Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Г. Новиков, И. А. Тайманов, Преобразование Мутара
и двумерные многоточечные дельтаобразные потенциа-
лы, *УМН*, 2013, том 68, выпуск 5, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9548>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 15:13:01

Преобразование Мутара и двумерные многоточечные дельтаобразные потенциалы

Р. Г. Новиков, И. А. Тайманов

Пусть H – двумерный оператор Шрёдингера $H = -\Delta + U = -4\bar{\partial}\partial + U$, где $\partial = (\partial/\partial x - i\partial/\partial y)/2$, $x, y \in \mathbb{R}$, и ω – формальное решение уравнения

$$H\omega = 0. \quad (1)$$

Преобразование Мутара паре H и ω ставит в соответствие оператор

$$\tilde{H} = -4\bar{\partial}\partial + \tilde{U} = -4\bar{\partial}\partial + U - 8\bar{\partial}\partial \log \omega \quad (2)$$

такой, что для любого решения φ уравнения $H\varphi = 0$ функция θ , удовлетворяющая системе

$$(\omega\theta)_z = -i\omega^2\left(\frac{\varphi}{\omega}\right)_z, \quad (\omega\theta)_{\bar{z}} = i\omega^2\left(\frac{\varphi}{\omega}\right)_{\bar{z}}, \quad (3)$$

удовлетворяет уравнению $\tilde{H}\theta = 0$. Функция θ определена по модулю $1/\omega$ в силу константы интегрирования в правой части (3).

Недавно преобразование Мутара, первоначально возникшее в теории поверхностей, было использовано для построения специальных классов двумерных потенциалов и разрушающихся решений уравнения Веселова–Новикова [1], [2].

В отличие от [1], где рассматриваются регулярные потенциалы, настоящая заметка посвящена многоточечным дельтаобразным потенциалам. Мы рассматриваем также собственные функции Фаддеева [3] соответствующих операторов H на нулевом уровне энергии. Эти собственные функции определяются условиями

$$H\psi = 0, \quad \psi(z, \bar{z}, \lambda) = e^{\lambda z}(1 + o(1)) \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

При этом $\psi = e^{\lambda z}(1 + a(\lambda, \bar{\lambda})/z + e^{\bar{\lambda}\bar{z} - \lambda z}b(\lambda, \bar{\lambda})/\bar{z} + o(1/|z|))$, $z \rightarrow \infty$, где a, b – обобщенные данные “рассеяния” Фаддеева на нулевом уровне энергии.

ТЕОРЕМА 1. *Формальное применение преобразования Мутара к нулевому потенциалу $U = 0$ с использованием полиномиальной по z функции $\omega = P(z) = \prod_{k=1}^N (z - z_k)$ приводит к многоточечному дельтаобразному потенциалу*

$$\tilde{U}(z) = -8\pi \sum_{k=1}^N \delta(z - z_k).$$

Для этого потенциала собственные функции Фаддеева на нулевом уровне энергии принимают вид

$$\psi = e^{\lambda z} \left(1 + \frac{2}{P} \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k P^{(k)}(z)}{\lambda^k} \right), \quad \text{где } P^{(k)}(z) = \partial^k P(z). \quad (4)$$

Кроме того, для этих собственных функций $a = -2N/\lambda$ и $b \equiv 0$.

Доказательство этой теоремы основано на решении системы (3) относительно $\psi = \theta$ при $\omega = P(z)$ и $\varphi = ie^{\lambda z}$ и на прямых вычислениях. Однако необходимо уточнить смысл уравнения Шрёдингера с таким потенциалом. Фактически, в этом случае

Работа выполнена во время визита второго автора в Centre de Mathématiques Appliquées (Ecole Polytechnique) в июле 2013 г. Первый автор поддержан ФЦП № 14.A18.21.0866 Министерства образования и науки РФ, второй – программой “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики” Президиума РАН и грантом 1431/ГФ МОН Республики Казахстан.

