Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Гогатишвили, В. Д. Степанов, Редукционные теоремы для весовых интегральных неравенств на конусе монотонных функций, *УМН*, 2013, том 68, выпуск 4, 3–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9538>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:19:54

УДК 517.51

Редукционные теоремы для весовых интегральных неравенств на конусе монотонных функций

А. Гогатишвили, В. Д. Степанов

В работе дается обзор результатов, связанных с редукцией интегральных неравенств с положительными операторами в весовых пространствах Лебега на вещественной полуоси на конусе монотонных функций к некоторым неравенствам на конусе неотрицательных функций, для доказательства которых имеется больше возможностей. При этом случай монотонных операторов является новым. В качестве приложения для ряда операторов Вольтерра получена полная характеристика при всех возможных параметрах суммирования.

Библиография: 118 названий.

Ключевые слова: весовое пространство Лебега, конус монотонных функций, весовое интегральное неравенство, принцип двойственности, ограниченные операторы, редукционная теорема.

DOI: 10.4213/rm9538

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Интегральные операторы	8
2. Принципы двойственности	13
2.1. Принцип двойственности Сойлера	14
2.2. Неравенство Харди на монотонных функциях	20
3. Редукционные теоремы	25
3.1. Редукционные теоремы для монотонных операторов при $0 < q \leq \infty$, $1 \leq p < \infty$	25
3.2. Редукционные теоремы для квазилинейных операторов при $0 < p \leq q < \infty$	29
3.3. Редукционные теоремы для операторов Вольтерра при $0 < q < p \leq 1$	32
3.4. Дальнейшие результаты и комментарии	53
Список литературы	62

Работа первого автора выполнена при поддержке Научного Агентства Республики Чехия (гранты № 201-08-0383 и P201-13-14743S) и Института математики Чешской Академии наук (грант RVO: 67985840). Работа второго автора выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 12-01-00524 и 12-01-00554) и Дальневосточного отделения Российской академии наук (гранты № 12-I-OMN-01 и 12-II-CO-01M-002).

Введение

В работе дается обзор по весовым интегральным неравенствам в пространствах Лебега на конусах монотонных функций на полусоси.

Пусть $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$. Обозначим $\mathfrak{M}$ пространство всех измеримых по Лебегу функций на $\mathbb{R}_+$. При $0 < p \leq \infty$ положим

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}_+} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, & 0 < p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x)|, & p = \infty, \end{cases}$$

и определим пространство Лебега L_p как совокупность всех $f \in \mathfrak{M}$ таких, что $\|f\|_p < \infty$.

Известной задачей функционального анализа является нахождение необходимых и/или достаточных условий выполнения при фиксированных параметрах $0 < p, q \leq \infty$ интегральных неравенств вида

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+} \left| w(x) \int_{\mathbb{R}_+} k(x, y) f(y) u(y) dy \right|^q dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}_+} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}, \quad (1)$$

где $k(x, y)$ – измеримое по совокупности переменных ядро, $u(x)$ и $w(x)$ – локально суммируемые весовые функции, а константа $C \geq 0$ не зависит от f и выбирается наименьшей из возможных, т. е. равной норме $\|\mathcal{K}\|_{L_p \rightarrow L_q}$ оператора

$$\mathcal{K}f(x) := w(x) \int_{\mathbb{R}_+} k(x, y) f(y) u(y) dy, \quad (2)$$

действующего из L_p в L_q .

Известно (см. теорему 2 в [86]), что если $0 < p < 1$ и $\|\mathcal{K}\|_{L_p \rightarrow L_q} < \infty$, то $\|\mathcal{K}\|_{L_p \rightarrow L_q} = 0$, поэтому изучение неравенства (1) и свойств оператора $\mathcal{K}: L_p \rightarrow L_q$ сужается на значения параметров $1 \leq p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$. Указанной задаче об ограниченности интегральных операторов и изучению их общих свойств посвящена обширная литература (см., например, монографии [38], [48; гл. 11], [49], [50], [72], [108]).

Следует отметить, что для знакопеременных ядер $k(x, y)$ неравенство (1) может выполняться за счет осцилляции ядра при его неограниченном росте (см., например, [46], [108]), поэтому операторы с такими ядрами изучаются в важных частных случаях. Успехи общей теории в последние двадцать лет связаны, в основном, с изучением операторов (2) с неотрицательными ядрами $k(x, y) \geq 0$. Несмотря на это существенное ограничение, для некоторых классов операторов Вольерра

$$Kf(x) := w(x) \int_0^x k(x, y) f(y) u(y) dy \quad (3)$$

и двойственных к ним удается получить глубокую и содержательную теорию (см. монографии [15], [52], [56]). Во-первых, решается задача нахождения двусторонней оценки $\|K\|_{L_p \rightarrow L_q} \approx F(k, u, w)$, где функционал $F(k, u, w)$ явно выражен через ядро и весовые функции, а константы эквивалентности зависят

только от параметров p и q . Это позволяет найти явные критерии компактности, а в отдельных случаях провести полномасштабное исследование, включая поведение характеристических чисел (аппроксимативных, энтропийных и т. д.). Эта программа с той или иной степенью общности была реализована для операторов с ядрами, удовлетворяющими условию Ойнарова: существует константа $D \geq 1$, не зависящая от x, y, z , такая, что

$$D^{-1}k(x, y) \leq k(x, z) + k(z, y) \leq Dk(x, y), \quad x \geq z \geq y \geq 0. \quad (4)$$

Типичными примерами таких ядер являются $(x-y)_+^{\alpha-1}$, $\alpha \geq 1$; $\log^\beta(x/y)$, $\beta \geq 0$; $\left(\int_y^x h(z) dz\right)^\gamma$, $\gamma \geq 0$, $h(z) \geq 0$, и различные их комбинации. Для краткости мы будем называть *ядрами Ойнарова* измеримые функции $k(x, y) \geq 0$, удовлетворяющие при $x \geq y \geq 0$ условию (4).

В разделе 1 дается краткий обзор результатов из этой области.

С начала 90-х годов прошлого столетия начал бурно развиваться Λ -анализ – круг вопросов, связанных с характеризацией ограниченности классических операторов в весовых пространствах Лоренца, определение которых мы сейчас напомним. Невозрастающей перестановкой f^* измеримой функции f , заданной на $\mathbb{R}^n$, называется функция

$$f^*(t) := \inf \{s > 0 : \text{mes}\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > s\} \leq t\}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Для фиксированного $p \in (0, \infty)$ и неотрицательной измеримой функции v на $\mathbb{R}_+$ назовем Λ -пространством Лоренца $\Lambda^p(v)$ совокупность всех измеримых на $\mathbb{R}^n$ функций, для которых $\|f\|_{\Lambda^p(v)} < \infty$, где

$$\|f\|_{\Lambda^p(v)} := \left(\int_0^\infty [f^*(t)]^p v(t) dt \right)^{1/p}.$$

Пусть $\mathfrak{M}^+$ обозначает конус всех неотрицательных функций из $\mathfrak{M}$, а $\mathfrak{M}^\downarrow$ ($\mathfrak{M}^\uparrow$) обозначает конус всех невозрастающих (неубывающих) функций из $\mathfrak{M}^+$. Определим

$$L_{p,v}^\downarrow := \left\{ f \in \mathfrak{M}^\downarrow : \|f\|_{p,v} := \left(\int_{\mathbb{R}_+} |f(x)|^p v(x) dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

и аналогично для $L_{p,v}^\uparrow$ и $L_{p,v}^+$. Если для некоторого оператора $T: \Lambda^p(v) \rightarrow \Lambda^q(w)$ удастся получить оценку

$$[Tf]^*(t) \ll [Sf^*](t), \quad t > 0,$$

с положительным оператором S , то ограниченность $S: L_{p,v}^\downarrow \rightarrow L_{q,w}^+$ влечет ограниченность $T: \Lambda^p(v) \rightarrow \Lambda^q(w)$ с неравенством для норм

$$\|T\|_{\Lambda^p(v) \rightarrow \Lambda^q(w)} \ll \|S\|_{L_{p,v}^\downarrow \rightarrow L_{q,w}^+}.$$

Обратное неравенство обычно ищется исходя из анализа оператора на радиальных убывающих функциях (см., например, [23]).

Если выполняется двусторонняя оценка

$$[Tf]^*(t) \approx \int_0^\infty k(t, s)u(s)f^*(s) ds, \quad (5)$$

где $k(t, s) \geq 0$ и $u(s) \geq 0$, то ограниченность оператора T из $\Lambda^p(v)$ в $\Lambda^q(w)$ характеризуется неравенством

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty k(t, s)f(s)u(s)ds \right)^q w(t) dt \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty [f(t)]^p v(t) dt \right)^{1/p} \quad (6)$$

для всех $f \in \mathfrak{M}^\perp$. Например, известно, что максимальный оператор Харди–Литтлвуда

$$Mf(x) := \sup_B \frac{1}{\text{mes } B} \int_B |f(y)| dy,$$

где супремум берется по всем шарам B с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$, допускает двустороннюю оценку

$$[Mf]^*(t) \approx \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds,$$

поэтому его ограниченность из $\Lambda^p(v)$ в $\Lambda^q(u)$ характеризуется неравенством Харди

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds \right)^q w(t) dt \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty [f(t)]^p v(t) dt \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^\perp. \quad (7)$$

Аналогично, для потенциалов Рисса

$$I_\alpha f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y) dy}{|x - y|^{n-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < n,$$

и преобразования Гильберта

$$\mathcal{H}f(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y| > \varepsilon} \frac{f(x - y) dy}{y}$$

выполняются двусторонние оценки

$$(I_\alpha f)^*(t) \ll t^{\alpha/n-1} \int_0^t f^*(z) dz + \int_t^\infty t^{\alpha/n-1} f^*(z) dz \ll (I_\alpha \tilde{f})^*(t), \quad t > 0,$$

где $\tilde{f}(y) = f^*(A|y|^n)$, и

$$(\mathcal{H}f)^*(t) \ll C_1 \left[t^{-1} \int_0^t f^*(z) dz + \int_t^\infty z^{-1} f^*(z) dz \right] \ll (\mathcal{H}f^*)^*(t)$$

соответственно, поэтому их ограниченность из $\Lambda^p(v)$ в $\Lambda^q(w)$ также характеризуется неравенством типа (6).

Приведем еще один пример, когда оператор S нелинеен. Для $\gamma \in (0, n)$ дробный максимальный оператор M_γ определяется формулой

$$M_\gamma f(x) := \sup_B |B|^{\gamma/n-1} \int_B |f(y)| dy.$$

Тогда

$$(M_\gamma f)^*(t) \lesssim \sup_{\tau \geq t} \tau^{\gamma/n-1} \int_0^\tau f^*(s) ds \quad (8)$$

и для любой функции $\varphi \in \mathfrak{M}^\downarrow$ существует функция f на $\mathbb{R}^n$ такая, что $f^* = \varphi$ почти всюду и

$$(M_\gamma f)^*(t) \gtrsim \sup_{\tau \geq t} \tau^{\gamma/n-1} \int_0^\tau f^*(s) ds =: S_\gamma f^*(t). \quad (9)$$

В этом случае $\|M_\gamma\|_{\Lambda^p(v) \rightarrow \Lambda^q(w)} \approx \|S_\gamma\|_{L_{p,v}^\downarrow \rightarrow L_{q,w}^+}$. Операторы M_γ играют важную роль в теории вложения пространств Соболева.

Таким образом, существенной частью Λ -анализа является **задача** о характеристизации $(L_{p,v}^\downarrow \rightarrow L_{q,w}^+)$ -неравенств для положительных операторов, которой посвящена данная работа. Попутно мы решаем аналогичную задачу для $(L_{p,v}^\uparrow - L_{q,w}^+)$ -неравенств.

Отметим еще две особенности. Первая состоит в том, что выполнение неравенств на монотонных функциях не гарантирует выполнение этого же неравенства для всех неотрицательных функций. Приведем простой пример [1]: пусть весовая функция $v(x)$ имеет вид

$$v(x) = \begin{cases} 0, & 1 < x < 2, \\ x^{-1/2}, & 0 < x \leq 1, \ x \geq 2. \end{cases}$$

Тогда неравенство

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds \right)^2 v(t) dt \right)^{1/2} \leq C \left(\int_0^\infty [f(t)]^2 v(t) dt \right)^{1/2}, \quad f \in \mathfrak{M}^+,$$

может нарушаться. Например, если $f = \chi_{(1,2)}$ (характеристическая функция интервала $(1,2)$), то правая часть равна нулю, а левая положительна. В то же время для $f \in \mathfrak{M}^\downarrow$ это неравенство выполнено. Поскольку $v(x) \leq x^{-1/2}$, то в силу классического неравенства Харди [40; теорема 327] имеем

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds \right)^2 v(t) dt \right)^{1/2} &\leq \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds \right)^2 t^{-1/2} dt \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{4}{3} \left(\int_0^\infty [f(t)]^2 t^{-1/2} dt \right)^{1/2} \leq \frac{2^{5/2}}{3} \left(\int_0^\infty [f(t)]^2 v(t) dt \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

так как $\int_1^2 [f(t)]^2 t^{-1/2} dt \leq \int_0^1 [f(t)]^2 v(t) dt$ для $f \in \mathfrak{M}^\downarrow$.

Таким образом, неравенство (6) может выполняться при всех $f \in \mathfrak{M}^\downarrow$, но нарушаться при некоторых $f \in \mathfrak{M}^+$. Вместе с тем для одного частного случая (6) с помощью леммы Гальперина [39], [102] удается получить эквивалентность.

ТЕОРЕМА 1 [91], [76]. Пусть $1 < p < \infty$ и $0 < q < \infty$. Тогда неравенство

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^t f(s) v(s) ds \right)^q w(t) dt \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty [f(t)]^p v(t) dt \right)^{1/p} \quad (10)$$

выполняется для всех $f \in \mathfrak{M}^+$, если оно верно при всех $f \in \mathfrak{M}^\downarrow$.

Второй особенностью является то, что неравенство (6) на всех $f \in \mathfrak{M}^+$ легко сводится к двухвесовому неравенству заменой $fu \rightarrow f$. Для неравенств на монотонных функциях этот эффект, вообще говоря, отсутствует, поэтому наличие в неравенстве (6) трех весовых функций существенно. Кроме этого отметим, что $(L_p \rightarrow L_q)$ -неравенства на монотонных функциях имеют смысл для всех значений параметров $0 < p, q \leq \infty$.

Практически с момента возникновения Λ -анализа основным методом изучения $(L_{p,v}^\downarrow \rightarrow L_{q,w}^+)$ -неравенств служит *метод редукции*, т.е. сведения данного неравенства на монотонных функциях к некоторому неравенству на неотрицательных функциях, которое характеризуется легче, чем исходное. Одним из универсальных средств применения метода редукции для *линейных* положительных операторов является *принцип двойственности Сойера* [87], который действует при $0 < p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty$ и описанию которого посвящен раздел 2.

Основные результаты статьи содержатся в разделе 3, где предлагается новый метод редукции $(L_{p,v}^\downarrow \rightarrow L_{q,w}^+)$ - и $(L_{p,v}^\uparrow \rightarrow L_{q,w}^+)$ -неравенств для положительных *монотонных* операторов, действующий в диапазоне $1 \leq p \leq \infty, 0 < q \leq \infty$. Для $0 < p \leq q < \infty$ мы также даем общую теорему для монотонных операторов с некоторым дополнительным ограничением, а в случае $0 < q < p \leq 1$ решаем задачу для интегрального оператора Вольтерра (3) и ему двойственного с ядром, удовлетворяющим условию Ойнарова (4).

На протяжении всей статьи выражения типа $0 \cdot \infty$ полагаются равными 0. Соотношение $A \ll B$ означает неравенство $A \leq cB$ с константой c , зависящей только от несущественных параметров. Мы будем писать $A \approx B$ вместо $A \ll B \ll A$ или $A = cB$. Символ $\mathbb{Z}$ обозначает множество всех целых чисел и χ_E характеристическую функцию (индикатор) подмножества $E \subset \mathbb{R}_+$. Мы используем значки $:=$ и $=:$ для определения новых величин, а также полагаем $p' := p/(p-1)$ для $1 < p < \infty$, $p' := 1$ для $p = \infty$, $p' := \infty$ для $p = 1$ и $r := pq/(p-q)$ при $0 < q < p < \infty$. Буквы A, B, C с индексами, например $C_1, C_2, \dots$, обозначают константы, возможно, с одинаковыми индексами, но различные в разных утверждениях.

1. Интегральные операторы

Пусть u и w – неотрицательные локально суммируемые на $\mathbb{R}_+$ весовые функции и $k(x, y)$ – измеримое по совокупности переменных ядро. Прогресс в теории интегральных операторов за последние двадцать лет во многом связан с изучением операторов Вольтерра

$$Kf(x) := w(x) \int_0^x k(x, y)f(y)u(y) dy, \quad x > 0, \quad (1.1)$$

и неравенств

$$\|Kf\|_q \leq C\|f\|_p, \quad (1.2)$$

играющих важную роль в теории интегральных и дифференциальных уравнений, спектральной теории, теоремах вложения пространств Соболева и др. (см., например, монографии [10], [15], [52], [56], [64], статьи [3], [4], [118], [16]–[18], [57]–[60], [70], [71], [80]–[86], [92]–[109], [113] и др.).

Изучение операторов (1.1) начинается с поиска критериев их ограниченности в пространствах Лебега, т. е. необходимых и/или достаточных условий выполнения неравенств (1.2), где константу C мы выбираем наименьшей из возможных, т. е. равной норме $\|K\|_{L_p \rightarrow L_q}$ оператора K . При этом качество критерия играет ключевую роль в решении задачи о компактности оператора K и более тонких исследованиях поведения его характеристических чисел. Например, простейший случай $k(x, y) = \rho(x) \geq 0$ изучался в рамках теории уравнений Штурма–Лиувилля в работе [19], где был получен критерий дискретности спектра. Этот и другие случаи ведут родословную с неравенств Харди [40; теоремы 327, 330], которые обобщались в работах многих авторов (см., например, исторический обзор [51]). Характерным примером является (см. [40; теоремы 329, 383, 402]) неравенство (1.2) с оператором Римана–Лиувилля

$$R_\alpha f(x) := w(x) \int_0^x (x-y)^{\alpha-1} f(y) u(y) dy, \quad x > 0, \quad (1.3)$$

где $\alpha > 0$. Здесь случай $0 < \alpha < 1$ кардинально отличается от случая $\alpha \geq 1$. При $0 < \alpha < 1$ характеристика ограниченности $R_\alpha: L_p \rightarrow L_q$ известна лишь для частных случаев параметров суммирования и весовых функций [69], [61], [65], [79], [86]. Наиболее общий результат получен в [61] при $1 < p \leq q < \infty$, но он имеет труднопроверяемый характер. При $\alpha \geq 1$ эту задачу удалось решить [95]–[98] и получить обобщения [63], [4], [71], [100], [102], [106], [107], [115] для ядер $k(x, y) \geq 0$, удовлетворяющих условию Ойнарова (4).

Наравне с операторами (1.1) аналогичная теория имеет место для двойственных к ним относительно билинейной формы $(f, g) = \int_{\mathbb{R}_+} fg$ операторов вида

$$K^*g(y) := u(y) \int_x^\infty k(x, y) g(x) w(x) dx. \quad (1.4)$$

Мы будем по мере необходимости освещать результаты и для этого класса операторов.

При крайних значениях параметров суммирования $p = 1, \infty$ или $q = 1, \infty$ точное значение нормы $\|K\|_{L_p \rightarrow L_q}$ находится по общей теореме [48; гл. XI, § 1.5, теорема 4].

ТЕОРЕМА 1.1. *Для оператора (1.1) верны следующие равенства:*

$$\|K\|_{L_1 \rightarrow L_q} = \operatorname{ess\,sup}_{t>0} u(t) \|\chi_{[t, \infty)}(\cdot) k(\cdot, t) w(\cdot)\|_q, \quad 1 \leq q \leq \infty, \quad (1.5)$$

$$\|K\|_{L_\infty \rightarrow L_q} = \left(\int_0^\infty \left| w(x) \int_0^x k(x, y) u(y) dy \right|^q dx \right)^{1/q}, \quad 1 \leq q < \infty, \quad (1.6)$$

$$\|K\|_{L_p \rightarrow L_1} = \left(\int_0^\infty \left| u(y) \int_y^\infty k(x, y) w(x) dx \right|^{p'} dy \right)^{1/p'}, \quad 1 < p < \infty, \quad (1.7)$$

$$\|K\|_{L_p \rightarrow L_\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{t>0} w(t) \|\chi_{[0, t]}(\cdot) k(t, \cdot) u(\cdot)\|_{p'}, \quad 1 < p \leq \infty. \quad (1.8)$$

Для формулировки результатов об ограниченности операторов (1.1) с ядрами Ойнарова (4) нам потребуются следующие функционалы и величины:

$$\mathbf{U}(x) := \int_0^x [u(y)]^{p'} dy, \quad \mathbf{W}(y) := \int_y^\infty [w(x)]^q dx,$$

$$\begin{aligned}
U_1(x) &:= \int_0^x k(x, y)[u(y)]^{p'} dy, & U_p(x) &:= \int_0^x [k(x, y)]^{p'} [v(y)]^{p'} dy, \\
W_1(y) &:= \int_y^\infty k(x, y)[w(x)]^q dx, & W_q(y) &:= \int_y^\infty [k(x, y)]^q [w(x)]^q dx,
\end{aligned}$$

$$\mathbf{A} := \max(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1),$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_0 &:= \sup_{t>0} \mathbf{A}_0(t) := \sup_{t>0} [W_q(t)]^{1/q} [\mathbf{U}(t)]^{1/p'}, \\
\mathbf{A}_1 &:= \sup_{t>0} \mathbf{A}_1(t) := \sup_{t>0} [\mathbf{W}(t)]^{1/q} [U_p(t)]^{1/p'}.
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
\mathbb{A} &:= \max(\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1), \\
\mathbb{A}_0 &:= \sup_{t>0} \mathbb{A}_0(t) := \sup_{t>0} [\mathbf{U}(t)]^{-1/p} \left(\int_0^t [U_1(x)]^q [w(x)]^q dx \right)^{1/q}, \\
\mathbb{A}_1 &:= \sup_{t>0} \mathbb{A}_1(t) := \sup_{t>0} [U_p(t)]^{-1/p} \left(\int_0^t [U_p(x)]^q [w(x)]^q dx \right)^{1/q}; \\
\mathcal{A} &:= \max(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1), \\
\mathcal{A}_0 &:= \sup_{t>0} \mathcal{A}_0(t) := \sup_{t>0} [W_q(t)]^{-1/q'} \left(\int_t^\infty [W_q(y)]^{p'} [u(y)]^{p'} dy \right)^{1/p'}, \\
\mathcal{A}_1 &:= \sup_{t>0} \mathcal{A}_1(t) := \sup_{t>0} [\mathbf{W}(t)]^{-1/q'} \left(\int_t^\infty [W_1(y)]^{p'} [u(y)]^{p'} dy \right)^{1/p'}; \\
\mathbf{B} &:= \max(\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1), \\
\mathbf{B}_0 &:= \left(\int_0^\infty [W_q(t)]^{r/q} d[\mathbf{U}(t)]^{r/p'} \right)^{1/r}, \\
\mathbf{B}_1 &:= \left(\int_0^\infty [U_p(t)]^{r/p'} d(-[\mathbf{W}(t)]^{r/q}) \right)^{1/r}; \\
\mathbb{B} &:= \max(\mathbb{B}_0, \mathbb{B}_1), \\
\mathbb{B}_0 &:= \left(\int_0^\infty [\mathbf{U}(t)]^{-r/p} d \left(\int_a^t [U_1(x)]^q [w(x)]^q dx \right)^{r/q} \right)^{1/r}, \\
\mathbb{B}_1 &:= \left(\int_a^b [U_p(t)]^{-r/p} d \left(\int_a^t [U_p(x)]^q [w(x)]^q dx \right)^{r/q} \right)^{1/r}; \\
\mathcal{B} &:= \max(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1), \\
\mathcal{B}_0 &:= \left(\int_0^\infty [W_q(t)]^{-r/q'} d \left(- \left(\int_t^\infty [W_q(y)]^{p'} [v(y)]^{p'} dy \right)^{r/p'} \right) \right)^{1/r}, \\
\mathcal{B}_1 &:= \left(\int_0^\infty [\mathbf{W}(t)]^{-r/q'} d \left(- \left(\int_0^\infty [W_1(y)]^{p'} [v(y)]^{p'} dy \right)^{r/p'} \right) \right)^{1/r}.
\end{aligned}$$

Используя эти функционалы, мы даем по три альтернативных критерия ограниченности операторов (1.1) с ядрами Ойнарова (4) в каждом из двух случаев соотношения параметров суммирования: $1 < p \leq q < \infty$ и $1 < q < p < \infty$.

ТЕОРЕМА 1.2. Для оператора (1.1) с ядром $k(x, y)$, удовлетворяющим условию (4), имеют место следующие соотношения. Если $1 < p \leq q < \infty$, то

$$\|K\|_{L_p \rightarrow L_q} \approx \mathbf{A} \approx \mathbb{A} \approx \mathcal{A}. \quad (1.9)$$

Если $1 < q < p < \infty$, то

$$\|K\|_{L_p \rightarrow L_q} \approx \mathbf{B} \approx \mathbb{B} \approx \mathcal{B}. \quad (1.10)$$

Коэффициенты эквивалентности в (1.9) и (1.10) зависят только от p , q и константы D в условии (4).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. 1) При $1 < p \leq q < \infty$ характеристика (1.2) условием $\mathcal{A} < \infty$ была получена в [4], условием $\mathbf{A} < \infty$ – в [71], условиями $\mathbf{A} < \infty$ или $\mathbb{A} < \infty$ – в [106]. При этом на ядро $k(x, y)$ накладывались некоторые дополнительные требования типа монотонности или непрерывности, которые в дальнейшем были устранены [58]. На самом деле, без ограничения общности ядро $k(x, y)$ можно считать невозрастающим по x и неубывающим по y , иначе его можно заменить эквивалентным ядром

$$k_0(x, y) := \sup_{y \leq z \leq x} \sup_{z \leq t \leq x} k(t, z)$$

с этими свойствами (см. [58]), для которого выполняется соотношение $k(x, y) \leq k_0(x, y) \leq D^2 k(x, y)$.

