $X_{a,j}$, то $\partial F_* \tilde{u}_\ell^{c_\ell}|_{X_{a,j}}$ является мероморфной $(1, 0)$ -формой с единственной особенностью в y , где у нее простой полюс с вычетом $c_{a,j}$. Если в C нет точек из $F(\text{Sing } X)$, то $\tilde{u}_\ell^{c_\ell}$ – обычная гармоническая функция на $F^{-1}(C)$, а интеграл $\int_{\partial C} \partial F_* \tilde{u}_\ell^{c_\ell}$ должен обращаться в нуль. Альтернативная характеристизация в терминах бесконечного интеграла Дирихле получается непосредственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Первая часть теоремы является частным случаем теоремы 4 для нодальных кривых $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}'$, полученных из X и X' отождествлением точек a_j^+ и a_j^- (соответственно $a_j'^+$ и $a_j'^-$), $1 \leq j \leq \nu$. Утверждения теоремы, относящиеся к восстановлению поверхностей, являются частным случаем теоремы 5 для $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}'$.

4. Характеризация DN-данных

Здесь мы приведем критерий, характеризующий DN-данные. Теорема, которую мы предлагаем вниманию читателя, является развитием теоремы 3 из [15] в нодальном случае. Теоремы 3b и 4 из [15] о характеристизации краевых данных и характеристизационные результаты из [22] также можно адаптировать для нодального случая, но мы не будем приводить здесь соответствующих громоздких формулировок.

В предшествующих разделах мы считали для простоты, что у открытых поверхностей гладкие края, даже если внутри у них есть особенности. Однако, как и в [15], для нашего метода характеристики нам приходится рассматривать почти гладкие границы. Скажем, что у открытой нодальной кривой с краем X почти гладкая граница γ , если $h^2(X \cup \gamma) < \infty$,¹ γ – гладкая ориентированная вещественная кривая без компонент, стянутых в точку, и в $X \cup \gamma$ у кривой γ есть такая открытая окрестность W , что $W \setminus \gamma$ – открытая риманова поверхность и множество W_{sing} точек γ , в которых у W нет гладкого края, удовлетворяет условию $h^1(W_{\text{sing}}) = 0$.

Если X – открытая нодальная кривая с почти гладким краем γ , то проведенные выше рассуждения можно подкорректировать так, чтобы доказать аналоги классических результатов (см., к примеру, [1]): для всякого допустимого набора с вещественнозначная функция u гладкости C^1 на γ единственным образом продолжается до гармонического распределения $\tilde{u}^c$ на $\bar{X}$, которое

¹ h^d – d -мерная мера Хаусдорфа.

в некоторой открытой окрестности W кривой γ на $\overline{X}$ удовлетворяет условию $\int_W i \partial \tilde{u}^c \wedge \bar{\partial} \tilde{u}^c < +\infty$, причем $\text{Res}_a(\partial u|_{X_{a,j}}) = c_{a,j}$ для всякой ветви $X_{a,j}$ в нодальной точке a на X . Более того, $N_{X,c}u$ по-прежнему можно определить как элемент двойственного пространства к $C^1(\gamma)$, совпадающий с $\partial \tilde{u}^c / \partial \nu$ на $\gamma \setminus \mathcal{X}^{\text{sing}}$ (см. [15; предложение 12]).

Для того чтобы тройка $(\gamma, u, \theta u)$ представляла собой DN-данные, первым условием является требование к γ ограничивать комплексную кривую, касательное расслоение которой в точках γ совпадает с вещественным двумерным расслоением, входящим в состав данных, и на которую f мероморфно продолжается. Части (а) и (b) теоремы ниже описывают необходимые и достаточные условия для выполнения этого условия. На самом деле это не зависит от того, будут ли u и θu граничными значениями первых производных гармонического распределения. В части (с) приводятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы u_ℓ и θu_ℓ действительно были такими граничными значениями, полученными из гармонического распределения с логарифмическими особенностями. В (b) и (с) мы считаем для простоты, что вещественная кривая γ является связной.

