Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Вершик, А. П. Веселов, А. А. Гайфуллин,
Б. А. Дубровин, А. Б. Жижченко, И. М. Кричевер,
А. А. Мальцев, Д. В. Миллионщиков, С. П. Новиков,
Т. Е. Панов, А. Г. Сергеев, И. А. Тайманов, Виктор Мат-
веевич Бухштабер (к семидесятилетию со дня рожде-
ния), *УМН*, 2013, том 68, выпуск 3, 195–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9529>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 18:12:48

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Виктор Матвеевич Бухштабер

(к семидесятилетию со дня рождения)

1 апреля 2013 г. исполнилось 70 лет Виктору Матвеевичу Бухштаберу – математику с многогранным талантом и замечательному человеку, члену-корреспонденту Российской академии наук, заместителю главного редактора журнала “Успехи математических наук”.

Виктор Матвеевич Бухштабер – автор фундаментальных результатов в алгебраической топологии, теории абелевых функций, математической физике и прикладной статистике. Его работы очень богаты идеями, многие из которых легли в основу новых, в настоящее время активно развивающихся направлений математики. Результаты Виктора Матвеевича известны и признаны во всем мире. Он является вице-президентом Московского математического общества, членом Национального комитета математиков РФ, иностранным членом Эдинбургского королевского научного общества (шотландской академии наук) и почетным профессором Манчестерского университета. Виктор Матвеевич выступал с почетными приглашенными докладами во многих ведущих математических центрах. В том числе, он был приглашен докладчиком на Международный математический конгресс в Ванкувере (1974 г.) и главным лектором (Adams memorial lecturer) на мемориальную конференцию Дж.-Ф. Адамса в Манчестере (1995 г.).

Детство и юность Виктора Матвеевича прошли в Ташкенте. Он вырос в семье, в которой очень высоко ценились математика и ее приложения. Его отец был военным инженером, автором работ по транспортным задачам. В 1960 г. Виктор Матвеевич поступил на механико-математический факультет Ташкентского государственного университета и уже на первом курсе стал активным участником семинара М. Я. Антоновского и И. М. Дегтярёва, которые были тесно связаны с Московской математической школой. В те годы профессора из Москвы, в том числе В. Г. Болтянский, Ю. М. Смирнов и Б. В. Шабат, регулярно приезжали в Ташкент читать лекции и вести семинары для студентов, и Виктор Матвеевич стал участником этих спецкурсов и семинаров. Большую роль в судьбе Виктора Матвеевича сыграла 3-я Всесоюзная топологическая конференция, прошедшая в Ташкенте в 1963 г. Он принял деятельное участие

в организации и работе этой конференции и благодаря этому смог из первых рук познакомиться с новейшими на тот момент результатами алгебраической топологии – области математики, ставшей впоследствии главной в его научной деятельности.

В 1964 г. по инициативе кафедры высшей геометрии и топологии, при большом участии Ю. М. Смирнова, Виктор Матвеевич был переведен на механико-математический факультет МГУ. В Москве В. М. Бухштабер сразу же становится активным участником семинара С. П. Новикова и вскоре выполняет под его руководством свою первую научную работу “О J -функторе клеточных комплексов” по одной из самых актуальных тогда тем алгебраической топологии. Эта работа получила награду на конкурсе студенческих работ и составила основу дипломной работы В. М. Бухштабера, опубликованной впоследствии в ДАН.

В 1966 г. Виктор Матвеевич окончил механико-математический факультет МГУ и поступил в аспирантуру отделения математики МГУ под руководством С. П. Новикова и Д. Б. Фукса. По окончании аспирантуры в 1970 г. он защитил кандидатскую диссертацию на тему “Когомологические операции в обобщенных теориях когомологий”; по итогам защиты диссертационный совет проголосовал за признание его диссертации выдающейся. В 1971 г. В. М. Бухштабер был награжден премией Московского математического общества для молодых ученых (совместно с А. С. Мищенко) за вклад в K -теорию и теорию кобордизмов. В 1984 г. он защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук на тему “Двузначные формальные группы. Алгебраическая теория и топологические приложения”. В 2006 г. В. М. Бухштабер был избран членом-корреспондентом РАН.

