Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Шамолин, Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере, *УМН*, 2013, том 68, выпуск 5, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9541>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 18:29:43

Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере

М. В. Шамолин

Пусть четырехмерное твердое тело Θ массы m с гладкой трехмерной границей $\partial\Theta$ имеет в некоторой связанной с ним системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$ тензор инерции вида $\text{diag}\{I_1, I_2, I_2, I_2\}$. Расстояние от точки N приложения силы $\mathbf{S}$ до точки D является функцией, по крайней мере, некоторого угла α : $DN = R(\alpha, \dots)$ (ср. с [1]–[3]). Сила $\mathbf{S}$ имеет величину $S = s(\alpha) \operatorname{sgn} \cos \alpha \cdot v^2$, $|\mathbf{v}_D| = v$, где s – некоторая функция, характеризующая в системе как рассеяние, так и подкачку энергии [1], [2]. При этом $S = S_v(\alpha) = Bv^2 \cos \alpha$, $B > 0$.

Если Ω – тензор угловой скорости тела Θ , $\Omega \in \mathfrak{so}(4)$, то часть уравнений движения, отвечающая алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$, имеет следующий вид [2]:

$$\dot{\Omega}\Lambda + \Lambda\dot{\Omega} + [\Omega, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \quad (1)$$

где $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$, $\lambda_1 = (-I_1 + I_2 + I_3 + I_4)/2$, $\dots$, $\lambda_4 = (I_1 + I_2 + I_3 - I_4)/2$, M – момент внешних сил, действующих на тело в $\mathbb{R}^4$, спроектированный на естественные координаты в алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$, $[\cdot, \cdot]$ – коммутатор в $\mathfrak{so}(4)$. Кососимметрическая матрица $\Omega \in \mathfrak{so}(4)$ определяется величинами $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ – компонентами в алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$. При этом, очевидно, $\lambda_i - \lambda_j = I_j - I_i$ для любых $i, j = 1, \dots, 4$.

При вычислении момента внешней силы строится отображение $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathfrak{so}(4)$, переводящее пару векторов из $\mathbb{R}^4$ в некоторый элемент из алгебры Ли $\mathfrak{so}(4)$ [2], [3].

Уравнение Ньютона движения центра масс C тела Θ представится в виде $m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}$, где по многомерной формуле Ривальса $\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_D + \Omega^2\mathbf{D}\mathbf{C} + E\mathbf{D}\mathbf{C}$, $\mathbf{w}_D = \dot{\mathbf{v}}_D + \Omega\mathbf{v}_D$, $E = \dot{\Omega}$, $\mathbf{F}$ – внешняя сила, действующая на тело (в нашем случае $\mathbf{F} = \mathbf{S}$), E – тензор углового ускорения [1], [2].

Несколько расширим задачу: по прямой $Dx_1 = DC$ будет действовать некоторая следящая сила $\mathbf{T}$. В данной работе разобран такой класс движения, когда центр масс тела движется прямолинейно и равномерно (т. е. $\mathbf{V}_C \equiv \text{const}$).

Если $N = (0, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$ в системе $Dx_1x_2x_3x_4$, $\mathbf{S} = \{-S, 0, 0, 0\}$, то момент силы в координатах алгебры Ли $\mathfrak{so}(4)$ имеет следующий вид: $\{0, 0, x_{4N}S, 0, -x_{3N}S, x_{2N}S\} \in \mathbb{R}^6 \cong M \in \mathfrak{so}(4)$.

При этом, если $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ – сферические координаты в $\mathbb{R}^4$, то $x_{2N} = A \sin \alpha \cos \beta_1 - h\omega_6/v$, $x_{3N} = A \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + h\omega_5/v$, $x_{4N} = A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - h\omega_3/v$, $A, h > 0$.

Очевидно, что уравнения (1) существуют три циклических первых интеграла: $\omega_1 = \omega_1^0$, $\omega_2 = \omega_2^0$, $\omega_4 = \omega_4^0$, при этом считаем, что $\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_4^0 = 0$. В результате оставшиеся уравнения на $\mathfrak{so}(4)$ примут вид $\dot{\omega}_3 = n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - hB\omega_3 v \cos \alpha / (2I_2)$, $\dot{\omega}_5 = -n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 - hB\omega_5 v \cos \alpha / (2I_2)$, $\dot{\omega}_6 = n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta_1 - hB\omega_6 v \cos \alpha / (2I_2)$.

