Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Вершик, А. Ю. Окуньков, Индуктивный способ изложения теории представлений симметрических групп, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 2, 153–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm952>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 15:53:26

ИНДУКТИВНЫЙ СПОСОБ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СИММЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП

А. М. Вершик, А. Ю. Окуньков

1. Существующие до настоящего времени способы построения теории представлений симметрических групп, берущие начало от работ А. Юнга, И. Шура, Г. Фробениуса и др., используют диаграммы Юнга и их комбинаторику. Неслучайный характер появления диаграмм в этой теории становится ясным лишь в самом конце построений, когда выясняется, что ветвление представлений $\mathfrak{S}_n \downarrow \mathfrak{S}_{n-1}$ совпадает с ветвлением диаграмм Юнга с n клетками по диаграммам с $n - 1$ клеткой. Недостатки традиционного способа (переходящего из книги в книгу уже около 100 лет) очевидны: во-первых, хотелось бы оправдать появление диаграмм *apriori* (а не *aposteriori*), во-вторых, существующая техника (см. [1]) не использует кокстеровость групп и не переносится на общие группы Кокстера–Вейля, в-третьих, отсутствует индуктивность построений – не используется то, что $\mathfrak{S}_n$ образуют серию. В [2] показано, что из кокстеровских соотношений и дистрибутивности ветвления можно вывести само правило ветвления и найти матрицы представления (ортогональную форму Юнга). В этой работе мы, наконец, избавляемся от всех дополнительных ограничений: только из соотношений Кокстера, используя так называемые образующие Мерфи–Юциса (МЮ), находим спектр алгебры Гельфанда–Цетлина групп $\mathfrak{S}_n$ и, тем самым, реализуем план построения теории представлений групп $\mathfrak{S}_n$, намеченный в [2], [3], открывая возможность для переноса метода на все группы Кокстера и локальные алгебры [3].

2. Группа $\mathfrak{S}_n$ определяется образующими $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ и соотношениями $\sigma_i^2 = 1$, $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$, $|i - j| > 1$, $(\sigma_i \sigma_{i+1})^3 = 1$. Алгебра Гельфанда–Цетлина GZ_n есть подалгебра групповой алгебры $\mathbb{C}(\mathfrak{S}_n)$, порожденная центрами всех подалгебр $\mathbb{C}(\mathfrak{S}_k)$, $k = 1, \dots, n$.

ТЕОРЕМА. Алгебра GZ_n порождается образующими МЮ [4], [5]: X_k , $k = 1, \dots, n$, $X_k = \sum_{i=1}^{k-1} (i, k)$, $X_1 = 0$, и является максимальной коммутативной подалгеброй в $\mathbb{C}(\mathfrak{S}_n)$. При этом выполнены соотношения

$$\sigma_i X_j = X_j \sigma_i, \quad |i - j| > 1, \quad \sigma_i X_i + 1 = X_{i+1} \sigma_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Заметим, что определение GZ_n имеет смысл для любой локально-полупростой и любой локальной алгебры, а не только для классических алгебр Ли, как это трактовалось до сих пор, см. [2], [6].

В каждом неприводимом комплексном представлении π группы $\mathfrak{S}_n$ существует базис V^π из собственных векторов алгебры GZ_n , и, если $v \in V^\pi$, то *спектральным вектором* $s^\pi(v) = (s_1(v), \dots, s_n(v))$ назовем вектор из собственных чисел: $X_i v = s_i(v)v$, $i = 1, \dots, n$. Легко доказать, что спектр GZ_n как коммутативной алгебры есть $\text{Spec } GZ_n = \{s^\pi(v) : v \in V^\pi, \pi \in \widehat{\mathfrak{S}}_n\}$. Для построения теории представлений $\mathfrak{S}_n$ (как и любой локальной алгебры) достаточно описать а) спектр алгебры GZ_n ; б) разбиение спектра на части, входящие в одно и то же неприводимое представление $\pi \in \widehat{\mathfrak{S}}_n$; в) матричные элементы для образующих.

3. *Содержательным вектором* называется целочисленный вектор $a = (a_1=0, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, удовлетворяющий условиям: 1) $\forall k < n \exists i < k : |a_i - a_k| = 1$, 2) если $a_k = a_{k+s} = a$, то $\exists i, j < s : a_{k+i} = a + 1, a_{k+j} = a - 1$. Множество содержательных векторов обозначим $\text{Cont}_n \subset \mathbb{Z}^n$.

ТЕОРЕМА. $\text{Spec } GZ_n \cong \text{Cont}_n$, причем образующие X_i при этом изоморфизме переходят в координатные функционалы на $\mathbb{R}^n$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 94-01-00921).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наиболее важно включение $\text{Spec } GZ_n \subset \text{Cont}_n$. Для $n = 2$ это очевидно. Пусть включение доказано для n и $a \in \text{Spec } GZ_{n+1}$. Тогда существуют представление $\pi \in \widehat{\mathfrak{S}}_{n+1}$ группы $\mathfrak{S}_{n+1}$ и вектор $v \in V^\pi$, для которого $X_i v = a_i v$, $i = 1, \dots, n+1$. Из соотношений для X_i и σ_i вытекает, что подпространство L_n , натянутое на векторы $v, \sigma_n v$, является собственным для GZ_{n+1} . Если $\dim L_n = 2$, то существует вектор $v' \in V^\pi \cap L_n$, для которого $X_n v' = a_{n+1} v'$, $X_{n+1} v' = a_n v'$, тем самым, по индукционному предположению оба вектора $(a_1, \dots, a_{n-1}, a_{n+1})$, $(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$ лежат в Cont_n , а отсюда, используя соотношения для σ_n, σ_{n+1} , легко вывести, что $(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}) \in \text{Cont}_{n+1}$. Если же $\dim L_n = 1$, то $|a_n - a_{n+1}| = 1$, и нужный факт следует из прямой проверки определения содержательности.

4. Пусть λ – диаграмма Юнга с n клетками. *Содержанием* клетки $\alpha \in \lambda$ называется число $c(\alpha) = i - j$, где i, j – координаты клетки. Понятие содержания известно из классических работ.

ТЕОРЕМА. Пусть t – таблица Юнга с n клетками и $\{t_i\}_{i=1}^n$ – последовательность содержаний клеток таблицы t . Соответствие $t \rightarrow \{t_i\}_{i=1}^n$ есть биекция между множеством таблиц с n клетками и множеством Cont_n . Множество векторов из Cont_n , отвечающих таблицам с данной диаграммой, есть множество векторов с одинаковым составом координат. Это множество отвечает части спектра алгебры GZ_n , входящей в одно неприводимое представление $\mathfrak{S}_n$.

Нахождение явных матриц представления для образующих σ_i , $i = 1, \dots, n$ (ортогональная или полунормальная форма Юнга) уже не представляет труда и фактически не раз проводилось [2], [4], [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Джеймс Г. Теория представлений симметрических групп. М.: Мир, 1982. [2] Vershik A. // Banach Center Publ. 1990. V. 26. Part 2. P. 467–473. [3] Vershik A. // Selecta Math. 1992. V. 1. № 2. P. 159–180. [4] Jucys A. // Reports Math. Phys. 1974. V. 5. P. 107–112. [5] Murphy G. // J. Algebra. 1981. V. 69. P. 287–291. [6] Вершик А., Керов С. // Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем. Новейшие достижения. Т. 26. М.: ВИНТИ, 1985. С. 3–56.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова РАН;
Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Принято редколлегией
15.01.1996