Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. П. Долбилин, М. А. Штанько, М. И. Штогрин, Неизгибаемость зоноэдров,
УМН, 1996, том 51, выпуск 2, 157–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm954>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 15:13:16

НЕИЗГИБАЕМОСТЬ ЗОНОЭДРОВ

Н. П. Долбилин, М. А. Штанько, М. И. Штогрин

В настоящей заметке обобщается теорема о неизгибаемости квадрильяжей двумерной сферы S^2 в E^3 , изложенная в [3]. А именно, мы покажем неизгибаемость очень широкого класса невыпуклых многогранников, введенных Е. С. Федоровым еще в 1885 году [2], так называемых зоноэдров, вложенных в 3-мерное евклидово пространство.

С основными понятиями, результатами и проблемами теории изгибания поверхностей можно познакомиться в сборнике [1].

Здесь под *зоноэдром* мы будем понимать абстрактно заданную полиэдральную сферу такую, что: а) каждая грань является евклидовым выпуклым многоугольником с четным числом сторон; б) множество сторон каждого многоугольника разбивается на пары сторон, параллельных между собой.

Для таких многогранников естественно вводится понятие пояса или зоны [2, с. 256]. Квадрильяж сферы S^2 есть важный частный случай зоноэдров Федорова и понятие полосы, служившей полезным инструментом для изучения свойств квадрильяжа, совпадает с понятием пояса для произвольных зоноэдров.

Зоноэдр Q , вложенный в E^3 (с плоскими гранями), называется *неизгибаемым*, если существует такое $\varepsilon > 0$, что любой изометричный ему (с теми же плоскими гранями) зоноэдр $Q' \subset E^3$ при условии $\|Q - Q'\| < \varepsilon$ конгруэнтен Q .

ТЕОРЕМА. *Зоноэдр, вложенный в E^3 , является неизгибаемым.*

Рассмотрим граф отмеченных ребер Γ , который был введен в [3]. Допустим, что вложенный зоноэдр допускает непрерывное изгибание φ , в процессе которого каждая грань остается плоской. Тогда в процессе изгибания φ хотя бы один двугранный угол, т.е. угол между плоскостями двух смежных граней, должен изменяться. Назовем всякое ребро изменяющегося при изгибании φ двугранного угла *отмеченным*. Рассмотрим изгибание φ и будем предполагать его настолько малым, что вложенный зоноэдр при изгибании φ остается по-прежнему вложенным. Обозначим граф, состоящий из всех отмеченных ребер, через Γ . Ребра графа Γ – это отмеченные ребра зоноэдра, а вершины графа – это вершины отмеченных ребер и только они.

Перечислим некоторые свойства графа отмеченных ребер. Заметим, что множество ребер графа Γ непусто тогда и только тогда, когда зоноэдр Q допускает изгибание φ .

Г1. *Граф Γ разбивает поверхность зоноэдра на несколько компонент связности. Каждое отмеченное ребро разделяет две различные компоненты, т.е. является границей двух граней зоноэдра, принадлежащих разным компонентам.*

Г2. *В каждой вершине графа Γ должно встречаться не менее двух ребер.* Это немедленно следует из Г1.

Г3. *Если в вершине сходятся только два отмеченных ребра, то они лежат на прямой.*

Г4. *В вершине графа Γ сходятся либо 2 ребра, либо не меньше 4.*

Доказательство этих свойств графа Γ см. в [3].

Перейдем от графа отмеченных ребер к графу Γ_φ , который будем называть *графом изгибания φ* . Вершинами графа изгибания Γ_φ объявляются лишь те вершины графа Γ , в которых сходятся не менее 4 отмеченных ребер. Рассмотрим произвольное отмеченное ребро e из исходного графа Γ и выделим те отмеченные ребра, которые можно соединить с e реберным путем, проходящим через вершины графа Γ степени 2. В силу свойства Г3, а также ограниченности зоноэдра, объединение таких ребер образует прямолинейный отрезок, который мы будем считать ребром “нового” графа Γ_φ . Оба конца такого ребра являются вершинами валентности не ниже 4, т.е. вершинами нового графа. Приведем необходимые нам свойства графа изгибания.

Г φ 1. *Все ребра графа Γ_φ суть прямолинейные отрезки, состоящие из нескольких отмеченных ребер.*

Г φ 2. *Никакие два ребра графа Γ_φ не имеют двух общих концов.*

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00166) и Немецкого научно-исследовательского общества (DFG).