В. М. Бухштабер – крупный ученый-математик, автор более 250 научных публикаций, в том числе 5 монографий. Основным направлением его исследований является алгебраическая топология. Им были получены основополагающие результаты в K -теории и теории кобордизмов.

В конце 1960-х годов Виктор Матвеевич совместно с А. С. Мищенко построил K -теорию бесконечных клеточных комплексов с конечными остовами и решил очень важную для этой теории задачу об элементах бесконечной фильтрации [1].

Следующие работы В. М. Бухштабера посвящены изучению спектральной последовательности Атия–Хирцебруха, связывающей обычные группы когомологий с экстраординарными. Он ввел действие алгебры когомологических операций на этой спектральной последовательности и в его терминах определил модули дифференциалов. Эти модули были полностью вычислены для спектральных последовательностей Атия–Хирцебруха в K -теории и в теории комплексных кобордизмов, что дало точные оценки в известной задаче о реализации циклов подмногообразиями.

В 1970 г. В. М. Бухштабером была выполнена замечательная работа [2], в которой построена теория характера Чжэня–Дольда – естественного отображения из комплексных кобордизмов пространства в когомологии этого пространства с коэффициентами в рациональном кольце кобордизмов точки, являющегося обобщением характера Чжэня в K -теории. Виктор Матвеевич получил явные формулы для характеров Чжэня–Дольда в комплексных кобордизмах и бордизмах. В качестве приложения им была получена его знаменитая формула для закона умножения в формальной группе геометрических кобордизмов в терминах многообразий Милнора. Далее В. М. Бухштабером были введены новая фильтрация в алгебрах Хопфа и соответствующая ей спектральная последовательность, получившая известность в алгебраической топологии и теории когомологий бесконечномерных алгебр Ли как спектральная последовательность Бухштабера.

В серии работ, выполненных в 1970-е годы, В. М. Бухштабер развивает методы формальных групп в теории кобордизмов. В совместной работе [3] с С. П. Новиковым при помощи формальной группы геометрических кобордизмов были выведены

соотношения для неподвижных точек действий конечных циклических групп на многообразиях, обобщающие фундаментальную формулу Атия–Ботта и связывающие ее с формулами Коннера–Флойда. В этой же работе было введено понятие двузначной формальной группы в кобордизмах. Впоследствии Виктором Матвеевичем была построена общая теория двузначных формальных групп, ключевым результатом которой явилось вычисление универсальных одномерных двузначных формальных групп (см. [4], [5], [36]).

Примерно в то же время Виктором Матвеевичем была найдена важная конструкция характеристических классов векторных расслоений на основе развития теории трансфера. В результате им были введены универсальные характеристические классы Понтрягина вещественных расслоений, лежащие в теории кобордизмов, построенной по гладким многообразиям, в нормальных расслоениях которых задана структура комплексификации вещественного расслоения. Комбинируя развитые им методы теории двузначных формальных групп с методами, основанными на универсальных классах Понтрягина, В.М. Бухштабер получил важные результаты о строении колец кобордизмов стабильно симплектических и самосопряженных многообразий. В частности, ему удалось построить представителей этих классов кобордизмов, которые впоследствии получили название многообразий Бухштабера (см. [8]).

В 1978 г. В.М. Бухштабером совместно с А.В. Шокуровым [7] была открыта удивительная связь между алгеброй Ли полиномиальных векторных полей на прямой с целыми коэффициентами, группой формальных диффеоморфизмов прямой и алгеброй Ландвебера–Новикова когомологических операций в теории комплексных кобордизмов. Эта связь позволила, используя спектральную последовательность Бухштабера, получить новые результаты о стабильных гомотопических группах сфер. Кроме этого, в [7] была построена одна замечательная серия нильмногообразий M^n (многообразия Бухштабера), нашедшая впоследствии важные и интересные применения в алгебре, геометрии, топологии и теории динамических систем.

