Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Куксин, А. И. Нейштадт, О квантовом усреднении, квантовой теории Колмогорова–Арнольда–Мозера и квантовой диффузии, *УМН*, 2013, том 68, выпуск 2, 145–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9514>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 18:35:07

УДК 517.956.8+517.958+530.145

Посвящается светлой памяти
Марка Иосифовича Вишика

О квантовом усреднении, квантовой теории Колмогорова–Арнольда–Мозера и квантовой диффузии

С. Б. Куксин, А. И. Нейштадт

Для неавтономных гамильтоновых систем и их квантований рассматриваются те свойства квантованных систем, классические аналоги которых составляют предмет теории Колмогорова–Арнольда–Мозера (КАМ) и смежных областей: теорий усреднения, устойчивости по Нехорошеву и диффузии.

Библиография: 31 название.

Ключевые слова: бесконечномерная КАМ-теория, квантовая диффузия, квантовая адиабатическая теорема.

DOI: 10.4213/rm9514

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	145
2. Квантовое усреднение.....	147
2.1. Усреднение и адиабатическая инвариантность.....	147
2.2. Вокруг теоремы Нехорошева.....	148
3. Квантовая КАМ-теория.....	149
4. Квантовая диффузия.....	151
5. Возмущенные гармонические и ангармонические осцилляторы.....	152
6. Квантовая адиабатическая теорема в квазиклассическом пределе.....	152
6.1. Системы с одной степенью свободы.....	153
6.2. Системы с несколькими степенями свободы.....	154
Список литературы.....	157

1. Введение

Рассмотрим классическую неавтономную гамильтонову систему на фазовом пространстве $T^*\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^d = \{(p, q)\}$ или $T^*\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ с гамильтонианом $H(p, q, t)$:

$$\dot{p} = -\nabla_q H, \quad \dot{q} = \nabla_p H. \quad (1)$$

Работа первого автора выполнена при поддержке Национального агентства исследований (l'Agence Nationale de la Recherche), грант ANR-10-BLAN 0102. Работа второго автора выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-00251).

© С. Б. Куксин, А. И. Нейштадт, 2013

Соответствующий квантовый гамильтонов оператор получается из $H(p, q, t)$ заменой переменной q_j , $j = 1, \dots, d$, на оператор умножения комплекснозначных функций $u(x)$ на x_j , а переменной p_j на оператор $(\hbar/i)(\partial/\partial x_j)$, где $\hbar$ – постоянная Планка¹. Гамильтонов оператор $\mathcal{H} = H((\hbar/i)\nabla_x, x, t)$ задает квантовую систему. С первых лет существования квантовой механики изучался вопрос о том, как (спектральные) свойства оператора $\mathcal{H}$ и соответствующего эволюционного уравнения

$$i\hbar \dot{u}(t, x) = \mathcal{H}u(t, x) \quad (2)$$

связаны со свойствами классической системы (1). Например, если

$$H(p, q, t) = |p|^2 + V(t, q), \quad (3)$$

то

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_t = -\hbar^2 \Delta + V(t, x) \quad (4)$$

есть оператор Шрёдингера с потенциалом V .

В настоящей работе изучаются те свойства гамильтонова оператора $\mathcal{H}$, соответствующие которым свойства системы (1) описываются теориями, связанными с теорией Колмогорова–Арнольда–Мозера (КАМ). Мы имеем в виду собственно КАМ-теорию, усреднение, устойчивость по Нехорошеву и диффузию (этот список никоим образом не каноничен, но отражает личные вкусы авторов). Мы обсудим те результаты о квантовых системах (2), которые считаем параллельными указанным классическим теориям, в основном ограничиваясь периодическими граничными условиями ($x \in \mathbb{T}^d$) и случаем $\hbar = \text{const}$. В этом случае заменой масштаба переменных x и t в динамических уравнениях (2), (4) можно добиться того, что $\hbar = 1$. Но выбор системы единиц измерения, в которой $\hbar = 1$, становится неудобным при изучении квазиклассического предела $\hbar \rightarrow 0$ в разделе 6. Там мы рассматриваем уравнения на всем пространстве, $x \in \mathbb{R}^d$, поскольку нужные нам результаты еще мало разработаны для периодических граничных условий.

Все обсуждаемые результаты в квантовой области касаются неавтономных уравнений (2), (4), так что их классические аналоги – это “связанные с КАМ” результаты теории неавтономных гамильтоновых систем (3). Мы не затрагиваем очень интересный, важный и сложный вопрос о построении собственных функций гамильтоновых операторов, близких к интегрируемым, путем квантования КАМ-торов соответствующих автономных гамильтоновых систем (см. [23]).

Пусть $u(t)$ есть решение уравнения (2), (4). Умножая это уравнение на $\bar{u}$ и интегрируя по $\mathbb{T}^d$, получаем, что $\|u(t)\|_{L^2}^2 = \text{const}$. Положим $u(t, x) = \sum_s u_s(t) \varphi_s(x)$, где $\{\varphi_s\}$ – собственные функции “невозмущенного” гамильтонова оператора. Тогда $\sum_s |u_s(t)|^2 \equiv \text{const}$. Что происходит с величинами $|u_s(t)|^2$, когда t растёт? Иными словами, как распределяется полная вероятность $\sum_s |u_s(t)|^2$ между состояниями $s \in \mathbb{Z}^d$ при больших значениях t ? Именно к этому вопросу относятся результаты в приводимых ниже теоремах.

¹Это правило квантования самое распространенное, но отнюдь не единственное. Можно заменять q_j и p_j на любые операторы Q_j и P_j такие, что $[Q_j, P_k] = i\hbar \delta_{j,k}$ для всех j и k .

2. Квантовое усреднение

2.1. Усреднение и адиабатическая инвариантность. Пусть классический гамильтониан (3) имеет вид

$$H(p, q, \varepsilon t) = H_\varepsilon = |p|^2 + V(\varepsilon t, q), \quad (5)$$

причем невозмущенный гамильтониан $|p|^2 + V(\tau, q)$, $\tau = \text{const}$, при каждом τ задает вполне интегрируемую гамильтонову систему. Обозначим соответствующие переменные действия через I_j , $1 \leq j \leq d$. Классический принцип усреднения (см., например, [3], [25]) приводит к выводу, что все действия – адиабатические инварианты: если $u_\varepsilon(t)$ есть решение возмущенного уравнения $(1)_{H=H_\varepsilon}$, то $I_j(u_\varepsilon(t))$ остается почти постоянным на временных интервалах порядка ε^{-1} . Принцип усреднения – это эвристическое утверждение, и его использование не всегда приводит к правильным результатам. Адиабатическая инвариантность для классических систем обсуждается более подробно в разделе 6.