ТЕОРЕМА 6. Пусть выполнено условие **A**, и пусть

$$G : \mathbb{C}^2 \ni (\xi_0, \xi_1) \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f_1 \frac{d(\xi_0 + \xi_1 f_1 + f_2)}{\xi_0 + \xi_1 f_1 + f_2}. \quad (4.1)$$

(а) Если на открытой нодальной кривой X заданы ограниченные DN-данные $(\gamma, u, \theta u)$, то почти у всякой точки ξ_* пространства $\mathbb{C}^2$ существует окрестность, в которой можно найти семейство (возможно, пустое) $(h_1, \dots, h_p)$ попарно различных голоморфных функций, для которых

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial \xi_0^2} \left(G - \sum_{1 \leq j \leq p} h_j \right) \quad (4.2)$$

и выполнены уравнения Римана–Бургерса

$$h_j \frac{\partial h_j}{\partial \xi_0} = \frac{\partial h_j}{\partial \xi_1}, \quad 1 \leq j \leq p. \quad (4.3)$$

(b) Наоборот, пусть γ связна и условия из пункта (а) выполнены в связной окрестности W_{ξ_*} некоторой точки (ξ_{0*}, ξ_{1*}) .

Тогда, если $(\partial^2 G / \partial \xi_0^2)|_{W_{\xi_*}} \neq 0$, то существует открытая риманова поверхность Z с почти гладкой границей γ^2 , на которую f мероморфно продолжается.

Если $(\partial^2 G / \partial \xi_0^2)|_{W_{\xi_*}} = 0$, то тот же результат верен для γ или $-\gamma$ (т. е. для той же кривой, но с противоположной ориентацией). Точнее, если $(\partial^2 G / \partial \xi_0^2)|_{W_{\xi_*}} = 0$ и результат выполнен для $-\gamma$, то $f(-\gamma)$ является границей

²Используя [14; пример 10.5], можно построить такие гладкие DN-данные, что решением обратной DN-задачи окажется многообразие, граница которого всего лишь почти гладкая.

(в смысле потоков) комплексной кривой Y из $\mathbb{C}^2 \setminus f(\gamma)$, возможно с особенностями, и соответствующий результат выполнен для γ тогда и только тогда, когда Y – алгебраическая кривая.

(с) Пусть $(\bar{Z}, \gamma)$ – риманова поверхность с почти гладкой границей, пусть $\mathcal{D}$ – гладкая подобласть дубля Z , содержащая $\bar{Z}$, и пусть g – функция Грина для $\mathcal{D}$.

Тогда $(\gamma, u, \theta u)$ оказываются DN -данными для открытой нодальной кривой с краем X , полученной из Z отождествлением точек в каждом наборе $(a_{n,j})_{1 \leq j \leq \nu_n}$, $1 \leq n \leq N$, если и только если существует множество отличных от нуля комплексных чисел $(c_{\ell,n,j})_{\substack{0 \leq \ell \leq 2 \\ 1 \leq j \leq \nu_n}}$, удовлетворяющих равенствам

$\sum_{1 \leq j \leq \nu_n} c_{\ell,n,j} = 0$ для всех $(\ell, n) \in \{0, 1, 2\} \times \{1, \dots, N\}$, со следующим свойством: для всякой точки $z \in \mathcal{D} \setminus \bar{Z}$ и любого $\ell \in \{0, 1, 2\}$

$$\frac{2}{i} \int_{\gamma} u_{\ell}(\zeta) \partial_{\zeta} g(\zeta, z) + g(\zeta, z) \overline{\partial u_{\ell}(\zeta)} = 2\pi \sum_{1 \leq n \leq N} \sum_{1 \leq j \leq \nu_n} c_{\ell,n,j} g(a_{n,j}, z). \quad (4.4)$$

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Фактически (b) – это вторая часть теоремы 3а из [15], но с более детально разобранным случаем $(\partial^2 G / \partial \xi_0^2)|_{W_{\xi_*}} = 0$. Условие об алгебраичности кривой в этом случае эффективно, поскольку Y можно явно восстановить с помощью формул типа Коши из теоремы 5 или теоремы 2 в [15].