В конце 1980-х – начале 1990-х годов Виктор Матвеевич много занимается исследованиями функциональных уравнений. Развитые им методы находят важные применения в различных областях математики: в классической теории полиномов – решение (совместно с А.Н. Холодовым) известной задачи о структурах Боаса–Бака на последовательностях полиномов, в теории специальных функций – открытие и исследование связи между теоремами сложения для эллиптических функций и двузначными алгебраическими группами [11], в теории интегрируемых систем – решение функционального уравнения, связанного с квантовой задачей трех тел (совместно с А.М. Переломовым) [15], и функциональных уравнений, описывающих обобщения оператора Данкла (совместно с Дж. Фельдером и А.П. Веселовым) [14]. В работе В.М. Бухштабера и И.М. Кричевера [12] были получены результаты, позволившие выдвинуть гипотезу о характеристизации якобианов алгебраических кривых (знаменитая проблема Римана–Шоттки) в терминах теоремы сложения для тета-функции на общем абелевом многообразии. Положительное решение этой гипотезы впоследствии было получено С. Грушевским. В последующей работе [26] были получены функциональные уравнения, решаемые в терминах многомерных функций Бейкера–Ахиезера; в настоящее время эти уравнения известны как уравнения Бухштабера–Кричевера. На основе решения одного функционального уравнения из теории обобщенных операторов Данкла В.М. Бухштабер и А.П. Веселов получили важное топологическое приложение: соотношения между сигнатурой многообразия и сигнатурами подмногообразий, двойственных его классам Понтрягина.

Одной из тем, проходящих через все научное творчество Виктора Матвеевича, является теория n -значных групп (см. [3], [5], [8], [11], [20], [23], [25]). Во многих разделах математики возникает операция умножения, при которой произведением

двух элементов является мультимножество. В теории, развитой В. М. Бухштабером, фиксируется мощность этого мультимножества, т. е. рассматривается n -значное умножение с фиксированным n . Как оказалось, это приводит к глубокой теории и замечательным приложениям. Истоки теории n -значных групп лежат в уже упоминавшейся конструкции двузначной формальной группы в теории кобордизмов (см. [3]). В последующих работах В. М. Бухштабера и его учеников теория n -значных групп развилась в самостоятельную область математики с приложениями в топологии, теории интегрируемых систем, теории динамических систем и теории графов. Теория n -значных групп оказалась тесно связанной также с комбинаторными алгебрами и вероятностными законами умножения, имеющими обширные приложения [16]. Особенно стоит отметить ряд совместных работ В. М. Бухштабера с Э. Г. Рисом по топологической и алгебраической теории n -значных групп и n -алгебр Хопфа. В этих работах была развита теория n -гомоморфизмов коммутативных колец, позволившая получить аналог знаменитого гомеоморфизма Колмогорова–Гельфанда, а именно гомеоморфизм между n -й симметрической степенью данного хаусдорфова компакта X и пространством всех непрерывных n -гомоморфизмов алгебры непрерывных функций на X в поле комплексных чисел. Одной из вершин данного направления является решение старой задачи об описании кольца полисимметрических полиномов, т. е. полиномов от n векторных аргументов $x_i \in \mathbb{C}^m$, инвариантных относительно перестановок аргументов x_i (см. [20], [23]). Стоит отметить, что исследования по теории многозначных групп, теории n -гомоморфизмов и их приложениям в настоящее время продолжают учениками Виктора Матвеевича.

Широко признанным научным достижением В. М. Бухштабера является создание (совместно с Д. В. Лейкиным и В. З. Энольским) теории сигма-функций многих переменных (см. [17], [24], [30]). Эта теория явилась реализацией классической программы Клейна построения многомерных аналогов эллиптических сигма-функций Вейерштрасса, порождающих поле мероморфных функций на якобианах эллиптических кривых. Принципиальным отличием теории многомерных сигма-функций от теории тета-функций является то, что сигма-функции записываются через коэффициенты уравнений плоских алгебраических кривых, а не через периоды голоморфных дифференциалов. В работах Виктора Матвеевича и его соавторов были построены сигма-функции, отвечающие всем плоским (n, s) -кривым. При помощи соответствующих им $\wp$ -функций была получена униформизация многообразий Якоби этих кривых, что привело к развитию нового метода интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, включая многие важные уравнения математической физики. Здесь стоит также отметить решение В. М. Бухштабером и Д. В. Лейкиным [30] для (n, s) -кривых известной задачи дифференцирования абелевых функций по параметрам, обобщающее результат Фробениуса–Штикельбергера для эллиптических кривых.