2) В случае $1 < q < p < \infty$ эквивалентность (1.10) с константой $\mathbf{B}$ была получена в [71] и [106]. Остальные критерии, (1.9) с константой $\mathcal{A}$ и (1.10) с константами $\mathbb{B}$ и $\mathcal{B}$, найдены в [115].

3) Критерии компактности оператора (1.1) с ядром $k(x, y)$, удовлетворяющим условию (4), найдены в [106].

4) Компоненты каждой из констант типа $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в теореме 1.2, вообще говоря, независимы (см., например, [63], [97; § 4], [115]), и между ними имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \mathbf{A}_0 < \infty &\iff \mathcal{A}_0 < \infty, & \text{(ii)} \quad \mathbf{A}_1 < \infty &\iff \mathbb{A}_1 < \infty, \\ \text{(iii)} \quad \mathbf{A}_0 < \infty &\implies \mathbb{A}_0 < \infty, & \text{(iv)} \quad \mathbf{A}_1 < \infty &\implies \mathcal{A}_1 < \infty, \\ \text{(v)} \quad \mathcal{A}_0 < \infty &\implies \mathbb{A}_0 < \infty, & \text{(vi)} \quad \mathbb{A}_1 < \infty &\implies \mathcal{A}_1 < \infty \end{aligned}$$

и аналогично для остальных констант:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \mathbf{B}_0 < \infty &\iff \mathcal{B}_0 < \infty, & \text{(ii)} \quad \mathbf{B}_1 < \infty &\iff \mathbb{B}_1 < \infty, \\ \text{(iii)} \quad \mathbf{B}_0 < \infty &\implies \mathbb{B}_0 < \infty, & \text{(iv)} \quad \mathbf{B}_1 < \infty &\implies \mathcal{B}_1 < \infty, \\ \text{(v)} \quad \mathcal{B}_0 < \infty &\implies \mathbb{B}_0 < \infty, & \text{(vi)} \quad \mathbb{B}_1 < \infty &\implies \mathcal{B}_1 < \infty, \end{aligned}$$

причем обратные импликации в (iii)–(vi) в каждой группе, вообще говоря, могут не иметь места.

В случае $0 < q < 1 \leq p < \infty$ хорошо известен критерий выполнения неравенства (1.2) в дискретной форме [54].

ТЕОРЕМА 1.3 [54; теорема 5]. Пусть $0 < q < 1 \leq p < \infty$. Тогда для оператора (1.1) с ядром $k(x, y)$, удовлетворяющим условию (4), верно соотношение

$$\|K\|_{L_p \rightarrow L_q} \approx \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1, \quad (1.11)$$

где

$$\mathfrak{B}_0^r := \sup_{x_k} \sum_k \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} [k(y, x_k)]^q [w(y)]^q dy \right)^{r/q} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} u^{p'} \right)^{r/p'}, \quad (1.12)$$

$$\mathfrak{B}_1^r := \sup_{x_k} \sum_k \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} w^q \right)^{r/q} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} [k(x_k, y)]^{p'} [u(y)]^{p'} dy \right)^{r/p'}, \quad (1.13)$$

где супремум берется по всем возрастающим последовательностям $\{x_k\} \subset \mathbb{R}_+$ и при $p = 1$ соответствующие интегралы заменяются на супремумы подынтегральных функций.

Недавно Д.В. Прохоровым [85] был найден интегральный критерий для неравенства (1.2).

Пусть $\alpha := D^q + 1$ и $\int_t^\infty w^q < \infty$ для всех $t \in (0, \infty)$. Определим функцию $\zeta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ формулой (здесь $\sup \emptyset = 0$)

$$\zeta(x) := \sup \left\{ y \in (0, \infty) : \int_y^\infty w^q \geq \alpha \int_x^\infty w^q \right\}, \quad x \in [0, \infty).$$

Обозначим ζ_m , $m \in \mathbb{N}$, суперпозицию m функций ζ .

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть $1 \leq p < \infty$, $0 < q < p < \infty$ и ядро $k(x, y)$ удовлетворяет условию (4). Тогда

$$\|K\|_{L_p \rightarrow L_q} \approx \mathbb{B} + C_\zeta, \quad (1.14)$$

где

$$\mathbb{B} := \left(\int_0^\infty w^q(x) \left[\int_x^\infty w^q \right]^{r/p} \|\chi_{(\zeta_3(x), x)}(\cdot) k(x, \cdot) u(\cdot)\|_{p'}^r dx \right)^{1/r} \quad (1.15)$$

и

$$C_\zeta \approx \left(\int_0^\infty (w(x) k(x, \zeta_2(x))^q \|\chi_{(0, \zeta_2(x))} u\|_{p'}^r \left(\int_x^\infty (w(s) k(s, \zeta_2(s))^q ds \right)^{r/p} dx \right)^{1/r}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. 1) При $k(x, y) \equiv 1$ обозначим

$$Hf(x) := w(x) \int_0^x f(y) u(y) dy, \quad x > 0. \quad (1.16)$$

Неравенство

$$\|Hf\|_q \leq C \|f\|_p \quad (1.17)$$

известно как обобщенное неравенство Харди. В этом случае $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_1$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_1$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_1$, $\mathbf{B}_0 \approx \mathbf{B}_1$, $\mathbb{B} = \mathbb{B}_0 = \mathbb{B}_1$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_1$. Кроме

этого, утверждение теоремы 1.2 верно при $0 < q < p$, $p > 1$, а при $0 < q < 1 = p$ имеет место следующий результат [92]:

$$\|H\|_{L_1 \rightarrow L_q} \approx \left(\int_0^\infty \left[\operatorname{ess\,sup}_{0 < t < x} u(t) \right]^{\frac{q}{1-q}} \left(\int_x^\infty w^q \right)^{\frac{q}{1-q}} [w(x)]^q dx \right)^{\frac{1-q}{q}}. \quad (1.18)$$

Аналогичная эквивалентность выполняется и для двойственного оператора интегрирования и их простейших модификаций.

2) Недавно обнаружилось [21], [77], что наравне с указанными выше критериями существуют семейства (шкалы) равносильных условий, зависящих от непрерывного параметра и эквивалентных $(L_p - L_q)$ -ограниченности оператора H .

3) Разные формы критериев (1.9) и (1.10) расширяют возможности для приложений. Например, использование констант $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ для обобщенного неравенства Харди позволило найти стабильный функционал, характеризующий весовое неравенство для оператора геометрического среднего [75]. Решению этой задачи для оператора Харди–Стеклова посвящены работы [114], [74], [116].

2. Принципы двойственности

Из курса функционального анализа известно утверждение, обратное к неравенству Гёльдера:

$$\sup_{f \in \mathfrak{M}} \frac{\int_0^\infty |f(s)g(s)| ds}{\left(\int_0^\infty |f(t)|^p dt \right)^{1/p}} = \|g\|_{p'}, \quad (2.1)$$

где $1 < p < \infty$. Это равенство, которое иногда называют принципом двойственности в пространствах Лебега, позволяет редуцировать неравенства $\|Tf\|_q \leq C\|f\|_p$ с линейным оператором T к неравенствам $\|T^*g\|_{p'} \leq C\|g\|_{q'}$ с двойственным (сопряженным) оператором T^* .

В 1990 г. Э. Сойер [87], обобщая результат работы М. Ариньо и Б. Мукенхупта [1], где была найдена характеристика неравенства (7) при $1 < p = q < \infty$, $w = v$, открыл принцип двойственности для L_p -конуса неотрицательных невозрастающих функций, что позволяет сводить неравенства типа (6) на $\mathfrak{M}^\downarrow$ к неравенствам на конусе неотрицательных функций $\mathfrak{M}^+$, для характеристики которых имеется гораздо больше критериев. Это послужило мотивацией для широкого поля исследований весовых неравенств на конусах монотонных функций (см., например, [2], [5]–[14], [20], [22]–[37], [41]–[45], [47], [53], [55], [62], [66]–[68], [73], [76], [78], [88]–[91], [94], [99], [103], [104], [110], [111], [112], [117] и др.).

В следующем пункте мы приводим ряд утверждений, являющихся некоторым обобщением оригинального результата Сойера, и иллюстрируем границы их применения на полном описании неравенства Харди типа (7) для всех $0 < p$, $q < \infty$.

2.1. Принцип двойственности Сойера. Для локально суммируемых на $\mathbb{R}_+$ функций $u, w \in \mathfrak{M}^+$ обозначим $V(t) := \int_0^t v(s) ds$ и $U(t) := \int_0^t u(s) ds$ и будем считать, что $V(t) < \infty$ и $U(t) < \infty$ при всех $t > 0$. Мы полагаем $V(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} V(t)$ в том случае, когда этот предел существует, и аналогично определяем $U(\infty)$. Нам потребуется следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $f \in \mathfrak{M}^+$. Тогда существует последовательность финитных суммируемых функций $\{g_n\} \subset \mathfrak{M}^+$ такая, что каждая из функций $f_n(x) := \int_x^\infty g_n(s) ds$ возрастает по n для любого $x > 0$ и $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_x^\infty g_n(y) dy$ для почти всех $x > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно проверить, что всем требованиям удовлетворяют функции

$$f_n(x) := n \int_x^{x+1/n} \chi_{(0,n)}(s) f(s) ds =: \int_x^\infty g_n(s) ds,$$

где

$$g_n(s) = n \begin{cases} f(s) - f(s+1/n), & s \in (0, n-1/n], \\ f(s), & s \in (n-1/n, n], \\ 0, & s > n. \end{cases}$$

Предложение доказано.

ЛЕММА 2.1. Пусть $0 < p \leq q < \infty$. Тогда

$$J_{p,q} := \sup_{f \in \mathfrak{M}^+} \frac{\left(\int_0^\infty [f(s)]^q u(s) ds \right)^{1/q}}{\left(\int_0^\infty [f(t)]^p v(t) dt \right)^{1/p}} = \sup_{t>0} \frac{U^{1/q}(t)}{V^{1/p}(t)} =: A_{p,q}. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка $J_{p,q} \geq A_{p,q}$ получается, если положить под знаком супремума $f = \chi_{[0,t]}$. Поскольку $A_{p,q} = A_{1,q/p}^{1/p}$, то заменой $f^p \rightarrow f$ общий случай сводится к частному, когда $1 = p \leq q < \infty$. Применяя предложение 2.1, теорему о монотонной сходимости и неравенство Минковского, получаем

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty [f(s)]^q u(s) ds \right)^{1/q} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^\infty \left(\int_s^\infty g_n(t) dt \right)^q u(s) ds \right)^{1/q} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty U^{1/q}(t) g_n(t) dt \leq A_{1,q} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty V(t) g_n(t) dt \\ &= A_{1,q} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left(\int_0^t v(s) ds \right) g_n(t) dt = A_{1,q} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left(\int_s^\infty g_n(t) dt \right) v(s) ds \\ &= A_{1,q} \int_0^\infty f(s) v(s) ds. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. Пусть $0 < q < p < \infty$, $1/r := 1/q - 1/p$. Тогда

$$J_{p,q} \approx \left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty \frac{u(s) ds}{V(s)} \right)^{r/q} v(t) dt \right)^{1/r} =: B_{p,q}. \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $B_{p,q} = B_{p/q,1}^{1/q}$, то заменой $f^q \rightarrow f$ общий случай сводится к частному, когда $1 = q < p < \infty$, т. е. достаточно показать, что

$$J_{p,1} \approx \left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty \frac{u(s) ds}{V(s)} \right)^{p'} v(t) dt \right)^{1/p'} = B_{p,1}. \quad (2.4)$$

Пусть $f \in \mathfrak{M}^1$. По неравенству Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(s)u(s) ds &= \int_0^\infty f(s) \frac{u(s)}{V(s)} \left(\int_0^s v(t) dt \right) ds \\ &= \int_0^\infty v(t) \left(\int_t^\infty \frac{f(s)u(s) ds}{V(s)} \right) dt \leq \int_0^\infty v(t)f(t) \left(\int_t^\infty \frac{u(s) ds}{V(s)} \right) dt \\ &\leq B_{p,1} \left(\int_0^\infty [f(t)]^p v(t) dt \right)^{1/p}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

поэтому $J_{p,1} \leq B_{p,1}$. Для того чтобы доказать обратное неравенство, рассмотрим тестовую функцию

$$f_0(t) := \left(\int_t^\infty \frac{u(s) ds}{V(s)} \right)^{1/(p-1)}.$$

Тогда, интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty [f_0(t)]^p v(t) dt &= \int_0^\infty \left(\int_t^\infty \frac{u(s) ds}{V(s)} \right)^{p/(p-1)} v(t) dt \\ &= p' \int_0^\infty \left(\int_t^\infty \frac{u(s) ds}{V(s)} \right)^{1/(p-1)} u(t) dt = p' \int_0^\infty f_0(t)u(t) dt. \end{aligned}$$

Отсюда, используя равенство второго и последнего выражений, получаем

$$J_{p,1} \geq \frac{\int_0^\infty f_0(t)u(t) dt}{\left(\int_0^\infty [f_0(t)]^p v(t) dt \right)^{1/p}} = (p')^{-1/p} \left(\int_0^\infty f_0(t)u(t) dt \right)^{1/p'} = \frac{1}{p'} B_{p,1}.$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Можно показать на примерах, что неравенство

$$\frac{1}{p'} B_{p,1} \leq J_{p,1} \leq B_{p,1}, \quad (2.6)$$

полученное при доказательстве леммы 2.2, точное (см. [76]).

Лемма 2.2 имеет полезный альтернативный вариант.

ЛЕММА 2.3. Пусть $0 < q < p < \infty$, $1/r := 1/q - 1/p$. Тогда

$$J_{p,q} \approx \left(\int_0^\infty \left(\frac{U(t)}{V(t)} \right)^{r/q} v(t) dt \right)^{1/r} + \frac{U^{1/q}(\infty)}{V^{1/p}(\infty)} =: \mathbf{B}_{p,q}. \quad (2.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathbf{B}_{p,q} = \mathbf{B}_{p/q,1}^{1/q}$, то снова заменой $f^q \rightarrow f$ общий случай сводится к частному, когда $1 = q < p < \infty$, т. е. достаточно показать, что

$$J_{p,1} \approx \left(\int_0^\infty \left(\frac{U(t)}{V(t)} \right)^{p'} v(t) dt \right)^{1/p'} + \frac{U(\infty)}{V^{1/p}(\infty)} = \mathbf{B}_{p,1}. \quad (2.8)$$

Сужая супремум в выражении $J_{p,1}$ на постоянные функции, находим, что

$$J_{p,1} \geq \frac{U(\infty)}{V^{1/p}(\infty)}. \quad (2.9)$$

Аналогично, сужая супремум в выражении $J_{p,1}$ на функции вида $f(s) = \int_s^\infty h$, получим

$$J_{p,1} \geq \sup_{h \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_0^\infty \left(\int_s^\infty h(t) dt \right) u(s) ds}{\left(\int_0^\infty \left(\int_s^\infty h(t) dt \right)^p v(t) dt \right)^{1/p}} = \sup_{h \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_0^\infty h(t) U(t) dt}{\left(\int_0^\infty \left(\int_s^\infty h(t) dt \right)^p v(t) dt \right)^{1/p}}.$$

Из неравенства Харди вытекает, что

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty h \right)^p v(t) dt \right)^{1/p} \ll \left(\int_0^\infty [hV]^p [v]^{1-p} \right)^{1/p}. \quad (2.10)$$

Следовательно,

$$J_{p,1} \gg \sup_{h \in \mathfrak{M}^+} \frac{\int_0^\infty h(t) U(t) dt}{\left(\int_0^\infty [h(t)V(t)]^p [v(t)]^{1-p} dt \right)^{1/p}},$$

и, применяя принцип двойственности в L_p , получим

$$J_{p,1} \gg \left(\int_0^\infty \left(\frac{U(t)}{V(t)} \right)^{p'} v(t) dt \right)^{1/p'}. \quad (2.11)$$

Из (2.9) и (2.11) следует оценка снизу $J_{p,1} \gg \mathbf{B}_{p,1}$. Для доказательства оценки сверху, интегрируя по частям, запишем

$$\int_x^\infty \frac{u(s) ds}{V(s)} = \int_x^\infty \frac{dU(s)}{V(s)} \leq \frac{U(\infty)}{V(\infty)} + \int_t^\infty \frac{U(s)v(s) ds}{V^2(s)}.$$

Пусть $f \in \mathfrak{M}^1$. Тогда, продолжая цепочку (2.5), находим, что

$$\int_0^\infty f(t)u(t) dt \leq \left(\int_0^\infty f(x)v(x) dx \right) \frac{U(\infty)}{V(\infty)} + \int_0^\infty f(x)v(x) \left(\int_x^\infty \frac{U(s)v(s) ds}{V^2(s)} \right) dx.$$

Применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty f(t)u(t) dt \\ & \leq \left(\int_0^\infty f^p v \right)^{1/p} \left(\frac{U(\infty)}{V^{1/p}(\infty)} + \left(\int_0^\infty v(x) \left(\int_x^\infty \frac{U(s)v(s) ds}{V^2(s)} \right)^{p'} dx \right)^{1/p'} \right). \end{aligned}$$

По неравенству Харди

$$\left(\int_0^\infty v(x) \left(\int_x^\infty \frac{U(s)v(s) ds}{V^2(s)} \right)^{p'} dx \right)^{1/p'} \ll \left(\int_0^\infty \frac{U^{p'}(s)v(s) ds}{V^{p'}(s)} \right)^{1/p'},$$

поэтому

$$\frac{\int_0^\infty f u}{\left(\int_0^\infty f^p v \right)^{1/p}} \ll \left(\int_0^\infty \frac{U^{p'}(s)v(s) ds}{V^{p'}(s)} \right)^{1/p'} + \frac{U(\infty)}{V^{1/p}(\infty)},$$

и в силу произвольности $f \in \mathfrak{M}^\downarrow$ отсюда вытекает соотношение $J_{p,1} \ll \mathbf{B}_{p,1}$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Леммы 2.1–2.3 при $q = 1$ составляют принцип двойственности для конуса убывающих функций. Этот принцип позволяет характеризовать неравенство (6) при $q \geq 1$.

Сначала сформулируем случай $q = 1$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $0 < p < \infty$. Тогда для наименьшей константы C в неравенстве

$$\int_0^\infty u(x) \int_0^\infty k(x, y) f(y) w(y) dy dx \leq C \left(\int_0^\infty [f(x)]^p v(x) dx \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow, \quad (2.12)$$

выполняются: при $0 < p \leq 1$ равенство

$$C = \sup_{t>0} \frac{\int_0^t w(y) \int_0^\infty k(x, y) u(x) dx dy}{V^{1/p}(t)}, \quad (2.13)$$

а при $1 < p < \infty$ двусторонние оценки

$$C \approx \left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty \frac{w(y) \int_0^\infty k(x, y) u(x) dx dy}{V(y)} \right)^{p'} v(t) dt \right)^{1/p'}, \quad (2.14)$$

$$C \approx \left(\int_0^\infty \left(\frac{\int_0^t w(y) \int_0^\infty k(x, y) u(x) dx dy}{V(t)} \right)^{p'} v(t) dt \right)^{1/p'} + \frac{\int_0^\infty w(y) \int_0^\infty k(x, y) u(x) dx dy}{V^{1/p}(\infty)}. \quad (2.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует применить леммы 2.1–2.3 при $q = 1$.

Для $1 < q < \infty$ неравенство (6) на функциях из $\mathfrak{M}^\downarrow$ сводится к неравенствам на функциях из $\mathfrak{M}^+$. Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $0 < p < \infty$, $1 < q < \infty$. Тогда для наименьшей константы C в неравенстве

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty k(x, y) f(y) w(y) dy \right)^q u(x) dx \right)^{1/q} \\ & \leq C \left(\int_0^\infty [f(x)]^p v(x) dx \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow, \end{aligned} \quad (2.16)$$

выполняются: при $0 < p \leq 1$ равенство

$$C = \sup_{t>0} \frac{(\int_0^\infty (\int_0^t k(x, y)w(y) dy)^q u(x) dx)^{1/q}}{V^{1/p}(t)}, \quad (2.17)$$

а при $1 < p < \infty$ двусторонние оценки

$$C \approx \sup_{g \in \mathfrak{M}^+} \frac{(\int_0^\infty (\int_0^\infty (\int_t^\infty \frac{k(x, y)w(y) dy}{V(y)}) g(t)v(t) dt)^q u(x) dx)^{1/q}}{(\int_0^\infty g^p v)^{1/p}}, \quad (2.18)$$

$$C \approx \frac{(\int_0^\infty (\int_0^\infty k(x, y)w(y) dy)^q u(x) dx)^{1/q}}{V^{1/p}(\infty)} + \sup_{g \in \mathfrak{M}^+} \frac{(\int_0^\infty (\int_0^\infty (\int_0^t k(x, y)w(y) dy) \frac{g(t)v(t) dt}{V(t)})^q u(x) dx)^{1/q}}{(\int_0^\infty g^p v)^{1/p}}. \quad (2.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО опирается на леммы 2.1–2.3 и принцип двойственности (2.1) в L_p .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Формула (2.17) сохраняется при $0 < p \leq q < \infty$, $0 < p \leq 1$ (см. [99], [104], [53], [66]). Более того, имеет место в некотором смысле двойственный результат.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $1 \leq p \leq q < \infty$. Тогда для наименьшей константы C в неравенстве

$$\left(\int_0^\infty f^q u \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty k(x, y)f(y)w(y) dy \right)^p v(x) dx \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^+, \quad (2.20)$$

выполняется равенство

$$C = \sup_{t>0} \frac{U^{1/q}(t)}{(\int_0^\infty (\int_0^t k(x, y)w(y) dy)^p v(x) dx)^{1/p}} =: \mathscr{A}_{p,q}. \quad (2.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя в неравенство (2.20) тестовую функцию $f_t := \chi_{[0,t]}$ и переходя к супремуму по $t > 0$, получаем $C \geq \mathscr{A}_{p,q}$. Для доказательства обратного неравенства воспользуемся предложением 2.1. Применяя неравенство Минковского, имеем

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty f^q u \right)^{1/q} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty g_n \right)^q u(x) dx \right)^{1/q} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^\infty \left(p \int_x^\infty \left(\int_t^\infty g_n \right)^{p-1} g_n(t) dt \right)^{q/p} u(x) dx \right)^{1/q} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^\infty p \left(\int_t^\infty g_n \right)^{p-1} g_n(t) U^{p/q}(t) dt \right)^{1/p} \\ &\leq \mathscr{A}_{p,q} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^\infty p \left(\int_t^\infty g_n \right)^{p-1} g_n(t) \int_0^\infty \left(\int_0^t k(x, y)w(y) dy \right)^p v(x) dx dt \right)^{1/p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{A}_{p,q} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(p \int_0^\infty v(x) \int_0^\infty \left(\int_0^t k(x,y) w(y) dy \right)^p \left(\int_t^\infty g_n \right)^{p-1} g_n(t) dt dx \right)^{1/p} \\
&\leq \mathcal{A}_{p,q} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty k(x,y) w(y) \left(\int_y^\infty g_n \right) dy \right)^p v(x) dx \right)^{1/p} \\
&= \mathcal{A}_{p,q} \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty k(x,y) f(y) w(y) dy \right)^p v(x) dx \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $0 < p \leq 1 \leq q < \infty$ и $k_i(x, y) \geq 0$, $i = 1, 2$. Тогда для наименьшей из возможных констант C в неравенстве

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty k_1(x, y) f(y) dy \right)^q u(x) dx \right)^{1/q} \\
&\leq C \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty k_2(x, y) f(y) dy \right)^p v(x) dx \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^+,
\end{aligned}$$

выполняется равенство $C = \mathbf{A}_{p,q}$, где

$$\mathbf{A}_{p,q} := \sup_{t>0} \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t k_1(x, y) dy \right)^q u(x) dx \right)^{1/q} \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t k_2(x, y) dy \right)^p v(x) dx \right)^{-1/p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка $\mathbf{A}_{p,q} \leq C$ получается подстановкой тестовой функции $f = \chi_{[0,t]}$. Для доказательства обратного неравенства мы используем представление $f(y) = \int_y^\infty h(s) ds$ и дважды неравенство Минковского:

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty k_1(x, y) f(y) dy \right)^q u(x) dx \right)^{1/q} \\
&= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty k_1(x, y) \left(\int_y^\infty h(t) dt \right) dy \right)^q u(x) dx \right)^{1/q} \\
&= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty h(t) \int_0^t k_1(x, y) dy dt \right)^q u(x) dx \right)^{1/q} \\
&\leq \int_0^\infty h(t) \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t k_1(x, y) dy \right)^q u(x) dx \right)^{1/q} dt \\
&\leq \mathbf{A}_{p,q} \int_0^\infty h(t) \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t k_2(x, y) dy \right)^p v(x) dx \right)^{1/p} dt \\
&\leq \mathbf{A}_{p,q} \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t k_2(x, y) dy \right) h(t) dt \right)^p v(x) dx \right)^{1/p} \\
&= \mathbf{A}_{p,q} \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty k_2(x, y) \left(\int_y^\infty h(t) dt \right) dy \right)^p v(x) dx \right)^{1/p} \\
&= \mathbf{A}_{p,q} \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty k_2(x, y) f(y) dy \right)^p v(x) dx \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Требуемый результат получаем, применяя предложение 2.1. Теорема доказана.

2.2. Неравенство Харди на монотонных функциях. Если в (6) положить $k(x, y) = \chi_{[0, x]}(y)$, то мы получим трехвесовое неравенство Харди

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x f(y) u(y) dy \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty [f(x)]^p v(x) dx \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow, \quad (2.22)$$

хорошо известное многочисленными применениями.

Напомним обозначения: $U(t) := \int_0^t u$, $V(t) := \int_0^t v$, $W(t) := \int_0^t w$.

