Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Степин, О спектральных компонентах оператора Шрёдингера с комплексным потенциалом, *УМН*, 2013, том 68, выпуск 1, 199–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9502>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 10:49:49

О спектральных компонентах оператора Шрёдингера с комплексным потенциалом

С. А. Степин

В заметке представлены некоторые результаты спектрального анализа одномерного оператора Шрёдингера с комплексным потенциалом. При определенных условиях на потенциал, обеспечивающих возможность аналитического продолжения ядра резольвенты рассматриваемого оператора через непрерывный спектр, получена эффективная оценка количества его собственных значений. В предположении знакоопределенности мнимой части потенциала для соответствующего диссипативного оператора найдены условия отсутствия сингулярной компоненты непрерывного спектра и построены полные волновые операторы, реализующие спектральное представление.

В пространстве $L_2(0, \infty)$ рассматривается оператор

$$L = L_0 + V = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

с комплексным ограниченным потенциалом $V(x)$ и граничным условием Дирихле в нуле, представляющий собой модель, на которой проявляются эффекты, типичные для теории возмущений в несамосопряженном случае (см. [1]–[4]). Определенную информацию о спектральных свойствах оператора L содержит его функция Йоста, совпадающая при известных (см. [5]) условиях с детерминантом Фредгольма

$$e(k) = \det(I + V|V|^{-1/2}(L_0 - k^2 I)^{-1}|V|^{1/2}).$$

Если $V \in L_1(0, \infty)$, то спектр оператора L состоит из двух компонент — непрерывной $\sigma_c(L) = \mathbb{R}_+$ и дискретной $\sigma_d(L) = \{\lambda = k^2 : e(k) = 0, k \in \mathbb{C}_+\}$, причем L не имеет собственных значений, погруженных в непрерывный спектр. Множество $\sigma_d(L)$ конечно при условии конечности первого момента $V(x)$ и в предположении отсутствия спектральных особенностей — точек непрерывного спектра, отвечающих нулям функции Йоста (см. [1]). Другие условия конечности дискретного спектра L указаны в [2] и [6]. Оценку количества $N(V)$ собственных значений и спектральных особенностей L дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *В предположении $V \in L_1(0, \infty)$ все собственные значения и спектральные особенности оператора L расположены в круге*

$$|\lambda| \leq R = R(\alpha) := \left(\frac{1}{\ln 2} \int_0^\infty (2x)^\alpha |V(x)| dx \right)^{2/(1-\alpha)}, \quad \alpha \in [0, 1).$$

Если для некоторого $a > 0$ сходится интеграл $\int_0^\infty e^{ax} |V(x)| dx$, то при произвольных $A > \max\{\sqrt{R}, R/a - a/4\}$ и $\beta \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$N(V) \leq \left(\ln \frac{A + a/2}{\sqrt{A^2 + R}} \right)^{-1} \left\{ \frac{1}{a^{1-\beta}} \int_0^\infty x^\beta (1 + e^{ax}) |V(x)| dx - \ln \left(2 - 2^{(\sqrt{R}/A)^{1-\alpha}} \right) \right\}.$$

СЛЕДСТВИЕ. Если $a \geq b = \sqrt{R(0)}$, то $N(V) \leq 10 \left\{ 1 + \frac{2}{b} \int_0^\infty e^{bx} |V(x)| dx \right\}$.

Ранее подобные оценки (типа Бирмана–Швингера) были известны лишь в самосопряженном случае, когда спектральная особенность может возникнуть только на краю $\sigma_c(L)$. Оценка $N(V)$ из теоремы 1 получается с использованием формулы Иенсена применительно к считающей функции числа нулей $e(k)$.

С помощью подхода нестационарной теории рассеяния применительно к рассматриваемой ситуации (ср. [3] и [4]) в настоящей работе получен ответ на вопрос о построении спектрального представления диссипативного оператора L . Для упрощения предполагается, что L вполне несамосопряженный, т. е. не имеет нетривиальных приводящих подпространств, на которых он индуцирует самосопряженный оператор (это заведомо так, если на некотором интервале $\text{Im } V(x)$ отделена от 0).

ТЕОРЕМА 2. Пусть вполне несамосопряженный диссипативный оператор $L = L_0 + V$ с ограниченным потенциалом $V(x)$, удовлетворяющим условию

$$\int_0^\infty x|V(x)| dx < \infty,$$

не имеет спектральных особенностей. Тогда прямой волновой оператор

$$\Omega = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(itL) \exp(-itL_0)$$

существует, ограничен и обладает свойством полноты. На подпространстве $\mathcal{H}_c = \text{Ran } \Omega$ непрерывного спектра L корректно определен и ограничен обратный волновой оператор

$$\tilde{\Omega} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(itL_0) \exp(-itL),$$

при этом $L_c = L|_{\mathcal{H}_c}$ и L_0 подобны: $L_c = \Omega L_0 \tilde{\Omega}$.

Существование полных волновых операторов означает отсутствие сингулярной компоненты $\sigma_c(L)$ в смысле подобия L_c оператору с абсолютно непрерывным спектром. Отметим, что при условии конечности второго момента $V(x)$ и в предположении отсутствия спектральных особенностей в [2] установлена обратимость преобразования, реализующего переход в спектральное представление L и осуществляющего подобие L_c и L_0 . Отличительной чертой нашего подхода (ср. [7]) является то, что в качестве невозмущенного для L выбирается оператор $\text{Re } L$, который в свою очередь сравнивается с L_0 посредством вольтеррова оператора преобразования. Оценки его интегрального ядра позволяют установить для возмущения свойство типа гладкости по Като (см. [8]) относительно невозмущенного оператора. Это обстоятельство, наряду с отсутствием в факторизации Неванлинны–Рисса функции $e(k)$ сингулярного множителя, обеспечивает полноту Ω и ограниченность $\tilde{\Omega}$ в случае, когда у оператора L нет спектральных особенностей.

Список литературы

- [1] М. А. Наймарк, Тр. ММО, **3**, ГИТТЛ, М., 1954, 181–270. [2] Б. Я. Левин, Докл. АН СССР, **106**:2 (1956), 187–190. [3] Т. Kato, Math. Ann., **162**:2 (1966), 258–279. [4] И. В. Станкевич, Матем. сб., **69**(111):2 (1966), 161–207; англ. пер.: I. V. Stankevich, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **79**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969, 97–150. [5] B. Simon, J. Funct. Anal., **178**:2 (2000), 396–420. [6] X. X. Муртазин, Матем. заметки, **31**:2 (1982), 231–244; англ. пер.: Kh. Kh. Murtazin, Math. Notes, **31**:2 (1982), 118–125. [7] С. А. Степин, Матем. сб., **195**:6 (2004), 137–156; англ. пер.: S. A. Stepin, Sb. Math., **195**:6 (2004), 897–915. [8] Д. Р. Яфаев, Математическая теория рассеяния. Общая теория, Изд-во СПбГУ, СПб., 1994, 423 с.; англ. изд.: D. R. Yafaev, Mathematical scattering theory. General theory, Transl. Math. Monogr., **105**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, x+341 pp.

С. А. Степин (S. A. Stepin)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова;
Institute of Mathematics, University of Białystok
E-mail: ststepin@mail.ru

Представлено Р. А. Минлосом

Принято редколлегией
01.11.2012