На стыке теории абелевых функций и алгебраической топологии находятся совместные результаты Виктора Матвеевича с его ученицей Е. Ю. Нетай (Буньковой) по формальным группам Кричевера (см. [33]). На основе общей модели Вейерштрасса кубической кривой ими получен явный вид закона сложения на общей эллиптической кривой в координатах Тейта. Это привело к конструкции 6-параметрического рода Хирцебруха, несущего важную информацию о характеристических числах многообразия.

В. М. Бухштабер является одним из основателей торической топологии — новой активно развивающейся области исследований на стыке комбинаторной геометрии, алгебраической топологии, алгебраической геометрии и симплектической топологии. Основным объектом изучения в торической топологии являются многообразия с действием тора, пространства орбит которых несут богатую комбинаторную структуру.

ру. Благодаря работам Виктора Матвеевича, его коллег и учеников, алгебраическая геометрия торических многообразий — “торическая геометрия” — была существенно обогащена топологическими методами (см. [29]). Одним из важных результатов торической топологии явилось построение В. М. Бухштабером (совместно с Т. Е. Пановым и Н. Рэем) квазиторических представителей в классах комплексных кобордизмов (см. [18], [27]). Тем самым было показано, что каждое стабильно комплексное многообразие кобордантно многообразию с регулярным действием тора, а теория эквивариантных кобордизмов обогатилась новым широким классом примеров многообразий с действием тора, для которых важнейшие инварианты кобордизмов эффективно вычислимы в комбинаторных терминах. Это привело к понятию “универсального торического рода” — гомоморфизма из кольца геометрических эквивариантных комплексных кобордизмов в кольцо гомотопических эквивариантных кобордизмов. Этот гомоморфизм дает универсальные инварианты классов эквивариантных кобордизмов многообразий и приводит к решению известных задач о жесткости родов Хирцебруха (см. [31]). Топологический подход к определению торических и квазиторических многообразий привел к новому важному классу многообразий с действием тора — момент-угол-многообразиям и их обобщениям, момент-угол-комплексам. Общий момент-угол-комплекс (также известный в настоящее время под названием “полиэдрального произведения”), введенный в работах В. М. Бухштабера и Т. Е. Панова (см. [19]), является универсальной комбинаторно-топологической конструкцией, сопоставляемой симплицияльному комплексу и паре пространств. Эта конструкция в настоящее время активно изучается в теории гомотопий. В комбинаторной геометрии она приводит к новому комбинаторному инварианту симплицияльного комплекса или простого многогранника — максимальной размерности свободно действующего тора на соответствующем момент-угол-комплексе, ставшему известным под названием “числа Бухштабера”. Исследованию свойств числа Бухштабера посвящена целая серия комбинаторных и топологических работ. В то же время момент-угол-многообразия обладают богатой и интересной геометрией, например, они несут некелеровы комплексные структуры, обобщающие классические серии многообразий Хопфа и Калаби–Экманна. Исследования по торической топологии активно ведутся в настоящее время школой В. М. Бухштабера и его коллегами по всему миру (см. [19], [22], [29]).

В рамках исследований по торической топологии в работе [28] Виктором Матвеевичем было введено кольцо комбинаторных простых многогранников с операциями несвязной суммы и прямого произведения и дифференцированием, ставящим в соответствие каждому многограннику несвязную сумму его гиперграней. Эта конструкция позволила привлечь в комбинаторную геометрию методы теории дифференциальных уравнений в частных производных. В работах В. М. Бухштабера и его учеников Е. В. Корицкой и Н. Ю. Ероховца было установлено, что замечательные серии многогранников — ассоциэдры, пермутоэдры, циклоэдры, стеллоэдры и другие — приводят к решениями фундаментальных дифференциальных уравнений, в частности, уравнения Бюргерса–Хопфа. Также были получены результаты о связи введенного кольца многогранников с алгебрами Хопфа и квазисимметрическими функциями (см. [34]). В совместной работе [35] Виктора Матвеевича с еще одним его учеником, В. Д. Володиным, введен новый замечательный класс многогранников, получающихся из куба последовательными срезками граней коразмерности 2. С одной стороны, было показано, что этот класс многогранников включает в себя многие известные ранее классы многогранников. С другой стороны, для многогранников этого класса получены точные верхние и нижние границы для коэффициентов перечисляющих полиномов граней.