Тогда замена угловых скоростей $z_1 = \omega_3 \cos \beta_2 + \omega_5 \sin \beta_2$, $z_2 = -\omega_3 \sin \beta_2 \cos \beta_1 + \omega_5 \cos \beta_2 \cos \beta_1 + \omega_6 \sin \beta_1$, $z_3 = \omega_3 \sin \beta_2 \sin \beta_1 - \omega_5 \cos \beta_2 \sin \beta_1 + \omega_6 \cos \beta_1$ приводит совместную систему из уравнения Ньютона и (1) к следующему виду: $(\sigma = DC, b = \sigma n_0, H_1 = hB/(2I_2 n_0), [b] = [H_1] = 1, n_0^2 = AB/(2I_2))$:

$$\dot{v} = \sigma \cos \alpha [n_0^2 v^2 \sin^2 \alpha - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)] - bH_1 v z_3 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= -z_3 + \sigma n_0^2 v \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sigma \sin \alpha (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)/v - bH_1 z_3 \cos^2 \alpha, \\ \dot{z}_3 &= n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1)(z_1^2 + z_2^2) \operatorname{ctg} \alpha - H_1 v z_3 \cos \alpha, \\ \dot{z}_2 &= (1 + bH_1) z_2 z_3 \operatorname{ctg} \alpha + (1 + bH_1) z_1^2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta_1 - H_1 v z_2 \cos \alpha, \\ \dot{z}_1 &= (1 + bH_1) z_1 z_3 \operatorname{ctg} \alpha - (1 + bH_1) z_1 z_2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta_1 - H_1 v z_1 \cos \alpha, \\ \dot{\beta}_1 &= (1 + bH_1) z_2 \operatorname{ctg} \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\dot{\beta}_2 = -(1 + bH_1) z_1 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{csc} \beta_1. \quad (4)$$

В системе седьмого порядка (2)–(4) появилась независимая подсистема шестого порядка (2), (3). Для полного интегрирования нужно искать, вообще говоря, шесть независимых первых интегралов. Однако после замен $z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$, $z_* = z_2/z_1$, $z = n_0 v Z$, $z_k = n_0 v Z_k$, $k = 1, 2, 3$, $z_* = Z_*$, $\langle \cdot \rangle \mapsto n_0 v \langle \cdot \rangle$ она приводится к виду

$$v' = v\Psi(\alpha, Z, Z_3), \quad \Psi(\alpha, Z, Z_3) = b \cos \alpha [\sin^2 \alpha - (Z^2 + Z_3^2)] - bH_1 Z_3 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= -Z_3 + b \sin \alpha \cos^2 \alpha + b \sin \alpha (Z^2 + Z_3^2) - bH_1 Z_3 \cos^2 \alpha, \\ Z_3' &= \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1) Z^2 \operatorname{ctg} \alpha - Z_3 \Psi(\alpha, Z, Z_3) - H_1 Z_3 \cos \alpha, \\ Z' &= (1 + bH_1) Z Z_3 \operatorname{ctg} \alpha - Z \Psi(\alpha, Z, Z_3) - H_1 Z \cos \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$Z_*' = \pm(1 + bH_1) Z \sqrt{1 + Z_*^2} \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta_1, \quad \beta_1' = \pm(1 + bH_1) \frac{Z Z_*}{\sqrt{1 + Z_*^2}} \operatorname{ctg} \alpha, \quad (7)$$

$$\beta_2' = \mp(1 + bH_1) \frac{Z_1}{\sqrt{1 + Z_*^2}} \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{csc} \beta_1, \quad (8)$$

при этом систему (7)–(8) можно рассматривать на касательном расслоении TS^3 трехмерной сферы.

Видно, что система пятого порядка (3) распалась на независимые подсистемы более низкого порядка: система (6) – третьего, а система (7) (после замены независимого переменного) – второго. Поэтому для полной интегрируемости достаточно указать два независимых интеграла системы (6), один – системы (7) и два дополнительных интеграла, “привязывающих” уравнения (5) и (8).

Полная система седьмого порядка обладает аналитическим первым интегралом вида $v^2(1 - 2bZ_3 \sin \alpha + b^2(Z^2 + Z_3^2)) = V_C^2$.

Система (6) обладает двумя независимыми первыми интегралами, являющимися трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций (ср. [1]–[3]):

$$\frac{Z^2 + Z_3^2 - bZ_3 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{Z \sin \alpha} = C_1 = \text{const}, \quad G\left(\frac{Z}{\sin \alpha}, \frac{Z_3}{\sin \alpha}, \sin \alpha\right) = C_2 = \text{const}.$$

Система (7) имеет первый интеграл вида $\sqrt{1 + Z_*^2}/\sin \beta_1 = C_3 = \text{const}$, и, в свою очередь, дополнительный первый интеграл, позволяющий определить величину β_2 , имеет вид $\pm \cos \beta_1/\sqrt{C_3^2 - 1} = \sin\{C_3(\beta_2 + C_4)\}$, $C_4 = \text{const}$.

Список литературы

- [1] М. В. Шамолин, *Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела*, Изд-во “Экзамен”, М., 2007, 352 с. [2] М. В. Шамолин, *Докл. РАН*, **375**:3 (2000), 343–346. [3] М. В. Шамолин, *УМН*, **53**:3(321) (1998), 209–210.

М. В. Шамолин (M. V. Shamolin)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: shamolin@imec.msu.ru, shamolin@rambler.ru

Представлено А. В. Михалёвым
Принято редколлегией
05.08.2013