Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Бакурадзе, Формальные группы Бухштабера, Кричевера и Надирадзе совпадают, *УМН*, 2013, том 68, выпуск 3, 189–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9521>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 14:54:50

Формальные группы Бухштабера, Кричевера и Надирадзе совпадают

М. Бакурадзе

Пусть $F(x, y)$ – формальная группа геометрических кобордизмов [6]. Следуя Квиллену [7], отождествим ее с универсальной формальной группой Лазара. Положим $\omega(x) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}(x, 0)$.

В [2] В.М. Бухштабер дает аналитическое решение функционального уравнения на экспоненту формальной группы вида

$$\mathcal{F}_B(x, y) = \sum \alpha_{ij} x^i y^j = \frac{A(y)x^2 - A(x)y^2}{B(y)x - B(x)y}. \quad (1)$$

ЛЕММА 1. Пусть $\mathcal{F}$ – формальная группа вида $\mathcal{F}_B$, где $B'(0) = A'(0)$. Тогда $B(x)$ совпадает с ограничением $\omega(x)$, т.е. $B(x)$ является образом $\omega(x)$ при кольцевом гомоморфизме кольца Лазара, классифицирующем формальную группу $\mathcal{F}$.

Действительно, если ряды A и B имеют вид $A(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + O(t^3)$ и $B(t) = B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + O(t^3)$, то $\mathcal{F}(x, y) = (A_0/B_0)(x + y) + O(xy)$. Таким образом, если $\mathcal{F}(x, y)$ является формальной группой, то должно выполняться равенство $A_0 = B_0$ и после соответствующего деления числителя и знаменателя можно считать, что $A_0 = B_0 = 1$. Далее, $\mathcal{F}(x, y) = x + y + A_1 xy + \sum_{i=2}^{\infty} B_i(x^i y + x y^i) + O(x^2 y^2)$. Таким образом, $\alpha_{1i} = B_i$ при $i \geq 2$, $\alpha_{11} = A_1 = A'(0) = B'(0)$ и ряд $1 + \sum_{i \geq 1} \alpha_{1i} t^i$ совпадает с ограничением формы $(1 + \sum_{i \geq 1} [\mathbb{C}P^i] t^i)^{-1} = \omega(t)$.

Теперь внесем небольшие изменения в исследование формальной группы $\mathcal{F}_B$, проведенное в [5], и, как подсказывает лемма 1, введем

$$A(x, y) = \sum A_{ij} x^i y^j = F(x, y)(x\omega(y) - y\omega(x)). \quad (2)$$

Определим универсальный формальный групповой закон Надирадзе $\mathcal{F}_N$ с помощью очевидного классифицирующего отображения кольца Лазара на его факторкольцо по идеалу, порожденному всеми A_{ij} , $i, j \geq 3$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть L – кольцо Лазара. Тогда:

- i) $\omega'(x) - \omega'(0) = 2x\hat{\omega}(x)$ в $L[[x]]$, где $\hat{\omega}(x) = \sum_{i \geq 1} \omega_i x^{i-1}$;
- ii) в $L[[x, y]]/(xy)^3$ имеем

$$A(x, y) = (x\omega(y) + y\omega(x) - \omega'(0)xy)(x\omega(y) - y\omega(x)) + (\omega(x)\hat{\omega}(x) - \omega(y)\hat{\omega}(y))x^2 y^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f и g – экспонента и логарифм формального группового закона F . Тогда $F(x, y) = f(g(x) + g(y))$ и

$$f'(x) = 1/g'(f(x)) = \omega(f(x)), \quad f'(g(x)) = \omega(f(g(x))) = \omega(x). \quad (3)$$

Пусть $\omega(x) = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$. Поскольку $g''(0) = -f''(0) = -\omega'(0) = -b_1$, то

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, 0) = f''(g(x)) + f'(g(x))g''(0) = \omega'(x)\omega(x) - \omega'(0)\omega(x). \quad (4)$$

Отсюда получаем i), так как правая часть (4) делится на 2 и $\omega(x)$ обратима. ii) Ввиду антисимметрии по модулю $(xy)^3$ имеем $A(x, y) = A(y)x^2 - A(x)y^2 = \sum (A_{i2}x^2 y^i - A_{i2}x^i y^2)$. Мы хотим вычислить $-\sum A_{i2}x^i$ в терминах $\omega(x)$. Применив $\frac{\partial^2}{\partial y^2}(x, 0)$ к (2)