С не меньшим успехом, чем теоретическими проблемами математики, В. М. Бухштабер занимался и прикладными задачами. Его работа в области прикладной матема-

тики и статистики началась в 1969 г., когда он был приглашен академиком С. А. Христиановичем для работы во Всесоюзном научно-исследовательском институте физико-технических и радиотехнических измерений (ВНИИФТРИ). С 1979 г. Виктор Матвеевич заведует лабораторией метрологии комплексных информационных систем и математического моделирования, он неоднократно являлся руководителем крупных разделов Государственных программ. В прикладной математике им разработаны методы численной оптимизации на однородных пространствах [6], в прикладной статистике – методы автоматической классификации, позволившие создать эффективные алгоритмы в распознавании образов [9]. Виктором Матвеевичем решен ряд актуальных задач томографии неоднородных сред и волновых полей и метрологии комплексных измерительных систем [10]. Им разработаны эффективные методы анализа временных рядов, ориентированные на специфику данных физико-технических измерений [13].

Начиная с конца 1990-х годов В. М. Бухштабер (совместно с О. В. Карповым и С. И. Тертычным) развивает теорию нелинейного дифференциального уравнения, моделирующего динамику сильношунтированного перехода Джозефсона в сверхпроводниках (см. [21], [32]). Одним из наиболее важных результатов в этом направлении является редукция этого уравнения к динамической системе на торе и открытие эффекта квантования числа вращения для такого класса динамических систем.

С середины 1990-х годов В. М. Бухштабер занимает важные научно-административные должности в международных и российских научных организациях. Он является членом Правления Московского математического общества (с 1994 г.), а в 2010 г. избран вице-президентом ММО. С 2001 по 2008 г. он был членом Исполнительного комитета Европейского математического общества. В настоящее время он – член Национального комитета математиков Российской Федерации, заместитель председателя Экспертного совета по математике, механике и информатике Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), член Экспертного совета ВАК по математике и механике, член Научного совета Российско-Французской лаборатории по математике, информатике и математической физике РАН, НМУ и CNRS.

В. М. Бухштабер – заместитель главного редактора журнала “Успехи математических наук” (с 1995 г.), член редколлегии журнала “Функциональный анализ и его приложения” (с 1995 г.), член редакционного совета журнала “Теория вероятностей и ее применения” (с 1997 г.), член редколлегии журнала “Moscow Mathematical Journal” (с 2001 г.), член редколлегии журнала “Tbilisi Mathematical Journal” (с 2006 г.), член редколлегии “Трудов Московского математического общества” (с 2008 г.).

В качестве члена программных и оргкомитетов Виктор Матвеевич ведет большую работу по организации международных математических конференций в России и за рубежом.

С. П. Новиков сыграл и играет в научной жизни Виктора Матвеевича важнейшую роль. Виктор Матвеевич сохраняет в себе чувство искреннего восхищения и уважения к своему Учителю, является его верным помощником и соратником во всех его научных и общественных делах.

В 1967 г., когда В. М. Бухштабер еще был аспирантом, С. П. Новиков привлек его к руководству семинаром по алгебраической топологии для студентов. Из этого семинара затем вырос самостоятельный семинар Виктора Матвеевича, среди участников которого значительные научные результаты получили С. Д. Ошанин, Н. В. Панов, О. К. Миронов, А. А. Пересецкий, Р. Г. Надирадзе, А. В. Шокуров, А. Н. Холодов, М. Бакурадзе.

Свое “второе рождение” семинар В. М. Бухштабера переживает в начале 1990-х годов, когда, по приглашению С. П. Новикова, Виктор Матвеевич начинает работать на кафедре высшей геометрии и топологии механико-математического факультета МГУ

им. М. В. Ломоносова (1993 г., с 2000 г. – профессором) и в отделе геометрии и топологии Математического института им. В. А. Стеклова РАН (1996 г., с 2006 г. – главным научным сотрудником). У Виктора Матвеевича всегда много учеников: студентов и аспирантов – которых привлекает широта и глубина его научного кругозора, умение связывать между собой понятия и результаты из совершенно различных направлений математики и ставить задачи, одновременно содержательные и доступные для начинающих исследователей, доброжелательность и внимание к людям. В последние годы значительные научные результаты получили ученики Виктора Матвеевича: И. В. Полтерович, Т. Е. Панов, К. Э. Фельдман, И. В. Измestьев, П. В. Ягодовский, Н. Э. Добринская, В. А. Курлин, С. Ю. Шорина, И. В. Баскаков, А. А. Гайфуллин, Д. В. Гугнин, Е. В. Корицкая, А. А. Кустарёв, Н. Ю. Ероховец, Е. Ю. Нетай, А. А. Айзенберг, В. Д. Володин, Ю. М. Устиновский.

