Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Дегтярев, Ограничение числа Пикара разрешения особенностей $SL(2)$ -многообразий Фано, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 2, 155–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm953>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 13:37:43

ОГРАНИЧЕНИЕ ЧИСЛА ПИКАРА РАЗРЕШЕНИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ SL(2)-МНОГООБРАЗИЙ ФАНО

М. В. ДЕГТЯРЕВ

Пусть X – трехмерное многообразие Фано с лог-терминальными особенностями, на котором бигекулярно действует группа $SL(2, \mathbb{C})$ так, что имеется плотная орбита, эквивариантно изоморфная $SL(2)/G$, где G – конечная подгруппа в группе $SL(2, \mathbb{C})$ и G отлична от циклической (т.е. является бинарной группой икосаэдра, тетраэдра, октаэдра или диэдра).

ТЕОРЕМА. Для X существует эквивариантное разрешение особенностей $\tilde{X}$ такое, что $\rho(\tilde{X}) \leq 7 + 16/r(X)$, где ρ – ранг группы Пикара, $r(X)$ – индекс Фано многообразия X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем доказательство для случая, когда G – бинарная группа икосаэдра, остальные случаи разбираются аналогично. Пусть $\varphi: \tilde{X} \rightarrow X$ – морфизм разрешения особенностей на X , $\psi: \tilde{X} \rightarrow Y$ – морфизм на единственное минимальное $(SL(2), G)$ -многообразие Y , $Y = \overline{SL(2) \cdot [f_{12}]}$ в $\mathbb{P}(R_{12})$, $f_{12} = f_{12}(x, y) = xy(x^{10} + 11x^5y^5 + y^{10})$ (см. [1]). Морфизм ψ можно разложить в композицию раздутий с центрами в инвариантных кривых [1]: $\tilde{X} = Y_n \rightarrow Y_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow Y_3 \rightarrow Y_2 \rightarrow Y_1 \rightarrow Y_0 = Y$. Решетка $N(Y_i) = \text{Pic}(Y_i)$ свободно порождается классами неприводимых инвариантных дивизоров, которые являются рациональными линейчатыми поверхностями и, если $i \geq 3$, то они пересекаются трансверсально. Введем в $N(Y_i) \otimes \mathbb{R}$ произведение: положим $[D] * [E] = D \cdot e$, где e – слой E , при этом, если $E \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ с диагональным действием $SL(2)$, то e выбираем так, чтобы индекс пересечения $E \cdot e$ принимал наименьшее значение, а если $E \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ с действием на одной компоненте, то в качестве e выбираем не инвариантный слой. Непосредственно проверяется, что введенная форма произведения симметрична и имеет сигнатуру $(1, \rho(Y_i) - 1)$, т.е. она гиперболична. Сопоставим неприводимым инвариантным дивизорам естественным образом взвешенный граф $\Gamma(Y_i)$. Граф называется ланнеровским, если он гиперболичен, но любой его подграф не гиперболичен (см. [2]). Покажем индукцией по i , что граф $\Gamma_i = \Gamma(Y_i)$ – ланнеровский. Так как Y_3 вместе с морфизмом $Y_3 \rightarrow Y$ определено однозначно, то граф Γ_3 имеет вид:

Вершины v_j , $j = 1, 2, 3$, соответствуют дивизорам, изоморфным $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ с диагональным действием $SL(2)$, вершина v соответствует дивизору, изоморфному $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ с действием на одной компоненте, поэтому на нем бесконечное число одномерных орбит. Так как при раздутиях ребер возникает дивизор, изоморфный $\mathbb{F}_m$, $m > 0$, мы можем считать, что морфизм $\sigma_i: Y_i \rightarrow Y_{i-1}$ раздувает ребра графа Γ_{i-1} и собственный прообраз вершины v . Пусть w – новая вершина графа Γ_i . Если σ_i – раздутие ребра, то граф $\Gamma_i - w$ распадается на два непересекающихся графа, которые не гиперболичны по предположению индукции. Пусть σ_i – раздутие собственного прообраза $\tilde{v}$ вершины v . Граф $\Gamma_i - w$ отличается от Γ_{i-1} уменьшением веса $\tilde{v}$ на 1. Стыкаем на $\Gamma_i - w$ все вершины с весом -1 . Этому будет соответствовать морфизм $\tau: Y_i \rightarrow Y'_4$, где Y'_4 – раздутие Y_3 в вершине v . Граф $\tilde{\Gamma} = \Gamma(Y'_4) - \tau(w)$ имеет вид:

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-011-1539), а также Международного научного фонда (грант № 90000).

Он эллиптичен, т.е. имеет сигнатуру $(0,4)$ (см., например, [3]), но граф $\Gamma_i - w$ получается раздутием $\tilde{\Gamma}$, следовательно, он также эллиптичен. Мы показали, что граф $\Gamma(\tilde{X})$ – ланне-ровский. Так как X – многообразие Фано, морфизм φ стягивает все вершины с весом меньше -1 . Для оставшихся вершин e_j определим DP-коэффициенты η_j так же, как в работе [4]: $\eta_j = -[\varphi^* K_X] * [e_j] = 1 + \sum_i \alpha_i [F_i] * [e_j]$, где F_i – исключительные дивизоры морфизма φ , коэффициенты α_i определяются равенством $K_{\tilde{X}} = \varphi^* K_X + \sum_i \alpha_i F_i$; $\alpha_i \leq 0$, так как в качестве $\tilde{X}$ мы можем взять терминальную модификацию X , которая неособа, поскольку изолированные особенности $(\mathrm{SL}(2), G)$ -многообразий не $\mathbb{Q}$ -факториальны [5]. Если все $\eta_j \geq \varepsilon$, то говорят, что граф $\Gamma(\tilde{X})$ удовлетворяет условию $\mathrm{DP}(\varepsilon)$. В этом случае по теореме 3.13 из [4] мы получаем оценку: $\rho(\tilde{X}) \leq 7 + 16/\varepsilon$. Осталось заметить, что $r(X) \leq \mathrm{НОД}(\eta_j)$. Теорема доказана.

Следствие. $\rho(\tilde{X}) \leq 7 + 16/k$, k – индекс горючести новости X .

Автор выражает благодарность Ю. Г. Прохорову за постановку задачи и внимание к работе, а также В. В. Никулину за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Mukai S., Umemura H. // Lect. Notes in Math. 1983. V. 1016. P. 490–518. [2] Никулин В. В. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 6. С. 1032–1050. [3] Илиев А. Н. // Вестник МГУ. Сер. I. Матем., мех. 1986. № 3. С. 38–44. [4] Алексеев В. А. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 6. С. 1288–1304. [5] Крафт Х. Геометрические методы в теории инвариантов. М.: Мир, 1987.

Принято редколлегией
15.01.1996