Рассмотрим квантовую систему с тем же гамильтонианом:

$$\dot{u} = -i(-\Delta u + V(\varepsilon t, x)u), \quad x \in \mathbb{T}^d. \quad (6)$$

Пусть функция $V(\tau, x)$ является C^2 -гладкой и ограниченной. Обозначим через A_τ фигурирующий в (6) линейный оператор:

$$A_\tau = -\Delta + V(\tau, x).$$

Пусть $\{\varphi_s(\tau), s \in \mathbb{Z}^d\}$ и $\{\lambda_s(\tau)\}$ суть собственные векторы и собственные значения оператора A_τ , причем каждая функция $\lambda_s(\tau)$ непрерывна по τ . Рассмотрим решение $u(t, x)$ уравнения (6), равное при $t = 0$ такому чистому состоянию

$$u(0, x) = \varphi_{s_0}(0), \quad (7)$$

что при каждом εt число $\lambda_{s_0}(\varepsilon t)$ является изолированным собственным значением постоянной кратности для оператора $A_{\varepsilon t}$. Разложим $u(t, x)$ по базису $\{\varphi_s(\tau), s \in \mathbb{Z}^d\}$:

$$u(t, x) = \sum_s u_s(t) \varphi_s(\varepsilon t).$$

Квантовая адиабатическая теорема гласит, что $u(t, x)$ остается вблизи собственного подпространства, отвечающего $\lambda_{s_0}(\varepsilon t)$:

ТЕОРЕМА 2.1 (М. Борн, В. А. Фок [8] и Т. Като [20]).

$$\sup_{0 \leq t \leq \varepsilon^{-1}} \sum_{s: \lambda_s(\varepsilon t) \neq \lambda_{s_0}(\varepsilon t)} |u_s(t)|^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (8)$$

Это очень общий результат, верный и для систем на всем пространстве (т. е. $x \in \mathbb{R}^d$) в случае, когда оператор $A_{\varepsilon t}$ имеет смешанный спектр, но $\lambda_{s_0}(\varepsilon t)$ при всех εt является изолированным собственным значением постоянной конечной кратности (см. [25]). Случай, когда с этим собственным значением могут сближаться другие собственные значения, рассмотрен в [4].

Адиабатические теоремы как для классических, так и для квантовых систем часто рассматриваются на бесконечном временном интервале $-\infty < t < \infty$ в предположении, что зависимость потенциала V от времени достаточно быстро исчезает при $t \rightarrow \pm\infty$ и система достаточно гладкая. В этом случае для

классических гамильтонианов в размерности $d = 1$ разность значений действия на траектории при $t \rightarrow \pm\infty$ стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ гораздо быстрее, чем ε . В аналитическом случае эта разность есть $O(\exp(-\text{const}/\varepsilon))$, см. [22] и ссылки в [3; § 6.4.5]. Для квантовых систем, если при $\tau \rightarrow -\infty$ вся вероятность сосредоточена в состояниях, отвечающих собственному значению $\lambda_{s_0}(\tau)$, то эти же состояния и при $\tau \rightarrow +\infty$ поглощают почти всю эту вероятность, кроме очень маленького остатка. В аналитическом случае этот остаток есть $O(\exp(-\text{const}/\varepsilon))$ [18], [29] (это вытекает также из исчисления, развитого в [30]).

Мы вернемся к квантовой адиабатичности в разделе 6. Отметим, что имеюся адиабатические теоремы и для систем, гамильтониан которых медленно зависит не только от времени, но и от части пространственных переменных (см., например, [3; § 6.4.1] для классических систем и [6] для квантовых систем).

2.2. Вокруг теоремы Нехорошева. Начнем с классических систем, близких к интегрируемым. Пусть $H_\varepsilon(p, q) = h_0(p) + \varepsilon h_1(p, q)$, где функция h_0 аналитическая и крутая (например, строго выпуклая; определение крутой функции см. в [28] и [25], [3]). Пусть $(p(t), q(t))$ есть решение системы (1). Тогда найдутся $a, b > 0$ такие, что

$$|p(t) - p(0)| \leq \varepsilon^a \quad \forall |t| \leq e^{\varepsilon^{-b}}, \quad (9)$$

см. [28] и [25], [3]. Есть много связанных с этим результатов. Например, пусть

$$H_\varepsilon(p, q, t) = h_0(p) + \varepsilon h_1(\omega t; p, q), \quad \omega \in \mathbb{R}^N,$$

где h_1 – аналитическая функция на $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^d$, $N \geq 1$. Тогда оценка (9) верна для типичных ω . В частности, возьмем

$$H_\varepsilon(p, q, t) = |p|^2 + \varepsilon V(\omega t, q).$$

Соответствующий квантовый гамильтониан задается оператором $-\Delta + \varepsilon V(\omega t, x)$, а эволюционное уравнение принимает вид

$$\dot{u} = -i(-\Delta u + \varepsilon V(\omega t, x)u). \quad (10)$$

Справедлив ли аналог оценки Нехорошева (9) для решений уравнения (10)? Иными словами, верно ли, что действия невозмущенной системы, вычисленные вдоль решения возмущенного уравнения (10), не сильно меняются в течение экспоненциально долгого времени? Оказывается, что в несколько ослабленном виде это утверждение верно даже при $\varepsilon = 1$! Рассмотрим уравнение

$$\dot{u} = -i(-\Delta u + V(t, x)u) \quad (11)$$

и квадрат r -й соболевской нормы функции u :

$$\|u\|_r^2 = \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} |u_s|^2 (1 + |s|^2)^r, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Это – линейная комбинация действий невозмущенной системы с $V = 0$.