Среди учеников В. М. Бухштабера более 20 кандидатов наук, а двое его учеников – Т. Е. Панов и А. А. Гайфуллин – защитили докторские диссертации. Работы Т. Е. Панова и А. А. Гайфуллина получили широкое международное признание и удостоены многих премий и наград, отметим здесь лишь то, что, как и Виктор Матвеевич, оба они удостоены в разные годы премии Московского математического общества для молодых ученых. Ученики В. М. Бухштабера стали его надежными помощниками в научной и педагогической работе: налицо продолжение преемственности поколений в Московской топологической школе, и в этом мы видим результаты огромного труда и таланта ученого и педагога Виктора Матвеевича Бухштабера.

От всей души поздравляем Виктора Матвеевича с юбилеем, желаем ему крепкого здоровья, долгих лет жизни, новых научных успехов и счастья в личной жизни.

А. М. Вершик, А. П. Веселов, А. А. Гайфуллин,
Б. А. Дубровин, А. Б. Жижченко, И. М. Кричевер,
А. А. Мальцев, Д. В. Миллиончиков, С. П. Новиков,
Т. Е. Панов, А. Г. Сергеев, И. А. Тайманов

Избранные научные труды В. М. Бухштабера

- [1] В. М. Бухштабер, А. С. Мищенко, “*K*-теория на категории бесконечных клеточных комплексов”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:3 (1968), 560–604; англ. пер.: V. M. Buchstaber, A. S. Mishchenko, “*K*-theory on the category of infinite cell complexes”, *Math. USSR-Izv.*, **2**:3 (1968), 515–556.
- [2] В. М. Бухштабер, “Характер Чженя–Дольда в кобордизмах. I”, *Матем. сб.*, **83(125)**:4 (1970), 575–595; англ. пер.: V. M. Buchstaber, “The Chern–Dold character in cobordisms. I”, *Math. USSR-Sb.*, **12**:4 (1970), 573–594.
- [3] В. М. Бухштабер, С. П. Новиков, “Формальные группы, степенные системы и операторы Адамса”, *Матем. сб.*, **84(126)**:1 (1971), 81–118; англ. пер.: V. M. Buchstaber, S. P. Novikov, “Formal groups, power systems and Adams operators”, *Math. USSR-Sb.*, **13**:1 (1971), 80–116.
- [4] В. М. Бухштабер, “Кобордизмы в задачах алгебраической топологии”, *Итоги науки и техники. Алгебра. Топол. Геом.*, **13**, ВИНТИ, М., 1975, 231–271; англ. пер.: V. M. Buchstaber, “Cobordism in problems of algebraic topology”, *J. Soviet Math.*, **7**:4 (1977), 629–653.
- [5] В. М. Бухштабер, “Двухзначные формальные группы. Алгебраическая теория и приложения к кобордизмам. I”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39**:5 (1975), 1044–1064; англ. пер.: V. M. Buchstaber, “Two-valued formal groups. Algebraic theory and applications to cobordism. I”, *Math. USSR-Izv.*, **9**:5 (1975), 987–1006.
- [6] В. М. Бухштабер, В. К. Маслов, “Факторный анализ и экстремальные задачи на многообразиях Грассмана”, *Математические методы решения экономических*

