Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Кустарев, Почти комплексные действия окружности с малым числом неподвижных точек, *УМН*, 2013, том 68, выпуск 3, 191–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9531>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 13:51:14

Почти комплексные действия окружности с малым числом неподвижных точек

А. А. Кустарев

Пусть M – гладкое компактное многообразие с гладким действием компактной группы Ли. Если гладкое действие группы имеет ровно две неподвижные точки, то гипотеза Смита [1] утверждает, что соответствующие представления в неподвижных точках эквивалентны. Для действий циклической группы, свободных всюду, кроме двух неподвижных точек, это утверждение доказано Милнором. Предмет настоящей работы – действия окружности с малым числом неподвижных точек, сохраняющие некоторую почти комплексную структуру. Начиная с работ Коннера и Флойда [2], большую роль при исследовании гладких действий конечных групп и групп Ли играют экстраординарные теории бордизмов и кобордизмов, формальные группы и теоремы локализации (см. также [3]–[5]).

Как показано в [6], если M^n – многообразие с почти комплексным действием окружности, имеющим ровно три неподвижные точки, то $n = 4k$. На $M^4 = \mathbb{C}P^2$, очевидно, такое действие существует.

ТЕОРЕМА 1. *На гладких многообразиях размерности 8 не существует действий окружности, сохраняющих некоторую почти комплексную структуру и имеющих ровно три неподвижные точки.*

Напомним, что на кватернионной проективной плоскости $\mathbb{H}P^2$ существует действие окружности с тремя неподвижными точками, но не существует почти комплексной структуры.

На n -мерных многообразиях почти комплексные действия окружности с ровно двумя неподвижными точками существуют лишь при $n = 2$ и $n = 6$, причем при $n = 6$ веса действия имеют вид $\{a, b, -a - b\}$ и $\{-a, -b, a + b\}$. Доказательство этого факта в работе [6] проведено для симплектических действий, но легко обобщается на почти комплексный случай. Ключевое соображение – использование формулы локализации Атьи–Ботта или универсального торического рода [7].

ТЕОРЕМА 2. *Для любого почти комплексного многообразия M^4 на многообразии $(S^6) \#_{S^1} (S^1 \times S^1 \times M^4)$ существуют почти комплексная структура и действие окружности с ровно двумя неподвижными точками, сохраняющее эту структуру.*

Здесь под $(S^6) \#_{S^1} (S^1 \times S^1 \times M^4)$ мы понимаем послойную связную сумму многообразий вдоль окрестности некоторой свободной орбиты действия S^1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть M^8 – многообразие с почти комплексным действием окружности, имеющим ровно три неподвижные точки, $a_1 = t$ – максимальный по модулю вес действия, $x \in M^8$ – соответствующая ему неподвижная точка. Можно считать, что $t > 0$. Любое $2k$ -мерное многообразие с почти комплексным действием окружности и весами действия ± 1 имеет ровно 2^k неподвижных точек [8], [9]. Следовательно, в нашем случае $t \neq \pm 1$. Веса действия факторгруппы $S^1/\mathbb{Z}/m$ на многообразии неподвижных точек $M^{\mathbb{Z}/m}$ равны ± 1 . Число неподвижных точек действия факторгруппы обязано быть степенью двойки. В то же время оно не больше трех и не равно единице, поэтому $M^{\mathbb{Z}/m}$ двумерно. Пусть $y \neq x$ и $y \in M^{\mathbb{Z}/m}$ – вторая неподвижная точка такая, что $b_1 = -a_1 = -t$, b_i – веса в y . Тогда множества весов (a_2, a_3, a_4) и (b_2, b_3, b_4) совпадают по модулю t , так как множества вычетов являются весами действия циклической группы $\mathbb{Z}/m \subset S^1$ в нормальном расслоении к $M^{\mathbb{Z}/m}$. Обозначим веса в третьей неподвижной точке $z \in M^8$ через c_i .

ЛЕММА 1 [10]. *Веса $a_1, \dots, c_4$ разбиваются на пары противоположных по знаку, причем каждая пара соответствует разным неподвижным точкам.*

ЛЕММА 2 [6]. Если число неподвижных точек почти комплексного действия на M^{2n} меньше $n + 1$, то для каждой неподвижной точки найдется другая с той же суммой весов действия.