ТЕОРЕМА 2.5. Для наименьшей константы C в неравенстве (2.22) имеют место двусторонние оценки:

(а) если $1 < p \leq q < \infty$, то $C \approx A_0 + A_1$, где

$$A_0 = \sup_{t>0} A_0(t) := \sup_{t>0} \left(\int_0^t U^q w \right)^{1/q} V^{-1/p}(t),$$

$$A_1 := \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty w \right)^{1/q} \left(\int_0^t \left(\frac{U}{V} \right)^{p'} v \right)^{1/p'};$$

(б) если $0 < q < p < \infty$, $1 < p < \infty$, то $C \approx B_0 + B_1$, где

$$B_0 = B_0(p, q) := \left(\int_0^\infty V^{-r/p}(t) \left(\int_0^t U^q w \right)^{r/p} U^q(t) w(t) dt \right)^{1/r},$$

$$B_1 = B_1(p, q) := \left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty w \right)^{r/p} \left(\int_0^t \left(\frac{U}{V} \right)^{p'} v \right)^{r/p'} w(t) dt \right)^{1/r};$$

(с) если $0 < q < p \leq 1$, то $C \approx B_0 + \mathcal{B}_1$, где

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1(p, q) := \left(\int_0^\infty \left(\operatorname{ess\,sup}_{s \in [0, t]} \frac{U^p(s)}{V(s)} \right)^{r/p} \left(\int_t^\infty w \right)^{r/p} w(t) dt \right)^{1/r};$$

(д) если $0 < p \leq q < \infty$, $0 < p \leq 1$, то $C = \mathcal{A}_1$, где

$$\mathcal{A}_1 := \sup_{t>0} V^{-1/p}(t) \left(\int_0^\infty U^q(\min\{s, t\}) w(s) ds \right)^{1/q}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт (д) следует из (2.17) с учетом замечания 2.3.

В силу монотонности f из (2.22) следует неравенство

$$\left(\int_0^\infty [fU]^q w \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty [f]^p v \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow,$$

откуда ввиду лемм 2.1 и 2.3 следуют оценки снизу $A_0 \leq C$ при $0 < p \leq q < \infty$ и

$$\mathcal{B}_0 := \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t U^q w \right)^{r/q} V^{-r/q}(t) v(t) dt \right)^{1/r} \ll C, \quad A_0(\infty) \leq C$$

при $0 < q < p < \infty$. Интегрированием по частям находим

$$B_0 = \left(\frac{q}{r} \frac{\left(\int_0^\infty U^q w \right)^{r/q}}{V^{r/p}(\infty)} + \frac{q}{p} \mathcal{B}_0^r \right)^{1/r} \approx A_0(\infty) + \mathcal{B}_0,$$

откуда легко следует неравенство $B_0 \leq C$. Заметим, что при любом $t > 0$

$$\begin{aligned} B_0^r &\geq \int_0^t V^{-r/p}(s) \left(\int_0^s U^q w \right)^{r/p} U^q(s) w(s) ds = \frac{q}{r} \int_0^t V^{-r/p}(s) d \left(\int_0^s U^q w \right)^{r/q} \\ &\geq \frac{q}{r} V^{-r/p}(t) \int_0^t d \left(\int_0^s U^q w \right)^{r/q} = \frac{q}{r} V^{-r/p}(t) \left(\int_0^t U^q w \right)^{r/q} = \frac{q}{r} A_0^r(t), \end{aligned}$$

откуда

$$B_0 \gg A_0 \geq A_0(\infty). \quad (2.23)$$

Для доказательства остальных утверждений пункта (а) и пункта (б) при $q \geq 1$ следует применить теоремы 2.1, 2.2 и критерии выполнения неравенств Харди для неотрицательных функций. Обратимся к подробностям. По формуле (2.19) находим

$$\begin{aligned} C &\approx A_0(\infty) + \sup_{g \in \mathfrak{M}^+} \frac{(\int_0^\infty (\int_0^x (Ugv/V) + U(x) \int_x^\infty (gv/V)) w(x) dx)^{1/q}}{(\int_0^\infty g^p v)^{1/p}} \\ &\approx A_0(\infty) + \sup_{g \in \mathfrak{M}^+} \frac{(\int_0^\infty (\int_0^x (Ugv/V)) w(x) dx)^{1/q}}{(\int_0^\infty g^p v)^{1/p}} \\ &\quad + \sup_{g \in \mathfrak{M}^+} \frac{(\int_0^\infty (U(x) \int_x^\infty (gv/V)) w(x) dx)^{1/q}}{(\int_0^\infty g^p v)^{1/p}}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Отсюда при $1 < p \leq q < \infty$, используя критерии для неравенств Харди, находим

$$C \approx A_0(\infty) + A_1 + \sup_{t>0} \left(\int_0^t U^q w \right)^{1/q} \left(\int_t^\infty \frac{v}{V^{p'}} \right)^{1/p'},$$

откуда следуют оценки $C \gg A_1$, $C \ll A_0 + A_1$, и пункт (а) доказан.

При $1 < q < p < \infty$ из (2.24) и критериев для неравенств Харди следует, что

$$C \approx A_0(\infty) + B_1 + \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t U^q w \right)^{r/p} \left(\int_t^\infty \frac{v}{V^{p'}} \right)^{r/p'} U^q(t) w(t) dt \right)^{1/r},$$

поэтому $C \gg B_1$, $C \ll B_0 + B_1$. При $1 = q < p < \infty$ из (2.15) находим

$$\begin{aligned} C &\approx A_0(\infty) + \left(\int_0^\infty V^{-p'}(t) \left(\int_0^t u(y) \left(\int_y^\infty w \right) dy \right)^{p'} v(t) dt \right)^{1/p'} \\ &\approx A_0(\infty) + \left(\int_0^\infty V^{-p'}(t) \left(\int_0^t U w \right)^{p'} v(t) dt \right)^{1/p'} \\ &\quad + \left(\int_0^\infty \left(\frac{U(t)}{V(t)} \right)^{p'} \left(\int_t^\infty w \right)^{p'} v(t) dt \right)^{1/p'} \\ &= A_0(\infty) + (p')^{1/p'} B_1 + \left(\int_0^\infty V^{-p'}(t) \left(\int_0^t U w \right)^{p'} v(t) dt \right)^{1/p'}. \end{aligned}$$

Отсюда следуют оценки $C \gg B_1$, $C \ll B_0 + B_1$, и пункт (б) при $q \geq 1$ доказан.

Рассмотрим случай (b) при $0 < q < 1 < p < \infty$. Напомним, что оценка снизу $C \gg B_0$ уже получена. По теореме 3.1, доказанной ниже, неравенство (2.22) эквивалентно неравенству

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x \left(\int_y^\infty h(z)u(z) dz \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty h^p V^p v^{1-p} \right)^{1/p}, \quad h \in \mathfrak{M}^+, \quad (2.25)$$

которое, в свою очередь, распадается на два неравенства Харди

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty h \right)^q U^q(x)w(x) dx \right)^{1/q} \leq C_1 \left(\int_0^\infty h^p V^p v^{1-p} \right)^{1/p}, \quad h \in \mathfrak{M}^+, \quad (2.26)$$

и

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x hU \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C_2 \left(\int_0^\infty h^p V^p v^{1-p} \right)^{1/p}, \quad h \in \mathfrak{M}^+, \quad (2.27)$$

так, что $C \approx C_1 + C_2$. Из критериев для неравенств Харди следует, что $C_1 \ll B_0$ и $C_2 \approx B_1$, поэтому $C \approx B_0 + B_1$.

Для доказательства пункта (c) нам потребуется модификация формулы (1.18): при $0 < q < 1$ для наименьшей константы C в неравенстве

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x h(y)dy \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C \int_0^\infty h v, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

выполняется двусторонняя оценка

$$C \approx \left(\int_0^\infty \left(\operatorname{ess\,sup}_{s \in [0,t]} \frac{1}{v(s)} \right)^{\frac{q}{1-q}} \left(\int_t^\infty w \right)^{\frac{q}{1-q}} w(t) dt \right)^{\frac{1-q}{q}} =: \mathcal{B}. \quad (2.28)$$

Сначала рассмотрим случай $0 < q < 1 = p$. Допустим, что неравенство (2.22) выполнено. Тогда с той же константой C оно выполнено для всех функций f вида $f(x) = \int_x^\infty h$, где $h \in \mathfrak{M}^+$. Имеем

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x \left(\int_y^\infty h \right) u(y) dy \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C \int_0^\infty \left(\int_x^\infty h \right) v(x) dx, \quad h \in \mathfrak{M}^+.$$

Отсюда следует неравенство

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x hU \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C \int_0^\infty hV, \quad h \in \mathfrak{M}^+.$$

Применяя (2.28), получим $C \gg \mathcal{B}_1(1, q)$. Для доказательства обратной оценки применим предложение 2.1, лемму 2.3 и оценки (2.23) и (2.28). Имеем

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty \left(\int_0^x f u \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^\infty \left(\int_0^x \left(\int_y^\infty h_n \right) u(y) dy \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} \\ &\ll \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^\infty \left(\int_0^x h_n U \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty h_n \right)^q U^q(x)w(x) dx \right)^{1/q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\ll \mathcal{B}_1(1, q) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty h_n V + B_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left(\int_x^\infty h_n \right) v(x) dx \\
&= (\mathcal{B}_1(1, q) + B_0) \int_0^\infty f v.
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай $0 < q < p < 1$. Замена $f^p \rightarrow f$ в (2.22) приводит к эквивалентному неравенству

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x f^{1/p} u \right)^q w(x) dx \right)^{p/q} \leq C^p \int_0^\infty f v, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow. \quad (2.29)$$

Рассуждая аналогично предыдущему абзацу и применяя неравенство Минковского, получим

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x f^{1/p} u \right)^q w(x) dx \right)^{p/q} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^\infty \left(\int_0^x \left(\int_y^\infty h_n \right)^{1/p} u(y) dy \right)^q w(x) dx \right)^{p/q} \\
&\ll \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^\infty \left(\int_0^x \left(\int_y^x h_n \right)^{1/p} u(y) dy \right)^q w(x) dx \right)^{p/q} \\
&\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty h_n \right)^{q/p} U^q(x) w(x) dx \right)^{p/q} \\
&\ll \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^\infty \left(\int_0^x h_n U^p \right)^{q/p} w(x) dx \right)^{p/q} \\
&\quad + B_0 \left(1, \frac{q}{p} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left(\int_x^\infty h_n \right) v(x) dx \\
&\ll \left(\mathcal{B}_1 \left(1, \frac{q}{p} \right) + B_0 \left(1, \frac{q}{p} \right) \right) \int_0^\infty f v = (\mathcal{B}_1^p(p, q) + B_0^p(p, q)) \int_0^\infty f v,
\end{aligned}$$

и оценка сверху $C \ll B_0 + \mathcal{B}_1$ доказана. Остается доказать оценку снизу $C \gg \mathcal{B}_1$, так как $C \gg B_0$ уже получена. Воспользуемся одной идеей из [2]. Обозначим $\mathcal{V}(t) := \operatorname{ess\,sup}_{s \in [0, t]} (U^p(s)/V(s))$ и предположим сначала, что $\mathcal{V}(0) = 0$. Заметим, что $\mathcal{V}(t)$ – непрерывная неубывающая функция. Положим

$$g(t) := \max\{2^m, m \in \mathbb{Z} : 2^m \leq \mathcal{V}^{r/p}(t)\}, \quad \tau_m := \inf\{y \in [0, \infty) : 2^m \leq \mathcal{V}^{r/p}(y)\}.$$

Так как $\mathcal{V}(t)$ непрерывна и не убывает, то величины τ_m существуют для всех $m \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что они возрастают. Из их определений имеем

$$\begin{aligned}
\frac{U^r(\tau_m)}{V^{r/p}(\tau_m)} &= 2^m = \mathcal{V}^{r/p}(\tau_m) \leq \mathcal{V}_p^{r/p}(t) \leq 2^{m+1}, \quad t \in [\tau_m, \tau_{m+1}], \\
g(\tau_m) &= 2^m, \quad g(s) \leq 2^{m-1} \quad \text{для всех } s \in [0, \tau_m).
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$g(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} 2^m \chi_{[\tau_m, \tau_{m+1})}(t) \leq \mathcal{V}^{r/p}(t), \quad (2.30)$$

и определим

$$f(t) := \int_t^\infty \frac{\left(\int_x^\infty w\right)^{r/q}}{V(x)} dg(x), \quad (2.31)$$

где внешний интеграл понимается в смысле Стильеса. Тогда $f \in \mathfrak{M}^\perp$ и, используя (2.30), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f v &= \int_0^\infty \left(\int_x^\infty w\right)^{r/q} dg(x) = \frac{q}{r} \int_0^\infty g(x) \left(\int_x^\infty w\right)^{r/p} w(x) dx \\ &\leq \frac{q}{r} \int_0^\infty \mathcal{V}^{r/p}(x) \left(\int_x^\infty w\right)^{r/p} w(x) dx =: \frac{q}{r} \mathcal{B}_1^r. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x f^{1/p}(y) dU(y)\right)^q w(x) dx\right)^{1/q} \\ &\geq \left(\sum_m \int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} w(x) \left(\int_0^{\tau_m} \left(\int_y^{\tau_m} \frac{\left(\int_s^\infty w\right)^{r/q}}{V(s)} dg(s)\right)^{1/p} dU(y)\right)^q dx\right)^{1/q} \\ &\geq \left(\sum_m \left(\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} w\right) \left(\int_{\tau_m}^\infty w\right)^{r/p} \right. \\ &\quad \times \left. \left(V^{-1/p}(\tau_m) \int_0^{\tau_m} (g(\tau_m) - g(y))^{1/p} dU(y)\right)^q\right)^{1/q} \\ &\gg \left(\sum_m \left(\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} w\right) \left(\int_{\tau_m}^\infty w\right)^{r/p} \left(\frac{2^{m/p} U(\tau_m)}{V(\tau_m)^{1/p}}\right)^q\right)^{1/q} \\ &\geq \left(\sum_m 2^m \int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} \left(\int_s^\infty w\right)^{r/p} w(s) ds\right)^{1/q} \\ &\gg \left(\int_0^\infty \mathcal{V}^{r/p}(s) \left(\int_s^\infty w\right)^{r/p} w(s) ds\right)^{1/q} = \mathcal{B}_1^{r/q}. \end{aligned}$$

Неравенство (2.29) с функцией f , определенной в (2.31), влечет $C^p \mathcal{B}_1^r \gg \mathcal{B}_1^{pr/q}$. Следовательно, $C \gg \mathcal{B}_1$. Теперь покажем, как избавиться от ограничения $\mathcal{V}(0) = 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ – малое число. Положим $u_\varepsilon(x) := u(x) \chi_{[\varepsilon, \infty)}(x)$. Тогда неравенство (2.29) будет выполняться с u_ε вместо u с той же константой C . Если положить $U_\varepsilon(t) = \int_0^t u_\varepsilon$, $\mathcal{V}_\varepsilon := \text{ess sup}_{s \in [0, t]} (U_\varepsilon^p(s)/V(s))$, то очевидно, что $\mathcal{V}_\varepsilon(0) = 0$. Пусть

$$\mathcal{B}_{1, \varepsilon} := \left(\int_0^\infty \left(\text{ess sup}_{s \in [0, t]} \frac{U_\varepsilon^p(s)}{V(s)}\right)^{r/p} \left(\int_t^\infty w\right)^{r/p} w(t) dt\right)^{1/r}.$$

Тогда из предыдущего рассуждения следует, что $\mathcal{B}_{1, \varepsilon} \ll C$. Отсюда по теореме о монотонной сходимости вытекает оценка $\mathcal{B}_1 \ll C$. Теорема 2.5 доказана.

3. Редукционные теоремы

В этом разделе мы предлагаем новый метод редукции $(L_{p,v}^{\downarrow} \rightarrow L_{q,w}^+)$ - и $(L_{p,v}^{\uparrow} \rightarrow L_{q,w}^+)$ -неравенств для положительных *монотонных* операторов. В частности, мы существенно дополняем некоторые результаты из [30].

Далее мы будем использовать следующие условия:

- (i) $T(\lambda f) = \lambda T f$ для всех $\lambda \geq 0$ и $f \in \mathfrak{M}^+$;
- (ii) $T f(x) \leq c T g(x)$ для почти всех $x \in \mathbb{R}_+$, если $f(x) \leq g(x)$ для почти всех $x \in \mathbb{R}_+$ с константой $c > 0$, не зависящей от f и g ;
- (iii) $T(f + \lambda \mathbf{1}) \leq c(T f + \lambda T \mathbf{1})$ для всех $f \in \mathfrak{M}^+$ и $\lambda \geq 0$ с константой $c > 0$, не зависящей от f и λ , где $\mathbf{1}$ – функция на $\mathbb{R}_+$, тождественно равная 1.

В п. 3.1 мы получаем редукционные теоремы для неравенства

$$\left(\int_0^\infty (T f(t))^q w(t) dt \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty (f(t))^p v(t) dt \right)^{1/p} \quad (3.1)$$

на конусах $\mathfrak{M}^{\downarrow}$ и $\mathfrak{M}^{\uparrow}$ при $0 < q < \infty$, $1 \leq p < \infty$ (см. теоремы 3.1–3.4). В отличие от редукционных теорем, основанных на принципе двойственности Сойера, полученная область изменения параметров суммирования позволяет исследовать неравенства при $0 < q < 1 \leq p < \infty$. В п. 3.2 мы исследуем случай $0 < p \leq q < \infty$ при некоторых дополнительных ограничениях на монотонный оператор.

В оставшемся наиболее трудном случае $0 < q < p \leq 1$ мы не даем общей теории. Однако в пп. 3.3, 3.4 мы приводим полную характеристику неравенств

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty k(t, x) f(t) u(t) dt \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty (f(t))^p v(t) dt \right)^{1/p} \quad (3.2)$$

и

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x k(x, t) f(t) u(t) dt \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty (f(t))^p v(t) dt \right)^{1/p} \quad (3.3)$$

с ядрами Ойнарова на конусах $\mathfrak{M}^{\downarrow}$ и $\mathfrak{M}^{\uparrow}$.

3.1. Редукционные теоремы для монотонных операторов при $0 < q \leq \infty$, $1 \leq p < \infty$. Обозначим $V(t) := \int_0^t v$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $0 < q \leq \infty$, $1 < p < \infty$ и $T: \mathfrak{M}^+ \rightarrow \mathfrak{M}^+$ – положительный оператор. Тогда из условия (3.1) следует неравенство

$$\left(\int_0^\infty \left(T \left(\int_x^\infty h \right) \right)^q w \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty h^p V^p v^{1-p} \right)^{1/p}, \quad h \in \mathfrak{M}^+. \quad (3.4)$$

Если $V(\infty) = \infty$ и T – монотонный оператор, удовлетворяющий условиям (i) и (ii), то условие (3.4) является достаточным для выполнения (3.1) на конусе $\mathfrak{M}^{\downarrow}$, а если $0 < V(\infty) < \infty$, то для выполнения (3.1) на конусе $\mathfrak{M}^{\downarrow}$ достаточно (3.4) и

$$\left(\int_0^\infty (T \mathbf{1})^q w \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty v \right)^{1/p}, \quad (3.5)$$

если оператор T удовлетворяет условиям (i)–(iii).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 < q < \infty$.

Необходимость. Пусть функция $h \in \mathfrak{M}^+$ суммируема на $[x, \infty)$ для любого $x > 0$. Тогда $f(x) = \int_x^\infty h \in \mathfrak{M}^\perp$, и по неравенству (3.1), неравенству Харди (2.10) при $p > 1$ и по теореме Фубини при $p = 1$ находим

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty \left(T \left(\int_x^\infty h \right) \right)^q w \right)^{1/q} &\leq C \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty h \right)^p v(x) dx \right)^{1/p} \\ &\ll C \left(\int_0^\infty h^p V^p v^{1-p} \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

откуда следует (3.4).

Достаточность. Пусть сначала $V(\infty) = \infty$ и $f \in \mathfrak{M}^\perp$. Тогда

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f(x)V^2(x)}{V^2(x)} = 2 \left(\int_x^\infty \frac{v}{V^3} \right) f(x)V^2(x) \\ &\leq \left(\int_x^\infty \frac{v}{V^3} \right) \int_0^x fVv \leq \int_x^\infty \left(\int_0^t fVv \right) \frac{v(t)dt}{V^3(t)}. \end{aligned}$$

Применяя (ii) и (3.4) с функцией

$$h(t) = \left(\int_0^t fVv \right) \frac{v(t)}{V^3(t)},$$

по неравенству Харди (2.10) при $p > 1$ и по теореме Фубини при $p = 1$ находим

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty (Tf)^q w \right)^{1/q} &\leq C \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t fVv \right)^p \frac{v(t)dt}{V^{2p}(t)} \right)^{1/p} \\ &\ll C \left(\int_0^\infty f^p v \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Если $0 < V(\infty) < \infty$, то

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[\frac{1}{V^2(x)} - \frac{1}{V^2(\infty)} \right] f(x)V^2(x) + \frac{V^2(x)}{V^2(\infty)} f(x) \\ &\leq 4 \left(\int_x^\infty \frac{v}{V^3} \right) \int_0^x fVv + \frac{V^{1/p'}(x)V^{1/p}(x)}{V(\infty)} f(x) \\ &\leq 4 \int_x^\infty \left(\int_0^t fVv \right) \frac{v(t)dt}{V^3(t)} + \frac{\left(\int_0^\infty f^p v \right)^{1/p}}{V^{1/p}(\infty)} =: \int_x^\infty h + \lambda \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Далее, применяя (i)–(iii), (3.4), (3.5), неравенство Харди при $p > 1$ и теорему Фубини при $p = 1$, получаем

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty (Tf)^q w \right)^{1/q} &\ll \left(\int_0^\infty \left(T \left(\int_x^\infty h \right) \right)^q w \right)^{1/q} + \lambda \left(\int_0^\infty (T\mathbf{1})^q w \right)^{1/q} \\ &\ll C \left(\left(\int_0^\infty \left(\int_0^t fVv \right)^p \frac{v(t)dt}{V^{2p}(t)} \right)^{1/p} + \left(\int_0^\infty f^p v \right)^{1/p} \right) \\ &\ll C \left(\int_0^\infty f^p v \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Случай $q = \infty$ доказывается аналогично. Теорема 3.1 доказана.

Полезным альтернативным утверждением является следующая редукционная теорема.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $0 < q \leq \infty$, $1 \leq p < \infty$ и оператор $T: \mathfrak{M}^+ \rightarrow \mathfrak{M}^+$ удовлетворяет условиям (i) и (ii). Тогда для выполнения на конусе $\mathfrak{M}^\perp$ неравенства (3.1) достаточно, а при $V(\infty) = \infty$ необходимо, чтобы

$$\left(\int_0^\infty \left(T \left(\frac{1}{V^2(x)} \int_0^x hV \right) \right)^q w \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty h^p v^{1-p} \right)^{1/p}, \quad h \in \mathfrak{M}^+. \quad (3.6)$$

Если $0 < V(\infty) < \infty$, то (3.1) необходимо для (3.6) при выполнении условий (i)–(iii) и неравенства (3.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 < q < \infty$.

Достаточность. Если $f \in \mathfrak{M}^\perp$, то $f(x) \leq \frac{2}{V^2(x)} \int_0^x fV$. Применяя (ii) и (3.6) с $h = 2fV$, получим

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty (Tf)^q w \right)^{1/q} &\ll \left(\int_0^\infty \left(T \left(\frac{1}{V^2(x)} \int_0^x hV \right) \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} \\ &\leq C \left(\int_0^\infty h^p v^{1-p} \right)^{1/p} = 2C \left(\int_0^\infty f^p v \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Необходимость. Пусть сначала $V(\infty) = \infty$ и функция $h \in \mathfrak{M}^+$ суммируема на $[0, x]$ для всех $x > 0$. Тогда

$$\frac{1}{V^2(x)} \int_0^x hV = 2 \int_x^\infty \frac{v}{V^3} \int_0^x hV \leq 2 \int_x^\infty \frac{v(s) ds}{V^3(s)} \int_0^s hV =: f(x) \in \mathfrak{M}^\perp.$$

По условию (ii) и неравенству (3.1) находим

$$\begin{aligned} J &:= \left(\int_0^\infty \left(T \left(\frac{1}{V^2(x)} \int_0^x hV \right) \right)^q w \right)^{1/q} \ll \left(\int_0^\infty (Tf)^q w \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty f^p v \right)^{1/p} \\ &= 2C \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty \frac{v(s) ds}{V^3(s)} \int_0^s hV \right)^p v(x) dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Если $p = 1$, то

$$J \ll C \int_0^\infty \left(\int_x^\infty \frac{v(s) ds}{V^3(s)} \int_0^s hV \right) v(x) dx = C \int_0^\infty \frac{v(s) ds}{V^2(s)} \int_0^s hV = C \int_0^\infty h.$$

Пусть $p > 1$. Имеем

$$2 \int_x^\infty \frac{v(s) ds}{V^3(s)} \int_0^s hV = \frac{1}{V^2(x)} \int_0^x hV + \int_x^\infty \frac{h}{V}$$

и, применяя неравенства Харди, получаем (3.6).

Далее, если $V(\infty) \in (0, \infty)$, то запишем

$$\begin{aligned} \frac{1}{V^2(x)} \int_0^x hV &= \left[\frac{1}{V^2(x)} - \frac{1}{V^2(\infty)} \right] \int_0^x hV + \frac{\int_0^x hV}{V^2(\infty)} \\ &\leq 2 \int_x^\infty \frac{v(s) ds}{V^3(s)} \int_0^s hV + \frac{\int_0^\infty hV}{V^2(\infty)} =: f_1(x) + \lambda 1. \end{aligned}$$

Применим свойство (iii). Предыдущие рассуждения дают нам оценку первого слагаемого:

$$\left(\int_0^\infty (Tf_1)^q w \right)^{1/q} \ll C \left(\int_0^\infty h^p v^{1-p} \right)^{1/p}.$$

Для оценки второго слагаемого используем свойство (i), (3.5) и неравенство Гёльдера:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty (T(\lambda 1))^q w \right)^{1/q} &\leq C \lambda \left(\int_0^\infty v \right)^{1/p} = C \frac{V^{1/p}(\infty) \int_0^\infty hV}{V^2(\infty)} \\ &\leq C \left(\int_0^\infty h^p v^{1-p} \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

откуда следует необходимость (3.6).

Случай $q = \infty$ доказывается аналогично. Теорема 3.2 доказана.