и учитывая (3) и (4), получим $-2 \sum A_{i2} x^i = x\omega(x)\omega'(x) - x\omega'(0)\omega(x) + 2x\omega'(0)\omega(x) - 2\omega^2(x) + 2b_2x^2$. Так как коэффициенты лежат в кольце Лазара, отсюда следует равенство $-\sum A_{i2} x^i = x\omega(x)(\omega'(x) - \omega'(0))/2 + x\omega'(0)\omega(x) - \omega^2(x) + b_2x^2$, поэтому

$$\sum (A_{i2} x^2 y^i - A_{i2} x^i y^2) = (x\omega(y) + y\omega(x))(x\omega(y) - y\omega(x)) - \omega'(0)xy(x\omega(y) - y\omega(x)) + \omega(x)\widehat{\omega}(x)x^2y^2 - \omega(y)\widehat{\omega}(y)x^2y^2.$$

Предложение доказано.

Для вычисления рода Кричевера на коэффициентах формальной группы геометрических кобордизмов в [3] универсальная формальная группа Кричевера $\mathcal{F}_{\text{Kr}}$ определена как

$$\mathcal{F}_{\text{Kr}}(x, y) = xb(y) + yb(x) - b'(0)xy + \frac{b(x)\beta(x) - b(y)\beta(y)}{xb(y) - yb(x)} x^2 y^2, \quad (5)$$

где $\beta(x) = \frac{b'(x) - b'(0)}{2x}$. В [3] также показано, что $b(x) = \frac{\partial \mathcal{F}_{\text{Kr}}}{\partial y}(x, 0)$. Из леммы 1 и предложения 2, ii) следует, что $\mathcal{F}_{\text{Kr}}$ также может быть определена с помощью классифицирующего отображения формальной группы $\mathcal{F}_N$, если в качестве $b(x)$ взять ограничение инвариантной формы $\omega(x)$. Таким образом, $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}_{\text{Kr}}$.

Следуя [2], авторы работы [4] рассматривают следующую формальную группу, соответствующую роду Кричевера $\mathcal{H}v$:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{H}}(u_1, u_2) = u_1 c(u_2) + u_2 c(u_1) - a u_1 u_2 - \frac{d(u_1) - d(u_2)}{u_1 c(u_2) - u_2 c(u_1)} u_1^2 u_2^2.$$

Из леммы 1 и предложения 2, ii) следует, что (при $c'(0) = a$) ряд $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}(x, y)$ совпадает с (5), т.е. $c(x) = b(x)$ и $d(x) = -b(x)\beta(x)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Верны равенства $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}_{\text{Kr}} = \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$, причем кольцо коэффициентов является фактором кольца Лазара по идеалу, порожденному всеми A_{ij} , $i, j \geq 3$.

В [1] при помощи MAPLE вычислено кольцо коэффициентов формального группового закона Надирадзе $\mathcal{F}_N$ до размерности 26. А именно, найден набор полиномиальных образующих $z_1, z_2, \dots$ кольца Лазара, для которых соотношения малых размерностей имеют вид $5z_5 = z_2 z_3 + 2z_1 z_4$, $2z_6 = 0$, $z_1 z_6 = 0$, $z_3 z_6 = 0$, $z_{10} = 0$, $z_5 z_6 = 0$, $z_{12} = 0$, а элементы $7z_7$, $2z_8$, $3z_9$, $11z_{11}$ и $13z_{13}$ разложимы. Заметим, что наши вычисления согласуются с результатами работы [3] о структуре кольца коэффициентов формальной группы $\mathcal{F}_{\text{Kr}}$, полученными в терминах уравнения ассоциативности. Здесь новой информацией о группе (а следовательно, о роде) Кричевера, является то, что поскольку $z_{10} = 0$, $z_{12} = 0$, то в размерностях 20 и 24 нет неразложимых элементов. Возникает вопрос, в каких размерностях каждый элемент мультипликативно разложим.

Список литературы

- [1] M. Bakuradze, M. Jibladze, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, **159** (2012), 1–9. [2] В. М. Бухштабер, *УМН*, **45:3**(273) (1990), 185–186. [3] В. М. Бухштабер, Е. Ю. Бунькова, *Функц. анализ и его прил.*, **45:2** (2011), 23–44. [4] V. Buchstaber, T. Panov, N. Ray, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2010**, № 16, 3207–3262. [5] R. Nadiradze, *Formal group and cohomology theories*, Dissertation for the Doct. of Sci. Degree, Tbilisi, 1995. [6] С. П. Новиков, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **31:4** (1967), 855–951. [7] D. Quillen, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75:6** (1969), 1293–1298.

М. Бакурадзе (M. Bakuradze)
Тбилисский государственный университет
им. Ив. Джавахишвили, Грузия
E-mail: malkhaz.bakuradze@tsu.ge

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
08.04.2013