Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Вахрамеев, Теорема существования для нелинейной задачи быстрогодействия в классе релейных управлений с конечным числом переключений, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 2, 151–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm951>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 14:17:12

**ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ
ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ В КЛАССЕ РЕЛЕЙНЫХ
УПРАВЛЕНИЙ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ**

С. А. ВАХРАМЕЕВ

Для двухточечной задачи быстрогодействия, связанной с гладкой нелинейной управляемой системой, устанавливается существование релейного оптимального управления без каких-либо априорных предположений о выпуклости векторграммы системы, однако при достаточно жестких условиях на структуру алгебры Ли векторных полей, ассоциированных с рассматриваемой системой.

1. Всюду далее используется язык хронологического исчисления, развитый в работах А. А. Аграчева и Р. В. Гамкрелидзе (см. [1], а также [3]). Пусть M – n -мерное гладкое (класса C^∞) многообразие, регулярно вложенное в некоторое евклидово пространство. Рассмотрим гладкую управляемую систему

$$(1.1) \quad \dot{x} = x \circ f(u), \quad x \in M, \quad u \in U,$$

где $f(u)$, $u \in \mathbb{R}^m$, – семейство гладких (класса C^∞) векторных полей на M , гладко зависящих от параметра $u \in \mathbb{R}$, U – выпуклый компактный многогранник в $\mathbb{R}^m$. Будем считать, что выполнено следующее условие роста: существует функция $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что

$$(1.2) \quad |x \circ f(u)| \leq g(|x|)$$

для всех $x \in M$, $u \in U$ и

$$(1.3) \quad \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{g(s)}{s} < \infty.$$

При этом условии для любого *допустимого*, т.е. измеримого и ограниченного управления $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, со значениями в U , существует *поток*

$$p_t(u) = \overrightarrow{\exp} \int_0^t f(u(s)) ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

на многообразии M .

Рассмотрим следующую *задачу быстрогодействия* для (1.1):

Пусть заданы точки x_0 и x_T , требуется найти *допустимое управление* $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, такое, что траектория

$$x(t) = x(t; x_0, u(\cdot)) = x_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t f(u(s)) ds = x_0 \circ p_t(u), \quad t \in \mathbb{R},$$

системы (1.1), соответствующая этому управлению и начальному состоянию x_0 ($x(0) = x_0$), удовлетворяет условию $x(T) = x_T$ и время T – наименьшее возможное.

Классическая теорема существования (см. [2]) гарантирует существование оптимального управления в этой задаче при дополнительном условии выпуклости *векторграммы*

$$F(x) = \{x \circ f(u) : u \in U\}$$

для всех $x \in M$, или, более общо, при условии, что множество $F(x)$ содержит границу своей выпуклой оболочки для всех $x \in M$ (см. [2]). В случае нарушения этого условия оптимальное управление существует в классе *обобщенных управлений* μ_t , $t \in \mathbb{R}$, – слабо измеримых семейств вероятностных мер Радона, сосредоточенных при почти всех $t \in \mathbb{R}$ на U . Пожалуй, единственным известным автору исключением является случай линейных по фазовой переменной систем – в этом случае теорема существования справедлива в классе “обычных” управлений. Основная цель данной заметки показать, что, по-существу, те же условия, что и условия релейности, предложенные автором в [5], обеспечивают существование и релейность оптимального управления без условий выпуклости векторграммы системы.

2. Будем говорить, что система (1.1) удовлетворяет *обобщенному условию общности положения* (относительно многогранника U), если для любых двух вершин e', e'' этого многогранника существует $u \in U$ такое, что векторы

$$(2.1) \quad x \circ \frac{\partial f(u)}{\partial u}(e' - e''), \quad x \circ \operatorname{ad} f(u) \frac{\partial f(u)}{\partial u}(e' - e''), \quad \dots, \quad x \circ \operatorname{ad} f(u)^{n-1} \frac{\partial f(u)}{\partial u}(e' - e'')$$

линейно независимы при всех $x \in M$.

Будем говорить, что система (1.1) удовлетворяет *обобщенному усиленному условию релейности* (относительно многогранника U), если для любых вершин e', e'' многогранника U и для любого компакта $K \subset M$ существуют линейные функционалы

$$a(x, u', \cdot): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad b_{\beta}^{\alpha}(x, u', u'', \cdot): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R},$$

гладко зависящие от $(x, u) \in K \times U$, $(x, u', u'') \in K \times U \times U$, такие, что

$$(2.2) \quad x \circ \frac{\partial^2 f(u)}{\partial^2 u}(u, w) = x \circ a(u, v) \frac{\partial f(u)}{\partial u} w,$$

$$(2.3) \quad x \circ \left[\frac{\partial f(u'')}{\partial u} v, \operatorname{ad}^{\alpha} f(u') \frac{\partial f(u')}{\partial u} \right] = \sum_{\beta=0}^{\alpha} x \circ b_{\beta}^{\alpha}(u', u'', v) \operatorname{ad}^{\beta} f(u') \frac{\partial f(u')}{\partial u} w$$

для всех $v \in \mathbb{R}^m$, $\alpha = 0, 1, \dots$, $(x, u) \in K \times U$, $(x, u', u'') \in K \times U \times U$, где $w = e' - e''$.

Из (2.2), (2.3) следует, что векторы (2.1) линейно независимы для всех $u \in U$ и $x \in M$ (и для $w = e' - e''$, где e', e'' — любые вершины U). Поэтому обобщенное условие общности положения и обобщенные усиленные условия релейности несколько сильнее соответствующих условий, предложенных автором в [5].

Основной результат данной заметки формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА. Пусть гладкая управляемая система (1.1) удовлетворяет условию роста (1.2), обобщенному условию общности положения и обобщенным усиленным условиям релейности (2.2), (2.3) относительно многогранника U . Тогда, если существует допустимое управление, переводящее начальное состояние x_0 в x_T , то существует и оптимальное управление $u(t)$, $0 \leq t \leq T$. Более того, всякое оптимальное управление кусочно постоянно и его значениями являются только вершины многогранника U .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Аграчев А. А., Гамкрелидзе Р. В. // Матем. сб. 1978. Т. 100. № 4. С. 467–532.
 [2] Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. [3] Гамкрелидзе Р. В., Аграчев А. А., Вахрамеев С. А. // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем. Новейш. достиж. 1989. Т. 35. С. 3–107. [4] Вахрамеев С. А. // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем. Новейш. достиж. 1989. Т. 35. С. 135–177. [5] Вахрамеев С. А. // УМН. 1994. Т. 49. № 4. С. 197–198.

Всероссийский институт
научной и технической информации (ВИНИТИ)

Принято редколлегией
21.09.1995