ТЕОРЕМА 2.2 [10]. Пусть $V(t, x) = \tilde{V}(\omega t, x)$, где $\omega \in \mathbb{R}^N$ – диофантов вектор, а $\tilde{V}$ – гладкая функция на $\mathbb{T}^N \times \mathbb{T}^d$. Тогда для каждого $r \geq 1$ найдется такое число $c(r)$, что всякое решение $u(t)$ уравнения (11) удовлетворяет неравенству

$$\|u(t)\|_r \leq \text{const} \cdot (\ln t)^{c(r)} \|u_0\|_r \quad \forall t \geq 2. \quad (12)$$

Таким образом, если функция u_0 гладкая, то высшие состояния u_s очень долго остаются почти не возбужденными. У нас нет результата, который гласил бы, что выражение из (8), вычисленное на решениях задачи (11), (7), остается малым в течение долгого времени.

Удивительно, что ослабленный вариант этого результата имеет место даже для потенциалов V , не являющихся квазипериодическими по времени.

ТЕОРЕМА 2.3 [11]. *Пусть функция V является гладкой и C^k -ограниченной равномерно по (t, x) для всех k . Тогда при каждом $r \geq 1$ и $a > 0$ найдется постоянная C_a такая, что*

$$\|u(t)\|_r \leq C_a t^a \|u_0\|_r \quad \forall t \geq 2.$$

См. также [12]. Если потенциал $V(t, x)$ аналитичен, то для нормы $\|u(t)\|_r$ верна оценка (12), см. [31]. Какие-либо классические аналоги этих результатов нам не известны.

3. Квантовая КАМ-теория

Пусть $(p, q) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^d$. Рассмотрим интегрируемый гамильтониан $h_0(p) = |p|^2$ и его квазипериодическое по времени возмущение $H_\varepsilon(p, q) = h_0(p) + \varepsilon V(\omega t, q)$, $\omega \in \mathbb{R}^n$, где V – аналитическая функция. Тогда для соответствующего гамильтонова уравнения верна КАМ-теорема: для типичного начального условия $(p(0), q(0))$ и типичного ω решение $(p(t), q(t))$ является квазипериодическим по времени.

Квантованный гамильтониан определяет динамическое уравнение (10). Будем рассматривать вектор ω как параметр задачи: $\omega \in U \subseteq \mathbb{R}^n$. Введем сокращенное обозначение $L^2 = L^2(\mathbb{T}^d, \mathbb{C})$ и снабдим это пространство базисом из экспонент

$$\{e^{is \cdot x}, s \in \mathbb{Z}^d\}$$

($\cdot$ обозначает евклидово скалярное произведение). Для каждого линейного оператора $B: L^2 \rightarrow L^2$ будем обозначать его матрицу в этом базисе через $(B_{ab}, a, b \in \mathbb{Z}^d)$.

Следующую теорему можно рассматривать как квантовый аналог приведенной выше КАМ-теоремы. Для $d = 1$ она была доказана в [5], а для $d \geq 2$ – в [16]. Нам неизвестно, как перейти к квазиклассическому пределу в этом результате.

ТЕОРЕМА 3.1. *Если $\varepsilon \ll 1$, то для большинства ω найдутся зависящий от φ комплексно-линейный изоморфизм $\Psi(\varphi) = \Psi_{\varepsilon, \omega}(\varphi)$, $\varphi \in \mathbb{T}^N$:*

$$\Psi(\varphi): L^2 \rightarrow L^2, \quad u(x) \mapsto \Psi(\varphi)u(x),$$

и ограниченный эрмитов оператор $Q = Q_{\varepsilon, \omega}$ такие, что кривая $u(t) \in L^2$ является решением уравнения (10) в том и только том случае, когда функция $v(t) = \Psi(t\omega)u(t)$ удовлетворяет

$$\dot{v} = i(\Delta v - \varepsilon Qv).$$

Матрица (Q_{ab}) блочно-диагональна, т. е. $Q_{ab} = 0$ при $|a| \neq |b|$, и удовлетворяет асимптотической формуле

$$Q_{ab} = (2\pi)^{-n-d} \int_{\mathbb{T}^n} \int_{\mathbb{T}^d} V(\varphi, x) e^{i(a-b) \cdot x} dx d\varphi + O(\varepsilon^\gamma), \quad \gamma > 0.$$

Кроме того, при каждом $p \in \mathbb{N}$ имеют место оценки $\|Q\|_{H^p, H^p} \leq C_1$ и $\|\Psi(\varphi) - \text{id}\|_{H^p, H^p} \leq \varepsilon C_2$.

Выражение “для большинства” означает “для всех $\omega \in U_\varepsilon \subset U$, где $\text{mes}(U \setminus U_\varepsilon) \leq \varepsilon^\kappa$ при некотором $\kappa > 0$ ”. В частности, при каждом таком ω все решения уравнения (10) почти периодичны по времени. Их соболевские нормы почти постоянны, а именно, справедливо следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Для ω как в теореме и при каждом p все решения уравнения (10) удовлетворяют оценке

$$(1 - C\varepsilon)\|u(0)\|_p \leq \|u(t)\|_p \leq (1 + C\varepsilon)\|u(0)\|_p \quad \forall t \geq 0.$$

Это свойство называется *динамической локализацией*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как Q блочно-диагональна, имеем $\|v(t)\|_p = \text{const}$. Теперь требуемая оценка вытекает из того, что $v(t) = \Psi(t)u(t)$ и $\|\Psi - \text{id}\|_{H^p, H^p} \leq \varepsilon C_2$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Пусть $n = 0$. Тогда уравнение (10) принимает вид $\dot{u} = -i(\Delta u + \varepsilon V(x)u)$. Теорема гласит, что это уравнение можно свести к блочно-диагональному уравнению $\dot{u} = -iAu$, где $A_{ab} = 0$ при $|a| \neq |b|$. Этот факт хорошо известен.