DOI: 10.4213/rm9548

мы рассматриваем систему Мутара (3) с $\omega = P(z)$ как подходящую регуляризацию уравнения Шрёдингера $\tilde{H}\theta = 0$ с потенциалом $\tilde{U}$ из теоремы 1. При этом для $N = 1$ уравнение Шрёдингера $(-\Delta + \tilde{U})\psi = 0$ с $\tilde{U}$ и ψ из теоремы 1 формально выполнено при следующих соглашениях: $\bar{\partial}(e^{\lambda z}(1/z)^2) = e^{\lambda z}(2/z)\bar{\partial}(1/z) = 2\pi e^{\lambda z}\delta(z)/z$.

Отметим, что функции ψ из (4) существенно отличаются от собственных функций Фаддеева, найденных в [4], [5], для операторов Шрёдингера с многоточечными дельтаобразными потенциалами. Причина состоит в том, что в [4], [5] оператор с таким потенциалом заменен на его регуляризацию, восходящую к [6], тогда как в настоящей заметке мы формально работаем с исходными потенциалами, рассматривая регуляризацию уравнения $\tilde{H}\theta = 0$, задаваемую системой Мутара (3).

При этом, ввиду свойства $b \equiv 0$ для ψ из (4), потенциалы из теоремы 1 могут рассматриваться как “безотражательные” в смысле обобщенных данных “рассеяния” Фаддеева a, b . В этом случае функции ψ из (4) аналогичны собственным функциям Фаддеева, найденным в [7] для некоторых регулярных потенциалов.

В [1], [8] преобразование Мутара было расширено до преобразования решений уравнения Веселова–Новикова [9]

$$U_t = \partial^3 U + \bar{\partial}^3 U + 3\partial(UV) + 3\bar{\partial}(U\bar{V}) = 0, \quad -4\bar{\partial}V = \partial U. \quad (5)$$

Это уравнение имеет форму Манакова $H_t = HA + BH$, где A и B – дифференциальные операторы. Если U удовлетворяет (5) и ω удовлетворяет (1) и уравнению

$$(\partial_t + A)\omega = 0, \quad (6)$$

то расширенное преобразование Мутара от U имеет тот же вид (2) и дает новое решение уравнения (5). Для нулевого потенциала $U = V = 0$ мы имеем $A = \partial^3 + \bar{\partial}^3$,

и $\omega(z, t) = P(z, t) = \prod_{k=1}^N (z - z_k(t))$ удовлетворяет (6) тогда и только тогда, когда

$\partial P/\partial t = \partial^3 P/\partial z^3$. Последнее уравнение описывает алгебраическую динамику нулей $P(z, t)$ (такая динамика по другой причине была рассмотрена в [1]). Формальное применение расширенного преобразования Мутара приводит к потенциалу $\tilde{U}(z, t) = -8\pi \sum_{k=1}^N \delta(z - z_k(t))$, который, по-видимому, может рассматриваться как формальное решение уравнения (5).

Список литературы

- [1] И. А. Тайманов, С. П. Царев, *ТМФ*, **157**:2 (2008), 188–207. [2] И. А. Тайманов, С. П. Царев, *Докл. АН СССР*, **420**:6 (2008), 744–745. [3] Л. Д. Фаддеев, *Докл. АН СССР*, **165**:3 (1965), 514–517. [4] P. G. Grinevich, R. G. Novikov, *Phys. Lett. A*, **376**:12–13 (2012), 1102–1106; arXiv: 1110.3157. [5] P. G. Grinevich, R. G. Novikov, arXiv: 1211.0292. [6] Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев, *Докл. АН СССР*, **137** (1961), 1011–1014. [7] И. А. Тайманов, С. П. Царев, *ТМФ*, **176**:3 (2013), 408–416, arXiv: 1208.4556. [8] H.-C. Hu, S.-Y. Lou, Q.-P. Liu, *Chinese Phys. Lett.*, **20**:9 (2003), 1413–1415. [9] А. П. Веселов, С. П. Новиков, *Докл. АН СССР*, **279**:1 (1984), 20–24.

Р. Г. Новиков (R. G. Novikov)
CNRS, Centre de Mathématiques Appliquées,
Ecole Polytechnique, Palaiseau, France;
Московский физико-технический институт
E-mail: novikov@cmap.polytechnique.fr

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
03.08.2013

И. А. Тайманов (I. A. Taimanov)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
E-mail: taimanov@math.nsc.ru