Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Вершик, А. А. Кириллов, В. Ф. Молчанов,
Ю. А. Неретин, Г. И. Олшанский, В. В. Рыжиков,
В. М. Тихомиров, А. А. Шкаликов, Исмагилов Раис
Сальманович (к семидесятипятилетию со дня рожде-
ния), *УМН*, 2013, том 68, выпуск 4, 185–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9543>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 03:23:03

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Раис Сальманович Исмагилов

(к семидесятипятилетию со дня рождения)

10 июля 2013 г. исполнилось 75 лет доктору физико-математических наук профессору Раису Сальмановичу Исмагилову. Его основные научные интересы — теория представлений и бесконечномерные группы, спектральная теория, динамические системы, поперечники. Он — автор более 90 научных статей и монографии “Representations of infinite-dimensional groups” [1]. В 1983 г. участвовал в качестве приглашенного докладчика в Международном математическом конгрессе в Варшаве. Обсудим кратко наиболее известные его результаты.

Спектральная теория. Научной работой Р. С. Исмагилов начал заниматься под руководством профессора А. Г. Костюченко, основной областью интересов которого была теория операторов. В первой своей статье [2] для неограниченного оператора A в гильбертовом пространстве

Р. С. Исмагилов ввел понятие *карлемановского вектора*. Так был назван вектор h , для которого $\|A^n h\| \leq m_n$ и $\sum m_{2n}^{-1/(2n)} < \infty$. Основной результат работы состоял в следующем: *Если карлемановские векторы для симметрического оператора A образуют плотное множество в пространстве, то A существенно самосопряжен*. В действительности этот результат является операторным переложением знаменитого признака определенности проблемы моментов, принадлежащего Т. Карлеману. Но такое видение родства этих совсем по-разному звучащих результатов было необычным. Применительно к конкретным операторам эта теорема оказалась очень эффективной и позволила получить ряд новых признаков существенной самосопряженности. Отметим, что спустя 5 лет карлемановские векторы были переоткрыты А. Э. Нуссбаумом (А. Е. Nussbaum), который назвал их *квазианалитическими*.

В 1960-е годы после работ М. Розенблума и Т. Като о сохранении абсолютно непрерывной компоненты самосопряженного оператора при возмущении его ядерным естественно возникал вопрос о том, что происходит с сингулярными компонентами спектра при возмущениях. Один из основных результатов работы Р. С. Исмагилова “О спектре матриц Тёплица” [3] описывает связь между спектральными типами операторов A и PAP , где A самосопряжен, а P — проектор на подпространство ко-размерности 1. Результат состоит в том, что сингулярные компоненты этих операторов взаимно сингулярны (конечно, абсолютно непрерывные компоненты унитарно

эквивалентны, что следует из теоремы Като–Розенблума о ядерных возмущениях). Из этого результата весьма легко была выведена абсолютная непрерывность спектра оператора Тёплица (аналитическое доказательство этого факта было получено ранее М. Розенблумом). Наконец, была указана функция кратности и, таким образом, дано полное описание спектрального типа оператора Тёплица. В этой же работе без доказательства (доказательство содержалось в кандидатской диссертации) был приведен еще один красивый результат: *Если A, B – самосопряженные ограниченные операторы и оператор AB – ядерный, то имеет место унитарная эквивалентность $(A + B)_a \simeq A_a \oplus B_a$ (здесь A_a – абсолютно непрерывная компонента оператора A)*. Позднее, понимая значение этой теоремы, Дж. Хоуленд и Т. Като опубликовали независимое (близкое к авторскому) ее доказательство [4].