2) При $n = 1$ сформулированная теорема представляет собой теорему Флоке для периодического по времени уравнения (10). В отличие от конечномерного случая, этот результат справедлив лишь в рамках теории возмущений, т. е. для “типичных” частот $\omega \in \mathbb{R}$ и малых ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Уравнение (10) – это неавтономная линейная гамильтонова система на L^2 :

$$\dot{u} = -i \frac{\delta}{\delta \bar{u}} H_\varepsilon(u), \quad H_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \langle \nabla u, \nabla \bar{u} \rangle + \frac{1}{2} \varepsilon \langle V(\varphi_0 + t\omega, x)u, \bar{u} \rangle.$$

На расширенном фазовом пространстве $L^2 \times \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n = \{(u, \varphi, r)\}$ это уравнение записывается в виде автономной гамильтоновой системы

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -i \frac{\delta}{\delta \bar{u}} h_\varepsilon(u, \varphi, r), \\ \dot{\varphi} &= \nabla_r h_\varepsilon = \omega, \\ \dot{r} &= -\nabla_\varphi h_\varepsilon, \end{aligned}$$

где $h_\varepsilon(u, \varphi, r, \varepsilon) = \omega \cdot r + \langle \nabla u, \nabla \bar{u} \rangle / 2 + \varepsilon \langle V(\varphi, x)u, \bar{u} \rangle / 2$. Таким образом, h_ε есть малое возмущение интегрируемого квадратичного гамильтониана $h_0 = \omega \cdot r + \langle \nabla u, \nabla \bar{u} \rangle / 2$. К возмущениям h_0 применима КАМ-теорема из [16]. Чтобы показать, как отсюда вытекает теорема 3.1, запишем h_ε в виде

$$h_\varepsilon(u, \varphi, r, \varepsilon) = \omega \cdot r + \frac{1}{2} \langle \nabla u, \nabla \bar{u} \rangle + \varepsilon f(u, \varphi, r).$$

В нашем случае $f = \langle V(\varphi, x)u, \bar{u} \rangle / 2$. Следующая теорема является основным результатом работы [16].

ТЕОРЕМА 3.3. *Существуют область $\mathcal{O} = \{\|u\| < \delta\} \times \mathbb{T}^n \times \{|r| < \delta\}$ и симплектическое преобразование $\Phi: \mathcal{O} \rightarrow L^2 \times \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$, переводящее h_ε в*

$$h_0 = \omega' \cdot r + \frac{1}{2} \langle \nabla u, \nabla \bar{u} \rangle + \varepsilon \langle Qu, \bar{u} \rangle + f'(u, \varphi, r),$$

$$\text{где } f' = O(|u|^3) + O(|r|^2).$$

Поскольку тор $T_0 = \{0\} \times \mathbb{T}^n \times \{0\}$ инвариантен для преобразованной системы, тор $\Phi(T_0)$ инвариантен для исходного уравнения. Это обычное КАМ-утверждение. В данном случае оно тривиально, так как просто говорит, что $u(t) \equiv 0$ является решением исходного уравнения.

Но сформулированная выше КАМ-теорема дает больше. Простой анализ ее доказательства (см. замечание в [16]) показывает, что если возмущение εf квадратично по u и не зависит от r , то КАМ-преобразования линейны по u и не меняют ω . Поэтому преобразованные гамильтонианы остаются квадратичными по u . Следовательно, в гамильтониане h_0 имеем $f' = 0$, т. е.

$$h_0 = \omega' \cdot r + \frac{1}{2} \langle \nabla u, \nabla \bar{u} \rangle + \varepsilon \langle Qu, \bar{u} \rangle.$$

Этим доказана теорема 3.1.

4. Квантовая диффузия

Пусть $(p, q) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^d$. Рассмотрим гамильтониан $H_\varepsilon(p, q) = |p|^2 + \varepsilon V(\omega t, q)$, где $\omega \in \mathbb{R}^N$ и V – аналитическая функция. Тогда:

- i) согласно КАМ-теории, для типичных ω и типичных начальных условий (p_0, q_0) решение с $(p(0), q(0)) = (p_0, q_0)$ будет квазипериодическим по времени;
- ii) для исключительных значений ω и (p_0, q_0) “должна” иметь место диффузия Арнольда: действие $p(t)$ соответствующего решения медленно “расплывается” от точки p_0 .

Как и выше, квантованный гамильтониан задает динамическое уравнение (10).

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. *Пусть $d = 1$, $N \geq 2$ и потенциал V невырожден в надлежащем смысле. Тогда найдутся гладкая функция $u(0, x)$ и вектор $\omega \in \mathbb{R}^N$ такие, что*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|_s = \infty \quad (13)$$

для некоторого $s \geq 1$.

Пример периодического по времени потенциала V , удовлетворяющего (13), дан в [10]. По предположению Элиассона, справедливость утверждения 4.1 для типичного потенциала может быть установлена методами его работы [14]. Доказательство этого будет дано в готовящейся к печати работе.

5. Возмущенные гармонические и ангармонические осцилляторы

В разделах 3 и 4 рассматривались шрёдингеровские эволюционные уравнения с периодическими граничными условиями. Известны некоторые подобные результаты для уравнений на всем пространстве с растущими потенциалами:

- Рассмотрим уравнение Шрёдингера на $\mathbb{R}^1$:

$$\dot{u} = -i(-u_{xx} + (x^2 + \mu x^{2m})u + \varepsilon V(t\omega, x)u),$$

где $\mu > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, потенциал $V(\varphi, x)$ является C^2 -гладким по φ , x , аналитическим по φ и равномерно ограниченным по φ , x . Тогда справедлив аналог теоремы 3.1. Нужную КАМ-теорему см. в [21; § 2.5].

- Согласно Бамбузи и Граффи [5], тот же результат верен и для нецелых m , т. е. для уравнения

$$\dot{u} = -i(-u_{xx} + Q(x)u + \varepsilon V(\varphi_0 + t\omega, x)u),$$

где $Q(x) \sim |x|^\alpha$, $\alpha > 2$, при $|x| \rightarrow \infty$. Потенциал V может неограниченно возрастать при $|x| \rightarrow \infty$.

- Лиу и Юань [24] допускают более быстрый рост $V(x)$ по x . С помощью их результата можно доказать аналог теоремы 3.1 для *квантового осциллятора Дуффинга*

$$\dot{u} = -i(-u_{xx} + x^4 u + \varepsilon x V(\varphi_0 + t\omega, x)u).$$

- Согласно Греберу и Томанну [17], то же верно и для возмущенного гармонического осциллятора

$$\dot{u} = -i(-u_{xx} + x^2 u + \varepsilon V(\varphi_0 + t\omega, x)u).$$

Что происходит в старших размерностях $d \geq 2$, остается совершенно неизвестным.

