Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Пономаренко, А. М. Райгородский, Новая нижняя оценка хроматического числа рационального пространства, *УМН*, 2013, том 68, выпуск 5, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9549>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 16:10:44

Новая нижняя оценка хроматического числа рационального пространства

Е. И. Пономаренко, А. М. Райгородский

1. Введение. В середине XX в. Г. Хадвигер и Э. Нелсон поставили задачу об отыскании хроматического числа пространства. Первоначально речь шла о величине $\chi(\mathbb{R}^n)$, равной наименьшему количеству цветов, в которые можно так покрасить все точки $\mathbb{R}^n$, чтобы между точками одного цвета не было расстояния 1. Сейчас известно, что

$$(1.239 \dots + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n$$

(см. [1] и [2]).

В 1976 г. М. Бенда и М. Перлес (см. [3]) предложили обобщение задачи Нелсона–Хадвигера на случай рационального пространства $\mathbb{Q}^n$ с той же евклидовой метрикой, что и в исходной постановке. Зазор между известными оценками соответствующей величины $\chi(\mathbb{Q}^n)$ еще больше:

$$(1.173 \dots + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{Q}^n) \leq (3 + o(1))^n.$$

Нижняя оценка получена в работе [4] второго автора в 2001 г., а верхняя оценка является следствием тривиального неравенства $\chi(\mathbb{Q}^n) \leq \chi(\mathbb{R}^n)$. За прошедшие годы были предложены лишь некоторые “условные” улучшения нижней оценки (см. [5]).

В настоящей заметке мы анонсируем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Имеет место оценка*

$$\chi(\mathbb{Q}^n) \geq (1.199 \dots + o(1))^n.$$

В следующем разделе мы приведем схему доказательства теоремы. Здесь же отметим, что с разнообразными аспектами проблематики можно познакомиться с помощью обзоров [4], [6], [7], а также книг [8]–[10].

2. Схема доказательства теоремы. Возьмем произвольное число $x \in (0, 1/8)$. Для каждого n (величины размерности) положим $q = 2^{2\lceil \log_2(2xn)/2 \rceil + 1}$, $q' = q/n$. Ясно, что $q' \in [x, 4x]$ и правый конец этого отрезка не превосходит $1/2$.

Рассмотрим любые положительные числа k'_{-1}, k'_1 , удовлетворяющие ограничениям $k'_{-1} < k'_1 \leq 1/2$ и $k'_1 + 3k'_{-1} = 2q'$. Положим $k_1 = [k'_1 n]$, $k_{-1} = [k'_{-1} n] - 1$. Имеем $k_{-1} < k_1$ и $k_1 + k_{-1} - 2q < -2k_{-1}$.

Пусть $G_n = (V_n, E_n)$ – граф, у которого

$$V_n = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2q}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2q}} \right\}, \right. \\ \left. \left| \left\{ i : x_i = -\frac{1}{\sqrt{2q}} \right\} \right| = k_{-1}, \left| \left\{ i : x_i = \frac{1}{\sqrt{2q}} \right\} \right| = k_1 \right\}$$

и $E_n = \{ \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 1 \}$. Хроматическое число $\chi(G_n)$ этого графа служит нижней оценкой для $\chi(\mathbb{Q}^n)$, ведь все координаты точек из V_n рациональны. В свою очередь

$$\chi(G_n) \geq \frac{|V_n|}{\alpha(G_n)} = \frac{C_n^{k_1} C_n^{k_{-1}}}{\alpha(G_n)},$$

где $\alpha(G_n)$ – число независимости графа, т.е. максимальная мощность такого подмножества множества его вершин, в котором нет ребер.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-01-00683), гранта Президента РФ МД-6277.2013.1 и программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-2519.2012.1).