Упомянем еще о двух работах Р. С. Исмагилова, относящихся к теории операторов Штурма–Лиувилля. Результаты этих работ в настоящее время считаются классическими. В первой из этих работ [5] Р. С. Исмаилов открыл замечательное свойство локализации для оператора Штурма–Лиувилля $L_q = -d^2/dx^2 + q$ на всей оси $\mathbb{R}$. Для произвольного интервала $\Delta = (a, b)$ он ввел величину

$$\lambda(\Delta) = \inf(L_q y, y), \quad \text{где } y \in C_0^\infty(\Delta), \quad \|y\|_{L^2(a,b)} = 1.$$

В статье доказано неравенство $\lambda(-\infty, \infty) > \inf_{|\Delta|=1} \lambda(\Delta) - 32$. Другими словами, из равномерной полуограниченности оператора на каждом из интервалов фиксированной длины с условиями Дирихле в концах интервалов следует его полуограниченность на всей оси. Этот результат не получил должной известности сразу после его выхода в свет и был переоткрыт через 18 лет (см. подробности в книге [6]). Позже Б. Саймон ввел термин “ИМС-формула локализации” (по начальным буквам имен: Исмаилов–Морган–Сигал, первый из которых открыл формулу, а другие распространили ее на операторы более общего вида).

В другой работе Р. С. Исмагилова [7] речь идет об индексах дефекта оператора Штурма–Лиувилля $L_q = -d^2/dx^2 + q$, $y(0) = 0$ на полуоси $\mathbb{R}^+$. Оказалось, что можно говорить о существенной самосопряженности оператора L_q , т. е. о нулевых индексах дефекта, имея информацию о потенциале q не на всей полуоси $\mathbb{R}^+$, а только на некоторой системе непересекающихся отрезков Δ_k , уходящих в бесконечность. В частности, *индексы дефекта нулевые, если $\sum_k |\Delta_k|^2 = \infty$ и $q(x) > -C|\Delta_k|^{-2}$ при $x \in \Delta_k$* (есть и другие достаточные условия). Если систему интервалов заменить замкнутым нигде не плотным неограниченным множеством, то результат такого рода невозможен.

Интерес к теории операторов у Р. С. Исмагилова никогда не угасал. Несколько работ на эту тему он написал и в последнее десятилетие (среди них имеются и совместные работы с А. Г. Костюченко). Особо отметим новые принципиальные результаты по теории операторов Штурма–Лиувилля с матричным потенциалом, а также с потенциалами, которые не обеспечивают полуограниченность оператора.

Теория представлений и бесконечномерные группы. В 1964–1968 гг. Р. С. Исмаилов под влиянием работ М. А. Наймарка занимался представлениями групп в бесконечномерных пространствах с индефинитным скалярным произведением. По сравнению с унитарными представлениями там появляются новые эффекты (более сложно устроенные спектры, отсутствие полной приводимости).

Тогда же он начинает искать новые пути в теории представлений. В классической теории большую роль играют сверточные алгебры функций, постоянных на двойных классах смежности $K \backslash G/K$, где K – компактная подгруппа группы G (например, алгебры Гекке–Ивахори). Пусть теперь $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{F})$, где $\mathbb{F}$ – не локально-компактное неархимедово поле, $K \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{F})$ – подгруппа матриц с целыми элементами. Р. С. Исмаилов обнаружил удивительный факт, не имеющий конечномерного аналога: в этом

случае пространство двойных классов смежности имеет естественную структуру полугруппы, которая действует в пространствах K -неподвижных векторов унитарных представлений G . Позже постепенно выяснилось, что такие полугрупповые операции обычны для бесконечномерных групп (в том числе для классических и симметрических групп) и являются мощным инструментом их исследования. Эта группа работ Р. С. Исмагилова была одной из стартовых точек теории бесконечномерных групп.

В 1970-х – начале 1980-х годов Р. С. Исмаилов занимался представлениями групп диффеоморфизмов и групп токов – тема в то время не исследованная и, как сейчас стало ясно, трудная. Рассматривались разнообразные подходы к предмету: представления в пространствах функций на точечных конфигурациях, индуцирование с представлений фундаментальной группы, конструкции центральных расширений с помощью амальгам, представления группы диффеоморфизмов со старшим весом (рассказывалось на семинаре А. А. Кириллова в 1980 г., не опубликовано), представления групп диффеоморфизмов, сохраняющих слоения, использование “схемы Араки”, конструкции действий групп диффеоморфизмов на бесконечномерных симплектических многообразиях. Обсудим подробнее две серии работ.