6. Квантовая адиабатическая теорема в квазиклассическом пределе

В этом разделе рассматриваются классическая система на $T^*\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ с гамильтонианом

$$H(p, q, \tau) = |p|^2 + V(\tau, q), \quad \tau = \varepsilon t, \quad (14)$$

и соответствующая ей квантовая система

$$i\hbar \dot{u} = -\hbar^2 \Delta u + V(\tau, x)u = \mathcal{H}_\tau u, \quad \tau = \varepsilon t \quad (15)$$

(см. (4)). Предполагается, что для каждого τ потенциал $V(\tau, x)$ неограниченно возрастает с ростом $|x|$, так что оператор $\mathcal{H}_\tau$ имеет дискретный спектр.

Мы зафиксируем достаточно малое ε , чтобы можно было что-то сказать о динамике классической системы, а затем перейдем к пределу при $\hbar \rightarrow 0$. То, что такая предельная динамика может сильно отличаться от описанной в п. 2.1 (где $\hbar$ фиксировано и $\varepsilon \rightarrow 0$), было показано М. Берри [7] на следующем замечательном примере. Пусть $d = 1$ и потенциал V имеет при $\tau = \text{const}$ две (несимметричные) потенциальные ямы. В общем положении, при $\tau = \text{const}$ и достаточно малых $\hbar$, для каждой ямы есть некоторое семейство чистых квантовых

состояний, локализованных в основном в этой яме. Рассмотрим решение $u(t, x)$ уравнения (15) с начальным условием, представляющим собой чистое квантовое состояние из левой ямы. Для сколь угодно малых ε найдется $\hbar_0 = \hbar_0(\varepsilon) > 0$ такое, что если $0 < \hbar < \hbar_0$, то при каждом $t \in [0, 1/\varepsilon]$ функция $u(t, \cdot)$ также локализована в левой яме. С другой стороны, при весьма общих предположениях, для сколь угодно малых $\hbar$ найдутся число $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\hbar)$ и положительные постоянные $a_1 < a_2$ такие, что если $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, то функция $u(t, \cdot)$ локализована в правой яме при $a_1 \hbar / \varepsilon \leq t \leq a_2 \hbar / \varepsilon$.

Случай $\varepsilon \sim \hbar$ обсуждается в [19]. В дальнейшем через ε_0 , c , c_i обозначаются положительные постоянные.

6.1. Системы с одной степенью свободы. Рассмотрим сначала случай, когда классический гамильтониан (14) имеет одну степень свободы. Мы будем предполагать, что потенциал V является C^∞ -гладким и что в фазовом пространстве гамильтоновой системы (14) при каждом $\tau = \text{const}$ есть область, заполненная замкнутыми траекториями. В этой области введем переменные действие-угол: $I = I(p, q, \tau)$, $\chi = \chi(p, q, \tau) \bmod 2\pi$ (т.е. $\chi \in \mathbb{T}^1$). Обратим эти соотношения: $p = p(I, \chi, \tau)$, $q = q(I, \chi, \tau)$. Пусть существует интервал $[a_1, b_1]$, $0 < a_1 < b_1$, такой, что отображение $(I, \chi, \tau) \mapsto (p, q, \tau)$ гладкое при $I \in [a_1, b_1]$, $\chi \in \mathbb{T}^1$, $\tau \in [0, 1]$. Выразим гамильтониан (14) через переменную действия и медленное время: $H(p, q, \tau) = E(I, \tau)$.

Для $\varepsilon > 0$ пусть $p(t)$, $q(t)$ есть решение возмущенной системы с гамильтонианом $H(p, q, \varepsilon t)$.

ТЕОРЕМА 6.1 (см., например, [2]). *Существуют ε_0 и c_1 такие, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ выполнено*

$$|I(p(t), q(t), \varepsilon t) - I(p(0), q(0), 0)| < c_1 \varepsilon \quad \text{для } 0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Теперь предположим, что при каждом $\tau = \text{const} \in [0, 1]$ и каждом $I_* \in (a_1, b_1)$ гамильтониан H (14) имеет единственную траекторию с действием $I = I_*$. Рассмотрим соответствующую квантовую систему (15). У оператора $\mathcal{H}_\tau$ имеется набор собственных функций $\varphi_s(\tau) = \varphi_s(\tau, x)$ таких, что

$$\|\varphi_s(\tau)\| = 1, \quad \varphi_s(\tau, x) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad (16)$$

а соответствующие им собственные значения имеют вид $\lambda_s(\tau) = E(I_s, \tau) + O(\hbar^2)$, где $I_s = \hbar(s + 1/2) \in [a_1, b_1]$ (правило квантования Бора–Зоммерфельда, см. [26]). Мы считаем потенциал V таким, что стремление к нулю в (16) происходит быстрее, чем для любой отрицательной степени $|x|$. Пусть $u(t, x)$ – решение нестационарного уравнения (15) с начальным условием – чистым состоянием $u(0, x) = \varphi_{s_0}(0)$. Обозначим через $\mathbb{P}_{(\alpha, \beta)}^\tau$ ортогональный проектор в $L^2(\mathbb{R})$ на линейную оболочку векторов $\varphi_s(\tau)$ с $I_s \in (\alpha, \beta)$. Подход из [9] приводит к следующей гипотезе.

ГИПОТЕЗА 6.2. *Существуют ε_0 и c_1 такие, что если $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $0 < \hbar \leq \varepsilon$, то при любом $m \geq 1$ для некоторого $c_2(m) > 0$ выполнено*

$$\sup_{0 \leq t \leq \varepsilon^{-1}} \|u - \mathbb{P}_{(I_{s_0} - c_1 \varepsilon, I_{s_0} + c_1 \varepsilon)}^{\varepsilon t} u\| < c_2(m) \left(\frac{\hbar}{\varepsilon}\right)^m. \quad (17)$$

Таким образом, $u(t, \cdot)$ остается вблизи собственного подпространства, отвечающего собственным значениям из $O(\varepsilon)$ -окрестности числа $E(I_{s_0}, \varepsilon t)$.

