Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Мартинес-Финкельштейн, Е. А. Рахманов, С. П. Су-
етин, Дифференциальное уравнение для полиномов
Эрмита–Паде, *УМН*, 2013, том 68, выпуск 1, 197–198

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9508>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 13:21:25

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Дифференциальное уравнение для полиномов Эрмита–Паде

А. Мартинес-Финкельштейн, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин

1. Пусть f – голоморфная в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ функция,

$$f(z) = f(z; \alpha) := \prod_{j=1}^p (z - a_j)^{\alpha_j}, \quad f(\infty) = 1, \quad p \geq 2, \quad \alpha_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \quad \sum_{j=1}^p \alpha_j = 0, \quad (1)$$

$\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$; f продолжается как многозначная аналитическая функция в область $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_p\}$. Класс функций вида (1) будем обозначать через $\mathcal{L}_\alpha$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $P_{n,0}$ и $P_{n,1} \neq 0$ – полиномы Паде степени $\leq n$ для функции f :

$$(P_{n,0} + P_{n,1}f)(z) = O(z^{-n-1}), \quad z \rightarrow \infty.$$

Лагерр [6] получил для полиномов Паде дифференциальное уравнение 2-го порядка (см. также [9; п. 5.1], [7]):

$$Ahw'' + [(A' - B)h - Ah']w' - n(n+1)gw \equiv 0, \quad (2)$$

где полиномы $A = A_p(z) := \prod_{j=1}^p (z - a_j) \in \mathbb{P}_p$ и $B = B_p(z) := A_p(z)f'(z)/f(z) \in \mathbb{P}_{p-2}$ известны, а $h = h_n(z) = z^{p-2} + \dots \in \mathbb{P}_{p-2}$, $g = g_n(z) = z^{2p-4} + \dots \in \mathbb{P}_{2p-4}$ – некоторые зависящие от n полиномы фиксированной степени ($\mathbb{P}_m$, $m \in \mathbb{N}$, – множество всех полиномов с комплексными коэффициентами степени $\leq m$).

Пусть теперь $Q_{n,0}, Q_{n,1}, Q_{n,2} \neq 0$ – полиномы Эрмита–Паде степени $\leq n$ для набора функций $1, f, f^2$ (см. [9], а также [5], [2], [10]):

$$(Q_{n,0} + Q_{n,1}f + Q_{n,2}f^2)(z) = O(z^{-2n-2}), \quad z \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Для $f \in \mathcal{L}_\alpha$ при $\alpha_j \neq \pm 1/2$ конструкция (3) невырождена, поскольку пара функций f, f^2 образует систему Никишина [8], [2].

В дальнейшем предполагается, что выполнено следующее условие “общего положения”: $\deg Q_{n,j} = n$, $j = 0, 1, 2$. При $p = 2$ это условие всегда выполняется.

Полиномы Эрмита–Паде обладают многими замечательными свойствами, которые лежат в основе их разнообразных применений (см. [4], [5], [9]).

Работа третьего автора выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 11-01-00330) и программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-4664.2012.1); работа второго автора выполнена при частичной поддержке проекта Research Project MTM2011-28952-C02-01 from the Ministry of Science and Innovation of Spain and the European Regional Development Fund (ERDF) и грантов Excellence Grant P09-FQM-4643 и FQM-229 from Junta de Andalucía.

DOI: 10.4213/rm9508

2. Основной результат настоящей работы – дифференциальное уравнение 3-го порядка для полиномов Эрмита–Паде (ср. (2)) для трех функций $1, f, f^2$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть f задана представлением (1), $Q_{n,j}$, $j = 0, 1, 2$, – полиномы Эрмита–Паде для набора функций $1, f, f^2$. Тогда функции $Q_{n,j}f^j$, $j = 0, 1, 2$, являются решениями следующего дифференциального уравнения:

$$A^2 H w''' + A[3(A' - B)H - AH']w'' - 3(n-1)(n+2)Fw' + 2n(n^2-1)Gw \equiv 0, \quad (4)$$

где полиномы A и $B = Af'/f$ определены выше, $H = H_n(z) = z^{3p-6} + \dots \in \mathbb{P}_{3p-6}$, $F = F_n(z) = z^{5p-8} + \dots \in \mathbb{P}_{5p-8}$ и $G = G_n(z) = z^{5p-9} + \dots \in \mathbb{P}_{5p-9}$ – некоторые зависящие от n монические полиномы фиксированной степени.

Различные дифференциальные уравнения 3-го порядка для полиномов Эрмита–Паде были известны и ранее [1], [3]. Уравнение (4) не сводится к уже известным.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f = f(z; \alpha) = ((z-1)/(z+1))^\alpha$, $2\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, $f(\infty) = 1$. Тогда дифференциальное уравнение для функций $Q_{n,j}f^j$, $j = 0, 1, 2$, имеет вид

$$(z^2-1)^2 w''' + 6(z^2-1)(z-\alpha)w'' - [3(n^2+n-2)z^2 + 12\alpha z - (3n(n+1) + 8\alpha^2 - 10)]w' + 2[n(n^2-1)z + \alpha(3n(n+1) - 8)]w = 0. \quad (5)$$

Если $\alpha \in (0, 1/2)$, то все нули полиномов $Q_{n,j}$ лежат на $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ и их предельное распределение имеет плотность

$$\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{|x|-1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{|x|+1}} \right), \quad |x| > 1. \quad (6)$$

Список литературы

- [1] A. I. Aptekarev, A. Branquinho, W. Van Assche, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **355**:10 (2003), 3887–3914. [2] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, Д. Н. Туляков, *Матем. сб.*, **202**:2 (2011), 3–56; англ. пер.: A. I. Aptekarev, V. G. Lysov, D. N. Tulyakov, *Sb. Math.*, **202**:2 (2011), 155–206. [3] A. I. Aptekarev, F. Marcellán, I. A. Rocha, *J. Approx. Theory*, **90**:1 (1997), 117–146. [4] G. V. Chudnovsky, *Ann. of Math.* (2), **117**:2 (1983), 325–382. [5] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его девяностолетию, Тр. МИАН СССР, **157**, 1981, 31–48; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **157** (1983), 31–50. [6] E. N. Laguerre, *J. Math. Pures Appl.* (4), **1** (1885), 135–165. [7] A. Martínez-Finkelshtein, E. A. Rakhmanov, S. P. Suetin, *Contemp. Math.*, **578**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, 165–193. [8] Е. М. Никишин, *Матем. сб.*, **113**(155):4(12) (1980), 499–519; англ. пер.: E. M. Nikišin, *Math. USSR-Sb.*, **41**:4 (1982), 409–425. [9] J. Nuttall, *J. Approx. Theory*, **42**:4 (1984), 299–386. [10] Е. А. Рахманов, *Матем. сб.*, **202**:1 (2011), 133–140; англ. пер.: E. A. Rakhmanov, *Sb. Math.*, **202**:1 (2011), 127–134.

А. Мартинес-Финкельштейн

(A. Martínez-Finkelshtein)

University of Almería, Spain

E-mail: andrei@ual.es

Представлено А. Г. Сергеевым

Принято редколлегией

21.01.2013

Е. А. Рахманов (E. A. Rakhmanov)

University of South Florida, USA

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: rakhmano@mail.usf.edu

С. П. Суетин (S. P. Suetin)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: suetin@mi.ras.ru