Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Крутицкий, Об обратимости одного оператора,
УМН, 2014, том 69, выпуск 1, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9540>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 15:35:41

Об обратимости одного оператора

П. А. Крутицкий

Для функций $V(x)$, заданных в декартовых координатах $x = (x_1, x_2)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$, введем преобразование Фурье

$$\widehat{G}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} G(x) \exp(-2\pi i x \cdot \xi) dx, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2), \quad x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2.$$

Образы Фурье обозначаются крышкой. Там, где преобразование Фурье не существует в обычном смысле, оно понимается в смысле теории обобщенных функций. Используя [1] и вычисляя преобразование Фурье для функции $K(x) = |x|^{-1} \exp(-k|x|)$, где $|x| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ и $k > 0$, получим $\widehat{K}(\xi) = (k_0^2 + |\xi|^2)^{-1/2}$, где $|\xi| = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}$, $k_0 = k/(2\pi)$. Введем шкалу соболевских пространств $H^s(\mathbb{R}^2)$, $-\infty < s < \infty$, с нормой

$$\|G\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{G}(\xi)|^2 d\xi.$$

Пусть $K(x - y) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{-1/2} \exp(-k((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{1/2})$. Рассмотрим оператор свертки A , действующий на функции, заданные в $\mathbb{R}^2$:

$$(AG)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} G(y) K(x - y) dy.$$

По теореме о свертке [2]: $(\widehat{AG})(\xi) = \widehat{K}(\xi) \widehat{G}(\xi)$. Покажем, что оператор A действует из $H^{-1/2}(\mathbb{R}^2)$ в $H^{1/2}(\mathbb{R}^2)$ и при этом ограничен:

$$\begin{aligned} \|AG\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^2)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^{1/2} |\widehat{AG}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^{1/2} |\widehat{K}(\xi)|^2 |\widehat{G}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(1 + |\xi|^2)^{1/2}}{k_0^2 + |\xi|^2} |\widehat{G}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1 + |\xi|^2}{k_0^2 + |\xi|^2} (1 + |\xi|^2)^{-1/2} |\widehat{G}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \max\{k_0^{-2}, 1\} \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^{-1/2} |\widehat{G}(\xi)|^2 d\xi = \text{const} \|G\|_{H^{-1/2}(\mathbb{R}^2)}^2. \end{aligned}$$

Здесь использована оценка $(1 + |\xi|^2)(k_0^2 + |\xi|^2)^{-1} \leq \max\{k_0^{-2}, 1\}$. Пространства $H^{-1/2}(\mathbb{R}^2)$ и $H^{1/2}(\mathbb{R}^2)$ являются двойственными в смысле скалярного произведения в $L_2(\mathbb{R}^2)$.

В плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим конечное число замкнутых компактных липшицевых областей. Будем предполагать, что эти области не имеют общих точек друг с другом, в частности не имеют общих граничных точек. Совокупность этих областей обозначим Ω . Тем самым, Ω – (несвязная) замкнутая липшицева область в $\mathbb{R}^2$. Введем соболевские пространства на Ω :

$$\tilde{H}^{-1/2}(\Omega) = \{u: u \in H^{-1/2}(\mathbb{R}^2), \text{supp } u \subset \Omega\},$$

$$H^{1/2}(\Omega) = \{u: u = U|_{\Omega} \text{ для некоторого } U \in H^{1/2}(\mathbb{R}^2)\},$$

$$\|u\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Omega)} = \|u\|_{H^{-1/2}(\mathbb{R}^2)}, \quad \|u\|_{H^{1/2}(\Omega)} = \min_{U|_{\Omega}=u, U \in H^{1/2}(\mathbb{R}^2)} \|U\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^2)}.$$

Можно показать [2; теорема 3.30], что если Ω – липшицева область, то пространства $\tilde{H}^{-1/2}(\Omega)$ и $H^{1/2}(\Omega)$ являются двойственными в смысле скалярного произведения в $L_2(\Omega)$, т. е. если $\mu \in \tilde{H}^{-1/2}(\Omega)$ и $g \in H^{1/2}(\Omega)$, то определено скалярное произведение

$$\begin{aligned} (\mu, g)_{L_2(\Omega)} &= \int_{\Omega} \overline{\mu(x)} g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\mu(x)} G(x) dx = (\mu, G)_{L_2(\mathbb{R}^2)} \\ &= (\hat{\mu}, \widehat{G})_{L_2(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\hat{\mu}(\xi)} \widehat{G}(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

где функция $G \in H^{1/2}(\mathbb{R}^2)$ такова, что $g = G|_{\Omega}$ (по определению пространства $H^{1/2}(\Omega)$ функция G всегда существует). Четвертое равенство в последней формуле гарантируется теоремой Планшереля [2; теорема 3.12].

