Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Муравлёв, Методы последовательного различения гипотез о значении сноса фрактального броуновского движения, *УМН*, 2013, том 68, выпуск 3, 193–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9534>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 14:36:26

Методы последовательного различения гипотез о значении сноса фрактального броуновского движения

А. А. Муравлёв

1. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ задан процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$,

$$X_t = \mu t + B_t^H,$$

где $B^H = (B_t^H)_{t \geq 0}$ – фрактальное броуновское движение с параметром Харста $H \in (0, 1)$, а μ – независимая от B^H случайная величина (далее мы будем предполагать, что $\mathbf{E}|\mu| < \infty$). Напомним, что B^H определяется как гауссовский процесс с

$$B_0^H = 0, \quad \mathbf{E}B_t^H = 0, \quad \mathbf{E}B_s^H B_t^H = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}), \quad s, t \geq 0.$$

Процесс B^H при $H = 1/2$ является стандартным броуновским движением, но при $H \neq 1/2$ не является ни семимартингалом, ни марковским процессом (см., например, [1]).

2. Пусть множества $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}$ образуют полную группу, т.е. не пересекаются и $\sum_i \mathbf{P}(\mu \in A_i) = 1$. Мы рассмотрим задачу различения гипотез $H_1, \dots, H_n$, $H_i: \mu \in A_i$, по последовательным наблюдениям за X . Каждая процедура проверки задается решающим правилом $\delta = (\tau, d_\mu)$, состоящим из момента остановки τ фильтрации $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$, $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s; s \leq t)$, и $\mathcal{F}_\tau^X$ -измеримой функции d_μ , принимающей значения $1, \dots, n$. Момент τ соответствует времени прекращения наблюдения, а значение d_μ – номеру принимаемой гипотезы.

Каждому решающему правилу δ сопоставим функцию потерь $\mathcal{R}_X(\delta) = \mathbf{E}[c\tau + W(\mu, d_\mu)]$, где $c\tau$ является платой за наблюдения (пропорциональной времени наблюдения), а $W(\mu, d_\mu)$ – функцией штрафа (за неправильно принятое решение). Рассмотрим задачу отыскания оптимального правила $\delta^* = (\tau^*, d_\mu^*)$ такого, что

$$\mathcal{R}_X(\delta^*) = \inf_{\delta} \mathcal{R}_X(\delta), \quad (1)$$

где инфимум берется по всем решающим правилам $\delta = (\tau, d_\mu)$ с $\mathbf{E}\tau < \infty$. В работе [2] показано, что когда функция штрафа является квадратичной или дельта-функцией, а $\mu \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$, оптимальный момент τ^* (в классе правил δ с $\tau \leq T$, $T > 0$) является детерминистическим. В (1) момент τ^* , вообще говоря, является случайным.

3. Рассмотрим интегральный оператор M , преобразующий f в $M(f)$ согласно

$$M_t(f) = c_H \int_0^t s^{1/2-H} (t-s)^{1/2-H} df_s, \quad c_H = \left(\frac{\Gamma(3-2H)}{2H\Gamma(3/2-H)^3\Gamma(1/2+H)} \right)^{1/2}.$$

Определим процесс $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ как $Z_t = M(X)_{\langle M(X) \rangle_t^{-1}}$, где $\langle M(X) \rangle_t = t^{2-2H}$ есть квадратическая характеристика $M(X)$.

ТЕОРЕМА 1. Процесс Z допускает представление $Z_t = \lambda t + B_t$, где $B = (B_t)_{t \geq 0}$ есть стандартное броуновское движение, а λ – независимая от B случайная величина. При этом фильтрации $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$ и $(\mathcal{F}_t^Z)_{t \geq 0}$ совпадают.

Доказательство основано на том, что процесс $M(B^H)$ является (фундаментальным) мартингалом, причем фильтрации B^H и $M(B^H)$ совпадают (см., например, [1], [3]). В качестве B_t выбирается $M(B^H)_{\langle M(B^H) \rangle_t^{-1}}$, а $\lambda = b_H \mu$, где $b_H = c_H B(3/2-H, 3/2-H)$.

Работа выполнена при поддержке “Премолаб”, МФТИ (грант правительства РФ, дог. 11.G34.31.0073) и РФФИ (гранты № 11-01-00949-а, 12-01-31449-мол_а, 13-08-01096-а).

DOI: 10.4213/rm9534

Каждому $(\mathcal{F}_t^Z)_{t \geq 0}$ -решающему правилу $\gamma = (\sigma, d_\lambda)$ сопоставим $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$ -решающее правило $\delta = (\tau, d_\mu)$ с $\tau = \sigma^{1/(2-2H)}$, $d_\mu(\tau) \equiv d_\lambda(\sigma)$. Несложно видеть, что это отображение (назовем его $\mathcal{A}$) является биекцией. Рассмотрим задачу

$$\mathcal{R}_Z(\gamma^*) = \inf_{\gamma} \mathcal{R}_Z(\gamma), \quad \mathcal{R}_Z(\gamma) = \mathbb{E}[c\sigma^{1/(2-2H)} + \widetilde{W}(\lambda, d_\lambda)], \quad (2)$$

где $\widetilde{W}(\lambda, d_\lambda) = W(\mu, d_\mu)$ и инфимум берется по всем $\gamma = (\sigma, d_\lambda)$ с $\mathbb{E}\sigma^{1/(2-2H)} < \infty$.