Это вытекает из того, что зоноэдр Q вложен в $\mathbf{E}^3$. Таким образом, в графе изгибания нет двуреберных циклов.

$\Gamma_\varphi 3$. В каждой вершине графа Γ_φ сходятся не менее 4 ребер.

$\Gamma_\varphi 4$. Граф Γ_φ разбивает поверхность зоноэдра на области, среди которых имеется по крайней мере восемь треугольников (под треугольником понимается область, граница которой состоит из трех и только трех ребер графа Γ_φ).

В самом деле, обозначим число компонент графа Γ_φ через k , число его вершин – через v , число ребер – через e и, наконец, число областей, на которые сфера разбивается ребрами графа Γ_φ , – через f . Заметим, что область может быть и не диском, а ограничивающий ее реберный контур, состоящий из прямолинейных отрезков, может быть не связным. Обозначим через f_n число областей с n ребрами. Тогда можно написать следующие соотношения:

$$\sum n f_n \geq 4v, \quad \sum n f_n = 2e, \quad \sum f_n = f.$$

Из этих соотношений и обобщенной формулы Эйлера ($v - e + f = k + 1$) получаем:

$$\sum (4 - n) f_n \geq 4(v - e + f) \geq 4 \cdot 2.$$

Отсюда выводим, что $f_3 \geq 8 + f_5 + 2f_6 + \dots + (n - 4)f_n + \dots$. Таким образом, в графе Γ_φ имеется, по крайней мере, восемь треугольников.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из приведенных рассуждений фактически следует, что каждая связная компонента графа Γ_φ содержит не менее восьми треугольников.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Предположим противное: вложенный в $\mathbf{E}^3$ зоноэдр Q допускает непрерывное изгибание φ . Тогда должен существовать граф изгибания Γ_φ . Обозначим через Δ одну из треугольных областей зоноэдра Q (см. $\Gamma_\varphi 4$), и пусть a – какое-нибудь ребро, которое лежит на стороне треугольника Δ . Пояс (в смысле Федорова), построенный по ребру a , содержит две грани, скажем, F_1 и F_2 , примыкающие к ребру a , причем одна из них, пусть F_1 , лежит вне треугольника Δ , в то время как другая грань, F_2 , лежит внутри Δ . Двигаясь вдоль этого пояса в направлении от F_1 к F_2 , мы встретим первую после F_2 грань F_k , которая уже не принадлежит треугольнику Δ . Тогда предыдущая грань F_{k-1} в поясе лежит внутри Δ . Так как грани F_{k-1} и F_k имеют лишь одно общее ребро b и принадлежат одному поясу, то ребро b принадлежит контуру Δ и проходит параллельно ребру a . Поэтому отмеченные ребра a и b не могут лежать на разных сторонах треугольника Δ , т.е. обязаны лежать на одной стороне треугольника. Однако ребра a и b не могут лежать и на одной стороне. Полученное противоречие показывает, что никакой граф Γ_φ со свойствами $\Gamma_\varphi 1$ – $\Gamma_\varphi 4$ не может быть вложен в реберный остов зоноэдра Q . Таким образом, предположение об изгибании привело к противоречию, что доказывает теорему.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Хотя в теореме говорится о неизгибаемости вложенных зоноэдров, в действительности же, как видно из доказательства, неизгибаемыми являются и погруженные зоноэдры, а также такие зоноэдры, которые отображены в $\mathbf{E}^3$ линейно на каждой грани и чьи одномерные (реберные) остовы погружены в $\mathbf{E}^3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Рассмотрим разбиение $\mathbf{E}^3$ на федоровские параллелепипеды, т.е. на 3-мерные выпуклые многогранники, заполняющие пространство при помощи параллельных переносов. Как известно, существует 5 аффинных типов таких параллелепипедов. Пусть Q – полиэдральная сфера, составленная из граней 2-мерного остова разбиения пространства на параллелепипеды. Тогда полиэдральная сфера Q является зоноэдром и по доказанной теореме неизгибаема.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Исследования по метрической теории поверхностей. Сборник статей. Серия Математика. Новое в зарубежной науке. Т. 18. М.: Мир, 1980. [2] Федоров Е. С. Начала учения о фигурах. Л.: Изд-во АН СССР, 1953. [3] Долбилин Н. П., Штанько М. А., Штогрин М. И. Изгибаемость квадрильяжа сферы // ДАН. 1996 (в печати).