DOI: 10.4213/rm9549

ЛЕММА. *Выполнена оценка*

$$\alpha(G_n) \leq \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} C_n^i C_{n-i}^j,$$

где $\mathcal{A} = \{(i, j) : i + j \leq n, i + 2j \leq q - 1\}$.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЛЕММЫ. Пусть $W = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s\} \subset V_n$ – произвольное множество вершин, в котором нет ребер, т.е. для любых различных i, j имеем $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| \neq 1$. Пусть $W' = \{\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_s\}$, где $\mathbf{x}'_i = \sqrt{2q} \cdot \mathbf{x}_i \in \{-1, 0, 1\}^n$ для каждого $i \in \{1, \dots, s\}$. Тогда для любых различных i, j имеем $(\mathbf{x}'_i, \mathbf{x}'_j) \neq k_1 + k_{-1} - q$ (здесь $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – евклидово скалярное произведение).

Пусть I – множество, полученное из $\{0, 1, \dots, q-1\}$ удалением вычета числа $k_1 + k_{-1}$ по модулю q , и a – степень, в которой двойка входит в каноническое разложение числа $\prod_{\nu \in I} (\nu - (k_1 + k_{-1}))$. Каждому вектору $\mathbf{x}'_i \in W'$ поставим в соответствие многочлен

$$F_{\mathbf{x}'_i}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2^a} \prod_{\nu \in I} (\nu - (\mathbf{x}'_i, \mathbf{y})), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n), \quad \forall \nu \ y_\nu^3 = y_\nu.$$

Нетрудно видеть, что для любых различных i, j выполнено $(\mathbf{x}'_i, \mathbf{x}'_j) \not\equiv k_1 + k_{-1} \pmod{q}$, но для любого i выполнено $(\mathbf{x}'_i, \mathbf{x}'_i) = k_1 + k_{-1}$. Исходя из этого, можно показать, что многочлены $F_{\mathbf{x}'_1}, \dots, F_{\mathbf{x}'_s}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Они порождены мономами степени не выше $q-1$, в которые каждая переменная входит в степени не выше 2. Отсюда и следует оценка величины s , заявленная в лемме.

В итоге получаем, что

$$\chi(\mathbb{Q}^n) \geq \chi(G_n) \implies \chi(\mathbb{Q}^n) \geq \max_{x \in (0, 1/8)} \min_{q' \in [x, 4x]} \max_{k'_1, k'_{-1}} \frac{C_n^{k'_1} C_{n-k'_1}^{k'_{-1}}}{\sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} C_n^i C_{n-i}^j}.$$

Стандартная выкладка с привлечением формулы Стирлинга показывает, что при $x \approx 0.1089$, $q' \approx 0.4356$, $k'_1 \approx 0.3437$, $k'_{-1} \approx 0.1758$ получается как раз $\chi(\mathbb{Q}^n) \geq (1.199 \dots + o(1))^n$. Теорема доказана.

Список литературы

- [1] А. М. Райгородский, *УМН*, **55:2**(332) (2000), 147–148. [2] D. G. Larman, C. A. Rogers, *Mathematika*, **19:1** (1972), 1–24. [3] M. Benda, M. Perles, “Colorings of metric spaces”, *Geombinatorics*, **9:3** (2000), 113–126. [4] А. М. Райгородский, *УМН*, **56:1**(337) (2001), 107–146. [5] А. М. Райгородский, И. М. Шитова, *Матем. сб.*, **199:4** (2008), 107–142. [6] A. M. Raigorodskii, *Thirty essays on geometric graph theory*, Springer, Berlin, 2013, 429–460. [7] L. A. Székely, *Paul Erdős and his mathematics, II* (Budapest, 1999), Bolyai Soc. Math. Stud., **11**, János Bolyai Math. Soc., Budapest; Springer-Verlag, Berlin, 2002, 649–666. [8] А. М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, МЦНМО, М., 2007, 138 с. [9] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer, New York, 2005, xii+499 pp. [10] A. Soifer, *The mathematical coloring book*, Springer, New York, 2009, xxx+607 pp.

Е. И. Пономаренко (Е. И. Ponomarenko)
Московский физико-технический институт
E-mail: alesten@yandex.ru

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
03.08.2013

А. М. Райгородский (А. М. Raigorodskii)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова;
Московский физико-технический институт
E-mail: mraigor@yandex.ru