Рассмотрим *группу токов* $\mathcal{M} = C^\infty(X, K)$ гладких отображений r из многообразия X в компактную группу Ли K (например, в $SU(2)$). Рассмотрим пространство L^2 функций из X в алгебру Ли $\mathfrak{k}$. Рассмотрим естественное унитарное действие $r: f(x) \mapsto r(x)^{-1}f(x)r(x)$ группы $\mathcal{M}$ в этом L^2 и “поправим” его следующим образом: $r: f(x) \mapsto r(x)^{-1}f(x)r(x) + r(x)^{-1}dr(x)$. Получается действие группы $\mathcal{M}$ аффинными изометрическими преобразованиями, а у группы аффинных изометрических преобразований гильбертова пространства есть стандартное представление в пространстве Фока. Получаемое таким образом действие группы токов в пространстве Фока в дальнейшем было предметом многочисленных исследований (“энергетические представления”, термин ввели переоткрывшие их впоследствии Р. Хёг-Крон и С. Альбеверио).

Другая важная работа – построение действия группы диффеоморфизмов в пространстве L^2 на множестве пуассоновых конфигураций (это действие было построено также Дж. Голдином, Дж. Гродником, Р. Пауэрсом, Д. Шарпом и А. М. Вершиком, И. М. Гельфандом, М. И. Граевым). Отметим, что получаемое представление можно реализовывать в пространстве L^2 по гауссовой мере, что устанавливает каноническое соответствие между пространствами L^2 по гауссовой и пуассоновой мере.

Несколько статей Р. С. Исмагилова 2006–2008 гг. были посвящены аналогам коэффициентов Рака для бесконечномерных представлений. А именно, берется группа G и тензорное произведение трех ее представлений $(\rho_1 \otimes \rho_2) \otimes \rho_3 = \rho_1 \otimes (\rho_2 \otimes \rho_3)$. Разлагая его на неприводимые представления в разных порядках, мы получаем внешне разные ответы, связанные нетривиальной матрицей (или оператором) перехода. В случае конечномерных представлений SL_2 это дает известные в математической физике ${}_4F_3$ -многочлены Рака. Р. С. Исмаилов впервые рассмотрел задачу в бесконечномерном случае: для $SL_2(\mathbb{C})$ и группы изометрий $\mathbb{R}^3$. Полученные ответы оказались связанными с интересной геометрией (с пространствами модулей плоских связностей на поверхностях и пространствами шарнирных ломаных А. А. Клячко).

Динамические системы. Здесь мы отметим статьи (1973–2002) по разреженным случайным блужданиям на локально компактных группах G и матричным произведениям Рисса. Обсудим простейший случай. Пусть $G = \mathbb{R}$. Фиксируем последовательности p_k, q_k положительных чисел, $p_k + q_k = 1$. Фиксируем $h_k \in \mathbb{R}$. Пусть точка блуждает по $\mathbb{R}$, на k -м шагу оставаясь на месте с вероятностью p_k и перемещаясь на h_k с вероятностью q_k . Рассмотрим хвостовую (остаточную) сигма-алгебру блуждания и индуцированную меру ν на ней (мы считаем траектории блуждания эквивалентными, если они совпадают с некоторого места, и рассматриваем измеримые подмножества, составленные из классов эквивалентности). В случае постоянных p_k, q_k, h_k получаем

мое пространство с мерой тривиально (по закону нуля и единицы). Более общие случаи (названия: “действия Макки”, “специальный поток”) много изучались (В. Я. Голодец, С. Д. Синельщиков, Р. Зиммер). Р. С. Исмагилов предложил (1986) критерий тривиальности (нетривиальности) хвостовой алгебры (в терминах винеровской алгебры и поведения произведений $\prod_{k=m}^n (1 + e^{ish_k})$). Далее Р. С. Исмагилов рассматривает случай “разреженных блужданий”, когда h_k быстро растет: $h_k > h_1 + \dots + h_{k-1}$. Он показывает, что для действия $\mathbb{R}$ в $L^2(\nu)$ спектральная мера задается “произведением Рисса”

$$\sigma(s) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + 2\sqrt{p_k q_k} \cos(h_k s)) = \prod_{k=1}^{\infty} |\sqrt{p_k} + \sqrt{q_k} e^{ish_k}|^2,$$

оно (согласно Ф. Риссу) сходится в смысле обобщенных функций к положительной мере на $\mathbb{R}$. Если $\frac{h_{k+1}}{h_k} > 3 + \varepsilon$ и $\sum p_k q_k = \infty$, то получаемая мера чисто сингулярна.