Рассмотрим неравенство

$$\left(\int_0^\infty (Tf(t))^q w(t) dt \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty (f(t))^p v(t) dt \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^\uparrow. \quad (3.7)$$

Положим $V_*(t) := \int_t^\infty v$.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $0 < q \leq \infty$, $1 \leq p < \infty$ и $T: \mathfrak{M}^+ \rightarrow \mathfrak{M}^+$ – положительный оператор. Тогда из условия (3.7) следует неравенство

$$\left(\int_0^\infty \left(T \left(\int_0^x h \right) \right)^q w \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty h^p V_*^p v^{1-p} \right)^{1/p}, \quad h \in \mathfrak{M}^+. \quad (3.8)$$

Если $V(\infty) = \infty$ и T – монотонный оператор, удовлетворяющий условиям (i) и (ii), то (3.8) достаточно для выполнения (3.7). Если $0 < V(\infty) < \infty$ и T – монотонный оператор, удовлетворяющий условиям (i)–(iii), то для (3.7) достаточно (3.8) и (3.5).

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $0 < q < \infty$, $1 \leq p < \infty$ и оператор $T: \mathfrak{M}^+ \rightarrow \mathfrak{M}^+$ подчиняется условиям (i) и (ii). Тогда для выполнения (3.7) достаточно, а при $V(\infty) = \infty$ необходимо, чтобы

$$\left(\int_0^\infty \left(T \left(\frac{1}{V_*^2(x)} \int_x^\infty hV_* \right) \right)^q w \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty h^p v^{1-p} \right)^{1/p}, \quad h \in \mathfrak{M}^+. \quad (3.9)$$

Если $0 < V(\infty) < \infty$, то (3.7) необходимо для (3.9) при выполнении условий (i)–(iii) и (3.5).

3.2. Редукционные теоремы для квазилинейных операторов при $0 < p \leq q < \infty$. Пусть $f \in \mathfrak{M}^\downarrow$. Тогда существует последовательность $\{x_n\} \subset \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \sum_n 2^{-n} \chi_{[0, x_n]}(x) = \sum_{n: x_n \geq x} 2^{-n} \chi_{[0, x_n]}(x) \\ &= \int_{[x, \infty)} \left(\sum_n 2^{-n} \delta_{x_n}(s) \right) ds =: \int_{[x, \infty)} h(s) ds, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $\delta_t(s)$ – дельта-функция Дирака в точке t . Заметим, что

$$[f(x)]^r \approx \left(\sum_n 2^{-n} \chi_{[0, x_n]}(x) \right)^r \approx \sum_n 2^{-nr} \chi_{[0, x_n]}(x), \quad r > 0. \quad (3.11)$$

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть $0 < p \leq q < \infty$ и для оператора $T: \mathfrak{M}^+ \rightarrow \mathfrak{M}^+$ выполнены условия (i)–(iii), а также условие

$$T\left(\sum_n f_n\right) \ll \left(\sum_n [Tf_n]^p\right)^{1/p} \quad (3.12)$$

для любых $f_n \geq 0$. Тогда (3.1) на конусе $\mathfrak{M}^\downarrow$ эквивалентно выполнению любого из следующих условий:

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty [T\chi_{[0, s]}(x)]^p h(s) ds \right)^{q/p} w(x) dx \right)^{p/q} \leq C_2^p \int_0^\infty hV, \quad h \in \mathfrak{M}^+, \quad (3.13)$$

$$\left(\int_0^\infty \left[\sup_{s>0} T\chi_{[0, s]}(x) f(s) \right]^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C_3 \left(\int_0^\infty f^p v \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow, \quad (3.14)$$

$$\left(\int_0^\infty \left[\sup_{s>0} (T\chi_{[0, s]}(x))^p \int_s^\infty h \right]^{q/p} w(x) dx \right)^{p/q} \leq C_4^p \int_0^\infty hV, \quad h \in \mathfrak{M}^+, \quad (3.15)$$

или

$$\mathbf{D} := \sup_{t>0} \left(\int_0^\infty [T\chi_{[0, t]}(x)]^q w(x) dx \right)^{1/q} V^{-1/p}(t) < \infty. \quad (3.16)$$

Более того,

$$C \approx C_2 = \mathbf{D} \approx C_3 = C_4. \quad (3.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность (3.14) $\Leftrightarrow$ (3.15) с равенством $C_3 = C_4$ доказываем, применяя предложение 2.1. (3.14) $\Rightarrow$ (3.16) получается применением (3.14) к функции $f_t(s) := \chi_{[0, t]}(s)$, $t > 0$. Аналогично доказываем импликацию (3.1) $\Rightarrow$ (3.16). Из свойств (i)–(iii) находим, что для всех $s > 0$

$$Tf(x) \geq T(\chi_{[0, s]}f)(x) \geq T\chi_{[0, s]}(x)f(s),$$

и импликация (3.1) $\Rightarrow$ (3.14) доказана. Пусть

$$k(x, s) := [T\chi_{[0, s]}(x)]^p \quad \text{и} \quad \mathbf{K}h(x) := \int_0^\infty k(x, s)h(s) ds.$$

Тогда (3.13) эквивалентно ограниченности $\mathbf{K}: L_V^1 \rightarrow L_w^{q/p}$, и по теореме 1.1

$$C_2^p = \|\mathbf{K}\|_{L_V^1 \rightarrow L_w^{q/p}} = \mathbf{D}^p.$$

Покажем теперь, что (3.13) $\Rightarrow$ (3.1). Из (3.11) и (3.12) следует, что

$$\begin{aligned} (Tf^{1/p})(x) &\approx \left(T \left(\sum_n 2^{-n} \chi_{[0, x_n]} \right)^{1/p} \right)(x) \\ &\approx T \left(\sum_n 2^{-n/p} \chi_{[0, x_n]} \right)(x) \ll \left(\sum_n 2^{-n} [T\chi_{[0, x_n]}(x)]^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Заметим, что (3.1) эквивалентно неравенству

$$\left(\int_0^\infty (Tf^{1/p})^q w \right)^{p/q} \leq C^p \int_0^\infty f v, \quad f \in \mathfrak{M}^\dagger.$$

Пользуясь (3.11), находим

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty (Tf^{1/p})^q w \right)^{p/q} &\ll \left(\int_0^\infty \left(\sum_n 2^{-n} [T\chi_{[0, x_n]}(x)]^p \right)^{q/p} w(x) dx \right)^{p/q} \\ &= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty [T\chi_{[0, s]}(x)]^p h(s) ds \right)^{q/p} w(x) dx \right)^{p/q} \\ &\leq C_2^p \int_0^\infty h V = C_2^p \sum_n 2^{-n} V(x_n) \approx C_2^p \sum_n 2^{-n} \int_{(0, x_n]} v \approx C_2^p \int_0^\infty f v. \end{aligned}$$

Следовательно, $C \ll C_2$, и (3.17) доказано. Теорема 3.5 доказана.

Аналогичный результат справедлив для конуса неубывающих функций.

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть $0 < p \leq q < \infty$ и для оператора $T: \mathfrak{M}^+ \rightarrow \mathfrak{M}^+$ выполнены условия (i)–(iii) и (3.12). Тогда неравенство (3.7) эквивалентно любому из следующих условий:

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty [T\chi_{[s, \infty)}(x)]^p h(s) ds \right)^{q/p} w(x) dx \right)^{p/q} \leq C_2^p \int_0^\infty h V_*, \quad h \in \mathfrak{M}^+, \quad (3.18)$$

$$\left(\int_0^\infty \left[\sup_{s>0} T\chi_{[s, \infty)}(x) f(s) \right]^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C_3 \left(\int_0^\infty f^p v \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^\dagger, \quad (3.19)$$

$$\left(\int_0^\infty \left[\sup_{s>0} (T\chi_{[s, \infty)}(x))^p \int_0^s h \right]^{q/p} w(x) dx \right)^{p/q} \leq C_4^p \int_0^\infty h V, \quad h \in \mathfrak{M}^+, \quad (3.20)$$

или

$$\mathbf{D}_* := \sup_{t>0} \left(\int_0^\infty [T\chi_{[t, \infty)}(x)]^q w(x) dx \right)^{1/q} V_*^{-1/p}(t) < \infty. \quad (3.21)$$

При этом

$$C \approx C_2 = \mathbf{D}_* \approx C_3 = C_4. \quad (3.22)$$

Далее мы рассмотрим обратное неравенство

$$\left(\int_0^\infty f^q w \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty (Tf)^p v \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^+. \quad (3.23)$$

Положим $W_*(t) := \int_t^\infty w$.

ТЕОРЕМА 3.7. Пусть $0 < p \leq q < \infty$ и оператор $T: \mathfrak{M}^+ \rightarrow \mathfrak{M}^+$ подчинен условиям (i)–(iii), а также условию

$$\left(\sum_n [Tf_n]^q \right)^{1/q} \ll T \left(\sum_n f_n \right) \quad (3.24)$$

для любых $f_n \geq 0$. Тогда неравенство (3.23) эквивалентно выполнению любого из условий

$$\int_0^\infty h W \leq C_2^q \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty [T\chi_{[0,s]}(x)]^p h(s) ds \right)^{p/q} v(x) dx \right)^{q/p}, \quad h \in \mathfrak{M}^+, \quad (3.25)$$

или

$$\mathfrak{D} := \sup_{t>0} W^{1/q}(t) \left(\int_0^\infty [T\chi_{[0,t]}(x)]^p v(x) dx \right)^{-1/p} < \infty. \quad (3.26)$$

Более того,

$$C \approx C_2 = \mathfrak{D}. \quad (3.27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (3.23) $\Rightarrow$ (3.26) очевидна. Покажем, что (3.26) $\Rightarrow$ (3.25). Применяя неравенство Минковского, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty h W &\leq \mathfrak{D}^q \int_0^\infty \left(\int_0^\infty [T\chi_{[0,t]}(x)]^p v(x) dx \right)^{q/p} h(t) dt \\ &\leq \mathfrak{D}^q \left(\int_0^\infty v(x) \left(\int_0^\infty [T\chi_{[0,t]}(x)]^q h(t) dt \right)^{p/q} dx \right)^{q/p}. \end{aligned}$$

Далее, (3.23) эквивалентно неравенству

$$\int_0^\infty f w \leq C \left(\int_0^\infty (Tf^{1/q})^p v \right)^{q/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^+. \quad (3.28)$$

Пользуясь (3.25), (3.10), (3.11) и (3.24), запишем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f w &\approx \int_0^\infty h W \leq C_2^q \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty [T\chi_{[0,s]}(x)]^q h(s) ds \right)^{p/q} v(x) dx \right)^{q/p} \\ &= C_2^q \left(\int_0^\infty \left(\sum_n 2^{-n} [T\chi_{[0,x_n]}(x)]^q \right)^{p/q} v(x) dx \right)^{q/p} \\ &= C_2^q \left(\int_0^\infty \left(\sum_n [T(2^{-n/q} \chi_{[0,x_n]})(x)]^q \right)^{p/q} v(x) dx \right)^{q/p} \\ &\leq C_2^q \left(\int_0^\infty \left[T \left(\sum_n 2^{-n/q} \chi_{[0,x_n]} \right) (x) \right]^p v(x) dx \right)^{q/p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\approx C_2^q \left(\int_0^\infty \left[T \left(\sum_n 2^{-n} \chi_{[0, x_n]} \right)^{1/q} (x) \right]^p v(x) dx \right)^{q/p} \\
&\approx C_2^q \left(\int_0^\infty (Tf^{1/q})^p v \right)^{q/p}
\end{aligned}$$

и (3.27) доказано. Теорема 3.7 доказана.

Аналогичным образом характеризуется неравенство

$$\left(\int_0^\infty f^q w \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty (Tf)^p v \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^+. \quad (3.29)$$

ТЕОРЕМА 3.8. Для $0 < p \leq q < \infty$ и оператора $T: \mathfrak{M}^+ \rightarrow \mathfrak{M}^+$, для которого выполнены (i)–(iii) и (3.24), неравенство (3.29) эквивалентно любому из условий

$$\int_0^\infty h W_* \leq C_2^q \left(\int_0^\infty \left([T\chi_{[s, \infty)}(x)]^p h(s) ds \right)^{p/q} w(x) dx \right)^{q/p}, \quad h \in \mathfrak{M}^+, \quad (3.30)$$

или

$$\mathfrak{D}_* := \sup_{t>0} W_*^{1/q}(t) \left(\int_0^\infty [T\chi_{[t, \infty)}(x)]^p v(x) dx \right)^{-1/p} < \infty, \quad (3.31)$$

при этом

$$C \approx C_2 = \mathfrak{D}_*. \quad (3.32)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Пусть T – линейный интегральный оператор,

$$Tf(x) := \int_0^\infty k(x, y) f(y) dy, \quad (3.33)$$

с неотрицательным ядром. Тогда условие (3.12) выполняется для всех $p \in (0, 1]$ и из наших теорем 3.5 и 3.6 вытекают теорема 4.1 из работы [97], теорема 2.1, (а) из работы [66]) и теорема 1 работы [6]. Аналогично, условие (3.24) верно для всех $q \geq 1$. Тогда по теоремам 3.7 и 3.8 мы получаем обобщение теоремы 4.2 из [97] и теоремы 2.1, (b) из [66] на более широкий интервал параметров суммирования.

3.3. Редукционные теоремы для операторов Вольтерра при $0 < q <$

$p \leq 1$. Пусть u, v и w – весовые функции. Напомним, что $U(t) := \int_0^t u$, $V(t) := \int_0^t v$, $W(t) := \int_0^t w$, и определим $U(y, x) := \int_x^y u$. Для простоты мы будем считать, что $0 < U(t) < \infty$, $0 < V(t) < \infty$, $0 < W(t) < \infty$ для всех $t > 0$ и $U(\infty) = V(\infty) = W(\infty) = \infty$. Обозначим

$$K(x, y) := \int_0^y k(x, z) u(z) dz.$$

ТЕОРЕМА 3.9. Пусть $0 < q < p \leq 1$. Если $k(x, y) \geq 0$ – непрерывное ядро Ойнарова, то следующие условия эквивалентны:

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x k(x, y) f(y) u(y) dy \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C_1 \left(\int_0^\infty f^p v \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow, \quad (3.34)$$

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x K^p(x, y) h(y) dy + K^p(x, x) \int_x^\infty h(y) dy \right)^{q/p} w(x) dx \right)^{p/q} \leq C_2^p \int_0^\infty hV, \quad h \in \mathfrak{M}^+, \quad (3.35)$$

$$\left(\int_0^\infty \left(\sup_{0 < y \leq x} K^p(x, y) \int_y^\infty h \right)^{q/p} w(x) dx \right)^{p/q} \leq C_3^p \int_0^\infty hV, \quad h \in \mathfrak{M}^+, \quad (3.36)$$

$$\left(\int_0^\infty \left(\sup_{0 < y \leq x} K(x, y) f(y) \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C_4 \left(\int_0^\infty f^p v \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow, \quad (3.37)$$

$$\mathbb{B}^r := \sup_{\{x_k\}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} K^q(y, x_k) w(y) dy \right)^{r/q} V^{-r/p}(x_k) < \infty. \quad (3.38)$$

Более того,

$$C_1 \approx C_2 \approx C_3 = C_4 \approx \mathbb{B}. \quad (3.39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем, что $(3.35) \Rightarrow (3.34) \Rightarrow (3.37) \Leftrightarrow (3.36) \Rightarrow (3.38) \Rightarrow (3.35)$. Неравенство (3.34) эквивалентно неравенству

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x k(x, y) f^{1/p}(y) u(y) dy \right)^q w(x) dx \right)^{p/q} \leq C_1^p \int_0^\infty f v, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow. \quad (3.40)$$

Пусть $f(x) = \int_x^\infty h$. Тогда по неравенству Минковского

$$\begin{aligned} \int_0^x k(x, z) f^{1/p}(z) u(z) dz &= \int_0^x \left(\int_z^\infty h \right)^{1/p} k(x, z) u(z) dz \\ &\leq \left(\int_0^\infty \left(\int_0^x \chi_{(z, \infty)}(y) k(x, z) u(z) dz \right)^p h(y) dy \right)^{1/p} \\ &\approx \left(\int_0^x K^p(x, y) h(y) dy + K^p(x, x) \int_x^\infty h(y) dy \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

и для доказательства $(3.35) \Rightarrow (3.34)$ остается применить предложение 2.1.

Для любой $f \in \mathfrak{M}^\downarrow$ имеем

$$\int_0^x k(x, z) f(z) u(z) dz \geq \sup_{0 < y \leq x} \int_0^y k(x, z) u(z) dz f(y) \geq \sup_{0 < y \leq x} K(x, y) f(y).$$

Следовательно, $(3.34) \Rightarrow (3.37)$. Импликация $(3.37) \Rightarrow (3.36)$ очевидна, а импликацию $(3.36) \Rightarrow (3.37)$ доказываем, применяя предложение 2.1 и теорему Фату.

Теперь допустим, что (3.36) выполняется и $\{x_n\} \subset \mathbb{R}_+$ – произвольная возрастающая последовательность. Для любого $k \in \mathbb{Z}$ существует такая точка $\varepsilon_k \in (x_k, x_{k+1})$, что $V(\varepsilon_k) \leq 2V(x_k)$. Определим функцию

$$h(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{a_k}{x_k - \varepsilon_k} \chi_{(x_k, \varepsilon_k)}(x),$$

где $\{a_k\} \subset \mathbb{R}_+$ произвольны. Тогда, подставив эту функцию в неравенство (3.36), мы получим

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^{q/p} \int_{x_k}^{x_{k+1}} K^q(x, x_k) w(x) dx \right)^{p/q} \leq 2C_3^q \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k V(x_k).$$

Отсюда вытекает $\mathbb{B} \ll C_3$.

Таким образом, остается только показать, что (3.38) $\Rightarrow$ (3.35). Используя условие Ойнарова (4), мы находим, что

$$K(x, y) \approx k(x, y) \int_0^y u(z) dz + \int_0^y k(y, z) u(z) dz = k(x, y) U(y) + K(y, y),$$

и отсюда следует, что (3.35) эквивалентно выполнению следующих трех неравенств:

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x k(x, y)^p U(y)^p h(y) dy \right)^{q/p} w(x) dx \right)^{p/q} \leq C_2^p \int_0^\infty hV, \quad h \in \mathfrak{M}^+, \quad (3.41)$$

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x K(y, y)^p h(y) dy \right)^{q/p} w(x) dx \right)^{p/q} \leq C_2^p \int_0^\infty hV, \quad h \in \mathfrak{M}^+, \quad (3.42)$$

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty h(y) dy \right)^{q/p} K(x, x)^q w(x) dx \right)^{p/q} \leq C_2^p \int_0^\infty hV, \quad h \in \mathfrak{M}^+. \quad (3.43)$$

По теореме Лая [54; теорема 5] неравенство (3.41) выполняется тогда и только тогда, когда

$$B_1^r := \sup_{\{x_k\}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} k(y, x_k)^q w(y) dy \right)^{r/q} \sup_{y \in (x_{k-1}, x_k)} U(y)^r V^{-r/p}(y) < \infty,$$

$$B_2^r := \sup_{\{x_k\}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} w(y) dy \right)^{r/q} \sup_{y \in (x_{k-1}, x_k)} k^r(x_k, y) U(y)^r V^{-r/p}(y) < \infty,$$

и неравенство (3.42) эквивалентно свойству

$$B_3^r := \sup_{\{x_k\}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} w(y) dy \right)^{r/q} \sup_{y \in (x_{k-1}, x_k)} K(y, y)^r V^{-r/p}(y) < \infty;$$

по теореме, двойственной к теореме 5 из [54], неравенство (3.43) эквивалентно

$$B_4^r := \sup_{\{x_k\}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} K(y, y)^q w(y) dy \right)^{r/q} V^{-r/p}(x_k) < \infty.$$

Пусть $y_k \in (x_{k-1}, x_k)$ — такая точка, что

$$\sup_{y \in (x_{k-1}, x_k)} U(y)^r V^{-r/p}(y) = U(y_k)^r V^{-r/p}(y_k).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} k(y, x_k)^q w(y) dy \right)^{r/q} \sup_{y \in (x_{k-1}, x_k)} U(y)^r V^{-r/p}(y) \\ & \ll \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{y_k}^{y_{k+2}} K(y, y_k)^q w(y) dy \right)^{r/q} V^{-r/p}(y_k) \\ & \ll \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{y_{2k}}^{y_{2k+2}} K(y, y_{2k})^q w(y) dy \right)^{r/q} V^{-r/p}(y_{2k}) \\ & \quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{y_{2k+1}}^{y_{2k+3}} K(y, y_{2k+1})^q w(y) dy \right)^{r/q} V^{-r/p}(y_{2k+1}) \ll \mathbb{B}^r. \end{aligned}$$

Поэтому $B_1 \ll \mathbb{B}$. Если $y_k \in (x_{k-1}, x_k)$ такова, что

$$\sup_{y \in (x_{k-1}, x_k)} k^r(x_k, y) U(y)^r V^{-r/p}(y) = k^r(x_k, y_k) U(y_k)^r V^{-r/p}(y_k),$$

то

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} w(y) dy \right)^{r/q} \sup_{y \in (x_{k-1}, x_k)} k^r(x_k, y) U(y)^r V^{-r/p}(y) \\ & \ll \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{y_k}^{y_{k+2}} K(y, y_k)^q w(y) dy \right)^{r/q} V^{-r/p}(y_k) \\ & \ll \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{y_{2k}}^{y_{2k+2}} K(y, y_{2k})^q w(y) dy \right)^{r/q} V^{-r/p}(y_{2k}) \\ & \quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{y_{2k+1}}^{y_{2k+3}} K(y, y_{2k+1})^q w(y) dy \right)^{r/q} V^{-r/p}(y_{2k+1}) \ll \mathbb{B}^r. \end{aligned}$$

Следовательно, $B_2 \ll \mathbb{B}$. Для точки $y_k \in (x_{k-1}, x_k)$ такой, что

$$\sup_{y \in (x_{k-1}, x_k)} K^r(y, y) V^{-r/p}(y) = K^r(y_k, y_k) V^{-r/p}(y_k),$$

находим

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} w(y) dy \right)^{r/q} \sup_{y \in (x_{k-1}, x_k)} K(y, y)^r V^{-r/p}(y) \\ & \ll \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{y_k}^{y_{k+2}} K(y, y_k)^q w(y) dy \right)^{r/q} V^{-r/p}(y_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\ll \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{y_{2k}}^{y_{2k+2}} K(y, y_{2k})^q w(y) dy \right)^{r/q} V^{-r/p}(y_{2k}) \\ &\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{y_{2k+1}}^{y_{2k+3}} K(y, y_{2k+1})^q w(y) dy \right)^{r/q} V^{-r/p}(y_{2k+1}) \ll \mathbb{B}^r, \end{aligned}$$

откуда $B_3 \ll \mathbb{B}$. Так как $K(y, y) \ll K(y, x_{k-1})$, $y \in (x_{k-1}, x_k)$, то $B_4 \ll \mathbb{B}$. Из полученных оценок сверху вытекает $C_2 \ll \mathbb{B}$. Теорема 3.9 доказана.

Аналогичный результат для конуса неубывающих функций представлен в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 3.10. Пусть $0 < q < p \leq 1$. Для непрерывного ядра Ойнарова $k(x, y)$ положим $K_*(y, x) = \int_y^\infty k(z, x)u(z) dz$. Тогда следующие неравенства эквивалентны:

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty k(y, x)f(y)u(y) dy \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C_1 \left(\int_0^\infty f^p v \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^\dagger, \\ &\left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty K_*^p(y, x)h(y) dy + K_*^p(x, x) \int_0^x h(y) dy \right)^{q/p} w(x) dx \right)^{p/q} \\ &\quad \leq C_2^p \int_0^\infty h V_*, \quad h \in \mathfrak{M}^+, \end{aligned}$$

$$\left(\int_0^\infty \left(\sup_{y \geq x} K_*^p(y, x) \int_0^y h \right)^{q/p} w(x) dx \right)^{p/q} \leq C_3^p \int_0^\infty h V_*, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

$$\left(\int_0^\infty \left(\sup_{y \geq x} K_*(y, x)f(y) \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C_4 \left(\int_0^\infty f^p v \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^\dagger,$$

$$\mathbb{B}_*^r := \sup_{\{x_k\}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} K_*^q(x_k, y)w(y) dy \right)^{r/q} V_*^{-r/p}(x_k) < \infty$$

(здесь $V_*(t) := \int_t^\infty v$). Кроме того,

$$C_1 \approx C_2 \approx C_3 = C_4 \approx \mathbb{B}_*.$$

Для доказательства следующего результата нам потребуется утверждение о ядрах Ойнарова, представляющее самостоятельный интерес.

ЛЕММА 3.1. Пусть измеримая функция $k(x, y) \geq 0$ на $\{(x, y): x \geq y \geq 0\}$ удовлетворяет правому неравенству в условии Ойнарова (4). Тогда существует $\alpha_D \in (0, 1)$ такое, что для всех $\alpha \in (0, \alpha_D]$ и произвольной последовательности $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ выполняется неравенство

$$[k(x_1, x_n)]^\alpha \leq 2 \sum_{i=1}^{n-1} [k(x_i, x_{i+1})]^\alpha. \quad (3.44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\alpha_D := \frac{\log 2}{\log[D(1 + 2D)]}$$

и покажем, что (3.44) верно для $\alpha = \alpha_D$. Тогда, по неравенству Йенсена, (3.44) будет выполняться для всех $\alpha \in (0, \alpha_D]$. Рассуждаем по индукции. Из (4) и неравенства Йенсена следует, что

$$k(x_1, x_3) \leq D(k(x_1, x_2) + k(x_1, x_3)) \leq D(k^\alpha(x_1, x_2) + k^\alpha(x_1, x_3))^{1/\alpha}.$$

Следовательно,

$$k^\alpha(x_1, x_3) \leq D^\alpha(k^\alpha(x_1, x_2) + k^\alpha(x_1, x_3)).$$

Так как $D^\alpha \leq 2$ при $\alpha = \alpha_D$, то (3.44) верно для $n = 3$. Предположим, что (3.44) верно для всех $n = 3, \dots, k$ и

$$a := \sum_{i=1}^k k^\alpha(x_i, x_{i+1}).$$

Тогда либо $k^\alpha(x_1, x_2) \leq a/2$, либо $k^\alpha(x_k, x_{k+1}) \leq a/2$. Без потери общности предположим, что $k^\alpha(x_1, x_2) \leq a/2$. Пусть j – наибольшее натуральное число такое, что

$$\sum_{i=1}^j k^\alpha(x_i, x_{i+1}) \leq \frac{a}{2}.$$

Тогда $j < k$ и $\sum_{i=1}^{j+1} k^\alpha(x_i, x_{i+1}) > \frac{a}{2}$. Поэтому $\sum_{i=j+2}^k k^\alpha(x_i, x_{i+1}) \leq \frac{a}{2}$. По предположению индукции

$$k^\alpha(x_1, x_{j+1}) \leq 2 \sum_{i=1}^j k^\alpha(x_i, x_{i+1}) \leq a,$$

$$k^\alpha(x_{j+2}, x_{k+1}) \leq 2 \sum_{i=j+2}^k k^\alpha(x_i, x_{i+1}) \leq a$$

и

$$k^\alpha(x_{j+1}, x_{j+2}) \leq a.$$

Следовательно,

$$k(x_1, x_{j+1}) \leq a^{1/\alpha}, \quad k(x_{j+2}, x_{k+1}) \leq a^{1/\alpha}, \quad k(x_{j+1}, x_{j+2}) \leq a^{1/\alpha}.$$

Применяя (4), находим

$$\begin{aligned} k(x_1, x_{k+1}) &\leq D(k(x_1, x_{j+1}) + k(x_{j+1}, x_{k+1})) \\ &\leq D(k(x_1, x_{j+1}) + D(k(x_{j+1}, x_{j+2}) + k(x_{j+2}, x_{k+1}))) \\ &\leq Da^{1/\alpha} + 2D^2a^{1/\alpha} = D(1 + 2D)a^{1/\alpha}. \end{aligned}$$

Таким образом, если $\alpha = \alpha_D$, то

$$k^\alpha(x_1, x_{k+1}) \leq D^\alpha(1 + 2D)^\alpha a \leq 2a$$

и шаг индукции доказан. Лемма 3.1 доказана.

