Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Комлов, С. П. Суетин, Асимптотическая формула для двухточечного аналога полиномов Якоби, *УМН*, 2013, том 68, выпуск 4, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9545>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 12:02:26

Асимптотическая формула для двухточечного аналога полиномов Якоби

А. В. Комлов, С. П. Суетин

1. В работе В. И. Буслаева [3] в классе многозначных аналитических функций с конечным числом точек ветвления получено обобщение классической теоремы Г. Штала [9] на случай двухточечных (в точках $z = 0$ и $z = \infty$) аппроксимаций Паде (АП). Принципиальное отличие теоремы Буслаева состоит в том, что соответствующий $\mathcal{S}$ -компакт Γ в типичном случае делит риманову сферу $\overline{\mathbb{C}}$ на две области $D_0 \ni 0$ и $D_\infty \ni \infty$ (ср. [5]). В [3], в частности, доказано, что существует предельное распределение нулей двухточечных полиномов Паде, совпадающее с равновесной мерой компакта Γ . Тем самым в [3] решен вопрос об асимптотическом поведении “почти всех” нулей таких полиномов Паде за исключением $o(n)$ из них. Вопрос о полном описании асимптотического поведения *всех* нулей двухточечных полиномов Паде остается открытым (даже для классических АП эта задача до сих пор полностью не решена, см. [10], [2]). В настоящей работе эта задача решается для двухточечных АП функций следующего вида:

$$f(z) = (z - a_1)^\alpha (z - a_2)^{-\alpha}, \quad \text{где } \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}, \quad (1)$$

a_1, a_2 – две различные точки в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Для обычных АП общий случай сводится к случаю $a_1 = 1, a_2 = -1$ и полиномы Паде – это полиномы Якоби $P_n^{(\alpha, -\alpha)}(z)$, для которых справедлива асимптотическая формула [11; гл. 8, формула (8.21.9)]

$$P_n^{(\alpha, -\alpha)}(z) = \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{\alpha/2} \frac{1}{(z^2-1)^{1/4}} (z + (z^2-1)^{1/2})^{n+1/2}, \quad z \notin [-1, 1]. \quad (2)$$

Для функций вида (1) соответствующие двухточечные полиномы Паде $Q_n(z)$ (см. (3)) естественно рассматривать как двухточечный аналог полиномов Якоби (ср. [7]). Мы предполагаем в дальнейшем, что точки a_1, a_2 удовлетворяют условиям $|a_1| < 1 < |a_2|$, $a_1 a_2 = 1, a_1, a_2 \notin \mathbb{R}, i\mathbb{R}$.

Пусть f_0 – элемент функции f , голоморфный в точке $z = 0$, f_∞ – элемент, голоморфный в точке $z = \infty$, а полиномы $P_n, Q_n \in \mathbb{C}_n[z]$, $Q_n \neq 0$, таковы, что

$$R_n(z) := (Q_n f - P_n)(z) = \begin{cases} O(z^{n+1}), & z \rightarrow 0, \\ O(1), & z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (3)$$

В (3) в окрестности точки $z = 0$ берется ветвь f_0 функции f , в окрестности точки $z = \infty$ – ветвь f_∞ . Полиномы P_n, Q_n определены неоднозначно, но рациональная функция P_n/Q_n единственна и называется *двухточечной аппроксимацией Паде* функции f (см. [1], [3]). Здесь рассматривается только тот случай, когда для получения элемента f_∞ аналитическим продолжением элемента f_0 необходимо по крайней мере один раз обойти точку ветвления a_1 или a_2 . Известно [4], [3], что в этом случае компакт Буслаева $\Gamma = \Gamma_{\text{Bus}}(a_1, a_2; f_0, f_\infty)$ разбивает $\overline{\mathbb{C}}$ на две области $D_0 \ni 0$ и $D_\infty \ni \infty$ и допускает следующее описание. Компакт Γ состоит из замыканий критических траекторий квадратичного дифференциала $-V(z)/(A(z)z^2) dz^2$, где $A(z) = (z - a_1)(z - a_2)$, $V(z) = (z - v_1)(z - v_2)$, $|v_1| < 1 < |v_2|$, $v_1 v_2 = 1$; v_1, v_2 – точки Чеботарёва для Γ .

Пусть выполнены следующие условия “общего положения” на расположение точек a_1, a_2 и величину показателя α : $\deg P_n = \deg Q_n = n$, $R_n(z) = c_1 z^{n+1} + \dots$, $c_1 \neq 0, z \rightarrow 0, R_n(z) = c_2 + c/z + \dots$, $c_2 \neq 0, z \rightarrow \infty$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 11-01-00330-а, 12-01-31284-мол-а, 12-01-33020-мол-а-вед, 13-01-12430-офи-м2, 13-01-00622-а) и программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-4664.2012.1).