- задач, **7**, прил. к журналу: *Экономика и математические методы*, Наука, М., 1977, 85–102.
- [7] В. М. Бухштабер, А. В. Шокуров, “Алгебра Ландвебера–Новикова и формальные векторные поля на прямой”, *Функц. анализ и его прил.*, **12:3** (1978), 1–11; англ. пер.: V. M. Buchstaber, A. V. Shokurov, “The Landweber–Novikov algebra and formal vector fields on the line”, *Funct. Anal. Appl.*, **12:3** (1978), 159–168.
- [8] В. М. Бухштабер, “Характеристические классы в кобордизмах и топологические приложения теорий однозначных и двузначных формальных групп”, *Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем.*, **10**, ВИНТИ, М., 1978, 5–178; англ. пер.: V. M. Buchstaber, “Characteristic classes in cobordism and topological applications of the theory of single-valued and two-valued formal groups”, *J. Soviet Math.*, **11:6** (1979), 815–921.
- [9] С. А. Айвазян, В. М. Бухштабер, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин, *Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности*, Финансы и статистика, М., 1989, 608 с.
- [10] V. M. Buchstaber, V. K. Maslov, “Mathematical models and algorithms of tomographic synthesis of wave fields and inhomogeneous media”, *Mathematical problems of tomography*, Transl. Math. Monogr., **81**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990, 225–267.
- [11] В. М. Бухштабер, “Функциональные уравнения, ассоциированные с теоремами сложения для эллиптических функций, и двузначные алгебраические группы”, *УМН*, **45:3**(273) (1990), 185–186; англ. пер.: V. M. Buchstaber, “Functional equations associated with addition theorems for elliptic functions and two-valued algebraic groups”, *Russian Math. Surveys*, **45:3** (1990), 213–215.
- [12] В. М. Бухштабер, И. М. Кричевер, “Векторные теоремы сложения и функции Бейкера–Ахиезера”, *ТМФ*, **94:2** (1993), 200–212; англ. пер.: V. M. Buchstaber, I. M. Krichever, “Vector addition theorems and Baker–Akhiezer functions”, *Theoret. and Math. Phys.*, **94:2** (1993), 142–149.
- [13] V. M. Buchstaber, “Time series analysis and Grassmannians”, *Applied problems of Radon transform*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **162**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 1–17.
- [14] V. M. Buchstaber, G. Felder, A. P. Veselov, “Elliptic Dunkl operators, root systems, and functional equations”, *Duke Math. J.*, **76:3** (1994), 885–911.
- [15] V. M. Buchstaber, A. M. Perelomov, “On the functional equation related to the quantum three-body problem”, *Contemporary mathematical physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **175**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 15–34.
- [16] В. М. Бухштабер, А. М. Вершик, С. А. Евдокимов, И. Н. Пономаренко, “Комбинаторные алгебры и многозначные инволютивные группы”, *Функц. анализ и его прил.*, **30:3** (1996), 12–18; англ. пер.: V. M. Buchstaber, A. M. Vershik, S. A. Evdokimov, I. N. Ponomarenko, “Combinatorial algebras and multivalued involutive groups”, *Funct. Anal. Appl.*, **30:3** (1996), 158–162.
- [17] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, В. З. Энольский, “Униформизация многообразий Якоби тригональных кривых и нелинейные дифференциальные уравнения”, *Функц. анализ и его прил.*, **34:3** (2000), 1–16; англ. пер.: V. M. Buchstaber, D. V. Leikin, V. Z. Ènol’skii, “Uniformization of jacobian varieties of trigonal curves and nonlinear differential equations”, *Funct. Anal. Appl.*, **34:3** (2000), 159–171.
- [18] V. M. Buchstaber, N. Ray, “Tangential structures on toric manifolds, and connected sums of polytopes”, *Internat. Math. Res. Notices*, **2001:4** (2001), 193–219.
- [19] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, *Torus actions and their applications in topology and combinatorics*, Univ. Lecture Ser., **34**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, viii+144 pp.