2. Если точки $a_{n,j}$ и коэффициенты $c_{\ell,n,j}$ существуют, то они находятся единственным образом, поскольку правая часть (4.4) продолжается на Z как распределение T , удовлетворяющее равенству

$$2i\partial\bar{\partial}T = 2\pi \sum_{1 \leq n \leq N} \sum_{1 \leq j \leq \nu_n} c_{\ell,n,j} \delta_{a_{n,j}} dV,$$

где dV – некоторая форма объема на Z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Часть (a) следует из теоремы 3а в [15], так как эта теорема применима к Z , где $Z \xrightarrow{\pi} X$ – нормализация. В самом деле, достаточно знать, что π^*f вкладывает $\pi^*\gamma$ в $\mathbb{CP}_2$ и мероморфно продолжается на Z . Случай из (b), когда $(\partial^2 G / \partial \xi_0^2)|_{W_{\xi_*}} \neq 0$, совпадает с теоремой 3а, В, из [15]. Пусть $(\partial^2 G / \partial \xi_0^2)|_{W_{\xi_*}} = 0$. Тогда, как указано в доказательстве теоремы 3а, В, из [15], $\pm f(\gamma)$ будет краем комплексной кривой в некотором двумерном аффинном подпространстве $\mathbb{CP}_2$, так что требуемый результат выполняется для $\pm\gamma$. Если и $-f(\gamma)$, и $f(\gamma)$ ограничивают комплексные кривые Y^- и Y^+ в $\mathbb{CP}_2 \setminus f(\gamma)$, то $Y^- \cup f(\gamma) \cup Y^+$ – алгебраическая комплексная кривая.

Теперь предположим, что выполнено (4.4). Для z из $\mathcal{D} \setminus \gamma$ обозначим через Ω_z^{ℓ} форму $u_{\ell} \partial g(\cdot, z) + g(\cdot, z) \overline{\partial u_{\ell}}$, и пусть U_{ℓ}^+ (соответственно U_{ℓ}^-) – ограничение на $\mathcal{D}^+ = Z$ (на $\mathcal{D}^- = \mathcal{D} \setminus \bar{Z}$) функции $\mathcal{D} \setminus \gamma \ni z \mapsto \frac{2}{i} \int_{\gamma} \Omega_z^{\ell}$. Тогда, по формуле

Племеля–Сохоцкого из леммы 15 в [15], $U_{\ell}^{\pm}$ оказывается гармонической функцией на $\mathcal{D}^{\pm}$, непрерывно продолжающейся на $\mathcal{D}^{\pm}$, $u_{\ell} = U_{\ell}^+ - U_{\ell}^-$ и $\theta u_{\ell} = \bar{\partial} U_{\ell}^+ -$

$\bar{\partial}U_\ell^-$ почти всюду на γ . Значит, u_ℓ оказывается граничным значением распределения T_ℓ на Z , заданного равенством $T_\ell = U_\ell^+ + 2\pi \sum_{1 \leq n \leq N} \sum_{1 \leq j \leq \nu_n} c_{\ell,n,j} g(a_{n,j}, z)$,

и в силу построения $\partial T_\ell = \theta u_\ell$ на γ .

Если X – полученная в теореме nodальная кривая, то мы видим из равенств $\sum_{1 \leq j \leq \nu_n} c_{\ell,n,j} = 0$, что T_ℓ можно рассматривать как гармоническое распределение на X . В итоге, $(\gamma, u, \theta u)$ оказываются DN-данными для X . Обратное непосредственно следует из определений.

