Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Миронов, Т. Е. Панов, Гамильтоново-минимальные лагранжевы подмногообразия в торических многообразиях, *УМН*, 2013, том 68, выпуск 2, 203–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9516>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:30:19

Гамильтоново-минимальные лагранжевы подмногообразия в торических многообразиях

А. Е. Миронов, Т. Е. Панов

Понятие гамильтоновой минимальности (H -минимальности) для лагранжевых подмногообразий является симплектическим аналогом минимальности в римановой геометрии. Лагранжево погружение называется H -минимальным, если вариации его объема вдоль всех гамильтоновых векторных полей равны нулю. Это понятие было введено в работе О [1] в связи со знаменитой *гипотезой Арнольда* о числе неподвижных точек гамильтонова симплектоморфизма.

В работах [2] и [3] авторами было введено и изучено семейство H -минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^m$, происходящих из пересечений вещественных квадрик. Здесь мы обобщаем эту конструкцию, определяя H -минимальные подмногообразия в торических многообразиях.

Начальными данными является пересечение $m - n$ эрмитовых квадрик в $\mathbb{C}^m$:

$$\mathcal{Z} = \left\{ z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : \sum_{k=1}^m \gamma_{jk} |z_k|^2 = \delta_j \text{ для } j = 1, \dots, m - n \right\}. \quad (1)$$

Мы предполагаем, что это пересечение непусто, невырождено и рационально; эти условия выражаются в терминах векторов-коэффициентов $\gamma_k = (\gamma_{1k}, \dots, \gamma_{m-n,k})^t \in \mathbb{R}^{m-n}$ следующим образом:

- a) $\delta \in \mathbb{R}_{\geq} \langle \gamma_1, \dots, \gamma_m \rangle$ (т.е. δ лежит в конусе, порожденном $\gamma_1, \dots, \gamma_m$);
- b) если $\delta \in \mathbb{R}_{\geq} \langle \gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_p} \rangle$, то $p \geq m - n$;
- c) векторы $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ порождают решетку L полного ранга в $\mathbb{R}^{m-n}$.

При этих условиях $\mathcal{Z}$ является гладким $(m+n)$ -мерным подмногообразием в $\mathbb{C}^m$, а

$$T_{\Gamma} = \{ (e^{2\pi i \langle \gamma_1, \varphi \rangle}, \dots, e^{2\pi i \langle \gamma_m, \varphi \rangle}), \varphi \in \mathbb{R}^{m-n} \} = \mathbb{R}^{m-n} / L^*$$

является $(m - n)$ -мерным тором. Определим также

$$D_{\Gamma} = (\tfrac{1}{2}L^*)/L^* \cong (\mathbb{Z}_2)^{m-n}.$$

Заметим, что D_{Γ} канонически вкладывается в качестве подгруппы в T_{Γ} .

Пусть $\mathcal{R} \subset \mathcal{Z}$ – подмножество вещественных точек:

$$\mathcal{R} = \left\{ u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m : \sum_{k=1}^m \gamma_{jk} u_k^2 = \delta_j \text{ для } j = 1, \dots, m - n \right\}.$$

Мы “разнесем” подмножество $\mathcal{R}$ действием тора T_{Γ} , т.е. рассмотрим множество T_{Γ} -орбит, проходящих через $\mathcal{R}$. Более точно, рассмотрим отображение

$$j: \mathcal{R} \times T_{\Gamma} \longrightarrow \mathbb{C}^m, \quad (u, \varphi) \mapsto u \cdot \varphi = (u_1 e^{2\pi i \langle \gamma_1, \varphi \rangle}, \dots, u_m e^{2\pi i \langle \gamma_m, \varphi \rangle})$$

и заметим, что $j(\mathcal{R} \times T_{\Gamma}) \subset \mathcal{Z}$. Группа D_{Γ} диагонально действует на $\mathcal{R}_{\Gamma} \times T_{\Gamma}$; это действие свободно, будучи свободным на втором сомножителе. Факторпространство

$$N = \mathcal{R} \times_{D_{\Gamma}} T_{\Gamma}$$

является m -мерным многообразием.

ТЕОРЕМА 1 [2]. *Отображение $j: \mathcal{R} \times T_{\Gamma} \rightarrow \mathbb{C}^m$ индуцирует H -минимальное лагранжево погружение $i: N \hookrightarrow \mathbb{C}^m$.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-01-92104-Я), фонда “Династия” и гранта 2010-220-01-077 Правительства РФ. Первый автор поддержан также грантами Президента РФ МД-5134.2012.1 и НШ-544.2012.1. Второй автор поддержан также грантами Президента РФ МД-111.2013.1 и НШ-4995-2012.1 и грантом РФФИ 11-01-00694.

DOI: 10.4213/rm9516

Факторпространство $\mathcal{Z}/\mathbb{T}^m$ по действию тора $\mathbb{T}^m \subset \mathbb{C}^m$ отождествляется с множеством неотрицательных решений системы линейных уравнений $\sum_{k=1}^m \gamma_k y_k = \delta$. Это множество описывается выпуклым n -мерным полиэдром

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_i, x \rangle + b_i \geq 0 \text{ для } i = 1, \dots, m\}, \quad (2)$$

где $(b_1, \dots, b_m)$ – произвольное решение, а система векторов $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ транспонирована к базису решений однородной системы $\sum_{k=1}^m \gamma_k y_k = 0$. Мы называем P ассоциированным полиэдром системы квадрик (1).