- [20] V. M. Buchstaber, E. G. Rees, “The Gelfand map and symmetric products”, *Selecta Math. (N.S.)*, **8**:4 (2002), 523–535.
- [21] В. М. Бухштабер, О. В. Карпов, С. И. Тертычный, “Динамика переходных процессов, происходящих в сильношунтированном переходе Джозефсона при его смещении последовательностью коротких импульсов тока с управляемыми параметрами”, *ЖЭТФ*, **124**:3(9) (2003), 691–699; англ. пер.: V. M. Buchstaber, O. V. Karpov, S. I. Tertychnyi, “The dynamics of transients in an overdamped Josephson junction biased by trains of short current pulses with controllable parameters”, *J. Exp. Theor. Phys.*, **97**:3 (2003), 624–631.
- [22] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике*, МЦНМО, М., 2004, 272 с.
- [23] В. М. Бухштабер, Э. Г. Рис, “Кольца непрерывных функций, симметрические произведения и алгебры Фробениуса”, *УМН*, **59**:1(355) (2004), 125–144; англ. пер.: V. M. Buchstaber, E. G. Rees, “Rings of continuous functions, symmetric products, and Frobenius algebras”, *Russian Math. Surveys*, **59**:1 (2004), 125–145.
- [24] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, “Законы сложения на якобианах плоских алгебраических кривых”, *Нелинейная динамика*, Сборник статей, Тр. МИАН, **251**, Наука, М., 2005, 54–126; англ. пер.: V. M. Buchstaber, D. V. Leikin, “Addition laws on Jacobian varieties of plane algebraic curves”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **251** (2005), 49–120.
- [25] V. M. Buchstaber, “ n -valued groups: theory and applicatons”, *Mosc. Math. J.*, **6**:1 (2006), 57–84.
- [26] В. М. Бухштабер, И. М. Кричевер, “Интегрируемые уравнения, теоремы сложения и проблема Римана–Шоттки”, *УМН*, **61**:1(367) (2006), 25–84; англ. пер.: V. M. Buchstaber, I. M. Krichever, “Integrable equations, addition theorems, and the Riemann–Schottky problem”, *Russian Math. Surveys*, **61**:1 (2006), 19–78.
- [27] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, N. Ray, “Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds”, *Mosc. Math. J.*, **7**:2 (2007), 219–242.
- [28] В. М. Бухштабер, “Кольцо простых многогранников и дифференциальные уравнения”, *Геометрия, топология и математическая физика. I*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Сергея Петровича Новикова, Тр. МИАН, **263**, МАИК, М., 2008, 18–43; англ. пер.: V. M. Buchstaber, “Ring of simple polytopes and differential equations”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **263**:1 (2008), 13–37.
- [29] V. M. Buchstaber, N. Ray, “An invitation to toric topology: vertex four of a remarkable tetrahedron”, *Toric topology*, Contemp. Math., **460**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 1–27.
- [30] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, “Решение задачи дифференцирования абелевых функций по параметрам для семейств (n, s) -кривых”, *Функц. анализ и его прил.*, **42**:4 (2008), 24–36; англ. пер.: V. M. Buchstaber, D. V. Leikin, “Solution of the problem of differentiation of Abelian functions over parameters for families of (n, s) -curves”, *Funct. Anal. Appl.*, **42**:4 (2008), 268–278.
- [31] V. Buchstaber, T. Panov, N. Ray, “Toric genera”, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2010**:16 (2010), 3207–3262.
- [32] В. М. Бухштабер, О. В. Карпов, С. И. Тертычный, “Эффект квантования числа вращения”, *ТМФ*, **162**:2 (2010), 254–265; англ. пер.: V. M. Buchstaber, O. V. Karpov, S. I. Tertychnyi, “Rotation number quantization effect”, *Theoret. and Math. Phys.*, **162**:2 (2010), 211–221.
- [33] В. М. Бухштабер, Е. Ю. Бунькова, “Формальные группы Кричевера”, *Функц. анализ и его прил.*, **45**:2 (2011), 23–44; англ. пер.: V. M. Buchstaber, E. Yu. Bun’kova, “Krichever formal groups”, *Funct. Anal. Appl.*, **45**:2 (2011), 99–116.
- [34] В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, “Многогранники, числа Фибоначчи, алгебры Хопфа и квазисимметрические функции”, *УМН*, **66**:2(398) (2011), 67–162;

- англ. пер.: V. M. Buchstaber, N. Yu. Erokhovets, “Polytopes, Fibonacci numbers, Hopf algebras, and quasi-symmetric functions”, *Russian Math. Surveys*, **66**:2 (2011), 271–367.
- [35] В. М. Бухштабер, В. Д. Володин, “Точные верхние и нижние границы для нестоэдров”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:6 (2011), 17–46; англ. пер.: V. M. Buchstaber, V. D. Volodin, “Sharp upper and lower bounds for nestohedra”, *Izv. Math.*, **75**:6 (2011), 1107–1133.
- [36] В. М. Бухштабер, “Комплексные кобордизмы и формальные группы”, *УМН*, **67**:5(407) (2012), 111–174; англ. пер.: V. M. Buchstaber, “Complex cobordism and formal groups”, *Russian Math. Surveys*, **67**:5 (2012), 891–950.