В дальнейшем мы будем использовать известное соотношение (см. [35; предложение 2.1])

$$\sum_n 2^n \left(\sum_{i=n}^{\infty} a_i \right)^s \approx \sum_n 2^n a_n^s s > 0, \quad (3.45)$$

верное для любой последовательности $\{a_k\} \subset \mathbb{R}_+$.

Положим

$$U_k(y, x) := \int_x^y k(z, x) u(z) dz.$$

ТЕОРЕМА 3.11. Пусть $0 < q < p \leq 1$ и ядро $k(x, y) \geq 0$ удовлетворяет условию Ойнарова (4). Тогда следующие утверждения эквивалентны:

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty k(y, x) f(y) u(y) dy \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C_1 \left(\int_0^\infty f^p v \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow, \quad (3.46)$$

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty U_k^p(y, x) h(y) dy \right)^{q/p} w(x) dx \right)^{p/q} \leq C_2^p \int_0^\infty h V, \quad h \in \mathfrak{M}^+, \quad (3.47)$$

$$\left(\int_0^\infty \left(\sup_{y \geq x} U_k(y, x) f(y) \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C_3 \left(\int_0^\infty f^p v \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow, \quad (3.48)$$

$$\left(\int_0^\infty \left(\sup_{y \geq x} U_k^p(y, x) \int_y^\infty h \right)^{q/p} w(x) dx \right)^{p/q} \leq C_4^p \int_0^\infty h V, \quad h \in \mathfrak{M}^+, \quad (3.49)$$

$$\mathbb{B}^r := \sup_{\{x_k\}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} U_k^q(x_{k+1}, y) w(y) dy \right)^{r/q} V^{-r/p}(x_{k+1}) < \infty. \quad (3.50)$$

При этом

$$C_1 \approx C_2 \approx C_3 = C_4 \approx \mathbb{B}. \quad (3.51)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы покажем, что

$$(3.50) \Rightarrow (3.47) \Rightarrow (3.46) \Rightarrow (3.48) \Leftrightarrow (3.49) \Rightarrow (3.50),$$

и начнем с доказательства импликации $(3.50) \Rightarrow (3.47)$. Пусть $\{x_n\} \subset \mathbb{R}_+$ — такая последовательность, что $2^n = \int_0^{x_n} w$; обозначим $\Delta_n := [x_n, x_{n+1})$. Тогда

$$\begin{aligned} J &:= \int_0^\infty \left(\int_x^\infty U_k^p(y, x) h(y) dy \right)^{q/p} w(x) dx \approx \sum_n 2^n \left(\int_{x_n}^\infty U_k^p(y, x_n) h(y) dy \right)^{q/p} \\ &= \sum_n 2^n \left(\sum_{i=n}^\infty \int_{\Delta_i} U_k^p(y, x_n) h(y) dy \right)^{q/p} \approx \sum_n 2^n \left(\sum_{i=n}^\infty \int_{\Delta_i} U_k^p(y, x_i) h(y) dy \right)^{q/p} \\ &\quad + \sum_n 2^n \left(\sum_{i=n+1}^\infty k^p(x_i, x_n) \int_{\Delta_i} \left(\int_{x_i}^y u \right)^p h(y) dy \right)^{q/p} \\ &\quad + \sum_n 2^n \left(\sum_{i=n+1}^\infty U_k^p(x_i, x_n) \int_{\Delta_i} h(y) dy \right)^{q/p}. \end{aligned}$$

Применяя (3.45) и лемму 3.1 с $\alpha = \min\{\alpha_D, p\}$, мы получим

$$\begin{aligned}
 J &\ll \sum_n 2^n \left(\int_{\Delta_n} U_k^p(y, x_n) h(y) dy \right)^{q/p} \\
 &+ \sum_n 2^n \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\sum_{j=n}^{i-1} k^\alpha(x_{j+1}, x_j) \right)^{p/\alpha} \int_{\Delta_i} \left(\int_{x_i}^y u \right)^p h(y) dy \right)^{q/p} \\
 &+ \sum_n 2^n \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\sum_{j=n}^{i-1} U_k(x_{j+1}, x_j) \right)^p \int_{\Delta_i} h(y) dy \right)^{q/p} \\
 &+ \sum_n 2^n \left(\sum_{i=n+2}^{\infty} \left(\sum_{j=n+1}^{i-1} k(x_j, x_n) \int_{\Delta_j} u \right)^p \int_{\Delta_i} h(y) dy \right)^{q/p} \\
 &=: \text{I} + \text{II} + \text{III} + \text{IV}.
 \end{aligned}$$

Оценка суммы I. Имеем

$$\begin{aligned}
 \int_{\Delta_n} U_k^p(y, x_n) h(y) dy &= \int_{\Delta_n} U_k^p(y, x_n) V^{-1}(y) h(y) V(y) dy \\
 &\leq \left[\sup_{y \in \Delta_n} U_k^p(y, x_n) V^{-1}(y) \right] \int_{\Delta_n} hV = U_k^p(y_n, x_n) V^{-1}(y_n) \int_{\Delta_n} hV
 \end{aligned}$$

для некоторого $y_n \in \Delta_n$. По неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned}
 \text{I} &\leq \sum_n 2^n U_k^q(y_n, x_n) V^{-q/p}(y_n) \left(\int_{\Delta_n} hV \right)^{q/p} \\
 &\leq \left(\sum_n 2^{nr/q} U_k^r(y_n, x_n) V^{-r/p}(y_n) \right)^{q/r} \left(\int_0^\infty hV \right)^{q/p} =: B_1^q \left(\int_0^\infty hV \right)^{q/p}.
 \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
 B_1^r &\approx \sum_n \left(\int_{\Delta_{n-1}} w \right)^{r/q} U_k^r(y_n, x_n) V^{-r/p}(y_n) \\
 &\leq \sum_n \left(\int_{\Delta_{n-1}} w(x) U_k^q(y_n, x) dx \right)^{r/q} V^{-r/p}(y_n) \\
 &\leq \sum_n \left(\int_{y_{n-2}}^{y_n} w(x) U_k^q(y_n, x) dx \right)^{r/q} V^{-r/p}(y_n) \\
 &= \sum_k \left(\int_{y_{2k-2}}^{y_{2k}} w(x) U_k^q(y_{2k}, x) dx \right)^{r/q} V^{-r/p}(y_{2k}) \\
 &\quad + \sum_k \left(\int_{y_{2k-1}}^{y_{2k+1}} w(x) U_k^q(y_{2k+1}, x) dx \right)^{r/q} V^{-r/p}(y_{2k+1}).
 \end{aligned}$$

Если $z_k := y_{2k}$ и $z'_k := y_{2k+1}$, то по определению $\mathbb{B}^r$

$$\begin{aligned} B_1^r &\ll \sum_k \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} w(x) U_k^q(z_k, x) dx \right)^{r/q} V^{-r/p}(z_k) \\ &\quad + \sum_k \left(\int_{z'_{k-1}}^{z'_k} w(x) U_k^q(z'_k, x) dx \right)^{r/q} V^{-r/p}(z'_k) \ll \mathbb{B}^r. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I \ll \mathbb{B}^q \left(\int_0^\infty hV \right)^{q/p}. \quad (3.52)$$

Оценка сумм II и IV. По неравенству Минковского и (3.45) находим

$$\begin{aligned} \text{II} &\leq \sum_n 2^n \left(\sum_{j=n}^\infty k^\alpha(x_{j+1}, x_j) \left(\sum_{i=j+1}^\infty \int_{\Delta_i} \left(\int_{x_i}^y u \right)^p h(y) dy \right)^{\alpha/p} \right)^{q/\alpha} \\ &\approx \sum_n 2^n k^q(x_{n+1}, x_n) \left(\sum_{i=n+1}^\infty \int_{\Delta_i} \left(\int_{x_i}^y u \right)^p h(y) dy \right)^{q/p} \\ &\leq \sum_n 2^n k^q(x_{n+1}, x_n) \left(\int_{x_{n+1}}^\infty \left(\int_{x_{n+1}}^y u \right)^p h(y) dy \right)^{q/p} =: J_0. \end{aligned}$$

Имеем

$$\text{IV} = \sum_n 2^n \left(\sum_{i=n+2}^\infty \left(\sum_{j=n+1}^{i-1} k(x_j, x_n) \int_{\Delta_j} u \right)^p \int_{\Delta_i} h(y) dy \right)^{q/p}.$$

Применяя лемму 3.1 с $\alpha \in (0, p)$, находим

$$k(x_j, x_n) \ll \left(\sum_{k=n}^{j-1} k^\alpha(x_{k+1}, x_k) \right)^{1/\alpha}.$$

По неравенству Минковского

$$\begin{aligned} \sum_{j=n+1}^{i-1} k(x_j, x_n) \int_{\Delta_j} u &\ll \sum_{j=n+1}^{i-1} \left(\sum_{k=n}^{j-1} k^\alpha(x_{k+1}, x_k) \right)^{1/\alpha} \int_{\Delta_j} u \\ &\leq \left(\sum_{k=n}^{i-2} k^\alpha(x_{k+1}, x_k) \left(\int_{x_{k+1}}^{x_i} u \right)^\alpha \right)^{1/\alpha}. \end{aligned}$$

Снова по неравенству Минковского

$$\begin{aligned} \text{IV} &\ll \sum_n 2^n \left(\sum_{i=n+2}^\infty \left(\sum_{k=n}^{i-2} k^\alpha(x_{k+1}, x_k) \left(\int_{x_{k+1}}^{x_i} u \right)^\alpha \right)^{p/\alpha} \int_{\Delta_i} h \right)^{q/p} \\ &\leq \sum_n 2^n \left(\sum_{k=n}^\infty k^\alpha(x_{k+1}, x_k) \left(\sum_{i=k+2}^\infty \left(\int_{x_{k+1}}^{x_i} u \right)^p \int_{\Delta_i} h \right)^{\alpha/p} \right)^{q/\alpha}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \sum_{i=k+2}^{\infty} \left(\int_{x_{k+1}}^{x_i} u \right)^p \int_{\Delta_i} h &\leq \sum_{i=k+2}^{\infty} \int_{x_i}^{x_{i+1}} h(y) \left(\int_{x_{k+1}}^y u \right)^p dy \\ &\leq \int_{x_{k+1}}^{\infty} \left(\int_{x_{k+1}}^y u \right)^p h(y) dy. \end{aligned}$$

Следовательно, применяя (3.45), получаем

$$\begin{aligned} \text{IV} &\ll \sum_n 2^n \left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{\alpha} (x_{k+1}, x_k) \left(\int_{x_{k+1}}^{\infty} \left(\int_{x_{k+1}}^y u \right)^p h(y) dy \right)^{\alpha/p} \right)^{q/\alpha} \\ &\approx \sum_n 2^n k^q (x_{n+1}, x_n) \left(\int_{x_{n+1}}^{\infty} \left(\int_{x_{n+1}}^y u \right)^p h(y) dy \right)^{q/p} =: J_0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\text{II} + \text{IV} \ll J_0.$$

Пусть $i \in \mathbb{Z}$. Положим

$$A_i := \left\{ m \in \mathbb{Z} : 2^i \leq \sum_{n < m} 2^n k^q (x_{n+1}, x_n) < 2^{i+1} \right\}. \quad (3.53)$$

Обозначим $\mathcal{A} := \bigcup_k A_{i_k} \subset \mathbb{Z}$, где $A_{i_k} \neq \emptyset$, и будем считать $A_i = \emptyset$, если $i \notin \{i_k\}$.

Положим

$$n_{i_k} := \inf A_{i_k}, \quad n_{i_k}^+ := \sup A_{i_k}; \quad z_k := x_{n_{i_k}}, \quad z_k^+ := x_{n_{i_k}^+}.$$

Тогда $n_{i_k} < n_{i_k}^+ < n_{i_{k+1}}$ и предположим для простоты, что $\text{card} \bigcup_k \{i_k\} = \aleph_0$.

Имеем

$$J_0 = \sum_k \sum_{n=n_{i_k}}^{n_{i_k}^+} 2^n k^q (x_{n+1}, x_n) \left(\int_{x_{n+1}}^{\infty} \left(\int_{x_{n+1}}^y u \right)^p h(y) dy \right)^{q/p}.$$

По неравенству Йенсена и (3.45)

$$\begin{aligned} J_0 &\ll \sum_k 2^{i_k} \left(\int_{z_k}^{\infty} \left(\int_{z_k}^y u \right)^p h(y) dy \right)^{q/p} = \sum_k 2^{i_k} \left(\sum_{j=k}^{\infty} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \left(\int_{z_k}^y u \right)^p h(y) dy \right)^{q/p} \\ &\approx \sum_k 2^{i_k} \left(\sum_{j=k}^{\infty} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \left(\int_{z_j}^y u \right)^p h(y) dy \right)^{q/p} \\ &\quad + \sum_k 2^{i_k} \left(\sum_{j=k}^{\infty} \left(\sum_{l=k}^{j-1} \int_{z_l}^{z_{l+1}} u \right)^p \int_{z_j}^{z_{j+1}} h \right)^{q/p} \\ &\leq \sum_k 2^{i_k} \left(\sum_{j=k}^{\infty} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \left(\int_{z_j}^y u \right)^p h(y) dy \right)^{q/p} \\ &\quad + \sum_k 2^{i_k} \left(\sum_{j=k}^{\infty} \sum_{l=k}^{j-1} \left(\int_{z_l}^{z_{l+1}} u \right)^p \int_{z_j}^{z_{j+1}} h \right)^{q/p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\approx \sum_k 2^{i_k} \left(\int_{z_k}^{z_{k+1}} \left(\int_{z_k}^y u \right)^p h(y) dy \right)^{q/p} + \sum_k 2^{i_k} \left(\sum_{l=k}^{\infty} \left(\int_{z_l}^{z_{l+1}} u \right)^p \int_{z_{l+1}}^{\infty} h \right)^{q/p} \\
&\ll \sum_k 2^{i_k} \left[\sup_{z_k < y < z_{k+1}} \left(\int_{z_k}^y u \right)^p V^{-1}(y) \right]^{q/p} \left(\int_{z_k}^{z_{k+1}} hV \right)^{q/p} \\
&\quad + \sum_k 2^{i_k} \left(\int_{z_k}^{z_{k+1}} u \right)^q \left(\int_{z_{k+1}}^{\infty} h \right)^{q/p} =: J_{0,1} + J_{0,2}.
\end{aligned}$$

По неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned}
J_{0,1} &\leq \left(\sum_k 2^{i_k r/q} \sup_{z_k < y < z_{k+1}} \left(\int_{z_k}^y u \right)^r V^{-r/p}(y) \right)^{q/r} \left(\int_0^{\infty} hV \right)^{q/p} \\
&=: B_2^q \left(\int_0^{\infty} hV \right)^{q/p}.
\end{aligned}$$

Пусть $z_k^0 \in [z_k, z_{k+1}]$ ТАКОВЫ, ЧТО

$$\sup_{z_k < y < z_{k+1}} \left(\int_{z_k}^y u \right)^r V^{-r/p}(y) = \left(\int_{z_k}^{z_k^0} u \right)^r V^{-r/p}(z_k^0).$$

Тогда

$$B_2^r = \sum_k 2^{i_k r/q} \left(\int_{z_k}^{z_k^0} u \right)^r V^{-r/p}(z_k^0).$$

Из (3.53) следует, что

$$\begin{aligned}
2^{i_k} &\leq \sum_{n < n_{i_k}} 2^n k^q(x_{n+1}, x_n) = \sum_{n_{i_k-2} \leq n < n_{i_k}} 2^n k^q(x_{n+1}, x_n) + \sum_{n < n_{i_k-2}} 2^n k^q(x_{n+1}, x_n) \\
&\leq \sum_{n_{i_k-2} \leq n < n_{i_k}} 2^n k^q(x_{n+1}, x_n) + 2^{i_k-2+1}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$2^{i_k} \leq 2 \sum_{n_{i_k-2} \leq n < n_{i_k}} 2^n k^q(x_{n+1}, x_n) \quad (3.54)$$

и

$$B_2^r \ll \sum_k \left(\sum_{n_{i_k-2} \leq n < n_{i_k}} 2^n k^q(x_{n+1}, x_n) \right)^{r/q} \left(\int_{z_k}^{z_k^0} u \right)^r V^{-r/p}(z_k^0).$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{n_{i_k-2} \leq n < n_{i_k}} 2^n k^q(x_{n+1}, x_n) &\approx \sum_{n_{i_k-2} \leq n < n_{i_k}} k^q(x_{n+1}, x_n) \int_{x_{n-1}}^{x_n} w(y) dy \\
&\ll \sum_{n_{i_k-2} \leq n < n_{i_k}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} k^q(x_{n+1}, y) w(y) dy \ll \int_{z_{k-2}-1}^{z_k} k^q(z_k, y) w(y) dy \\
&\leq \int_{z_{k-3}}^{z_k} k^q(z_k, y) w(y) dy =: \varphi_k.
\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
 \varphi_k^{1/q} \left(\int_{z_k}^{z_k^0} u \right) &= \left(\int_{z_{k-3}}^{z_k} w(y) \left(k(z_k, y) \int_{z_k}^{z_k^0} u(z) dz \right)^q dy \right)^{1/q} \\
 &\ll \left(\int_{z_{k-3}}^{z_k} w(y) \left(\int_{z_k}^{z_k^0} k(z, y) u(z) dz \right)^q dy \right)^{1/q} \\
 &\leq \left(\int_{z_{k-3}}^{z_k^0} w(y) \left(\int_y^{z_k^0} k(z, y) u(z) dz \right)^q dy \right)^{1/q}. \quad (3.55)
 \end{aligned}$$

Поскольку $z_{k-3} \geq z_{k-4}^0$, то

$$B_2^r \ll \sum_k \left(\int_{z_{k-4}^0}^{z_k^0} w(y) \left(\int_y^{z_k^0} k(z, y) u(z) dz \right)^q dy \right)^{r/q} V^{-r/p}(z_k^0).$$

Используя обычную процедуру, а именно разбивая сумму $\sum_k$ в сумму сумм $\sum_{k=2n} + \sum_{k=2n+1}$ дважды, мы видим, что $B_2 \ll \mathbb{B}$.

Теперь докажем оценку сверху для $J_{0,2}$. Имеем

$$J_{0,2} = \sum_k 2^{i_k} \left(\int_{z_k}^{z_{k+1}} u \right)^q \left(\int_{z_{k+1}}^{\infty} h \right)^{q/p}.$$

Пусть $j \in \mathbb{Z}$ и

$$B_j := \left\{ m \in \mathbb{Z} : 2^j \leq \sum_{k < m} 2^{i_k} \left(\int_{z_k}^{z_{k+1}} u \right)^q < 2^{j+1} \right\}. \quad (3.56)$$

Обозначим $\mathcal{B} := \bigcup_k B_{j_k} \subset \mathbb{Z}$, где $B_{j_k} \neq \emptyset$, и $B_j = \emptyset$, если $j \notin \{j_k\}$. Положим

$$l_{j_k} := \inf B_{j_k}, \quad l_{j_k}^+ := \sup B_{j_k}; \quad y_k := z_{l_{j_k}}, \quad y_k^+ := z_{l_{j_k}^+}.$$

Тогда $l_{j_k} < l_{j_k}^+ < l_{j_{k+1}}$ и будем для простоты считать, что $\text{card} \bigcup_k \{j_k\} = \aleph_0$. По неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned}
 J_{0,2} &= \sum_j \sum_{k=l_j}^{l_j^+} 2^{i_k} \left(\int_{z_k}^{z_{k+1}} u \right)^q \left(\int_{z_{k+1}}^{\infty} h \right)^{q/p} \ll \sum_j 2^j \left(\int_{y_j}^{\infty} h \right)^{q/p} \\
 &= \sum_j 2^j \left(\sum_{k=j}^{\infty} \int_{y_k}^{y_k^+} h \right)^{q/p} \approx \sum_k 2^k \left(\int_{y_k}^{y_k^+} h \right)^{q/p} \\
 &\leq \sum_k 2^k V^{-q/p}(y_k) \left(\int_{y_k}^{y_k^+} h V \right)^{q/p} \leq \left(\sum_k 2^{kr/q} V^{-r/p}(y_k) \right)^{q/r} \left(\int_0^{\infty} h V \right)^{q/p} \\
 &=: B_3^q \left(\int_0^{\infty} h V \right)^{q/p}.
 \end{aligned}$$

Из (3.56) следует, что $2^j \leq 2 \sum_{l_{j-2} \leq k < l_j} 2^{i_k} \left(\int_{z_k}^{z_{k+1}} u \right)^q$. Следовательно,

$$B_3^r \ll \sum_j \left(\sum_{l_{j-2} \leq k < l_j} 2^{i_k} \left(\int_{z_k}^{z_{k+1}} u \right)^q \right)^{r/q} V^{-r/p}(y_j).$$

Используя (3.54) и (3.55), находим

$$\begin{aligned} B_3^r &\ll \sum_j \left(\sum_{l_{j-2} \leq k < l_j} \int_{z_{k-3}}^{z_k} \left(\int_y^{z_{k+1}} k(z, y) u(z) dz \right)^q w(y) dy \right)^{r/q} V^{-r/p}(y_j) \\ &\leq \sum_j \left(\sum_{l_{j-2} \leq k < l_j} \int_{z_{k-3}}^{z_k} \left(\int_y^{y_j} k(z, y) u(z) dz \right)^q w(y) dy \right)^{r/q} V^{-r/p}(y_j) \\ &\leq \sum_j \left(\int_{y_{j-8}}^{y_j} \left(\int_y^{y_j} k(z, y) u(z) dz \right)^q w(y) dy \right)^{r/q} V^{-r/p}(y_j), \end{aligned}$$

отсюда следует оценка $B_3 \ll \mathbb{B}$.

Оценка суммы III. Так как $p \in (0, 1]$, то по неравенству Йенсена и (3.45) имеем

$$\begin{aligned} \text{III} &\leq \sum_n 2^n \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=n}^{i-1} U_k^p(x_{j+1}, x_j) \int_{\Delta_i} h \right)^{q/p} \\ &= \sum_n 2^n \left(\sum_{j=n}^{\infty} U_k^p(x_{j+1}, x_j) \int_{x_{j+1}}^{\infty} h \right)^{q/p} \\ &\approx \sum_n 2^n U_k^q(x_{n+1}, x_n) \left(\int_{x_{n+1}}^{\infty} h \right)^{q/p} =: J_1. \end{aligned}$$

Пусть $k \in \mathbb{Z}$ и

$$G_k := \left\{ m \in \mathbb{Z} : 2^k \leq \sum_{n < m} 2^n \left(\int_{\Delta_n} k(z, x_n) u(z) dz \right)^q < 2^{k+1} \right\}.$$

Как и ранее, считаем для простоты, что G_k непусты, и полагаем

$$\lambda_k := \inf G_k, \quad \lambda_k^+ := \sup G_k < \lambda_{k+1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum_k \sum_{\lambda_k \leq n < \lambda_k^+} 2^n \left(\int_{\Delta_n} k(z, x_n) u(z) dz \right)^q \left(\int_{x_{n+1}}^{\infty} h \right)^{q/p} \ll \sum_k 2^k \left(\int_{x_{\lambda_k+1}}^{\infty} h \right)^{q/p} \\ &\leq \sum_k 2^k \left(\sum_{j=k}^{\infty} \int_{x_{\lambda_j}}^{x_{\lambda_{j+1}}} h \right)^{q/p} \approx \sum_k 2^k \left(\int_{x_{\lambda_k}}^{x_{\lambda_{k+1}}} h \right)^{q/p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_k 2^k V^{-q/p}(x_{\lambda_k}) \left(\int_{x_{\lambda_k}}^{x_{\lambda_{k+1}}} hV \right)^{q/p} \leq \left(\sum_k 2^{kr/q} V^{-r/p}(x_{\lambda_k}) \right)^{q/r} \left(\int_0^\infty hV \right)^{q/p} \\
&=: B_4^q \left(\int_0^\infty hV \right)^{q/p}.
\end{aligned}$$

Применяя

$$\begin{aligned}
2^k &\ll \sum_{\lambda_{k-2} \leq n < \lambda_k} 2^n \left(\int_{\Delta_n} k(z, x_n) u(z) dz \right)^q \\
&\approx \sum_{\lambda_{k-2} \leq n < \lambda_k} \int_{\Delta_{n-1}} w(y) dy \left(\int_{\Delta_n} k(z, x_n) u(z) dz \right)^q \\
&\ll \sum_{\lambda_{k-2} \leq n < \lambda_k} \int_{\Delta_{n-1}} \left(\int_y^{x_{\lambda_k}} k(z, y) u(z) dz \right)^q w(y) dy \\
&\leq \int_{x_{\lambda_{k-3}}}^{x_{\lambda_k}} \left(\int_y^{x_{\lambda_k}} k(z, y) u(z) dz \right)^q w(y) dy,
\end{aligned}$$

мы видим, что

$$B_4^r \ll \sum_k \left(\int_{x_{\lambda_{k-3}}}^{x_{\lambda_k}} \left(\int_y^{x_{\lambda_k}} k(z, y) u(z) dz \right)^q w(y) dy \right) V_{x_{\lambda_k}}^{-r/p} \ll \mathbb{B}^r.$$

Таким образом, доказательство импликации (3.50) $\Rightarrow$ (3.47) завершено.