ТЕОРЕМА 2. Решения задач (1) и (2) совпадают, т.е. $\mathcal{R}_X(\delta^*) = \mathcal{R}_Z(\gamma^*)$, при этом оптимальные правила связаны соотношением $\delta^* = \mathcal{A}\gamma^*$.

4. Следуя общей теории статистического последовательного анализа [4], получаем

$$\mathcal{R}_Z(\gamma^*) = \inf_{\sigma} \mathbb{E} \left[c\sigma^{1/(2-2H)} + \min_i \mathbb{E}(\widetilde{W}(\lambda, i) \mid \mathcal{F}_{\sigma}^Z) \right], \quad (3)$$

где инфимум берется по моментам остановки σ таким, что $\mathbb{E}\sigma^{1/(2-2H)} < \infty$. При этом, если σ^* является оптимальным, то правило $\delta^* = (\sigma^*, d_{\lambda}^*)$ с $d_{\lambda}^* = \arg \min_i \mathbb{E}(\widetilde{W}(\lambda, i) \mid \mathcal{F}_{\sigma^*}^Z)$ является оптимальным в (2). Пусть P^0 обозначает меру $P^0(\cdot) = P(\cdot \mid \lambda = 0)$, по которой процесс Z является броуновским движением. Рассмотрим задачу

$$V = \inf_{\sigma} \mathbb{E}^0 \left[c\sigma^{1/(2-2H)} \mathbb{E}^0(\mathcal{E}_{\sigma}(\lambda) \mid \mathcal{F}_{\sigma}^Z) + \min_i \mathbb{E}^0(\widetilde{W}(\lambda, i) \mathcal{E}_{\sigma}(\lambda) \mid \mathcal{F}_{\sigma}^Z) \right], \quad (4)$$

где $\mathcal{E}_{\sigma}(\lambda) = \exp(\lambda Z_{\sigma} - \lambda \sigma^2/2)$, $\mathbb{E}^0$ – математическое ожидание по мере P^0 , а инфимум берется по всем моментам σ таким, что $\mathbb{E}^0 \sigma^{1/(2-2H)} < \infty$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть σ^* – оптимальный момент в задаче (4) и $P(\sigma^* < \infty) = 1$. Тогда σ^* является оптимальным также и в задаче (3) и $\mathcal{R}_Z(\gamma^*) = V$.

Доказательство основано на общей теории абсолютной непрерывности мер процессов Ито относительно меры винеровского процесса (см., например, [5; ч. 7]). Чтобы перейти к задаче для броуновского движения в случае $\mu \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$, вместо замены меры можно использовать гауссовость Z по P и метод замены времени (см. [6]).

5. Итак, мы перешли от задачи (1) к (4). Отметим, что (4) является стандартной задачей, поскольку имеет вид $V = \inf_{\sigma} \mathbb{E}^0 G(\sigma, Z_{\sigma})$. Для ее изучения можно использовать хорошо разработанные методы теории оптимальной остановки броуновского движения (см., например, [7], [8]).

Примеры решения конкретных задач будут рассмотрены в другой статье.

Автор выражает признательность А.Н. Ширяеву за внимание к работе.

Список литературы

- [1] Yu. S. Mishura, *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes*, Lecture Notes in Math., **1929**, Springer, Berlin, 2008, xviii+393 pp. [2] U. Çetin, A. Novikov, A. N. Shiryaev, “Bayesian sequential estimation of a drift of fractional Brownian motion”, *Sequential Anal.*, 2013 (to appear). [3] Г. М. Молчан, *Теория вероятн. и ее примен.*, **14**:3 (1969), 556–559. [4] А. Н. Ширяев, *Статистический последовательный анализ. Оптимальные правила остановки*, Наука, М., 1969, 231 с. [5] Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, *Статистика случайных процессов: нелинейная фильтрация и смежные вопросы*, **15**, Наука, М., 1974, 696 с. [6] М. В. Житлухин, А. А. Муравлёв, *Теория вероятн. и ее примен.*, **57**:4 (2012), 778–788. [7] G. Peskir, A. Shiryaev, *Optimal stopping and free-boundary problems*, Birkhäuser, Basel, 2006, xxii+500 pp. [8] P. van Moerbeke, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **60**:2 (1976), 101–148.

А. А. Муравлёв (A. A. Muravlev)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: almurav@mi.ras.ru

Представлено А. В. Булинским

Принято редколлегией

05.04.2013