Поперечники. Широкую известность принесли Р. С. Исмагилову его работы по поперечникам. Величина $d_n(C, X)$ колмогоровского n -поперечника характеризует возможность наилучшего приближения множества C в нормированном пространстве X подпространствами размерности n .

В первой своей работе по поперечникам [8] Р. С. Исмагилов показал, что в случае гильбертова пространства X поперечники множества допускают двустороннюю оценку через собственные значения и собственные функции интегрального оператора, ядро которого выражается через скалярные произведения векторов множества. Это позволило получить новые результаты по асимптотикам поперечников и привлекло к этой теме внимание специалистов по теории операторов.

Вторая работа Р. С. Исмагилова [9] произвела радикальный сдвиг в проблематике асимптотики поперечников для соболевских классов $W_p^r(\mathbb{T})$ в $L_q(\mathbb{T})$ при $p \leq q$, $q \geq 2$. Нетрудно доказывалось, что уклонение $d(W_p^r(\mathbb{T}), \mathcal{T}_n, L_q(\mathbb{T}))$ класса Соболева от пространств $\mathcal{T}_n$, порожденных тригонометрическими полиномами степени $\leq n$, слабо (по n) эквивалентно $n^{-(r-(1/p-1/q)_+)}$. Довольно быстро было доказано, что приближение пространствами тригонометрических полиномов дает правильный порядок убывания колмогоровских поперечников и при других значениях p, q . В кругу специалистов имела полная уверенность, что это справедливо и в случае $1 \leq p \leq q$, $q \geq 2$. Но Р. С. Исмагилов показал, что это не так: при $1 \leq p < \infty$, $q = \infty$ справедлива другая асимптотика. Для достижения цели он применил методы из других областей, совершенно неожиданные для тех, кто занимался этими задачами. При этом оказалось, в частности, что линейная оболочка n тригонометрических полиномов, расположенных не подряд, дает лучшее приближение, чем пространство $\mathcal{T}_n$ тригонометрических полиномов степени n . Это привело к новым понятиям *тригонометрического* и *абсолютного поперечников*, сыгравшим большую роль в дальнейшем. Это был прорыв в хорошо укрепленной крепостной стене. В этой стене образовалась брешь, и этой задачей стали заниматься многие исследователи. Принципиально новый подход к этой проблематике был найден в работах Б. С. Кашина. Дальнейшее развитие этой тематики связано с именами Э. С. Белинского, Э. М. Галеева, Е. Д. Глускина, Е. Д. Куланина, В. Е. Майорова, В. Н. Темлякова и других.

После аспирантуры Раис Сальманович распределился в только что организованный Московский институт электронного машиностроения (МИЭМ), который вскоре стал одним из центров сосредоточения математиков и математического образования в Москве. Там он работал 25 лет, с 1978 г. в звании профессора (защитил докторскую диссертацию в 1973 г.), в 1982–1988 гг. заведовал кафедрой алгебры и анализа, последние 20 лет он работает в МГТУ им. Н. Э. Баумана. В качестве лектора Раис

Сальманович всегда выделялся ясностью изложения и способностью просто рассказывать сложные вещи, в том числе в нематематической аудитории.