Список литературы

- [1] L. V. Ahlfors, L. Sario, *Riemann surfaces*, Princeton Math. Ser., **26**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1960, xi+382 pp.
- [2] M. I. Belishev, “The Calderon problem for two-dimensional manifolds by the BC-method”, *SIAM J. Math. Anal.*, **35**:1 (2003), 172–182 (electronic).
- [3] M. I. Belishev, Y. V. Kurylev, “To the reconstruction of a Riemannian manifold via its spectral data (BC-method)”, *Comm. Partial Differential Equations*, **17**:5-6 (1992), 767–804.
- [4] P. Buser, “Inverse spectral geometry on Riemann surfaces”, *Progress in inverse spectral geometry*, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 1997, 133–173.
- [5] H. P. de Saint-Gervais, *Uniformisation des surfaces de Riemann, Retour sur un théorème centenaire*, ENS Éditions, Lyon, 2010, 544 pp.
- [6] Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Физматлит, М., 1987, 760 с.; пер. с англ.: H. Federer, *Geometric measure theory*, Grundlehren Math. Wiss., **153**, Springer-Verlag, New York, 1969, xiv+676 pp.
- [7] A. M. Garsia, “An imbedding of closed Riemann surfaces in Euclidean space”, *Comment. Math. Helv.*, **35** (1961), 93–110.
- [8] I. M. Gel’fand, “Automorphic functions and the theory of representations”, *Proc. Internat. Congress Math.* (Stockholm, 1962), Inst. Mittag-Leffler, Djursholm, 1963, 74–85.
- [9] А. А. Гончар, “Полюсы строк таблицы Падэ и мероморфное продолжение функций”, *Матем. сб.*, **115(157)**:4(8) (1981), 590–613; англ. пер.: A. A. Gonchar, “Poles of rows of the Padé table and meromorphic continuation of functions”, *Math. USSR-Sb.*, **43**:4 (1982), 527–546.
- [10] A. Grothendieck, “The cohomology theory of abstract algebraic varieties”, *Proc. Internat. Congress Math.* (Edinburgh, 1958), Cambridge Univ. Press, New York, 1960, 103–118.
- [11] J. Harris, I. Morrison, *Moduli of curves*, Grad. Texts in Math., **187**, Springer-Verlag, New York, 1998, xiv+366 pp.
- [12] R. Hartshorne, “Residues and duality”, *Lecture notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64*, with an appendix by P. Deligne, Lecture Notes in Math., **20**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1966, vii+423 pp.
- [13] R. Harvey, “Holomorphic chains and their boundaries”, *Several complex variables* (Williams Coll., Williamstown, MA, 1975), Proc. Sympos. Pure Math., **30**, part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1977, 309–382.
- [14] F. R. Harvey, H. B. Lawson, Jr., “On boundaries of complex analytic varieties. I”, *Ann. of Math.* (2), **102**:2 (1975), 233–290.
- [15] G. Henkin, V. Michel, “On the explicit reconstruction of a Riemann surface from its Dirichlet–Neumann operator”, *Geom. Funct. Anal.*, **17**:1 (2007), 116–155.

- [16] G. Henkin, V. Michel, *Problème de plateau complexe feuilleté. Phénomènes de Hartogs–Severi et Bochner pour des feuilletages CR singuliers*, 2011, arXiv: [1109.4300](#).
- [17] M. Lassas, G. Uhlmann, “On determining a Riemannian manifold from the Dirichlet-to-Neumann map”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **34**:5 (2001), 771–787.
- [18] M. Rosenlicht, “Generalized Jacobian varieties”, *Ann. of Math. (2)*, **59** (1954), 505–530.
- [19] R. A. Rüedy, “Embeddings of open Riemann surfaces”, *Comment. Math. Helv.*, **46** (1971), 214–225.
- [20] J.-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, Publications de l’Institut de Mathématique de l’Université de Nancago, **VII**, Hermann, Paris, 1959, 202 pp.
- [21] J. Sylvester, “An anisotropic inverse boundary value problem”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **43**:2 (1990), 201–232.
- [22] R. A. Walker, “Extended shockwave decomposability related to boundaries of holomorphic 1-chains within $\mathbb{CP}^2$ ”, *Indiana Univ. Math. J.*, **57**:3 (2008), 1133–1172.
- [23] K.-W. Wiegmann, “Einbettungen komplexer Räume in Zahlenräume”, *Invent. Math.*, **1** (1966), 229–242.

Г. Хенкин (G. Henkin)

Université Pierre et Marie Curie, Paris, France;

ЦЭМИ РАН, Москва, Россия

E-mail: henkin@math.jussieu.fr

Поступила в редакцию

31.10.2012

В. Мишель (V. Michel)

Université Pierre et Marie Curie, Paris, France

E-mail: michel@math.jussieu.fr