Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Житлухин, А. А. Муравлёв, А. Н. Ширяев, Оптимальное решающее правило в задаче Кифера–Вейса для броуновского движения, *УМН*, 2013, том 68, выпуск 2, 201–202

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9520>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 11:59:04

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Оптимальное решающее правило в задаче
Кифера–Вейса для броуновского движения

М. В. Житлухин, А. А. Муравлёв, А. Н. Ширяев

1. Задача Кифера–Вейса последовательной проверки двух гипотез заключается в нахождении решающего правила, минимизирующего максимальное среднее время наблюдения при ограничении на вероятность ошибки.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задан процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$,

$$X_t = \mu t + B_t,$$

где μ – неизвестный параметр, а $B = (B_t)_{t \geq 0}$ – стандартное броуновское движение.

Мы рассмотрим задачу проверки гипотез $H_0: \mu = \mu_0$ и $H_1: \mu = \mu_1$ для фиксированных констант $\mu_0 > \mu_1$ по последовательным наблюдениям за X . Каждая процедура проверки задается *решающим правилом* $\delta = (\tau, d)$, состоящим из момента остановки τ фильтрации $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$, $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s; s \leq t)$, и $\mathcal{F}_\tau^X$ -измеримой функции d , принимающей значения μ_0 и μ_1 . Момент τ соответствует времени прекращения наблюдения, а значение d – принимаемой гипотезе.

Вводится класс Δ_α всех решающих правил с вероятностью ошибки, не превышающей заданную величину $\alpha \in (0, 1/2)$: $(\tau, d) \in \Delta_\alpha$, если $P^{\mu_0}(d = \mu_1) \leq \alpha$, $P^{\mu_1}(d = \mu_0) \leq \alpha$, где P^u – мера, порождаемая процессом X со значением параметра $\mu = u$.

Рассматриваемая задача заключается в нахождении *оптимального* решающего правила $(\tau^*, d^*) \in \Delta_\alpha$, которое, по определению, минимизирует максимальное среднее время наблюдения среди всех решающих правил из класса Δ_α :

$$\sup_{u \in \mathbb{R}} E^{P^u} \tau^* = \inf_{(\tau, d) \in \Delta_\alpha} \sup_{u \in \mathbb{R}} E^{P^u} \tau. \quad (1)$$

Задача была предложена Кифером и Вейсом [1] для дискретных наблюдений, а затем рассматривалась и другими авторами (см., например, [2]–[7]) как для дискретных, так и для непрерывных наблюдений. Критерий Кифера–Вейса улучшает критерий Вальда в случае, когда истинное значение параметра может не совпадать со значениями в проверяемых гипотезах (см. [1], [8]). Результаты, имеющиеся в литературе, посвящены приближенным решениям (асимптотическим и численным). Мы найдем решение (1) явно, выразив его через момент первого выхода X на некоторую границу.

2. Далее будем считать $\mu_0 > 0$, $\mu_1 = -\mu_0$ (иначе можно перейти к $\tilde{X}_t = X_t - (\mu_0 + \mu_1)t/2$) и использовать обозначение $\Phi(x)$ для нормальной функции распределения.

Работа выполнена при поддержке “Премолаб”, МФТИ (грант правительства РФ, дог. 11.G34.31.0073) и РФФИ (гранты № 11-01-00949-а, 12-01-31449-мол_а, 13-08-01096-а).

DOI: 10.4213/rm9520

ТЕОРЕМА 1. Оптимальное решающее правило (τ^*, d^*) в задаче (1) имеет вид

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0: |X_t| \geq a^*(t + t_0)\}, \quad d^* = \mu_0 \operatorname{sgn} X_{\tau^*},$$

где $a^*(t) > 0$ – единственное решение интегрального уравнения

$$\exp\left(-a(t) - \frac{t}{2}\right) = \int_t^\infty \left[\Phi\left(\frac{a(s) - a(t)}{\sqrt{s-t}}\right) - \Phi\left(\frac{-a(s) - a(t)}{\sqrt{s-t}}\right) \right] ds \quad (2)$$

в классе непрерывных невозрастающих функций $a(t) > 0$ на $\mathbb{R}$, для которых интеграл в правой части сходится при каждом $t \in \mathbb{R}$. Величина $t_0 = t_0(\alpha)$ находится из условия $P^{\mu_0}(d^*(t_0) = -\mu_0) = \alpha$. Для границы $a^*(t)$ справедлива оценка $a^*(t) \leq e^{-t/2}$, $t \in \mathbb{R}$.

Итак, чтобы найти оптимальное решающее правило (τ^*, d^*) , сначала нужно вычислить функцию $a^*(t)$, которая не зависит от значения α , а затем для заданного α подобрать такое t_0 , что момент $\tau^* = \tau^*(t_0)$ удовлетворяет условию $P^{\mu_0}(d^*(t_0) = -\mu_0) = \alpha$ для $d^*(t_0) = \mu_0 \operatorname{sgn} X_{\tau^*(t_0)}$.

На рис. 1 слева показана граница $a^*(t)$, найденная численно; справа приведена зависимость вероятности ошибочного решения α от значения t_0 .

Рис. 1. Граница остановки $a^*(t)$ и зависимость α от t_0

3. Для доказательства теоремы сначала устанавливается, что $d^* = \mu_0 \operatorname{sgn} X_{\tau^*}$. Далее (1) сводится к задаче оптимальной остановки процесса X с параметром $t_0 = t_0(\alpha)$: $V = \inf_{\tau} E^{\mu_0}[\tau + e^{-\mu_0|X_{\tau}| - \mu_0^2(\tau + t_0)/2}]$ (см. [3]). Задача V решается методами, изложенными, например, в [9]. Уравнение (2) решается численно методом “обратной индукции”.

Список литературы

- [1] J. Kiefer, L. Weiss, *Ann. Math. Statist.*, **28**:1 (1957), 57–74. [2] T. W. Anderson, *Ann. Math. Statist.*, **31**:1 (1960), 165–197. [3] T. Lai, *Ann. Statist.*, **1**:4 (1973), 659–673. [4] G. Lorden, *Ann. Statist.*, **4**:2 (1976), 281–291. [5] L. Weiss, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **57**:299 (1962), 551–566. [6] В. П. Драгаллин, А. А. Новиков, *ТБП*, **32**:4 (1987), 679–690. [7] И. В. Павлов, *ТБП*, **35**:2 (1990), 293–304. [8] R. Bechhofer, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **55**:292 (1960), 660–663. [9] G. Peskir, A. Shiryaev, *Optimal stopping and free-boundary problems*, Birkhäuser, Basel, 2006, xxii+500 pp.

М. В. Житлухин (M. V. Zhitlukhin)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: zhitlukhin@gmail.com

Представлено А. В. Булинским
Принято редколлегией
06.03.2013

А. А. Муравлёв (A. A. Muravlev)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: almurav@mi.ras.ru

А. Н. Ширяев (A. N. Shiryaev)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: albertsh@mi.ras.ru