На функциях μ , определенных в области Ω , рассмотрим оператор A_{Ω}

$$(A_{\Omega}\mu)(x) = \int_{\Omega} \mu(y)K(x-y) dy, \quad x \in \Omega,$$

который задает некоторую функцию на Ω . Пусть $\mu \in \tilde{H}^{-1/2}(\Omega) \subset H^{-1/2}(\mathbb{R}^2)$, тогда

$$(A_{\Omega}\mu)(x) = \int_{\Omega} \mu(y)K(x-y) dy = \left(\int_{\mathbb{R}^2} \mu(y)K(x-y) dy \right) \Big|_{x \in \Omega} = (A\mu)(x)|_{x \in \Omega}.$$

Поскольку оператор A действует из $H^{-1/2}(\mathbb{R}^2)$ в $H^{1/2}(\mathbb{R}^2)$, то оператор A_{Ω} действует из $\tilde{H}^{-1/2}(\Omega)$ в $H^{1/2}(\Omega)$ в силу определения пространства $H^{1/2}(\Omega)$.

Выше было показано, что оператор A ограничен при действии из $H^{-1/2}(\mathbb{R}^2)$ в $H^{1/2}(\mathbb{R}^2)$, поэтому и при действии из $\tilde{H}^{-1/2}(\Omega) \subset H^{-1/2}(\mathbb{R}^2)$ в $H^{1/2}(\mathbb{R}^2)$ он также ограничен. Если множество функций ограничено по норме в $H^{1/2}(\mathbb{R}^2)$ константой, то и множество сужений этих функций на Ω будет ограничено по норме в $H^{1/2}(\Omega)$, причем той же константой в силу определения нормы в $H^{1/2}(\Omega)$. Следовательно, оператор A_{Ω} ограничен при действии из $\tilde{H}^{-1/2}(\Omega)$ в $H^{1/2}(\Omega)$.

Заметим, что справедлива оценка $(1 + |\xi|^2)^{1/2}(k_0^2 + |\xi|^2)^{-1/2} \geq (\min\{k_0^{-2}, 1\})^{1/2}$. Пусть $\mu \in \tilde{H}^{-1/2}(\Omega)$. Учитывая, что пространства $\tilde{H}^{-1/2}(\Omega)$ и $H^{1/2}(\Omega)$ – двойственные в смысле скалярного произведения в $L_2(\Omega)$, получим

$$\begin{aligned} (A_{\Omega}\mu, \mu)_{L_2(\Omega)} &= (A\mu|_{\Omega}, \mu)_{L_2(\Omega)} = (A\mu, \mu)_{L_2(\mathbb{R}^2)} = (\widehat{A\mu}, \hat{\mu})_{L_2(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{K}(\xi) |\hat{\mu}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (k_0^2 + |\xi|^2)^{-1/2} |\hat{\mu}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^{-1/2} \left(\frac{1 + |\xi|^2}{k_0^2 + |\xi|^2} \right)^{1/2} |\hat{\mu}(\xi)|^2 d\xi \\ &\geq (\min\{k_0^{-2}, 1\})^{1/2} \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^{-1/2} |\hat{\mu}(\xi)|^2 d\xi = c \|\mu\|_{H^{-1/2}(\mathbb{R}^2)}^2 = c \|\mu\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Следовательно, оператор A_{Ω} положителен и ограничен снизу при действии из $\tilde{H}^{-1/2}(\Omega)$ в $H^{1/2}(\Omega)$. Поскольку, кроме того, оператор A_{Ω} ограничен при действии из $\tilde{H}^{-1/2}(\Omega)$ в $H^{1/2}(\Omega)$ и пространства $\tilde{H}^{-1/2}(\Omega)$ и $H^{1/2}(\Omega)$ – двойственные, то по лемме 2.32 в [2] для оператора A_{Ω} существует ограниченный обратный оператор. Из приведенных рассуждений вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Для оператора A_{Ω} , действующего из $\tilde{H}^{-1/2}(\Omega)$ в $H^{1/2}(\Omega)$, имеется ограниченный обратный оператор A_{Ω}^{-1} .

СЛЕДСТВИЕ. Для любой функции $g \in H^{1/2}(\Omega)$ уравнение $A_{\Omega}\mu = g$ имеет в пространстве $\tilde{H}^{-1/2}(\Omega)$ единственное решение.

Список литературы

- [1] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Таблицы интегральных преобразований. Т. 1: Преобразование Фурье, Лапласа, Меллина*, Наука, М., 1969, 343 с. [2] W. McLean, *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, xiv+357 pp.

Павел Александрович Крутицкий
(Pavel A. Krutitskii)

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН
E-mail: biam@mail.ru

Представлено М. И. Зеликиным
Принято редколлегией

19.07.2013