Пусть Λ – решетка ранга n , порожденная векторами $a_1, \dots, a_m$. Полиэдр (2) называется *дельзантовым*, если для любой вершины $x \in P$ векторы $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$, нормальные к гиперграням, сходящимся в вершине x , образуют базис решетки Λ .

ТЕОРЕМА 2 [3]. *Погружение $i: N \hookrightarrow \mathbb{C}^m$ является вложением тогда и только тогда, когда ассоциированный полиэдр P дельзантов.*

Теперь рассмотрим две системы квадрик

$$\mathcal{Z}_\Gamma = \left\{ z \in \mathbb{C}^m : \sum_{k=1}^m \gamma_k |z_k|^2 = c \right\}, \quad \mathcal{Z}_\Delta = \left\{ z \in \mathbb{C}^m : \sum_{k=1}^m \delta_k |z_k|^2 = d \right\},$$

$\gamma_k, c \in \mathbb{R}^{m-n}$, $\delta_k, d \in \mathbb{R}^{m-\ell}$, такие, что множества $\mathcal{Z}_\Gamma$, $\mathcal{Z}_\Delta$ и $\mathcal{Z}_\Gamma \cap \mathcal{Z}_\Delta$ удовлетворяют условиям а)–с) выше. Предположим также, что полиэдры, ассоциированные с $\mathcal{Z}_\Gamma$, $\mathcal{Z}_\Delta$ и $\mathcal{Z}_\Gamma \cap \mathcal{Z}_\Delta$, дельзантовы.

Определим вещественные пересечения квадрик $\mathcal{R}_\Gamma$, $\mathcal{R}_\Delta$, торы $T_\Gamma \cong \mathbb{T}^{m-n}$, $T_\Delta \cong \mathbb{T}^{m-\ell}$ и группы $D_\Gamma \cong \mathbb{Z}_2^{m-n}$, $D_\Delta \cong \mathbb{Z}_2^{m-\ell}$ как описано выше.

Рассмотрим торическое многообразие V , получаемое симплектической редукцией пространства $\mathbb{C}^m$ по действию тора, соответствующего первой системе квадрик: $V = \mathcal{Z}_\Gamma / T_\Gamma$. Это – кэлерово многообразие вещественной размерности $2n$. Факторпространство $\mathcal{R}_\Gamma / D_\Gamma$ является множеством вещественных точек в V и имеет размерность n . Рассмотрим подмножество в $\mathcal{R}_\Gamma / D_\Gamma$, задаваемое второй системой квадрик:

$$\mathcal{S} = (\mathcal{R}_\Gamma \cap \mathcal{R}_\Delta) / D_\Gamma,$$

тогда $\dim \mathcal{S} = n + \ell - m$. Наконец, определим n -мерное подмногообразие в V :

$$N = \mathcal{S} \times_{D_\Delta} T_\Delta.$$

ТЕОРЕМА 3. *N является H -минимальным лагранжесвым подмногообразием в V .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{V}$ – результат симплектической редукции многообразия V по действию тора, соответствующего второй системе квадрик, т.е. $\hat{V} = (V \cap \mathcal{Z}_\Delta) / T_\Delta = (\mathcal{Z}_\Gamma \cap \mathcal{Z}_\Delta) / (T_\Gamma \times T_\Delta)$. Это – торическое многообразие размерности $2(n + \ell - m)$. Его подмногообразие вещественных точек

$$\hat{N} = N / T_\Delta = (\mathcal{R}_\Gamma \cap \mathcal{R}_\Delta) / (D_\Gamma \times D_\Delta) \hookrightarrow (\mathcal{Z}_\Gamma \cap \mathcal{Z}_\Delta) / (T_\Gamma \times T_\Delta) = \hat{V}$$

является множеством неподвижных точек комплексного сопряжения, т.е. вполне геодезическим подмногообразием. В частности, $\hat{N}$ – минимальное подмногообразие в $\hat{V}$. Согласно [4; следствие 2.7], N является H -минимальным подмногообразием в V .

Список литературы

- [1] Yong-Geun Oh, *Math. Z.*, **212:1** (1993), 175–192. [2] А. Е. Миронов, *Матем. сб.*, **195:1** (2004), 89–102. [3] А. Е. Миронов, Т. Е. Панов, *Функц. анализ и его прил.*, **47:1** (2013), 47–61. [4] Yuxin Dong, *Nonlinear Anal.*, **67:3** (2007), 865–882.

А. Е. Миронов (А. Е. Mironov)
Институт математики им. С. Л. Соболева
E-mail: mironov@math.nsc.ru

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
24.01.2013

Т. Е. Панов (Т. Е. Panov)
МГУ им. М. В. Ломоносова;
ИППИ РАН; ИТЭФ
E-mail: tpanov@mech.math.msu.su