6.2. Системы с несколькими степенями свободы. Пусть теперь классический гамильтониан (14) имеет $d > 1$ степеней свободы. Как и выше, считаем, что $V \in C^\infty$. При каждом $\tau = \text{const}$ пусть соответствующая гамильтонова система вполне интегрируема и в ее фазовом пространстве есть область, заполненная инвариантными торами. Введем в этой области переменные действие-угол $I = I(p, q, \tau)$, $\chi = \chi(p, q, \tau) \in \mathbb{T}^d$. Обратим эти соотношения: $p = p(I, \chi, \tau)$, $q = q(I, \chi, \tau)$. Пусть существует компактная область $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}_+^d$ такая, что отображение $(I, \chi, \tau) \mapsto (p, q, \tau)$ гладкое при $I \in \mathcal{A}$, $\chi \in \mathbb{T}^d$, $\tau \in [0, 1]$. Выразим гамильтониан (14) через переменные действия и медленное время: $H(p, q, \tau) = E(I, \tau)$, и обозначим через $\omega(I, \tau) = \partial E / \partial I$ вектор частот невозмущенного движения. Допустим, что система невырождена или изоэнергетически невырождена (см. определение в [2; приложение 8]). Динамика переменных $(I, \chi)(t) = (I, \chi)(p(t), q(t), \varepsilon t)$ описывается гамильтонианом вида (см. [2; § 52E рус. изд. или § 52F англ. изд.])

$$\mathcal{H}(I, \chi, \tau, \varepsilon) = E(I, \tau) + \varepsilon H_1(I, \chi, \tau), \quad (18)$$

где H_1 – гладкая функция на $\mathcal{A} \times \mathbb{T}^d \times [0, 1]$.

Пусть K_0 – компактное подмножество $\mathbb{R}^{2d}$. Для $(p_0, q_0) \in K_0$ обозначим через $(p, q)(t) = (p, q)(t, p_0, q_0)$ решение возмущенной системы с начальными условиями $(p, q)(0) = (p_0, q_0)$.

ТЕОРЕМА 6.3 (см., например, [3, [25]]). *Если $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, то*

$$\int_{K_0} \sup_{0 \leq t \leq \varepsilon^{-1}} |I(p(t), q(t), \varepsilon t) - I(p(0), q(0), 0)| dp_0 dq_0 < c_1 \sqrt{\varepsilon}.$$

Для систем с $d > 1$ степенями свободы значение вектора действия как функции времени может для некоторых начальных условий значительно изменяться из-за влияния резонансов между невозмущенными частотами, т. е. компонентами вектора $\omega(I, \tau)$. Мы говорим, что в точке (I, τ) имеет место резонанс, если $(k \cdot \omega)(I, \tau) = 0$ для некоторого вектора $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ ($\cdot$ обозначает евклидово скалярное произведение).

Рассмотрим теперь соответствующую квантовую систему (15). При некоторых условиях оператор $\mathcal{H}_\tau$ имеет набор собственных функций $\varphi_m(\tau) = \varphi_m(\tau, x)$, удовлетворяющих (16), с собственными значениями $\lambda_m(\tau) = E(I_m, \tau) + O(\hbar^2)$, где $I_m = \hbar(m + \kappa/4) \in \mathcal{A}$, $m \in \mathbb{Z}_+^d$, а $\kappa \in \mathbb{Z}^d$ есть вектор индексов Маслова–Арнольда [26] (правило квантования Бора–Зоммерфельда). Рассмотрим решение $u(t, x)$ нестационарного уравнения (15) с начальным условием – чистым состоянием $u(0, x) = \varphi_{m_0}(0)$. Если бы мы зафиксировали некоторое малое $\hbar$ и перешли к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, то была бы применима теорема 2.1. Но нас сейчас интересует другой предельный переход: $\hbar \rightarrow 0$ при фиксированном малом ε . О получающейся предельной динамике мало что известно. Поэтому мы сформулируем естественные гипотезы о квантовой динамике в пределе $\hbar \rightarrow 0$ и будем использовать их вместе с известными результатами о динамике для классического гамильтониана (14) с малым ε .

Для справедливости теоремы 2.1 важно, чтобы $\lambda_{m_0}(\tau)$ было изолированным собственным значением при всех τ . Рассмотрим расстояние между $\lambda_m(\tau)$

и $\lambda_{m_0}(\tau)$, где $m, m_0 \in \mathbb{Z}_+^d$ таковы, что $m \neq m_0$ и $|m - m_0| \sim 1$:

$$\begin{aligned}\lambda_m(\tau) - \lambda_{m_0}(\tau) &= E(I_m, \tau) - E(I_{m_0}, \tau) + O(\hbar^2) \\ &= (I_m - I_{m_0}) \cdot \omega(I_{m_0}, \tau) + O((I_m - I_{m_0})^2) + O(\hbar^2) \\ &= \hbar(m - m_0) \cdot \omega(I_{m_0}, \tau) + O(\hbar^2).\end{aligned}$$

Таким образом, если в точке (I_{m_0}, τ) нет резонанса, то расстояние между $\lambda_{m_0}(\tau)$ и ближайшими собственными значениями будет $\sim \hbar$. Однако при наличии резонанса $k \cdot \omega(I_{m_0}, \tau) = 0$, и мы имеем $\lambda_{m_0+\nu k}(\tau) - \lambda_{m_0}(\tau) = O(\hbar^2)$ для целых $\nu \sim 1$. Тем самым, классические резонансы соответствуют почти кратным точкам спектра квантовой задачи и, как ожидается, должны появляться также и в вопросах квантовой адиабатичности.

Для гамильтониана (14) имеется довольно подробная информация о динамике в двухчастотном случае $d = 2$. Воспользуемся ею и правилом квантования Бора–Зоммерфельда для формулировки гипотез о динамике двумерной квантовой системы (15).

Следуя Дираку [13], допустим, что²

$$\omega_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial \tau} - \omega_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial \tau} - \left(\omega_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial I} - \omega_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial I} \right) \frac{\partial H_1}{\partial \chi} > c^{-1} \quad (19)$$

для всех I, φ . Из общих результатов В. И. Арнольда об усреднении в двухчастотных системах [1], [3] вытекает, что в этом случае

$$|I(p(t), q(t), \varepsilon t) - I(p(0), q(0), 0)| < c_1 \sqrt{\varepsilon} \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon}. \quad (20)$$

На основании правила квантования Бора–Зоммерфельда и по аналогии с гипотезой 6.2 естественно предположить, что при $0 \leq t \leq 1/\varepsilon$ полная вероятность $\|u(t)\|_{L^2}^2$ в основном сосредоточена в состояниях, соответствующих действиям из $C\sqrt{\varepsilon}$ -окрестности исходного действия I_{s_0} .