Из леммы 2 следует, что суммы весов во всех трех точках нашего действия равны, а из леммы 1 – что эти суммы равны нулю. Таким образом, веса b_i имеют вид $a_2 + m, a_3 + m, a_4$. Вес a_4 не может быть противоположным ни одному из весов $a_2 + m, a_3 + m$, так как тогда $m + a_2 + a_3 + a_4 \neq 0$. Тем самым, можем считать, что $c_1 = c_2 = -a_4$. Кроме того, $a_2 + m \neq -a_3, a_3 + m \neq -a_2$. Следовательно, единственная возможность – $a_2 + m = -a_2, c_3 = -a_3, c_4 = -a_3 - m$. Тогда многообразие $M^{\mathbb{Z}/(m/2)}$ (вернее, его компонента) четырехмерно и содержит ровно две неподвижные точки относительно действия факторгруппы $S^1/\mathbb{Z}/(m/2)$. Веса этого действия равны $(2, -1)$ и $(-2, 1)$, что противоречит теореме локализации.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теорема 1 не может быть доказана с помощью только теоремы локализации универсального торического рода [11]. Есть пример трех множеств целочисленных весов – $(-7, -1, 10, 12)$, $(-8, 3, 5, 14)$, $(-8, 3, 5, 14)$, для которого соответствующая рациональная функция не имеет особенностей в нуле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Известно, что на сфере $S^6 = G_2/SU(3)$ есть почти комплексная структура, инвариантная относительно действия максимального тора $T^2 \subset SU(3)$ [1]. Число неподвижных точек равно двум, и можно выбрать одномерную подгруппу, действующую на S^6 с весами $\{a + b, -a, -b\}, \{-a - b, a, b\}$.

Пусть M^6 и N^6 – многообразия с почти комплексным действием окружности, U_M и U_N – трубчатые окрестности некоторых орбит свободного действия окружности на M^6 и N^6 . Фиксируем эквивариантные диффеоморфизмы $\phi_M, \phi_N: S^1 \times S^4 \rightarrow \partial U_M, \partial U_N$. Введем гладкое многообразие $X = (M^6 - U_M) \cup_{\phi_M} (S^1 \times S^4 \times I) \cup_{\phi_N} (N^6 - U_N)$. Теорема 2 тогда сводится к следующему утверждению о послойных связных суммах многообразий.

ЛЕММА 3. На многообразии X существует почти комплексная структура, совпадающая со структурами на $M^6 - U_M$ и $N^6 - U_N$, и эта структура инвариантна относительно естественного продолжения действия окружности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Гладкость на многообразии X вводится при помощи теоремы об эквивариантной кромке. Если на $M^6 - U_M$ и $N^6 - U_N$ инвариантная почти комплексная структура уже задана, то препятствие к ее инвариантному продолжению на X лежит в группе $\pi_4(SO(6)/U(3)) = \pi_4(SO/U)$, а эта группа тривиальна ([12]).

Автор благодарен В. М. Бухштаберу, Т. Е. Панову, а также Е. Гречникову и Ю. Устиновскому за ценное обсуждение.

Список литературы

- [1] P. A. Smith, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66**:6 (1960), 401–415. [2] П. Коннер, Э. Флорид, *Гладкие периодические отображения*, Мир, М., 1969, 340 с. [3] С. П. Новиков, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:6 (1968), 1245–1263. [4] И. М. Кричевер, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **38**:6 (1974), 1289–1304. [5] В. М. Бухштабер, С. П. Новиков, *Матем. сб.*, **84**(126):1 (1971), 81–118. [6] A. Pelayo, S. Tolman, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **31**:4 (2011), 1237–1247. [7] V. Buchstaber, T. Panov, N. Ray, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2010**:16 (2010), 3207–3262, arXiv:0908.3298. [8] S. Tolman, J. Weitsman, *Topology*, **39**:2 (2000), 299–309. [9] К. Э. Фельдман, *УМН*, **56**:5(341) (2001), 187–188, arXiv:math/0110028v2. [10] О. Р. Мусин, *Матем. заметки*, **28**:1 (1980), 139–152. [11] A. Borel, F. Hirzebruch, *Amer. J. Math.*, **80**:2 (1958), 459–538. [12] R. Bott, *Ann. of Math* (2), **70**:2 (1959), 313–337.

А. А. Кустарев (A. A. Kustarev)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: kustarev@gmail.com

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
05.04.2013