Мы закончим цитатой из его заметки в журнале “Квант” (2003) “Ожерелье Штейнера, или любовь к вычислениям” о поризме Штейнера:

То, что изложено в предыдущем разделе, было получено мной в 1954 году, в летние каникулы после 9-го класса средней школы. Разумеется, я не знал тогда, что задача была поставлена и решена Я. Штейнером еще в 19 веке. Не знал я также об универси и решении рекуррентных соотношений. Но это – тот случай, когда незнание оказалось благом. Ведь что было бы, если бы кто-либо поспешил сообщить мне все эти сведения? Я лишился бы пары воспитательных недель, наполненных тем, что составляет творчество: это и острое любопытство (замкнется или нет цепочка окружностей), и счастливая идея применения формулы Виета, и финальная формула, заключающая решение загадки. Мне повезло: в сельской школе 1954 года никому и не снилось наблюдаемое сегодня мельтешение кружков и олимпиад, профильных школ и лицеев, “Шагов в будущее” (есть и такие) и пр. и пр. Известная истина: самостоятельное творчество – вещь более ценная, чем сумма знаний, а к творчеству побуждает скорее интеллектуальный голод, нежели пресыщение.

Этим нравоучением и закончу: да не покинут чувство меры и здравый смысл того читателя, который пожелает применить его к себе.

Поздравляя Раиса Сальмановича с юбилеем, мы желаем ему всяческого благополучия и дальнейших трудов на благо математики и математического просвещения.

А. М. Вершик, А. А. Кириллов, В. Ф. Молчанов,
Ю. А. Неретин, Г. И. Ольшанский,
В. В. Рыжиков, В. М. Тихомиров, А. А. Шкаликов

Список литературы

- [1] R. S. Ismagilov, *Representations of infinite-dimensional groups*, transl. from the russian manuscript by D. Deart, Transl. Math. Monogr., **152**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, x+197 pp.
- [2] Р. С. Исамагиллов, “Самосопряженные расширения системы коммутирующих симметрических операторов”, *Докл. АН СССР*, **133**:3 (1960), 511–514; англ. пер.: R. S. Ismagilov, “Self-adjoint extensions of a system of commuting symmetric operators”, *Soviet Math. Dokl.*, **1** (1960), 867–870.
- [3] Р. С. Исамагиллов, “О спектре матриц Тёплица”, *Докл. АН СССР*, **149**:4 (1963), 769–772; англ. пер.: R. S. Ismagilov, “The spectrum of Toeplitz matrices”, *Soviet Math. Dokl.*, **4** (1963), 462–465.
- [4] J. S. Howland, T. Kato, “On a theorem of Ismagilov”, *J. Funct. Anal.*, **41**:1 (1981), 37–39.
- [5] Р. С. Исамагиллов, “Условия полуограниченности и дискретности спектра для одномерных дифференциальных операторов”, *Докл. АН СССР*, **140** (1961), 33–36; англ. пер.: R. S. Ismagilov, “Conditions for the semiboundedness and discreteness of the spectrum in the case of one-dimensional differential operators”, *Soviet Math. Dokl.*, **2** (1961), 1137–1140.
- [6] Х. Цикон, Р. Фрёзе, В. Кирш, Б. Саймон, *Операторы Шрёдингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии*, Мир, М., 1990, 408 с.; пер. с англ.: H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch, B. Simon, *Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry*, Texts Monogr. Phys., Springer-Verlag, Berlin, 1987, x+319 pp.
- [7] Р. С. Исамагиллов, “Самосопряженные расширения коммутирующих симметрических операторов”, *УМН*, **17**:1(103) (1962), 177–181.

- [8] Р. С. Исмагилов, “Об n -мерных поперечниках компактов в гильбертовом пространстве”, *Функц. анализ и его прил.*, **2:2** (1968), 32–39; англ. пер.: R. S. Ismagilov, “On n -dimensional diameters of compacts in a Hilbert space”, *Funct. Anal. Appl.*, **2:2** (1968), 125–132.
- [9] Р. С. Исмагилов, “Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами”, *УМН*, **29:3**(177) (1974), 161–178; англ. пер.: R. S. Ismagilov, “Diameters of sets in normed linear spaces and the approximation of functions by trigonometric polynomials”, *Russian Math. Surveys*, **29:3** (1974), 169–186.