(3.47) $\Rightarrow$ (3.46) следует по неравенству Минковского.

(3.46) $\Rightarrow$ (3.48) $\Rightarrow$ (3.49) доказываются элементарно.

Докажем последний шаг (3.49) $\Rightarrow$ (3.50). Для этого предположим, что $\{x_k\} \subset \mathbb{R}_+$ — произвольная возрастающая последовательность. Пусть $\varepsilon_k \in (x_k, x_{k+1})$ таковы, что $V(\varepsilon_k) \leq 2V(x_k)$. Положим

$$h(x) := \sum_k \frac{a_k}{\varepsilon_k - x_k} \frac{\chi_{(x_k, \varepsilon_k)}(x)}{V(x_k)},$$

где $\{a_k\} \subset [0, \infty)$ таковы, что $\sum_k a_k < \infty$. Тогда

$$\int_0^\infty hV = \sum_k \frac{a_k}{(\varepsilon_k - x_k)V(x_k)} \int_{x_k}^{\varepsilon_k} V(x) dx \leq \sum_k \frac{a_k V(\varepsilon_k)}{V(x_k)} \leq 2 \sum_k a_k.$$

Запишем

$$\begin{aligned}
H &:= \int_0^\infty \left[\sup_{y \geq x} \left(\int_x^y k(z, x) u(z) dz \right)^p \int_y^\infty h \right]^{q/p} w(x) dx \\
&= \sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[\sup_{y \geq x} \left(\int_x^y k(z, x) u(z) dz \right)^p \int_y^\infty h \right]^{q/p} w(x) dx \\
&\geq \sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\int_x^{x_{k+1}} k(z, x) u(z) dz \right)^q w(x) dx \int_{x_{k+1}}^\infty h.
\end{aligned}$$

Имеем

$$\int_{x_{k+1}}^{\infty} h = \sum_{n \geq k+1} \frac{a_n}{V(x_n)} \geq \frac{a_{k+1}}{V(x_{k+1})}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} H &\geq \sum_k \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\int_x^{x_{k+1}} k(z, x) u(z) dz \right)^q w(x) dx \right) \frac{a_{k+1}^{q/p}}{V^{q/p}(x_{k+1})} \\ &=: \sum_k b_k a_{k+1}^{q/p}. \end{aligned}$$

Тогда (3.49) влечет

$$\left(\sum_k b_k a_{k+1}^{q/p} \right)^{p/q} \ll C_4^p \sum_k a_{k+1}$$

для всех $\{a_k\} \subset \mathbb{R}_+$. Отсюда

$$\left(\sum_k b_k^{r/q} \right)^{p/r} \ll C_4^p,$$

что эквивалентно $\mathbb{B} \ll C_4$. Теорема 3.1 доказана.

Следующая теорема посвящена важному частному случаю теоремы 3.11, когда $k(x, y) \equiv 1$ и критерию удастся придать интегральный вид. Этот случай изучался М. Л. Гольдманом [33], [34]. Мы получаем критерий в другой форме и приводим более простое доказательство. Обозначим $\varphi(x) := W^{-1}(4W(x))$, где $W^{-1}(t) := \inf\{s \geq 0 : W(s) = t\}$ – обратная функция к $W(t) := \int_0^t w$.

ТЕОРЕМА 3.12. Пусть $0 < q < p \leq 1$. Следующие условия эквивалентны:

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty f u \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C_1 \left(\int_0^\infty f^p v \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow, \quad (3.57)$$

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty U^p(y, x) h(y) dy \right)^{q/p} w(x) dx \right)^{p/q} \leq C_2^p \int_0^\infty h V, \quad h \in \mathfrak{M}^+, \quad (3.58)$$

$$\left(\int_0^\infty \left(\sup_{y \geq x} U^p(y, x) \int_y^\infty h \right)^{q/p} w(x) dx \right)^{p/q} \leq C_3^p \int_0^\infty h V, \quad h \in \mathfrak{M}^+, \quad (3.59)$$

$$\left(\int_0^\infty \left(\sup_{y \geq x} U(y, x) f(y) \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C_4 \left(\int_0^\infty f^p v \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow, \quad (3.60)$$

$$\left(\int_0^\infty \left(\sup_{x \leq y \leq \varphi(x)} U^p(y, x) \int_y^\infty h \right)^{q/p} w(x) dx \right)^{p/q} \leq C_5^p \int_0^\infty h V, \quad h \in \mathfrak{M}^+, \quad (3.61)$$

$$\left(\int_0^\infty \left(\sup_{x \leq y \leq \varphi(x)} U(y, x) f(y) \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C_6 \left(\int_0^\infty f^p v \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow, \quad (3.62)$$

$$\left(\int_0^\infty \left[\left(\int_x^{\varphi(x)} U^p(y, x) h(y) dy \right)^{q/p} + U^q(\varphi(x), x) \left(\int_{\varphi(x)}^\infty h \right)^{q/p} \right] w(x) dx \right)^{p/q} \leq C_7^p \int_0^\infty h V \quad (3.63)$$

для всех $h \in \mathfrak{M}^+$,

$$\mathbb{B}^r := \sup_{\{x_k\}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} U^q(x_{k+1}, y) w(y) dy \right)^{r/q} V^{-r/p}(x_{k+1}) < \infty, \quad (3.64)$$

$$\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 < \infty, \quad (3.65)$$

где

$$\mathbf{B}_1^r := \int_0^\infty \sup_{x \leq y \leq \varphi(x)} U^r(y, x) V^{-r/p}(y) W^{r/p}(x) w(x) dx, \quad (3.66)$$

$$\mathbf{B}_2^r := \int_0^\infty \left(\int_0^x w(y) U^q(\varphi(y), y) dy \right)^{r/p} V^{-r/p}(\varphi(x)) w(x) U^q(\varphi(x), x) dx. \quad (3.67)$$

Более того,

$$C_1 \approx C_2 \approx C_3 = C_4 \approx C_5 \approx C_6 \approx C_7 \approx \mathbb{B} \approx \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2. \quad (3.68)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что эквивалентность (3.60) $\Leftrightarrow$ (3.64) следует из теоремы 4.4 работы [110]. Далее, импликация (3.60) $\Rightarrow$ (3.59) очевидна, а для доказательства (3.59) $\Rightarrow$ (3.60) надо применить предложение 2.1 и теорему Фату. Для любой функции $f \in \mathfrak{M}^\downarrow$ имеем

$$\int_x^\infty f u \geq \sup_{y \geq x} \int_x^y f u \geq \sup_{y \geq x} U(y, x) f(y).$$

Отсюда следует, что (3.57) $\Rightarrow$ (3.60). Неравенство (3.57) эквивалентно следующему:

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty f^{1/p} u \right)^q w \right)^{p/q} \leq C_1^p \left(\int_0^\infty f v \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow. \quad (3.69)$$

Если $f(x) = \int_x^\infty h$, то по неравенству Минковского

$$\int_x^\infty f^{1/p} u = \int_x^\infty \left(\int_z^\infty h \right)^{1/p} u(z) dz \leq \left(\int_x^\infty U^p(y, x) h(y) dy \right)^{1/p}$$

и (3.58) $\Rightarrow$ (3.57) доказывается применением предложения 2.1.

Покажем, что (3.59) $\Rightarrow$ (3.58). Для этого обозначим левые части (3.58) и (3.59) через $A^{p/q}$ и $B^{p/q}$ соответственно. Предположим, что (3.59) выполняется. Тогда

$$A := \sum_n \int_{\Delta_n} \left(\int_x^\infty U^p(y, x) h(y) dy \right)^{q/p} w(x) dx$$

$$\begin{aligned}
&\approx \sum_n 2^n \left(\int_{\Delta_n} U^p(y, x_n) h(y) dy \right)^{q/p} \\
&\quad + \sum_n 2^n \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} U^p(x_i, x_n) \int_{\Delta_i} h(y) dy \right)^{q/p} =: A_1 + A_2.
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Используя неравенство Йенсена и (3.45), получаем

$$\begin{aligned}
A_2 &:= \sum_n 2^n \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\sum_{j=n}^{i-1} U(x_{j+1}, x_j) \right)^p \int_{\Delta_i} h(y) dy \right)^{q/p} \\
&\ll \sum_n 2^n \left(U^p(x_{n+1}, x_n) \int_{x_{n+1}}^{\infty} h(y) dy \right)^{q/p}.
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Аналогично, для константы B имеем

$$\begin{aligned}
B &:= \int_0^{\infty} \left(\sup_{y \geq x} U^p(y, x) \int_y^{\infty} h \right)^{q/p} w(x) dx \\
&= \sum_n \int_{\Delta_n} \left(\sup_{y \geq x} U^p(y, x) \int_y^{\infty} h \right)^{q/p} w(x) dx \approx \sum_n 2^n \left(\sup_{y \geq x_n} U^p(y, x_n) \int_y^{\infty} h \right)^{q/p} \\
&= \sum_n 2^n \left(\sup_{i \geq n} \sup_{y \in \Delta_i} U^p(y, x_n) \int_y^{\infty} h \right)^{q/p} \approx \sum_n 2^n \left(\sup_{i \geq n} \sup_{y \in \Delta_i} U^p(y, x_i) \int_y^{\infty} h \right)^{q/p} \\
&\quad + \sum_n 2^n \left(\sup_{i \geq n+1} U^p(x_i, x_n) \int_{x_i}^{\infty} h \right)^{q/p} \approx \sum_n 2^n \left(\sup_{y \in \Delta_n} U^p(y, x_n) \int_y^{\infty} h \right)^{q/p} \\
&\quad + \sum_n 2^n \left(\sup_{i \geq n+1} U^p(x_i, x_n) \int_{x_i}^{\infty} h \right)^{q/p} =: B_1 + B_2.
\end{aligned}$$

Если (3.59) выполняется, то

$$B_i \ll C_3^q \left(\int_0^{\infty} hV \right)^{q/p}, \quad i = 1, 2. \tag{3.72}$$

Из (3.71) следует, что

$$A_2 \ll B_2 \ll C_3^q \left(\int_0^{\infty} hV \right)^{q/p}. \tag{3.73}$$

По неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned}
A_1 &\approx \sum_n 2^n \left(\int_{\Delta_n} U^p(y, x_n) V^{-1}(y) h(y) V(y) dy \right)^{q/p} \\
&\leq \sum_n 2^n \left(\sup_{y \in \Delta_n} U^p(y, x_n) V^{-1}(y) \right)^{q/p} \left(\int_{\Delta_n} hV \right)^{q/p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_n 2^{nr/q} \left(\sup_{y \in \Delta_n} U^p(y, x_n) V^{-1}(y) \right)^{r/p} \right)^{q/r} \left(\sum_n \int_{\Delta_n} h V \right)^{q/p} \\
&=: \mathbb{D}^q \left(\int_0^\infty h V \right)^{q/p}.
\end{aligned}$$

Из (3.72) получаем

$$\sum_n 2^n \left(\sup_{y \in \Delta_n} U^p(y, x_n) \int_y^{x_{n+1}} h \right)^{q/p} \ll C_3^q \left(\int_0^\infty h V \right)^{q/p}. \quad (3.74)$$

Пусть $H_n: L_V^1[\Delta_n] \rightarrow L^\infty[\Delta_n]$ – оператор вида

$$H_n h(y) := U^p(y, x_n) \int_y^{x_{n+1}} h.$$

Тогда по теореме 1.1

$$d_n := \|H_n\|_{L_V^1[\Delta_n] \rightarrow L^\infty[\Delta_n]} = \sup_{y \in \Delta_n} U^p(y, x_n) V^{-1}(y).$$

Пусть $h_n \in L_V^1[\Delta_n]$ – такая функция, что

$$\sup_{y \in \Delta_n} U^p(y, x_n) \int_y^{x_{n+1}} h_n \geq \frac{d_n}{2} \int_{\Delta_n} h_n V.$$

Тогда из (3.74) следует

$$\begin{aligned}
C_3^q &\gg \sup_{h \geq 0} \frac{\sum_n 2^n \left(\sup_{y \in \Delta_n} U^p(y, x_n) \int_y^{x_{n+1}} h \right)^{q/p}}{\left(\int_0^\infty h V \right)^{q/p}} \\
&\geq \sup_{h = \sum_n a_n h_n} \frac{\sum_n 2^n d_n^{q/p} \left(\sup_{y \in \Delta_n} U^p(y, x_n) \int_y^{x_{n+1}} h \right)^{q/p}}{\left(\sum_n a_n \int_{\Delta_n} h V \right)^{q/p}} \\
&\gg \sup_{h = \sum_n a_n h_n} \frac{\sum_n 2^n d_n^{q/p} \left(a_n \int_{\Delta_n} h V \right)^{q/p}}{\left(\sum_n a_n \int_{\Delta_n} h V \right)^{q/p}} = \mathbb{D}^q.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\mathbb{D} \ll C_3$ и

$$A_1 \ll \mathbb{D}^q \left(\int_0^\infty h V \right)^{q/p} \ll C_3^q \left(\int_0^\infty h V \right)^{q/p}. \quad (3.75)$$

Отсюда и из (3.73) вытекает, что (3.59) $\Rightarrow$ (3.58).

Для доказательства остальных эквивалентностей заметим, что

$$C_5 \leq C_3, \quad C_7 \leq C_2, \quad C_6 \leq C_4, \quad C_6 = C_5 \leq C_7.$$

Поэтому, если показать, что $C_2 \ll C_5$, то ясно, что $C_2 \approx C_5 \approx C_6 \approx C_7$. Как показано выше,

$$A := \int_0^\infty \left(\int_x^\infty U^p(y, x) h(y) dy \right)^{q/p} w(x) dx \approx A_1 + A_2,$$

причем

$$A_2 \ll \sum_n 2^n U^q(x_{n+1}, x_n) \left(\int_{x_{n+1}}^\infty h \right)^{q/p}.$$

Так как $\varphi(x_{n-1}) = x_{n+1}$, то

$$\begin{aligned} U^q(x_{n+1}, x_n) \left(\int_{x_{n+1}}^\infty h \right)^{q/p} &= \sup_{x_n \leq y \leq x_{n+1}} U^q(y, x_n) \left(\int_{x_{n+1}}^\infty h \right)^{q/p} \\ &\leq \sup_{x_n \leq y \leq x_{n+1}} U^q(y, x_n) \left(\int_y^\infty h \right)^{q/p} = \sup_{x_n \leq y \leq \varphi(x_{n-1})} U^q(y, x_n) \left(\int_y^\infty h \right)^{q/p} \\ &\leq \sup_{x \leq y \leq \varphi(x)} U^q(y, x) \left(\int_y^\infty h \right)^{q/p}, \quad x \in (x_{n-1}, x_n). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} A_2 &\ll \sum_n \left(\int_{x_{n-1}}^{x_n} w \right) U^q(x_{n+1}, x_n) \left(\int_{x_{n+1}}^\infty h \right)^{q/p} \\ &\leq \sum_n \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left[\sup_{x \leq y \leq \varphi(x)} U^p(y, x) \left(\int_y^\infty h \right) \right]^{q/p} w(x) dx \\ &\leq \int_0^\infty \left[\sup_{x \leq y \leq \varphi(x)} U^p(y, x) \left(\int_y^\infty h \right) \right]^{q/p} w(x) dx \leq C_5^q \left(\int_0^\infty hV \right)^{q/p}. \end{aligned}$$

Из $x_{n-1} \leq x \leq x_n$ следует, что $x_{n+1} = \varphi(x_{n-1}) \leq \varphi(x)$, поэтому

$$\begin{aligned} \sup_{x \leq y \leq \varphi(x)} U^p(y, x) \left(\int_y^\infty h \right) &\geq \sup_{x_n \leq y \leq \varphi(x_{n-1})} U^p(y, x) \left(\int_y^\infty h \right) \\ \sup_{x_n \leq y \leq x_{n+1}} U^p(y, x) \left(\int_y^\infty h \right) &\geq \sup_{x_n \leq y \leq x_{n+1}} U^p(y, x_n) \left(\int_y^{x_{n+1}} h \right). \end{aligned}$$

Отсюда и из предыдущей оценки вытекает

$$\sum_n 2^n \sup_{x_n \leq y \leq x_{n+1}} U^q(y, x_n) \left(\int_y^{x_{n+1}} h \right)^{q/p} \ll C_5^q \left(\int_y^\infty hV \right)^{q/p}. \quad (3.76)$$

Рассуждая так же, как после неравенства (3.74), получим

$$A_1 \ll C_5^q \left(\int_y^\infty hV \right)^{q/p}.$$

Следовательно, $C_2 \ll C_5$.

Далее, мы покажем, что

$$C_2 \ll \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2. \quad (3.77)$$

Из (3.75) мы знаем, что

$$A_1 \ll \mathbb{D}^q \left(\int_y^\infty hV \right)^{q/p},$$

где

$$\mathbb{D}^r := \sum_n 2^{nr/q} \left(\sup_{y \in \Delta_n} U^p(y, x_n) V^{-1}(y) \right)^{r/p}.$$

Так как

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^r &\approx \sum_n \int_{\Delta_{n-1}} W^{r/p} w \left(\sup_{y \in \Delta_n} U^p(y, x_n) V^{-1}(y) \right)^{r/p} \\ &\leq \sum_n \int_{\Delta_{n-1}} W^{r/p}(x) w(x) \left(\sup_{x \leq y \leq x_{n+1}} U^p(y, x) V^{-1}(y) \right)^{r/p} dx \\ &\leq \sum_n \int_{\Delta_{n-1}} W^{r/p}(x) w(x) \left(\sup_{x \leq y \leq \varphi(x)} U^p(y, x) V^{-1}(y) \right)^{r/p} dx \leq \mathbf{B}_1^r, \end{aligned} \quad (3.78)$$

то

$$A_1 \ll \mathbf{B}_1^q \left(\int_y^\infty hV \right)^{q/p}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} A_2 &\ll \sum_n \left(\int_{\Delta_{n-1}} w \right) U^q(x_{n+1}, x_n) \left(\int_{x_{n+2}}^\infty h \right)^{q/p} \\ &\quad + \sum_n 2^n U^q(x_{n+1}, x_n) \left(\int_{\Delta_{n+1}}^\infty h \right)^{q/p} \\ &\leq \sum_n \int_{\Delta_{n-1}} w(x) U^q(\varphi(x), x) \left(\int_{\varphi(x)}^\infty h \right)^{q/p} dx \\ &\quad + \sum_n 2^n U^q(x_{n+1}, x_n) V^{-q/p}(x_{n+1}) \left(\int_{\Delta_{n+1}}^\infty hV \right)^{q/p} \\ &\leq \int_0^\infty U^q(\varphi(x), x) \left(\int_{\varphi(x)}^\infty h \right)^{q/p} w(x) dx \\ &\quad + \left(\sum_n 2^{nr/q} U^r(x_{n+1}, x_n) V^{-r/p}(x_{n+1}) \right)^{q/r} \left(\int_0^\infty hV \right)^{q/p}. \end{aligned}$$

Применяя замечание 1.2 и (3.78), находим

$$A_2 \ll \mathbf{B}_2^q \left(\int_0^\infty hV \right)^{q/p} + \mathbf{B}_1^q \left(\int_0^\infty hV \right)^{q/p},$$

и (3.77) доказано.

Из (3.63) вытекает, что

$$\left(\int_0^\infty U^q(\varphi(x), x) \left(\int_{\varphi(x)}^\infty h \right)^{q/p} w(x) dx \right)^{p/q} \leq C_6^p \int_0^\infty hV.$$

Отсюда и из замечания 1.2 следует, что $\mathbf{B}_2 \ll C_6$. Так как $C_5 \approx C_6$, то требуемый результат будет доказан, если мы покажем, что $\mathbf{B}_1 \ll C_5$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1^r &\ll \sum_n 2^{nr/q} \sup_{x_n \leq y \leq \varphi(x_{n+1})} U^r(y, x_n) V^{-r/p}(y) \\ &= \sum_n 2^{nr/q} \sup_{x_n \leq y \leq x_{n+3}} U^r(y, x_n) V^{-r/p}(y) \\ &= \sum_{i=0}^2 \sum_k 2^{(3k+i)r/q} \sup_{x_{3k+i} \leq y \leq x_{3(k+1)+i}} U^r(y, x_{3k+i}) V^{-r/p}(y). \end{aligned}$$

Далее, из оценки (3.76) аналогичным разложением получаем

$$\begin{aligned} \sum_k 2^{3k} \left(\sup_{x_{3k+i} \leq y \leq x_{3(k+1)+i}} U^p(y, x_{3k+i}) \int_y^{x_{3(k+1)+i}} h \right)^{q/p} \\ \ll C_5^q \left(\int_0^\infty hV \right)^{q/p}, \quad i = 0, 1, 2, \end{aligned}$$

а отсюда аналогично доказательству оценки $\mathbb{D} \ll C_3$ находим, что

$$\sum_k 2^{3kr/q} \sup_{x_{3k+i} \leq y \leq x_{3(k+1)+i}} U^r(y, x_{3k+i}) V^{-r/p}(y) \ll C_5^r,$$

и оценка $\mathbf{B}_1 \ll C_5$ установлена. Теорема 3.12 доказана.

Симметричным вариантом предыдущей теоремы является следующее утверждение. Положим $\psi(x) := W_*^{-1}(4W_*(x))$, где $W_*^{-1}(t) := \inf\{s \geq 0 : W_*(s) = t\}$.

ТЕОРЕМА 3.13. Пусть $0 < q < p \leq 1$. Следующие условия эквивалентны:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty \left(\int_0^x fu \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} &\leq \overline{C}_1 \left(\int_0^\infty f^p v \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^\uparrow, \\ \left(\int_0^\infty \left(\int_0^x U^p(x, y) h(y) dy \right)^{q/p} w(x) dx \right)^{p/q} &\leq \overline{C}_2^p \int_0^\infty hV_*, \quad h \in \mathfrak{M}^+, \\ \left(\int_0^\infty \left(\sup_{0 < y \leq x} U^p(x, y) \int_0^y h \right)^{q/p} w(x) dx \right)^{p/q} &\leq \overline{C}_3^p \int_0^\infty hV_*, \quad h \in \mathfrak{M}^+, \\ \left(\int_0^\infty \left(\sup_{0 < y \leq x} U(x, y) f(y) \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} &\leq \overline{C}_4 \left(\int_0^\infty f^p v \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^\uparrow, \\ \left(\int_0^\infty \left(\sup_{\psi(x) \leq y \leq x} U^p(x, y) \int_0^y h \right)^{q/p} w(x) dx \right)^{p/q} &\leq \overline{C}_5^p \int_0^\infty hV_*, \quad h \in \mathfrak{M}^+, \\ \left(\int_0^\infty \left(\sup_{\psi(x) \leq y \leq x} U(y, x) f(y) \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} &\leq \overline{C}_6 \left(\int_0^\infty f^p v \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^\uparrow, \end{aligned} \tag{3.79}$$

$$\left(\int_0^\infty \left[\left(\int_{\psi(x)}^x U^p(x, y) h(y) dy \right)^{q/p} + U^q(x, \psi(x)) \left(\int_0^{\psi(x)} h \right)^{q/p} \right] w(x) dx \right)^{p/q} \leq \bar{C}_7^p \int_0^\infty h V_*$$

для всех $h \in \mathfrak{M}^+$,

$$\bar{\mathbb{B}}^r := \sup_{\{x_k\}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} U^q(y, x_k) w(y) dy \right)^{r/q} V_*^{-r/p}(x_k) < \infty, \\ \bar{\mathbf{B}}_1 + \bar{\mathbf{B}}_2 < \infty,$$

где

$$\bar{\mathbf{B}}_1^r := \int_0^\infty \sup_{\psi(x) \leq y \leq x} U^r(x, y) V_*^{-r/p}(y) W_*^{r/p}(x) w(x) dx, \\ \bar{\mathbf{B}}_2^r := \int_0^\infty \left(\int_x^\infty w(y) U^q(y, \psi(y)) dy \right)^{r/p} V_*^{-r/p}(\varphi(x)) w(x) U^q(x, \psi(x)) dx.$$

Более того,

$$\bar{C}_1 \approx \bar{C}_2 \approx \bar{C}_3 = \bar{C}_4 \approx \bar{C}_5 \approx \bar{C}_6 \approx \bar{C}_7 \approx \bar{\mathbb{B}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Теорема 3.13 дополняет [44].

3.4. Дальнейшие результаты и комментарии. Сначала мы дадим полную характеристику неравенства (3.34).