DOI: 10.4213/rm9545

2. Положим

$$\psi(z) = \frac{1}{2} \int_{a_1}^z \frac{1}{t} \sqrt{\frac{V}{A}}(t) dt, \quad z \in D_0, \quad (4)$$

где путь интегрирования лежит в D_0 и выбрана такая ветвь корня, что $\sqrt{1} = -1$. Пусть $\mathfrak{R}_2$ – двулистная эллиптическая риманова поверхность, заданная уравнением $W^2 = A(z)V(z)$, $d\Omega_1(z) = (A(z)V(z))^{-1/2} dz$ – абелев дифференциал первого рода на $\mathfrak{R}_2$, z_n – решение уравнения

$$\pm \int_{a_1}^{z_n} d\Omega_1 = 2n \int_0^\infty d\Omega_1 + \rho \pmod{\text{periods}(d\Omega_1)}, \quad (5)$$

где ρ не зависит от n , знак “ $\pm$ ” соответствует тому, на каком из двух листов $\mathfrak{R}_2$ лежит точка z_n ; решение уравнения (5) существует и единственно. Положим

$$\Omega(z; \zeta) = \zeta \sqrt{\frac{A}{V}}(\zeta) \int_{a_1}^z \frac{1}{t} \sqrt{\frac{V}{A}}(t) \frac{dt}{t - \zeta}, \quad u_j(z) = \int_{a_1}^z \frac{1}{t} \sqrt{\frac{V}{A}}(t) \frac{dt}{t - v_j}, \quad j = 1, 2, \quad (6)$$

$u(z; \zeta) = I_1(\zeta)u_1(z) + I_2(\zeta)u_2(z)$, где I_1, I_2 – некоторые явно вычисляемые эллиптические интегралы; путь интегрирования в (4) и (6) выбирается один и тот же.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть z_n – решение уравнения (5) с определенным $\rho = \rho(f_0, f_\infty)$ и для некоторой подпоследовательности Λ выполняется условие (ср. [6; (3.3)]):

$$0 < C_1 \leq |z_n| \leq C_2 < \infty, \quad |A(z_n)V(z_n)| \geq C_3 > 0, \quad n \in \Lambda. \quad (7)$$

Тогда в D_0 при $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda$, для нормированного некоторым образом полинома $Q_n(z)$ справедлива следующая формула сильной асимптотики (ср. (2) и [8; (4.2)]):

$$Q_n(z) = \frac{(z - z_n)^{1/2}}{f(z)^{1/2}(A(z)V(z))^{1/4}} z^{(n+1)/2} \exp \left\{ n\psi(z) \pm \frac{1}{2} \Omega(z; z_n) - u(z; z_n) \right\} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right). \quad (8)$$

Формула (8) справедлива равномерно на $K \setminus U_\varepsilon(z_n)$, где $K \subset D_0$ – произвольный компакт, $U_\varepsilon(z_n)$ – ε -окрестность z_n . Аналогичная формула имеет место и в D_∞ .

В типичном случае точки z_n , $n \rightarrow \infty$, всюду плотны на $\overline{\mathbb{C}}$, поэтому подпоследовательность с условием (7) существует, кроме того, ее плотность может быть сделана сколь угодно близкой к единице.

Список литературы

- [1] А. И. Аптекарев, В. И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С. П. Суетин, *УМН*, **66**:6(402) (2011), 37–122. [2] A. I. Aptekarev, M. L. Yattselev, arXiv:1109.0332. [3] В. И. Буслаев, *Матем. сб.*, **204**:2 (2013), 39–72. [4] В. И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С. П. Суетин, Тр. МИАН, **279**, МАИК, М., 2012, 31–58. [5] А. Мартинес-Финкельштейн, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, *Матем. сб.*, **202**:12 (2011), 113–136. [6] A. Martínez-Finkelshtein, E. A. Rakhmanov, S. P. Suetin, *OPSFA '11*, Contemp. Math., **578**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, 165–193. [7] А. Мартинес-Финкельштейн, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, *УМН*, **68**:1(409) (2013), 197–198. [8] J. Nuttall, *Constr. Approx.*, **2**:1 (1986), 59–77. [9] H. Stahl, *J. Approx. Theory*, **91**:2 (1997), 139–204. [10] С. П. Суетин, *Матем. сб.*, **194**:12 (2003), 63–92. [11] Г. Серё, *Ортогональные многочлены*, Физматгиз, М., 1962, 500 с.

А. В. Комлов (A. V. Komlov)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: komlov@mi.ras.ru

Представлено Д. В. Трещёвым

Принято редколлегией

20.07.2013

С. П. Суетин (S. P. Suetin)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: suetin@mi.ras.ru