Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Ш. Девадзе, В. Ш. Беридзе, Условия оптимальности для квазилинейных дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями, *УМН*, 2013, том 68, выпуск 4, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9539>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 02:11:04

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Условия оптимальности для квазилинейных дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями

Д. Ш. Девадзе, В. Ш. Беридзе

1. Пусть G — ограниченная область комплексной плоскости E с границей Γ , являющейся замкнутой простой кривой Ляпунова. Обозначим через γ часть границы Γ , представляющую собой разомкнутую кривую Ляпунова с параметрическим уравнением $z = z(s)$, $0 \leq s \leq \delta$. Пусть γ_0 — диффеоморфный образ γ , лежащий в G , с параметрическим уравнением $z_0 = z_0(s)$, $0 \leq s \leq \delta$. Предположим, что кривая γ_0 пересекается с Γ , но не касательна к ней, $z^* \in \Gamma \setminus \gamma$ — фиксированная точка, $z = x + iy \in G$, $w = w_1 + iw_2$, $u = u_1 + iu_2$. Пусть U — некоторое ограниченное подмножество из E , Ω — множество существенно ограниченных функций в G со значениями в U , $\partial_{\bar{z}} = (\partial/\partial x + i\partial/\partial y)/2$ — обобщенная производная Соболева. Обозначим через $C_\alpha(\bar{G})$ множество всех ограниченных функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем α , $0 < \alpha \leq 1$. Норма в $C_\alpha(\bar{G})$ определяется равенством [1]:

$$\|f\|_{C_\alpha(\bar{G})} = \max_{z \in \bar{G}} |f(z)| + \sup_{z_1, z_2 \in \bar{G}} \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\alpha}.$$

Для каждого фиксированного $u \in \Omega$ рассмотрим в области $\bar{G}$ краевую задачу [2]:

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} w &= f(z, w, \bar{w}, u), \quad z \in G, \\ \operatorname{Re}[w(z)] &= \varphi(z), \quad z \in \Gamma \setminus \gamma, \quad \operatorname{Im}[w(z^*)] = c, \quad z^* \in \Gamma \setminus \gamma, \quad c = \text{const}, \\ \operatorname{Re}[w(z(s))] &= \sigma \operatorname{Re}[w(z_0(s))], \quad z(s) \in \gamma, \quad z_0(s) \in \gamma_0, \quad 0 < \sigma = \text{const}. \end{aligned} \quad (1)$$

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

(A1) функция $f(z, w, q, u)$ определена при $z \in G$, $|w|, |q| \leq R$, $u \in U$ и $f(z, 0, 0, 0) \in L_p(G)$, $p > 2$; $|f(z, w, q, u) - f(z, w_0, q_0, u_0)| \leq L(|w - w_0| + |q - q_0| + |u - u_0|)$, L, R — положительные константы;

(A2) $\varphi \in C_\alpha(\Gamma \setminus \gamma)$, $\alpha > 1/2$;

(A3) существует число R_1 , $0 < R_1 < R$, такое, что $0 < R_1[1 - 2L|G|^{1/p}(C + \|T_G\|_{C_\alpha(\bar{G})})] \leq \|\phi\|_{C_\alpha(\bar{G})}$, где $C = \text{const} > 0$, $|G| = \text{mes } G$, ϕ — аналитическая функция, удовлетворяющая условиям (1), а оператор T_G определен равенством $T_G[z, f] = -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{f(t)}{t - z} d\xi d\eta$, $t = \xi + i\eta$;

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (A1)–(A3). Тогда для каждого фиксированного $u \in \Omega$ решение задачи (1) в пространстве $C_\alpha(\bar{G})$ существует и единственно.

Поставим следующую задачу оптимального управления [3], [4]: найти функцию $u_0(z) \in \Omega$, при которой решение краевой задачи Бицадзе–Самарского (1) придает функционалу $I(u) = \iint_G F(x, y, w_1, w_2, u_1, u_2) dx dy$ минимальное значение.