ТЕОРЕМА 3.14. Пусть $0 < q, p < \infty$ и $k(x, y) \geq 0$ – измеримое ядро. Тогда неравенство (3.34) с наилучшей константой C_1 выполняется для всех $f \in \mathfrak{M}^\downarrow$, если и только если:

(i) $0 < p \leq 1, p \leq q < \infty$; в этом случае

$$C_1 = C_2 := \sup_{x \in (0, \infty)} \left(\int_0^\infty K^q(x, \min(x, y)) w(y) dy \right)^{1/q} V^{-1/p}(x) < \infty;$$

(ii) $q = 1 < p < \infty$; в этом случае $C_1 \approx C_3$, где

$$C_3 := \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty \left(\int_y^\infty k(z, y) w(z) dz \right) V^{-1}(y) u(y) dy \right)^{p'} v(x) dx \right)^{1/p'} < \infty.$$

Если $k(x, y)$ – ядро Ойнарова, то

(iii) $0 < q < p \leq 1$ и $k(x, y)$ непрерывно; в этом случае

$$C_1 \approx C_4 := \left(\sup_{\{x_k\}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} K^q(y, x_k) w(y) dy \right)^{r/q} V^{-r/p}(x_k) \right)^{1/r} < \infty;$$

(iv) $1 < p \leq q < \infty$; в этом случае $C_1 \approx C_5 + C_6 + C_7$, где

$$C_4 := \sup_{x \in (0, \infty)} \left(\int_0^x K^q(y, y) w(y) dy \right)^{1/q} V^{-1/p}(x) < \infty,$$

$$C_5 := \sup_{x \in (0, \infty)} W_*^{1/q}(x) \left(\int_0^x K^{p'}(x, y) V^{-p'}(y) v(y) dy \right)^{1/p'} < \infty,$$

$$C_6 := \sup_{x \in (0, \infty)} \left(\int_x^\infty k^q(y, x) w(y) dy \right)^{1/q} \left(\int_0^x U^{p'}(y) V^{-p'}(y) v(y) dy \right)^{1/p'} < \infty;$$

(v) $1 < q < p < \infty$; в этом случае $C_1 \approx C_8 + C_9 + C_{10}$, где

$$C_8 := \left(\int_0^\infty \left(\int_0^x K^q(y, y) w(y) dy \right)^{r/p} K^q(x, x) w(x) V^{-r/p}(x) dx \right)^{1/r} < \infty,$$

$$C_9 := \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty k^q(y, x) w(y) dy \right)^{r/q} \times \left(\int_0^x U^{p'}(y) V^{-p'}(y) v(y) dy \right)^{r/p'} U^{p'}(x) V^{-p'}(x) v(x) dx \right)^{1/r} < \infty,$$

$$C_{10} := \left(\int_0^\infty W_*^{r/p}(x) w(x) \left(\int_0^x K^{p'}(x, y) V^{-p'}(y) v(y) dy \right)^{r/p'} dx \right)^{1/r} < \infty;$$

(vi) $0 < q < 1 < p < \infty$; в этом случае $C_1 \approx C_8 + C_{11} + C_{12} < \infty$, где

$$C_{11} := \left(\sup_{\{x_k\}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} w \right)^{r/q} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} K^{p'}(x_k, y) V^{-p'}(y) v(y) dy \right)^{r/p'} \right)^{1/r} < \infty,$$

$$C_{12} := \left(\sup_{\{x_k\}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} k^q(y, x_k) w(y) dy \right)^{r/q} \times \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} U^{p'}(y) V^{-p'}(y) v(y) dy \right)^{r/p'} \right)^{1/r} < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) следует из [66], а (ii) – из теоремы 2.5, (iii) – это теорема 3.9. Части (iv) и (v) получены в теореме 7, [78], а для доказательства (vi) следует применить теоремы 3.1 и 1.3. С помощью теоремы 1.4 можно заменить константы C_{11} и C_{12} на интегральные. Теорема 3.14 доказана.

Для предельных случаев $p = \infty$, $q = \infty$ мы имеем следующие результаты.

ТЕОРЕМА 3.15. Пусть $0 < p < \infty$ и $k(x, y) \geq 0$ – измеримое ядро. Тогда неравенство

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in (0, \infty)} \left(\int_0^x k(x, y) f(y) u(y) dy \right) w(x) \leq C \left(\int_0^\infty f^p v \right)^{1/p} \quad (3.80)$$

верно для всех $f \in \mathfrak{M}^\downarrow$, если и только если:

(i) $0 < p \leq 1$; в этом случае

$$C = \sup_{x \in (0, \infty)} \left(\operatorname{ess\,sup}_{y \in (0, \infty)} K(x, \min(x, y)) w(y) \right) V^{-1/p}(x) < \infty;$$

(ii) $1 < p < \infty$; в этом случае

$$C = \operatorname{ess\,sup}_{s \in (0, \infty)} w(s) \left(\int_0^s \left(\int_t^s k(s, y) u(y) V^{-1}(y) dy \right)^{p'} v(t) dt \right)^{1/p'} < \infty.$$

ТЕОРЕМА 3.16. Пусть $\|\cdot\|_X$ – произвольная квазинорма на $\mathfrak{M}^+$ и $k(x, y) \geq 0$ – измеримое ядро на $\{(x, y) : x \geq y \geq 0\}$. Тогда неравенство

$$\left\| \int_0^x k(x, y) f(y) dy \right\|_X \leq C \|f\|_\infty$$

выполняется для всех $f \in \mathfrak{M}^\downarrow$, если и только если

$$C = \left\| \int_0^x \frac{k(x, y) dy}{\operatorname{ess\,sup}_{z \in (0, y)} v(z)} \right\|_X < \infty.$$

Для формулировки следующей теоремы нам потребуются дополнительные обозначения:

$$V_k(x) := \int_x^\infty k(y, x) \frac{u(y)}{V^2(y)} dy, \quad (3.81)$$

$$V_1(x) := \int_x^\infty \frac{u(y)}{V^2(y)} dy. \quad (3.82)$$

ТЕОРЕМА 3.17. Пусть $0 < q, p < \infty$ и $k(x, y) \geq 0$ – ядро Ойнарова. Тогда неравенство (3.46) выполняется для всех $f \in \mathfrak{M}^\downarrow$ с наилучшей константой C_1 , если и только если:

(i) $0 < p \leq 1, p \leq q < \infty$; в этом случае

$$C_1 = C_2 := \sup_{x \in (0, \infty)} \left(\int_0^x U_k^q(x, y) w(y) dy \right)^{1/q} V^{-1/p}(x) < \infty;$$

(ii) $0 < q < p \leq 1$; в этом случае

$$C_1 \approx C_3 := \left(\sup_{\{x_k\}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} U_k^q(x_{k+1}, y) w(y) dy \right)^{r/q} V^{-r/p}(x_{k+1}) \right)^{1/r} < \infty;$$

(iii) $1 < p \leq q < \infty$; в этом случае $C_1 \approx A_1 + A_2 + A_3$, где

$$\begin{aligned} A_1 &:= \sup_{x \in (0, \infty)} \left(\int_x^\infty V_k^q w \right)^{1/q} [V(x)]^{1+1/p'}, \\ A_2 &:= \sup_{x \in (0, \infty)} W^{1/q}(x) \left(\int_x^\infty (VV_k)^{p'} v \right)^{1/p'}, \\ A_3 &:= \sup_{x \in (0, \infty)} \left(\int_0^x k^q(x, s) w(s) ds \right)^{1/q} \left(\int_x^\infty (VV_1)^{p'} v \right)^{1/p'} \\ &\quad + \sup_{x \in (0, \infty)} W^{1/q}(x) \left(\int_x^\infty k^{p'}(s, x) (VV_1)^{p'}(s) v(s) ds \right)^{1/p'}; \end{aligned}$$

(iv) $1 < q < p < \infty$; в этом случае $C_1 \approx B_1 + B_2 + B_3$, где

$$B_1 := \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty V_k^q w \right)^{r/p} \left(\int_0^x V^{p'} v \right)^{r/p'} V_k^q(x) w(x) dx \right)^{1/r},$$

$$B_2 := \left(\int_0^\infty W^{r/p}(x) \left(\int_x^\infty (V V_k)^{p'} v \right)^{r/p'} w(x) dx \right)^{1/r},$$

$$B_3 := \left(\int_0^\infty \left(\int_0^x k^q(x, s) w(s) ds \right)^{r/q} \left(\int_x^\infty (V V_1)^{p'} v \right)^{r/q'} (V(x) V_1(x))^{p'} v(x) dx \right)^{1/r}$$

$$+ \left(\int_0^\infty W^{r/p}(x) \left(\int_x^\infty k^{p'}(s, x) (V(s) V_1(s))^{p'} v(s) ds \right)^{r/q'} w(x) dx \right)^{1/r};$$

(v) $q = 1 \leq p < \infty$; в этом случае $C_1 = C_7$, где

$$C_7 := \left(\int_0^\infty V^{p'}(x) v(x) dx \left(\int_x^\infty \frac{u(y) dy}{V^2(y)} \int_0^y k(y, s) w(s) ds \right)^{p'} \right)^{1/p'},$$

если $p > 1$, u

$$C_7 := \sup_{x \in (0, \infty)} V(x) \left(\int_x^\infty \frac{u(y) dy}{V^2(y)} \int_0^y k(y, s) w(s) ds \right),$$

если $p = 1$;

(vi) $0 < q < 1 < p < \infty$; в этом случае $C_1 \approx B_1 + B_2 + B_4$, где

$$B_4 := \sup_{x_k} \left(\sum_k \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} w \right)^{r/q} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} k^{p'}(x_k, s) (V(s) V_1(s))^{p'} v(s) ds \right)^{r/p'} \right)^{1/r}$$

$$+ \sup_{x_k} \left(\sum_k \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} k^{p'}(s, x_k) w(s) ds \right)^{r/q} \right.$$

$$\times \left. \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} (V(s) V_1(s))^{p'} v(s) ds \right)^{r/p'} \right)^{1/r}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Часть (i) следует из [66], а (ii) – это теорема 3.11. Применяя теорему 3.1 при $q = 1 \leq p < \infty$, мы сводим (3.46) к неравенству

$$\int_0^\infty h(s) V(s) \left(\int_s^\infty \frac{u(y)}{V^2(y)} \left(\int_0^y k(y, x) w(x) dx \right) dy \right) \leq C_1 \left(\int_0^\infty h^p v^{1-p} \right)^{1/p}, \quad (3.83)$$

$h \in \mathfrak{M}^+$. Тогда (v) следует по теореме 1.1. Из разложения

$$\int_x^\infty k(y, x) \frac{u(y)}{V^2(y)} \int_0^y h(z) V(z) dz dy$$

$$= \int_0^x h(z) V(z) dz \int_x^\infty k(y, x) \frac{u(y)}{V^2(y)} dy + \int_x^\infty k(y, x) \frac{u(y)}{V^2(y)} \int_x^y h(z) V(z) dz dy$$

$$= \int_0^x h(z) V(z) dz \int_x^\infty k(y, x) \frac{u(y)}{V^2(y)} dy + \int_x^\infty h(z) V(z) \int_z^\infty k(y, x) \frac{u(y)}{V^2(y)} dy dz$$

$$\approx \int_0^x h(z) V(z) dz \int_x^\infty k(y, x) \frac{u(y)}{V^2(y)} dy + \int_x^\infty h(z) V(z) \int_z^\infty k(y, z) \frac{u(y)}{V^2(y)} dy dz$$

$$+ \int_x^\infty k(z, x) h(z) V(z) \int_z^\infty \frac{u(y)}{V^2(y)} dy dz$$

вытекает, что для всех остальных случаев по теореме 3.1 неравенство (3.46) сводится к характеристизации следующих трех неравенств на конусе $\mathfrak{M}^+$:

$$\left(\int_0^\infty \left(V_k(x) \int_0^x hV \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C_{4,1} \left(\int_0^\infty h^p v^{1-p} \right)^{1/p}, \quad (3.84)$$

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty hV V_k \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C_{4,2} \left(\int_0^\infty h^p v^{1-p} \right)^{1/p}, \quad (3.85)$$

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty k(s, x) V(s) V_1(s) h(s) ds \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C_{4,3} \left(\int_0^\infty h^p v^{1-p} \right)^{1/p}, \quad (3.86)$$

где V_k и V_1 определены формулами (3.81) и (3.82) соответственно. Применяя теорему 1.2 и результаты работы [92], мы находим, что $C_{4,1} \approx A_1$ для $1 < p \leq q < \infty$ и $C_{4,1} \approx B_1$ для $0 < q < p < \infty$, $p > 1$ соответственно. Аналогично, $C_{4,2} \approx A_2$ для $1 < p \leq q < \infty$ и $C_{4,2} \approx B_2$ для $0 < q < p < \infty$, $p > 1$. Используя теорему 1.2, мы получаем, что $C_{4,3} \approx A_3$ при $1 < p \leq q < \infty$, $C_{4,3} \approx B_3$ при $1 < q < p < \infty$ и, по теореме 1.3, $C_{4,3} \approx B_4$ при $0 < q < 1 < p < \infty$. Теорема 3.17 доказана.

В частном случае $k(y, x) = 1$ дополнительно к теореме 3.12 мы имеем полностью интегральную характеристизацию неравенства (3.57).

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $0 < q, p < \infty$. Тогда неравенство (3.57) с наилучшей константой C_1 верно для всех $f \in \mathfrak{M}^1$, если и только если:

(i) $0 < q < p = 1$; в этом случае $C_1 \approx B_{1,0} + B_{2,0}$, где

$$B_{1,0} := \left(\int_0^\infty V^{q/(1-q)}(x) \left(\int_x^\infty V_1^q w \right)^{q/(1-q)} V_1^q(x) w(x) dx \right)^{(1-q)/q},$$

$$B_{2,0} := \left(\int_0^\infty \left[\sup_{t \in (x, \infty)} V(t) V_1(t) \right]^{q/(1-q)} W^{q/(1-q)}(x) w(x) dx \right)^{(1-q)/q};$$

(ii) $1 < p \leq q < \infty$; в этом случае $C_1 \approx A_{1,0} + A_{2,0}$, где

$$A_{1,0} := \sup_{x \in (0, \infty)} \left(\int_x^\infty V_1^q w \right)^{1/q} [V(x)]^{1+1/p'},$$

$$A_{2,0} := \sup_{x \in (0, \infty)} W^{1/q}(x) \left(\int_x^\infty (V V_1)^{p'} v \right)^{1/p'};$$

(iii) $1 < q < p < \infty$; в этом случае $C_1 \approx \mathbf{B}_{1,0} + \mathbf{B}_{2,0}$, где

$$\mathbf{B}_{1,0} := \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty V_1^q w \right)^{r/p} [V(x)]^{r+r/p'} V_1^q(x) w(x) dx \right)^{1/r},$$

$$\mathbf{B}_{2,0} := \left(\int_0^\infty W^{r/p}(x) \left(\int_x^\infty (V V_1)^{p'} v \right)^{r/p'} w(x) dx \right)^{1/r};$$

(iv) $q = 1 \leq p < \infty$; в этом случае $C_1 = C_{7,0}$, где

$$C_{7,0} := \left(\int_0^\infty V^{p'}(x)v(x) dx \left(\int_x^\infty \frac{W(y)u(y) dy}{V^2(y)} \right)^{p'} \right)^{1/p'},$$

если $p > 1$, и с обычной модификацией для $p = 1$;

(v) $0 < q < 1 < p < \infty$; в этом случае $C_1 \approx \mathbf{B}_{1,0} + \mathbf{B}_{2,0}$.

Для формулировки результатов, двойственных к двум предыдущим утверждениям, введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} V_*(t) &:= \int_t^\infty v, & W_*(t) &:= \int_t^\infty w, & U_k^*(x, y) &:= \int_y^x k(x, y)u(z) dz, \\ V_k^*(x) &:= \int_0^x k(x, y) \frac{u(y)}{V_*^2(y)} dy, & V_1^*(x) &:= \int_0^x \frac{u(y)}{V_*^2(y)} dy. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3.18. Пусть $0 < q, p < \infty$ и $k(x, y) \geq 0$ — ядро Ойнарова. Тогда неравенство

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x k(x, y)f(y)u(y) dy \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq \mathcal{C}_1 \left(\int_0^\infty f^p v \right)^{1/p}$$

с наилучшей константой $\mathcal{C}_1$ имеет место для всех $f \in \mathfrak{M}^\uparrow$, если и только если:

(i) $0 < p \leq 1, p \leq q < \infty$; в этом случае

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 := \sup_{x \in (0, \infty)} \left(\int_x^\infty [U_k^*(y, x)]^q w(y) dy \right)^{1/q} V_*^{-1/p}(x) < \infty;$$

(ii) $0 < q < p \leq 1$; в этом случае

$$\mathcal{C}_1 \approx \mathcal{C}_3 := \left(\sup_{\{x_k\}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} [U_k^*((y, x_k))]^q w(y) dy \right)^{r/q} V_*^{-r/p}(x_k) \right)^{1/r} < \infty;$$

(iii) $1 < p \leq q < \infty$; в этом случае $\mathcal{C}_1 \approx \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &:= \sup_{x \in (0, \infty)} \left(\int_0^x [V_k^*]^q w \right)^{1/q} [V_*(x)]^{1+1/p'}, \\ \mathcal{A}_2 &:= \sup_{x \in (0, \infty)} W_*^{1/q}(x) \left(\int_0^x (V_* V_k^*)^{p'} v \right)^{1/p'}, \\ \mathcal{A}_3 &:= \sup_{x \in (0, \infty)} \left(\int_x^\infty k^q(s, x) w(s) ds \right)^{1/q} \left(\int_0^x (V_* V_1^*)^{p'} v \right)^{1/p'} \\ &\quad + \sup_{x \in (0, \infty)} W_*^{1/q}(x) \left(\int_0^x k^{p'}(x, s) (V_* V_1^*)^{p'}(s) v(s) ds \right)^{1/p'}; \end{aligned}$$

(iv) $1 < q < p < \infty$; в этом случае $\mathcal{C}_1 \approx \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 + \mathcal{B}_3$, где

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1 &:= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^x [V_k^*]^q w \right)^{r/p} [V_*(x)]^{r+r/p'} [V_k^*]^q(x) w(x) dx \right)^{1/r}, \\ \mathcal{B}_2 &:= \left(\int_0^\infty W_*^{r/p}(x) \left(\int_0^x (V_* V_k^*)^{p'} v \right)^{r/p'} w(x) dx \right)^{1/r}, \\ \mathcal{B}_3 &:= \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty k^q(s, x) w(s) ds \right)^{r/q} \left(\int_0^x (V_* V_1^*)^{p'} v \right)^{r/q'} (V_*(x) V_1^*(x))^{p'} v(x) dx \right)^{1/r} \\ &\quad + \left(\int_0^\infty W_*^{r/p}(x) \left(\int_0^x k^{p'}(x, s) (V_*(s) V_1^*(s))^{p'} v(s) ds \right)^{r/q'} w(x) dx \right)^{1/r};\end{aligned}$$

(v) $q = 1 \leq p < \infty$; в этом случае $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_7$, где

$$\mathcal{C}_7 := \left(\int_0^\infty V_*^{p'}(x) v(x) dx \left(\int_0^x \frac{u(y) dy}{V_*^2(y)} \int_y^\infty k(s, y) w(s) ds \right)^{p'} \right)^{1/p'},$$

если $p > 1$, и

$$\mathcal{C}_7 := \sup_{x \in (0, \infty)} V_*(x) \left(\int_0^x \frac{u(y) dy}{V_*^2(y)} \int_y^\infty k(s, y) w(s) ds \right)$$

при $p = 1$;

(vi) $0 < q < 1 < p < \infty$; в этом случае $\mathcal{C}_1 \approx \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 + \mathcal{B}_4$, где

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_4 &:= \sup_{x_k} \left(\sum_k \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} w \right)^{r/q} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} k^{p'}(s, x_k) (V_*(s) V_1^*(s))^{p'} v(s) ds \right)^{r/p'} \right)^{1/r} \\ &\quad + \sup_{x_k} \left(\sum_k \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} k^{p'}(x_k, s) w(s) ds \right)^{r/q} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} (V_*(s) V_1^*(s))^{p'} v(s) ds \right)^{r/p'} \right)^{1/r}.\end{aligned}$$

При $k(y, x) = 1$ в дополнение к теореме 3.13 мы имеем полностью интегральную характеристику неравенства (3.79).

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть $0 < q, p < \infty$. Тогда неравенство

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x f(y) u(y) dy \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C_{1,0}^* \left(\int_0^\infty f^p v \right)^{1/p}$$

с наилучшей константой $C_{1,0}^*$ выполнено для всех $f \in \mathfrak{M}^\dagger$, если и только если:

(i) $0 < q < p = 1$; в этом случае $C_{1,0}^* \approx B_{1,0}^* + B_{2,0}^*$, где

$$\begin{aligned}B_{1,0}^* &:= \left(\int_0^\infty V_*^{q/(1-q)}(x) \left(\int_0^x [V_1^*]^q w \right)^{q/(1-q)} [V_1^*]^q(x) w(x) dx \right)^{(1-q)/q}, \\ B_{2,0}^* &:= \left(\int_0^\infty \left[\sup_{t \in (0, x)} V_*(t) V_1^*(t) \right]^{q/(1-q)} W_*^{q/(1-q)}(x) w(x) dx \right)^{(1-q)/q};\end{aligned}$$

(ii) $1 < p \leq q < \infty$; в этом случае $C_{1,0}^* \approx A_{1,0}^* + A_{2,0}^*$, где

$$A_{1,0}^* := \sup_{x \in (0, \infty)} \left(\int_0^x [V_1^*]^q w \right)^{1/q} [V_*(x)]^{1+1/p'},$$

$$A_{2,0}^* := \sup_{x \in (0, \infty)} W_*^{1/q}(x) \left(\int_0^x (V_* V_1^*)^{p'} v \right)^{1/p'};$$

(iii) $1 < q < p < \infty$; в этом случае $C_{1,0}^* \approx \mathbf{B}_{1,0}^* + \mathbf{B}_{2,0}^*$, где

$$\mathbf{B}_{1,0}^* := \left(\int_0^\infty \left(\int_0^x [V_1^*]^q w \right)^{r/p} [V_*(x)]^{r+r/p'} [V_1^*]^q(x) w(x) dx \right)^{1/r},$$

$$\mathbf{B}_{2,0}^* := \left(\int_0^\infty W_*^{r/p}(x) \left(\int_0^x (V_* V_1^*)^{p'} v \right)^{r/p'} w(x) dx \right)^{1/r};$$

(iv) $q = 1 \leq p < \infty$; в этом случае $C_{1,0}^* = C_{7,0}^*$, где

$$C_{7,0}^* := \left(\int_0^\infty V_*^{p'}(x) v(x) dx \left(\int_0^x \frac{W_*(y) u(y) dy}{V_*^2(y)} \right)^{p'} \right)^{1/p'},$$

если $p > 1$, с обычной модификацией для $p = 1$;

(v) $0 < q < 1 < p < \infty$; в этом случае $C_{1,0}^* \approx \mathbf{B}_{1,0}^* + \mathbf{B}_{2,0}^*$.

Пусть $k(x, y) \geq 0$ – ядро Ойнарова. Одним из любопытных приложений редукционных теорем (в обратном направлении!) является нахождение интегрального критерия для неравенств

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x k(x, y) h(y) dy \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty h^p \sigma \right)^{1/p}, \quad h \in \mathfrak{M}^+, \quad (3.87)$$

и

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty k(y, x) h(y) dy \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty h^p \sigma \right)^{1/p}, \quad h \in \mathfrak{M}^+, \quad (3.88)$$

при $0 < q < 1 \leq p < \infty$ в случае

$$k(x, y) = \int_y^x u(s) ds =: U(x, y).$$

При этом ответ получается проще, чем при применении теорем 1.3 и 1.4. Мы продемонстрируем решение для (3.88), для (3.87) рассуждения аналогичны. Введем обозначения

$$S(x) := \int_x^\infty \sigma^{1-p'}, \quad 1 < p < \infty, \quad v_\sigma(x) := [S(x)]^{-p} [\sigma(x)]^{1-p'},$$

$$V_\sigma(x) := \int_0^x v_\sigma, \quad V_{1,\sigma}(x) := \int_x^\infty S^{2(p-1)} u.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть $0 < q < 1 \leq p < \infty$. Тогда неравенство

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty U(y, x) h(y) dy \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty h^p \sigma \right)^{1/p}, \quad h \in \mathfrak{M}^+, \quad (3.89)$$

верно, если и только если:

(i) $0 < q < 1 < p < \infty$; в этом случае $C \approx B_{1,1} + B_{2,1}$, где

$$B_{1,1} := \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty [V_{1,\sigma}]^q w \right)^{r/p} [S(x)]^{(1-2p)r/p'} [V_{1,\sigma}]^q(x) w(x) dx \right)^{1/r},$$

$$B_{2,1} := \left(\int_0^\infty W^{r/p}(x) \left(\int_0^x (V_\sigma V_{1,\sigma})^{p'} v_\sigma \right)^{r/p'} w(x) dx \right)^{1/r};$$

(ii) $0 < q < 1 = p$; в этом случае $C \approx B_{1,2} + B_{2,2}$, где

$$B_{1,2} := \left(\int_0^\infty V_\sigma^{q/(1-q)}(x) \left(\int_0^x [V_{1,\sigma}]^q w \right)^{q/(1-q)} [V_{1,\sigma}]^q(x) w(x) dx \right)^{(1-q)/q},$$

$$B_{2,2} := \left(\int_0^\infty \left[\sup_{t \in (x, \infty)} V_\sigma(t) V_{1,\sigma}(t) \right]^{q/(1-q)} W^{q/(1-q)}(x) w(x) dx \right)^{(1-q)/q}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с утверждения (i). Заметим, что

$$V_\sigma(x) = \int_0^x [S(y)]^{-p} [\sigma(y)]^{1-p'} dy \approx ([S(x)]^{1-p} - [S(0)]^{1-p})$$

и

$$[V_\sigma(x)]^p [v_\sigma(x)]^{1-p} = ([S(x)]^{1-p} - [S(0)]^{1-p})^p [S(x)]^{p(p-1)} \sigma(x) \leq \sigma(x).$$

По теореме 3.1 неравенство

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty U(y, x) h(y) dy \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C_1 \left(\int_0^\infty h^p V_\sigma^p v_\sigma^{1-p} \right)^{1/p} \quad (3.90)$$

эквивалентно неравенству

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty u(y) f(y) dy \right)^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C_2 \left(\int_0^\infty f^p v_\sigma \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow, \quad (3.91)$$

характеризованному следствием 3.1 так, что

$$C_2 \approx B_{1,1} + B_{2,1}, \quad 0 < q < 1 < p < \infty;$$

$$C_2 \approx B_{1,2} + B_{2,2}, \quad 0 < q < 1 = p.$$

Таким образом,

$$C \ll B_{1,1} + B_{2,1}, \quad 0 < q < 1 < p < \infty;$$

$$C \ll B_{1,2} + B_{2,2}, \quad 0 < q < 1 = p.$$

Для доказательства обратных неравенств предположим, что (3.89) верно с константой $C \in (0, \infty)$. Тогда (3.89) с той же константой C также верно для $\sigma_\varepsilon :=$

$\sigma + \varepsilon$, $w_\delta := w\chi_{(\delta, 1/\delta)}$ вместо σ и w соответственно, где $\varepsilon > 0$ и $\delta \in (0, 1)$. Для этих весовых функций $S(0) = \infty$ и, следовательно, $B_{i,j}^{\varepsilon,\delta} \ll C$, где $B_{i,j}^{\varepsilon,\delta} < \infty$ — это константа B с модифицированными весами. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости получаем $\lim_{\delta \rightarrow 0} (\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_{i,j}^{\varepsilon,\delta}) = B_{i,j}$, откуда следует обратное неравенство.

Случай (ii) доказывается аналогично.