Пусть вместо (19) выполнено условие (см. сноску 2)

$$\omega_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial \tau} - \omega_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial \tau} > c^{-1}. \quad (21)$$

Это – частный случай условия, введенного В. И. Арнольдом [1]. Если наряду с (21) выполнено некоторое условие общего положения (см. подробности в [3]), то оценка (20) с заменой $\sqrt{\varepsilon}$ на $\sqrt{\varepsilon} |\ln \varepsilon|$ верна для всех начальных данных вне множества меры $O(\sqrt{\varepsilon})$ [3; § 6.1.8]. Последнее множество состоит в основном из начальных точек траекторий с *захватом в резонанс*. Вдоль этих траекторий действие меняется на величину порядка ~ 1 . Так как для некоторых начальных данных $I(0), \chi(0)$ решение $I(t)$ не остается в окрестности $I(0)$, то не следует ожидать выполнения для квантовой системы (15) оценки типа гипотезы 6.2, где вне малого интервала значений действия амплитуды собственных мод стремятся к 0 при $\hbar \rightarrow 0$.

²Условие (19) означает, что отношение частот меняется с ненулевой скоростью вдоль решений системы с гамильтонианом (18): $\omega_2^2 (d/dt)(\omega_1/\omega_2) > c^{-1}\varepsilon$. Подобно этому, условие (21) означает, что отношение частот меняется с ненулевой скоростью в адиабатической динамике: $\omega_2^2 (d/dt)(\omega_1/\omega_2)_{I=\text{const}} > c^{-1}\varepsilon$.

Рассмотрим классический гамильтониан (14) с условием (21). Тогда захват возможен лишь для конечного числа резонансов. Динамика при захвате в резонанс $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0$ с взаимно простыми k_1, k_2 такова [27]. Положим $(I, \chi)(t) = (I, \chi)(p(t), q(t), \varepsilon t)$. Пусть в начальный момент $t = 0$ резонанса нет:

$$k_1\omega_1(I(0), 0) + k_2\omega_2(I(0), 0) \neq 0,$$

и пусть $\tau_* \in (0, 1)$ – первый момент возникновения резонанса:

$$k_1\omega_1(I(0), \tau_*) + k_2\omega_2(I(0), \tau_*) = 0.$$

Тогда при $0 \leq \varepsilon t \leq \tau_*$ значения действий приближенно постоянны:

$$I(t) = I(0) + O(\sqrt{\varepsilon} \ln \varepsilon).$$

При $\tau_* \leq \varepsilon t \leq 1$ система захвачена в резонанс и эволюция действий описывается двумя соотношениями:

$$\begin{aligned} k_1\omega_1(I(t), \varepsilon t) + k_2\omega_2(I(t), \varepsilon t) &= O(\sqrt{\varepsilon} \ln \varepsilon), \\ k_2I_1(t) - k_1I_2(t) &= k_2I_1(0) - k_1I_2(0) + O(\sqrt{\varepsilon} \ln \varepsilon). \end{aligned}$$

Первое из этих соотношений означает, что система остается вблизи резонанса, а второе – что динамика имеет приближенный первый интеграл. Вместе эти соотношения приближенно определяют траекторию $I(t)$ для $\tau_* \leq \varepsilon t \leq 1$.

Опираясь на это описание и правило квантования Бора–Зоммерфельда, мы по аналогии с гипотезой 6.2 предлагаем следующую гипотезу: для квантовой задачи (15) захват в резонанс классической системы (14) выражается переходом количества $C\varepsilon$ полной вероятности из окрестности начально возбужденного чистого состояния, отвечающего действию I_{s_0} , в окрестность состояния $s_t \in \mathbb{Z}^2$ такого, что вектор решетки $I(t) = \hbar(s_t + \kappa/4)$ удовлетворяет двум указанным выше соотношениям. Этот переход осуществляется при $t \geq \varepsilon^{-1}\tau_*$. Когда $\hbar \rightarrow 0$, это количество $C\varepsilon$ остается положительным порядка ε .

Известно также более подробное описание динамики фазовых точек, захваченных в резонанс [27]. Рассмотрим резонансную фазу $\gamma = k_1\chi_1 + k_2\chi_2$. Оказывается, что поведение γ описывается вспомогательной гамильтоновой системой с одной степенью свободы и гамильтонианом вида

$$F = \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{\alpha(\tau)p_\gamma^2}{2} + f(\gamma, \tau) + L(\tau)\gamma \right).$$

Здесь p_γ, γ – канонически сопряженные переменные, функция f является 2π -периодической по γ и $\alpha, L \neq 0$. Фазовый портрет этой системы с замороженным τ содержит области колебаний γ . Движение в этих областях приближенно задается композицией движения вдоль траектории гамильтониана F с замороженным τ и медленной эволюции этой траектории за счет изменения τ . Эта эволюция подчиняется адиабатическому закону: площадь, ограниченная траекторией, остается постоянной. В исходных переменных p, q это движение представляется движением вдоль медленно меняющегося тора. Угловыми переменными на этом торе являются γ и $\psi = l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2$, где l_1 и l_2 – такие целые числа, что $k_1l_2 - k_2l_1 = 1$. Сам тор смещается вдоль резонансной поверхности $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0$, как описано выше. Неизвестно, какой квантовый объект соответствует этому тору.

Авторы благодарны за полезные обсуждения Сергею Доброхотову, Хока-ну Элиассону и Иоханнесу Шестранду.