Для получения условия оптимальности дополнительно предположим, что:

(A4) функция $f(z, w, q, u)$ непрерывна по w, q, u , имеет непрерывные частные производные f'_w и f'_q , которые непрерывны по тем же аргументам, что и f ; функция F непрерывна по w_1, w_2, u_1, u_2 , непрерывно дифференцируема по w_1, w_2 и принадлежит пространству $L_p(G)$, $p > 2$;

(A5) для любых $(w, q) \in S_{wq}^{R_1} = \{(w, q) : |w|, |q| < R_1\}$ в области G справедливы следующие оценки: $|f'_w|, |f'_q| \leq N_1(R_1) < +\infty$, $|f| \leq N_2(R_1) < +\infty$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия (A1)–(A5), $u_0(z)$ – оптимальное управление, $w_0(z)$ – соответствующее ему решение задачи (1), $\psi_0(z)$ – решение сопряженной задачи [5]:

$$\partial_{\bar{z}}\psi(z) + \frac{\partial f(u_0)}{\partial w}\psi(z) + \frac{\partial \bar{f}(u_0)}{\partial w}\bar{\psi}(z) = -2\partial_w F(u_0), \quad z \in G \setminus \gamma_0,$$

$$\operatorname{Re}[\psi(z)] = 0, \quad z \in \Gamma, \quad \operatorname{Re}[\psi(z_0^+) - \psi(z_0^-)] = \sigma \operatorname{Re}[\psi(z)], \quad z_0 \in \gamma_0, \quad z \in \gamma.$$

Тогда почти всюду на G выполняется соотношение

$$\operatorname{Re}[f(z, w_0, \bar{w}_0, u_0)\psi_0(z) + F(z, w_0, \bar{w}_0, u_0)] = \inf_{u \in U} \operatorname{Re}[f(z, w_0, \bar{w}_0, u)\psi_0(z) + F(z, w_0, \bar{w}_0, u)].$$

2. Пусть область $\bar{G}$ – прямоугольник $\{z = x + iy : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, Γ – граница области G , $\gamma_0 = \{z_0 = x_0 + iy : 0 \leq y \leq 1\}$, $\gamma = \{z = 1 + iy : 0 \leq y \leq 1\}$, $z^* \in \Gamma \setminus \gamma$, $c(z), d(z), B(z), f(z) \in L_p(\bar{G})$, $p > 2$, $g(z) \in C_\alpha(\Gamma \setminus \gamma)$, $0 < \alpha < 1$.

Для каждого $u \in \Omega$ рассмотрим в области $\bar{G}$ краевую задачу Бицадзе–Самарского:

$$\partial_{\bar{z}}w + B(z)\bar{w} = f(z)u, \quad z \in G,$$

$$\operatorname{Re}[w(z)] = g(z), \quad z \in \Gamma \setminus \gamma, \quad \operatorname{Im}[w(z^*)] = \operatorname{const},$$

$$\operatorname{Re}[w(z)] = \sigma \operatorname{Re}[w(z_0)], \quad z \in \gamma, \quad z_0 \in \gamma_0, \quad 0 < \sigma = \operatorname{const}.$$

Введем функционал $I(u) = \operatorname{Re} \iint_G [c(z)w(z) + d(z)u(z)] dx dy$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\psi_0(z)$ – решение сопряженной задачи:

$$\partial_{\bar{z}}\psi(z) - \bar{B}(z)\psi(z) = c(z), \quad z \in G \setminus \gamma_0,$$

$$\operatorname{Re}[\psi(z)] = 0, \quad z \in \Gamma, \quad \operatorname{Re}[\psi(z_0^+) - \psi(z_0^-)] = \sigma \operatorname{Re}[\psi(z)], \quad z_0 \in \gamma_0, \quad z \in \gamma.$$

Тогда для оптимальности $u_0(z)$, $w_0(z)$ необходимо и достаточно, чтобы почти всюду на G выполнялось следующее равенство:

$$\operatorname{Re}[(d(z) - \psi_0(z)f(z))u_0(z)] = \inf_{u \in U} \operatorname{Re}[(d(z) - \psi_0(z)f(z))u(z)].$$

Список литературы

- [1] И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции*, 2-е изд., Наука, М., 1988, 510 с.
 [2] А. В. Бицадзе, А. А. Самарский, *Докл. АН СССР*, **185**:2 (1969), 739–740. [3] F. Criado, H. Meladze, N. Odishelidze, *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. (Esp.)*, **91**:1 (1997), 65–69.
 [4] D. Devadze, *Bull. Georgian Natl. Acad. Sci.*, **173**:1 (2006), 34–37. [5] D. Devadze, V. Beridze, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, **161** (2013).

Д. Ш. Девадзе (D. Sh. Devadze)
 Батумский государственный университет
 им. Шота Руставели, Батуми, Грузия
 E-mail: david.devadze@gmail.com

Представлено А. Г. Сергеевым
 Принято редколлегией
 30.04.2013

В. Ш. Беридзе (V. Sh. Beridze)
 Батумский государственный университет
 им. Шота Руставели, Батуми, Грузия
 E-mail: vakhtangi@yahoo.com