Список литературы

- [1] M. Ariño, B. Muckenhoupt, “Maximal functions on classical Lorentz spaces and Hardy’s inequality with weights for nonincreasing functions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **320**:2 (1990), 727–735.
- [2] G. Bennett, K.-G. Grosse-Erdmann, “Weighted Hardy inequalities for decreasing sequences and functions”, *Math. Ann.*, **334**:3 (2006), 489–531.
- [3] Е. И. Бережной, “Точные оценки операторов на конусах в идеальных пространствах”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям*. Часть 16, Тр. МИАН, **204**, Наука, М., 1993, 3–34; англ. пер.: Е. I. Berezhnoi, “Sharp estimates for operators on cones in ideal spaces”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **204**:3 (1994), 1–25.
- [4] S. Bloom, R. Kerman, “Weighted norm inequalities for operators of Hardy type”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **113**:1 (1991), 135–141.
- [5] M. Sh. Braverman, “On a class of operators”, *J. London Math. Soc.* (2), **47**:1 (1993), 119–128.
- [6] В. И. Буренков, М. Л. Гольдман, “Вычисление нормы положительного оператора на конусе монотонных функций”, *Теория функций и дифференциальные уравнения*, Сборник статей. К девяностолетию со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского, Тр. МИАН, **210**, Наука, М., 1995, 65–89; англ. пер.: V. I. Burenkov, M. L. Goldman, “Calculation of the norm of a positive operator on the cone of monotone functions”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **210** (1995), 47–65.
- [7] M. J. Carro, A. Gogatishvili, J. Martin, L. Pick, “Function properties of rearrangement invariant spaces defined in terms of oscillations”, *J. Funct. Anal.*, **229**:2 (2005), 375–404.
- [8] M. Carro, A. Gogatishvili, J. Martin, L. Pick, “Weighted inequalities involving two Hardy operators with applications to embeddings of function spaces”, *J. Operator Theory*, **59**:2 (2008), 309–332.
- [9] M. Carro, L. Pick, J. Soria, V. D. Stepanov, “On embeddings between classical Lorentz spaces”, *Math. Inequal. Appl.*, **4**:3 (2001), 397–428.
- [10] M. J. Carro, J. A. Raposo, J. Soria, *Recent developments in the theory of Lorentz spaces and weighted inequalities*, Mem. Amer. Math. Soc., **187**, № 877, 2007, xii+128 pp.
- [11] M. Carro, J. Soria, “Weighted Lorentz spaces and the Hardy operator”, *J. Funct. Anal.*, **112**:2 (1993), 480–494.
- [12] M. Carro, J. Soria, “Boundedness of some integral operators”, *Canad. J. Math.*, **45** (1993), 1155–1166.
- [13] M. Carro, J. Soria, “The Hardy–Littlewood maximal function and weighted Lorentz spaces”, *J. London Math. Soc.* (2), **55**:1 (1997), 146–158.
- [14] P. Drábek, H. P. Heinig, A. Kufner, “Weighted modular inequalities for monotone functions”, *J. Inequal. Appl.*, **1**:2 (1997), 183–197.
- [15] D. E. Edmunds, W. D. Evans, *Hardy operators, function spaces and embeddings*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin, 2004, xii+326 pp.

- [16] D. E. Edmunds, V. D. Stepanov, "The measure of non-compactness and approximation numbers of certain Volterra integral operators", *Math. Ann.*, **298**:1 (1994), 41–66.
- [17] D. E. Edmunds, V. D. Stepanov, "On the singular numbers of certain Volterra integral operators", *J. Funct. Anal.*, **134**:1 (1995), 222–246.
- [18] W. D. Evans, A. Gogatishvili, B. Opic, "The reverse Hardy inequality with measures", *Math. Inequal. Appl.*, **11**:1 (2008), 43–74.
- [19] И. М. Глазман, *Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов*, Физматгиз, М., 1963, 339 с.; англ. пер.: I. M. Glazman, *Direct methods of qualitative spectral analysis of singular differential operators*, Izrael Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1965; Daniel Davey & Co., Inc., New York, 1966, ix+234 pp.
- [20] A. Gogatishvili, M. Johansson, C. A. Okpoti, L.-E. Persson, "Characterisation of embeddings in Lorentz spaces", *Bull. Austral. Math. Soc.*, **76**:1 (2007), 69–92.
- [21] A. Gogatishvili, A. Kufner, L.-E. Persson, A. Wedestig, "An equivalence theorem for integral conditions related to Hardy's inequality", *Real Anal. Exchange*, **29**:2 (2003/04), 867–880.
- [22] A. Gogatishvili, K. Kuliev, G. Kulieva, "Some conditions characterizing the 'reverse' Hardy inequality", *Real Anal. Exchange*, **33**:1 (2008), 249–258.
- [23] A. Gogatishvili, B. Opic, L. Pick, "Weighted inequalities for Hardy-type operators involving suprema", *Collect. Math.*, **57**:3 (2006), 227–255.
- [24] A. Gogatishvili, L. Pick, "Duality principles and reduction theorems", *Math. Inequal. Appl.*, **3**:4 (2000), 539–558.
- [25] A. Gogatishvili, L. Pick, "Discretization and anti-discretization of rearrangement-invariant norms", *Publ. Mat.*, **47**:2 (2003), 311–358.
- [26] A. Gogatishvili, L. Pick, "Embeddings and duality theorem for weak classical Lorentz spaces", *Canad. Math. Bull.*, **49**:1 (2006), 82–95.
- [27] A. Gogatishvili, L. Pick, "A reduction theorem for supremum operators", *J. Comput. Appl. Math.*, **208**:1 (2007), 270–279.
- [28] А. Гогатишвили, В. Д. Степанов, "Об операторах на конусах монотонных функций", *Докл. РАН*, **445**:6 (2012), 618–621; англ. пер.: A. Gogatishvili, V. D. Stepanov, "Operators on cones of monotone functions", *Dokl. Math.*, **86**:1 (2012), 562–565.
- [29] А. Гогатишвили, В. Д. Степанов, "Об интегральных операторах на конусах монотонных функций", *Докл. РАН*, **446**:4 (2012), 367–370; англ. пер.: A. Gogatishvili, V. D. Stepanov, "Integral operators on cones of monotone functions", *Dokl. Math.*, **86**:2 (2012), 650–653.
- [30] A. Gogatishvili, V. D. Stepanov, "Reduction theorems for operators on the cones of monotone functions", *J. Math. Anal. Appl.*, **405**:1 (2013), 156–172.
- [31] М. Л. Гольдман, "Точные оценки норм операторов типа Харди на конусах квази-монотонных функций", *Функциональные пространства, гармонический анализ, дифференциальные уравнения*, Сборник статей. К 95-летию со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского, Тр. МИАН, **232**, Наука, М., 2001, 115–143; англ. пер.: M. L. Gol'dman, "Sharp estimates for the norms of Hardy-type operators on the cones of quasimonotone functions", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **232** (2001), 109–137.
- [32] M. L. Goldman, "On equivalent criteria for the boundedness of Hardy type operators on the cone of decreasing functions", *Anal. Math.*, **37**:2 (2011), 83–102.
- [33] M. L. Goldman, "Order-sharp estimates for Hardy-type operators on cones of quasimonotone functions", *Eurasian Math. J.*, **2**:3 (2011), 143–146.
- [34] M. L. Goldman, "Order-sharp estimates for Hardy-type operators on the cones of functions with properties of monotonicity", *Eurasian Math. J.*, **3**:2 (2011), 53–84.
- [35] M. L. Gol'dman, H. P. Heinig, V. D. Stepanov, "On the principle of duality in Lorentz spaces", *Canad. J. Math.*, **48**:5 (1996), 959–979.

- [36] М. Л. Гольдман, М. В. Сорокина, “Трехвесовые неравенства типа Харди на конусе квазимонотонных функций”, *Докл. РАН*, **401**:3 (2005), 301–305; англ. пер.: M. L. Gol’dman, M. V. Sorokina, “Three-weighted Hardy-type inequalities on the cone of quasimonotone functions”, *Dokl. Math.*, **71**:2 (2005), 209–213.
- [37] М. Л. Гольдман, В. Д. Степанов, Г. П. Хайниг, “О принципе двойственности в пространствах Лоренца”, *Докл. РАН*, **344**:6 (1995), 740–744; англ. пер.: M. L. Gol’dman, V. D. Stepanov, H. P. Heinig, “On the principle of duality in Lorentz spaces”, *Dokl. Math.*, **52**:2 (1995), 264–267.
- [38] П. Халмош, В. Сандер, *Ограниченные интегральные операторы в пространствах L^2* , Наука, М., 1985, 159 с.; пер. с англ.: P. R. Halmos, V. S. Sunder, *Bounded integral operators on L^2 spaces*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, **96**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1978, xv+132 pp.
- [39] I. Halperin, “Function spaces”, *Canad. J. Math.*, **5** (1953), 273–288.
- [40] Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтлвуд, Г. Полиа, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948, 456 с.; пер. с англ.: G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, 1934, xii+314 pp.
- [41] H. P. Heinig, A. Kufner, “Hardy operators on monotone functions and sequences in Orlicz spaces”, *J. London Math. Soc.* (2), **53**:2 (1996), 256–270.
- [42] H. P. Heinig, Q. Lai, “Weighted modular inequalities for Hardy-type operators on monotone functions”, *JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.*, **1**:1 (2000), Article 10, 25 pp. (electronic).
- [43] H. P. Heinig, L. Maligranda, “Weighted inequalities for monotone and concave functions”, *Studia Math.*, **116**:2 (1995), 133–165.
- [44] H. P. Heinig, V. D. Stepanov, “Weighted Hardy inequalities for increasing functions”, *Canad. J. Math.*, **45**:1 (1993), 104–116.
- [45] M. Johansson, V. D. Stepanov, E. P. Ushakova, “Hardy inequality with three measures on monotone functions”, *Math. Inequal. Appl.*, **11**:3 (2008), 393–413.
- [46] W. B. Jurkat, G. Sampson, “The complete solution to the (L^p, L^q) mapping problem for a class of oscillating kernels”, *Indiana Univ. Math. J.*, **30**:3 (1981), 403–413.
- [47] A. Kamińska, M. Mastyło, “Abstract duality Sawyer formula and its applications”, *Monatsh. Math.*, **151**:3 (2007), 223–245.
- [48] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, 3-е изд., Наука, М., 1984, 752 с.; англ. пер. 2-го изд.: L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Functional analysis*, Pergamon Press, Oxford-Elmsford, NY, 1982, xiv+589 pp.
- [49] В. Б. Коротков, *Интегральные операторы*, Наука, Новосибирск, 1983, 224 с.
- [50] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*, Наука, М., 1966, 499 с.; англ. пер.: M. A. Krasnosel’skiĭ, P. P. Zabreiko, E. I. Pustyl’nik, P. E. Sobolevskii, *Integral operators in spaces of summable functions*, Monographs and Textbooks on Mechanics of Solids and Fluids, Mechanics: Analysis, Noordhoff International Publishing, Leiden, 1976, xv+520 pp.
- [51] A. Kufner, L. Maligranda, L.-E. Persson, *The Hardy inequality: About its history and some related results*, Vydavatelský Servis, Plzeň, 2007, 162 pp.
- [52] A. Kufner, L.-E. Persson, *Weighted inequalities of Hardy type*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2003, xviii+357 pp.
- [53] Sh. Lai, “Weighted norm inequalities for general operators on monotone functions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **340**:2 (1993), 811–836.
- [54] Q. Lai, “Weighted modular inequalities for Hardy-type operators”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **79**:3 (1999), 649–672.
- [55] E. Liflyand, S. Tikhonov, “A concept of general monotonicity and applications”, *Math. Nachr.*, **284**:8-9 (2011), 1083–1098.

- [56] M. A. Lifshits, W. Linde, *Approximation and entropy numbers of Volterra operators with application to Brownian motion*, Mem. Amer. Math. Soc., **157**, № 745, 2002, viii+87 pp.
- [57] E. N. Lomakina, V. D. Stepanov, “On the compactness and approximation numbers of Hardy-type integral operators in Lorentz spaces”, *J. London Math. Soc.* (2), **53**:2 (1996), 369–383.
- [58] E. N. Lomakina, V. D. Stepanov, “On the Hardy-type integral operators in Banach function spaces”, *Publ. Mat.*, **42**:1 (1998), 165–194.
- [59] E. N. Lomakina, V. D. Stepanov, “On asymptotic behaviour of the approximation numbers and estimates of Schatten–von Neumann norms of the Hardy-type integral operators”, *Function spaces and applications* (Delhi, 1997), Narosa, New Delhi, 2000, 153–187.
- [60] Е. Н. Ломакина, В. Д. Степанов, “Асимптотические оценки аппроксимативных и энтропийных чисел одновесового оператора Римана–Лиувилля”, *Матем. тр.*, **9**:1 (2006), 52–100; англ. пер: E. N. Lomakina, V. D. Stepanov, “Asymptotic estimates for the approximation and entropy numbers of a one-weight Riemann–Liouville operator”, *Siberian Adv. Math.*, **17**:1 (2007), 1–36.
- [61] M. Lorente, “A characterization of two weight norm inequalities for one-sided operators of fractional type”, *Canad. J. Math.*, **49**:5 (1997), 1010–1033.
- [62] L. Maligranda, “Weighted inequalities for quasi-monotone functions”, *J. London Math. Soc.* (2), **57**:2 (1998), 363–370.
- [63] P. J. Martin-Reyes, E. T. Sawyer, “Weighted inequalities for Riemann–Liouville fractional integrals of order one and greater”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **106**:3 (1989), 727–733.
- [64] В. Г. Мазья, *Пространства С.Л. Соболева*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1985, 416 с.; англ. пер.: V. G. Mazya, *Sobolev spaces*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, 1985, xix+486 pp.
- [65] A. Meskhi, “Solution of some weight problems for the Riemann–Liouville and Weyl operators”, *Georgian Math. J.*, **5**:6 (1998), 565–574.
- [66] E. A. Myasnikov, L.-E. Persson, V. D. Stepanov, “On the best constants in certain integral inequalities for monotone functions”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **59**:3-4 (1994), 613–624.
- [67] C. J. Neugebauer, “Weighted norm inequalities for averaging operators of monotone functions”, *Publ. Mat.*, **35**:2 (1991), 429–447.
- [68] C. J. Neugebauer, “Some classical operators on Lorentz space”, *Forum Math.*, **4**:2 (1992), 135–146.
- [69] J. Newman, M. Solomyak, “Two-sided estimates on singular values for a class of integral operators on the semi-axis”, *Integral Equations Operator Theory*, **20**:3 (1994), 335–349.
- [70] E. Nursultanov, S. Tikhonov, “Convolution inequalities in Lorentz spaces”, *J. Fourier Anal. Appl.*, **17**:3 (2011), 486–505.
- [71] Р. Ойнаров, “Двусторонние оценки нормы некоторых классов интегральных операторов”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Часть 16*, Тр. МИАН, **204**, Наука, М., 1993, 240–250; англ. пер.: R. Oinarov, “Two-sided estimates for the norm of some classes of integral operators”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **204**:3 (1994), 205–214.
- [72] G. O. Okikiolu, *Aspects of the theory of bounded integral operators in L^p spaces*, Academic Press, London–New York, 1971, ix+522 pp.
- [73] L.-E. Persson, O. V. Popova, V. D. Stepanov, “Two-sided Hardy-type inequalities for monotone functions”, *Complex Var. Elliptic Equ.*, **55**:8-10 (2010), 973–989.
- [74] L.-E. Persson, D. Prokhorov, “Integral inequalities for some weighted geometric mean operators with variable limits”, *Arch. Ineq. Appl.*, **2**:4 (2004), 475–482.

- [75] L.-E. Persson, V. D. Stepanov, “Weighted integral inequalities with the geometric mean operator”, *J. Inequal. Appl.*, **7**:5 (2002), 727–746.
- [76] L. E. Persson, V. D. Stepanov, E. P. Ushakova, “Equivalence of Hardy-type inequalities with general measures on the cones of non-negative respective non-increasing functions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **134**:8 (2006), 2363–2372.
- [77] L.-E. Persson, V. D. Stepanov, P. Wall, “Some scales of equivalent weight characterizations of Hardy’s inequality: the case $q < p$ ”, *Math. Inequal. Appl.*, **10**:2 (2007), 267–279.
- [78] О. В. Попова, “Неравенства типа Харди на конусах монотонных функций”, *Сиб. матем. журн.*, **53**:1 (2012), 187–204; англ. пер.: O. V. Popova, “Hardy-type inequalities on the cones of monotone functions”, *Sib. Math. J.*, **53**:1 (2012), 152–167.
- [79] D. V. Prokhorov, “On the boundedness and compactness of a class of integral operators”, *J. London Math. Soc.* (2), **61**:2 (2000), 617–628.
- [80] D. V. Prokhorov, “Weighted Hardy’s inequalities for negative indices”, *Publ. Mat.*, **48**:2 (2004), 423–443.
- [81] Д. В. Прохоров, “Неравенство Харди с тремя мерами”, *Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ*, Сборник статей, Тр. МИАН, **255**, Наука, М., 2006, 233–245; англ. пер.: D. V. Prokhorov, “Hardy’s inequality with three measures”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **255**:1 (2006), 221–233.
- [82] D. V. Prokhorov, “Inequalities of Hardy type for a class of integral operators with measures”, *Anal. Math.*, **33**:3 (2007), 199–225.
- [83] D. V. Prokhorov, “Inequalities for Riemann–Liouville operator involving suprema”, *Collect. Math.*, **61**:3 (2010), 263–276.
- [84] D. V. Prokhorov, “Lorentz norm inequalities for the Hardy operator involving suprema”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **140**:5 (2012), 1585–1592.
- [85] D. V. Prokhorov, *A new characterization of the Hardy-type weighted norm inequalities*, Res. Rep. 2013/192, Computing Centre FEB RAS, Khabarovsk, 2013, 11 pp.
- [86] Д. В. Прохоров, В. Д. Степанов, “Весовые оценки операторов Римана–Лиувилля и приложения”, *Функциональные пространства, приближения, дифференциальные уравнения*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Олега Владимировича Бесова, Тр. МИАН, **243**, Наука, М., 2003, 289–312; англ. пер.: D. V. Prokhorov, V. D. Stepanov, “Weighted estimates of Riemann–Liouville operators and applications”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **243**:4 (2003), 278–301.
- [87] E. Sawyer, “Boundedness of classical operators on classical Lorentz spaces”, *Studia Math.*, **96**:2 (1990), 145–158.
- [88] G. Sinnamon, “Spaces defined by the level functions and their duals”, *Studia Math.*, **111**:1 (1994), 19–52.
- [89] G. Sinnamon, “Embeddings of concave functions and duals of Lorentz spaces”, *Publ. Mat.*, **46**:2 (2002), 489–515.
- [90] G. Sinnamon, “Transferring monotonicity in weighted norm inequalities”, *Collect. Math.*, **54**:2 (2003), 181–216.
- [91] G. Sinnamon, “Hardy’s inequality and monotonicity”, *Function spaces, differential operators and nonlinear analysis*, Proc. Conf. (Milovy, Czech Republ., May 28–June 2, 2004), eds. P. Drábec, J. Rákosník, Math. Inst. Acad. Sci. Czech Republ., Prague, 2005, 292–310.
- [92] G. Sinnamon, V. D. Stepanov, “The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$ ”, *J. London Math. Soc.* (2), **54**:1 (1996), 89–101.
- [93] M. Solomyak, “Estimates for the approximation numbers of the weighted Riemann–Liouville operator in the spaces L_p ”, *Complex analysis, operators, and related topics*, Oper. Theory Adv. Appl., **113**, Birkhäuser, Basel, 2000, 371–383.

- [94] J. Soria, “Lorentz spaces of weak-type”, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **49**:1 (1998), 93–103.
- [95] V. D. Stepanov, *Two-weighted estimates for Riemann–Liouville integrals*, Rep. № 39, Math. Inst. Czechoslovak Acad. Sci., Prague, 1988, 28 pp.
- [96] В. Д. Степанов, “Об одном весовом неравенстве типа Харди для производных высших порядков”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Часть 13*, Сборник работ, Тр. МИАН СССР, **187**, Наука, М., 1989, 178–190; англ. пер.: V. D. Stepanov, “On a weighted inequality of Hardy type for derivatives of higher order”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **187**:3 (1990), 205–220.
- [97] В. Д. Степанов, “О весовых неравенствах типа Харди для дробных интегралов Римана–Лиувилля”, *Сиб. матем. журн.*, **31**:3 (1990), 186–197; англ. пер.: V. D. Stepanov, “Weight inequalities of Hardy type for fractional Riemann–Liouville integrals”, *Sib. Math. J.*, **31**:3 (1990), 513–522.
- [98] В. Д. Степанов, “Двухвесовые оценки для интегралов Римана–Лиувилля”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:3 (1990), 645–656; англ. пер.: V. D. Stepanov, “Two-weighted estimates of Riemann–Liouville integrals”, *Math. USSR-Izv.*, **36**:3 (1991), 669–681.
- [99] В. Д. Степанов, “Об ограниченности линейных интегральных операторов на классе монотонных функций”, *Сиб. матем. журн.*, **32**:3 (1991), 222–224; англ. пер.: V. D. Stepanov, “Boundedness of linear integral operators on a class of monotone functions”, *Sib. Math. J.*, **32**:3 (1991), 540–542.
- [100] V. D. Stepanov, “Weighted inequalities for a class of Volterra convolution operators”, *J. London Math. Soc. (2)*, **45**:2 (1992), 232–242.
- [101] В. Д. Степанов, Д. Э. Эдмундс, “О мере некомпактности и аппроксимативных числах одного класса вольтерровских интегральных операторов”, *Докл. РАН*, **330**:6 (1993), 700–703; англ. пер.: V. D. Stepanov, D. E. Edmunds, “On the measure of noncompactness and approximation numbers of a class of Volterra integral operators”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **47**:3 (1993), 618–623.
- [102] В. Д. Степанов, “О весовых оценках одного класса интегральных операторов”, *Сиб. матем. журн.*, **34**:4 (1993), 184–196; англ. пер.: V. D. Stepanov, “On weighted estimates for a class of integral operators”, *Sib. Math. J.*, **34**:4 (1993), 755–766.
- [103] V. D. Stepanov, “The weighted Hardy’s inequality for nonincreasing functions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **338**:1 (1993), 173–186.
- [104] V. D. Stepanov, “Integral operators on the cone of monotone functions”, *J. London Math. Soc. (2)*, **48**:3 (1993), 465–487.
- [105] В. Д. Степанов, “О сингулярных числах одного класса интегральных операторов”, *Докл. РАН*, **336**:4 (1994), 457–458; англ. пер.: V. D. Stepanov, “On the singular numbers of a class of integral operators”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **49**:3 (1994), 545–547.
- [106] V. D. Stepanov, “Weighted norm inequalities of Hardy type for a class of integral operators”, *J. London Math. Soc. (2)*, **50**:1 (1994), 105–120.
- [107] V. D. Stepanov, “Weighted norm inequalities for integral operators and related topics”, *Nonlinear analysis, function spaces and applications*, v. 5, Proceedings of Spring School (Prague, 1994), Prometheus, Prague, 1994, 139–175.
- [108] В. Д. Степанов, *Некоторые вопросы теории интегральных операторов свертки*, Дальнаука, Владивосток, 2000, 228 с.
- [109] V. D. Stepanov, “On the lower bounds for Schatten–von Neumann norms of certain Volterra integral operators”, *J. London Math. Soc. (2)*, **61**:3 (2000), 905–922.
- [110] V. D. Stepanov, “On a supremum operator”, *Spectral theory, function spaces and inequalities*, Oper. Theory Adv. Appl., **219**, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2012, 233–242.

- [111] В.Д. Степанов, С.Ю. Тихонов, “Двухвесовые неравенства для преобразования Гильберта на монотонных функциях”, *Докл. РАН*, **437**:5 (2011), 606–608; англ. пер.: V.D. Stepanov, S. Yu. Tikhonov, “Two-weight inequalities for the Hilbert transform on monotone functions”, *Dokl. Math.*, **83**:2 (2011), 241–242.
- [112] V.D. Stepanov, S. Yu. Tikhonov, “Two power-weight inequalities for the Hilbert transform on the cones of monotone functions”, *Complex Var. Elliptic Equ.*, **56**:10-11 (2011), 1039–1047.
- [113] В.Д. Степанов, Е.П. Ушакова, “Весовые оценки для интегральных операторов на полуоси с монотонными ядрами”, *Сиб. матем. журн.*, **45**:6 (2004), 1378–1390; англ. пер.: V.D. Stepanov, E. P. Ushakova, “Weighted estimates for the integral operators with monotone kernels on a half-axis”, *Sib. Math. J.*, **45**:6 (2004), 1124–1134.
- [114] В.Д. Степанов, Е.П. Ушакова, “Об операторе геометрического среднего с переменными пределами интегрирования”, *Теория функций и нелинейные уравнения в частных производных*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Станислава Ивановича Похожаева, Тр. МИАН, **260**, МАИК, М., 2008, 264–288; англ. пер.: V.D. Stepanov, E. P. Ushakova, “On the geometric mean operator with variable limits of integration”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **260**:1 (2008), 254–278.
- [115] V.D. Stepanov, E. P. Ushakova, “Alternative criteria for the boundedness of Volterra integral operators in Lebesgue spaces”, *Math. Inequal. Appl.*, **12**:4 (2009), 873–889.
- [116] V.D. Stepanov, E. P. Ushakova, “Kernel operators with variable intervals of integration in Lebesgue spaces and applications”, *Math. Inequal. Appl.*, **13**:3 (2010), 449–510.
- [117] J. Q. Sun, “The modular inequalities for a class of convolution operators on monotone functions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125**:8 (1997), 2293–2305.
- [118] А.А. Васильева, “Оценки поперечников весовых соболевских классов”, *Матем. сб.*, **201**:7 (2010), 15–52; англ. пер.: A. A. Vasil’eva, “Estimates for the widths of weighted Sobolev classes”, *Sb. Math.*, **201**:7 (2010), 947–984.

А. Гогатишвили (A. Gogatishvili)
 Mathematical Institute, Academy of Sciences
 of the Czech Republic
E-mail: gogatish@math.caz.cz

Поступила в редакцию
 02.02.2013

В.Д. Степанов (V.D. Stepanov)
 Российский университет дружбы народов
E-mail: stepanov@mi.ras.ru