Список литературы

- [1] В. И. Арнольд, “Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонансы”, *Докл. АН СССР*, **161**:1 (1965), 9–12; англ. пер.: V. I. Arnold, “Conditions for the applicability, and estimate of the error, of an averaging method for systems which pass through states of resonance in the course of their evolution”, *Soviet Math. Dokl.*, **6** (1965), 331–334.
- [2] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1974, 431 с.; англ. пер.: V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, 2nd ed., Grad. Texts in Math., **60**, Springer-Verlag, New York, 1989, xvi+508 pp.
- [3] В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, *Математические аспекты классической и небесной механики*, 2-е изд., переработанное и дополненное, УРСС, М., 2002, 414 с.; англ. пер.: V. I. Arnold, V. V. Kozlov, A. I. Neishtadt, *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*, 3rd rev. ed., Encyclopaedia Math. Sci., **3**, Springer-Verlag, Berlin, 2006, xiv+518 pp.
- [4] J. E. Avron, A. Elgert, “Adiabatic theorem without a gap condition”, *Comm. Math. Phys.*, **203**:2 (1999), 445–463.
- [5] D. Bambusi, S. Graffi, “Time quasi-periodic unbounded perturbations of Schrödinger operators and KAM methods”, *Comm. Math. Phys.*, **219**:2 (2001), 465–480.
- [6] V. V. Belov, S. Yu. Dobrokhotov, T. Ya. Tudorovskiy, “Operator separation of variables for adiabatic problems in quantum and wave mechanics”, *J. Engrg. Math.*, **55**:1-4 (2006), 183–237.
- [7] M. V. Berry, “The adiabatic limit and the semiclassical limit”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **17**:6 (1984), 1225–1233.
- [8] M. Born, V. Fock, “Beweis des Adiabatenatzes”, *Z. Phys.*, **51**:3-4 (1928), 165–180.
- [9] В. А. Боровиков, *Поля в плавно нерегулярных волноводах и задача о вариации адиабатического инварианта*, Препринт № 99, ИПМ АН СССР, 1978, 66 с.
- [10] J. Bourgain, “Growth of Sobolev norms in linear Schrödinger equations with quasi-periodic potential”, *Comm. Math. Phys.*, **204**:1 (1999), 207–247.
- [11] J. Bourgain, “On growth of Sobolev norms in linear Schrödinger equations with smooth time dependent potentials”, *J. Anal. Math.*, **77**:1 (1999), 315–348.
- [12] J.-M. Delort, “Growth of Sobolev norms of solutions of linear Schrödinger equations on some compact manifolds”, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2010**:12 (2010), 2305–2328.
- [13] P. A. M. Dirac, “The adiabatic invariance of the quantum integrals”, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, **107** (1925), 725–734.
- [14] L. H. Eliasson, “Ergodic skew-systems on $\mathbb{T}^d \times SO(3, \mathbb{R})$ ”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **22**:5 (2002), 1429–1449.
- [15] H. L. Eliasson, S. B. Kuksin, “On reducibility of Schrödinger equations with quasiperiodic in time potentials”, *Comm. Math. Phys.*, **286**:1 (2009), 125–135.
- [16] L. H. Eliasson, S. B. Kuksin, “KAM for the nonlinear Schrödinger equation”, *Ann. of Math. (2)*, **172**:1 (2010), 371–435.
- [17] B. Grébert, L. Tomann, “KAM for the quantum harmonic oscillator”, *Comm. Math. Phys.*, **307**:2 (2011), 383–427.
- [18] A. Joye, C.-E. Pfister, “Superadiabatic evolution and adiabatic transition probability between two nondegenerate levels isolated in the spectrum”, *J. Math. Phys.*, **34**:2 (1993), 454–479.

- [19] М. В. Карасев, “Новые глобальные асимптотики и аномалии в задаче квантования адиабатического инварианта”, *Функц. анализ и его прил.*, **24**:2 (1990), 24–36; англ. пер.: M. V. Karasev, “New global asymptotics and anomalies for the problem of quantization of the adiabatic invariant”, *Funct. Anal. Appl.*, **24**:2 (1990), 104–114.
- [20] Т. Kato, “On the adiabatic theorem of quantum mechanics”, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **5** (1950), 435–439.
- [21] S. B. Kuksin, *Nearly integrable infinite-dimensional Hamiltonian systems*, Lecture Notes in Math., **1556**, Springer-Verlag, Berlin, 1993, xxviii+101 pp.
- [22] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. I: *Механика*, 4-е изд., Наука, М., 1988, 216 с.; англ. пер. 1-го изд.: L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Course of theoretical physics*, v. 1: *Mechanics*, Pergamon Press, Oxford–London–New York–Paris; Addison–Wesley Publishing Co., Inc., Reading, MA, 1960, vii+165 pp.
- [23] V. F. Lazutkin, *KAM theory and semiclassical approximations to eigenfunctions*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **24**, Springer-Verlag, Berlin, 1993, x+387 pp.
- [24] Jianjun Liu, Xiaoping Yuan, “Spectrum for quantum Duffing oscillator and small-divisor equation with large-variable coefficient”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **63**:9 (2010), 1145–1172.
- [25] P. Lochak, C. Meunier, *Multiphase averaging for classical systems. With applications to adiabatic theorems*, transl. from the French by H. S. Dumas, *Appl. Math. Sci.*, **72**, Springer-Verlag, New York, 1988, xii+360 pp.
- [26] В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1976, 296 с.; англ. пер.: V. P. Maslov, M. V. Fedoryuk, *Semi-classical approximation in quantum mechanics*, *Math. Phys. Appl. Math.*, **7**, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht–Boston, MA, 1981, ix+301 pp.
- [27] А. И. Нейштадт, “Захват в резонанс и рассеяние на резонансах в двухчастотных системах”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **250**, Наука, М., 2005, 198–218; англ. пер.: A. I. Neishtadt, “Capture into resonance and scattering on resonances in two-frequency systems”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **250** (2005), 183–203.
- [28] Н. Н. Нехорошев, “Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым”, *УМН*, **32**:6(198) (1977), 5–66; англ. пер.: N. N. Nekhoroshev, “An exponential estimate of the time of stability of nearly-integrable Hamiltonian systems”, *Russian Math. Surveys*, **32**:6 (1977), 1–65.
- [29] G. Nenciu, “Linear adiabatic theory. Exponential estimates”, *Comm. Math. Phys.*, **152**:3 (1993), 479–496.
- [30] J. Sjöstrand, “Projecteurs adiabatiques du point de vue pseudodifférentiel”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **317**:2 (1993), 217–220.
- [31] W.-M. Wang, “Logarithmic bounds on Sobolev norms for time dependent linear Schrödinger equations”, *Comm. Partial Differential Equations*, **33**:12 (2008), 2164–2179.

С. Б. Куksин (S. B. Kuksin)

Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris, France;
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: kuksin@gmail.com

Поступила в редакцию
 15.09.2012

А. И. Нейштадт (A. I. Neishtadt)

Loughborough University, UK;
 Институт космических исследований РАН
E-mail: A.Neishtadt@lboro.ac.uk