Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. А. Жуковская, Особенности функции минимакса, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 2, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm955>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 13:44:52

ОСОБЕННОСТИ ФУНКЦИИ МИНИМАКСА

Т. А. ЖУКОВСКАЯ

Для уравнений Гамильтона–Якоби с выпуклым по импульсам гамильтонианом слабое решение строится по правилу Максвелла: его значение в каждой точке q пространства-времени задается как наименьшая над q точка соответствующего волнового фронта (см., например, [3]). Типичные особенности этого решения – это особенности множества Максвелла, открытые Томом и изученные Арнольдом и его школой (Л. Н. Брызгалова, В. И. Матов и др.) в 70-х гг. (см. [1]).

М. Шапрон [2] построил слабое решение в общем (не обязательно выпуклом) случае. Используя некоторые конструкции [6], он предложил *правило минимакса* для выбора нужного значения над каждой точкой пространства-времени.

Число типичных особенностей для минимаксного решения намного больше, чем для функции минимума, дающей решение в выпуклом случае: так, для (ко)размерности 1, 2, 3 существуют, соответственно, 2, 7 и 28 различных типов “минимаксных особенностей”.

Минимакс производящих семейств. Пусть $\pi_E: E \rightarrow B^m$ – тривиальное расслоение со слоями $X_q \equiv \mathbb{R}^{2N}$, $q \in B^m$ (в данной работе пространственно-временные переменные не разделяются). Функция $F: E \rightarrow \mathbb{R}$ *квадратична на бесконечности* (ср. [6]), если существует такая функция $\Theta: E \rightarrow \mathbb{R}$, что каждая $\Theta|_{X_q}$ является невырожденной квадратичной формой, оба индекса инерции которой равны N , причем $F - \Theta$ равномерно C^1 -ограничена в E . Далее считаем, что многообразие $B = B^m$ компактно и что $\Theta(x, q) = \sum_{i=1}^N (x_i^+)^2 - \sum_{i=1}^N (x_i^-)^2$, где x_i^+ и x_i^- – компоненты точки $x = (x^+, x^-) \in X_q \equiv \mathbb{R}^N \oplus \mathbb{R}^N$.

Пусть $F: E \rightarrow \mathbb{R}$ – функция, квадратичная на бесконечности. Для $r \in \mathbb{R}$ положим $X_{r,q} = \{x \in X_q : F(x, q) \leq r\}$. Тогда (см. [4]) при достаточно больших $r > 0$ множество $X_{-r,q}$ (с любым q) имеет гомотопический тип $N - 1$ -мерной сферы, в частности, $H_N(X_q, X_{-r,q}) \simeq \mathbb{Z}$. Обозначим через A образующую группы $H_N(X_q, X_{-r,q})$, где $r > 0$ фиксировано и достаточно велико (так что, в частности, для любого $q \in B$ поле $\text{grad } F(\cdot, q)$ трансверсально границе $X_{-r,q}$). Семейство F определяет *функцию минимакса*

$$u_F: B \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_F(q) \equiv \inf_{[\sigma]=A} \max_{x \in |\sigma|} F(x, q),$$

где σ – относительный цикл, реализующий A , максимум взят по всем $x \in X_q$, принадлежащим носителю σ , а $\inf$ берется по всем реализациям σ класса A .

Легко доказывается (см. [4]), что для любого $q \in B$ $u_F(q)$ – критическое значение функции $F(\cdot, q)$, и что функция $u_F: B \rightarrow \mathbb{R}$ липшицева.

Локализация особенностей минимакса общего положения. Пусть $F(x, q)$ – квадратичное на бесконечности семейство общего положения. Тогда для любого q число критических точек $F(\cdot, q)$ конечно. Пусть $q_0 \in B$ и $x_1, \dots, x_s$ – все критические точки $F(\cdot, q_0)$, соответствующие критическому значению $u \equiv u_F(q_0)$. Существует такое $\varepsilon > 0$, что ε -окрестность u не содержит других критических значений $F(\cdot, q_0)$. Для простоты обозначим $X_{q_0} \simeq X$, $X_r \equiv X_{r,q_0}$. Для достаточно малых ε рассмотрим естественные гомоморфизмы

$$i_{1*}: H_N(X, X_{-r}) \rightarrow H_N(X, X_{u-\varepsilon}), \quad i_{2*}: H_N(X_{u+\varepsilon}, X_{u-\varepsilon}) \rightarrow H_N(X, X_{u-\varepsilon}).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ (см. [4]). 1) *Образ $i_{1*}(A)$ цикла A не равен 0 и принадлежит образу гомоморфизма i_{2*} .*

2) *Пусть $O_i \subset X$, $i = 1, \dots, s$, – маленькие шары с центрами в x_i , тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$*

$$H_N(X_{u+\varepsilon}, X_{u-\varepsilon}) \simeq H_N\left(X_{u-\varepsilon} \cup \left(\bigcup_{i=1}^s O_i\right), X_{u-\varepsilon}\right) \simeq \bigoplus_{i=1}^s H_N(O_i, O_i \cap X_{u-\varepsilon}),$$

и, более того, аналогичные изоморфизмы имеют место в слое над любой точкой $q \in B$, достаточно близкой к q_0 .

Положим $P \equiv i_{2*}^{-1}(i_{1*}A)$: это нетривиальный смежный класс подгруппы $\ker(i_{2*})$. Мы отождествляем P с подмножеством группы $\bigoplus_{i=1}^s H_N(O_i, O_i \cap X_{u-\varepsilon})$ в соответствии с предыдущим изоморфизмом. Иными словами, циклы σ , реализующие элементы P , — это наборы $(\sigma_1, \dots, \sigma_s)$, где σ_i — циклы в $O_i/(O_i \cap X_{u-\varepsilon})$. По определению, вблизи q_0

$$u_F(q) = \tilde{u}_{F,P}(q) \equiv \min_{[\sigma] \in P} \left(\max_{i=1, \dots, s} \left(\max_{x \in O_i \cap [\sigma]} F(x, q) \right) \right).$$

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть F — общего положения. Тогда

(i) При $t \leq 5$ функция u_F вблизи точки q_0 R^+ -эквивалентна нормальной форме, принадлежащей некоторому конечному списку (зависящему от t); этот список образован ростками функций

$$(1) \quad \min_{([\sigma_1], \dots, [\sigma_s]) \in P} \left(\max_{i=1, \dots, s} \left(\max_{x \in [\sigma_i]} F_{\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_s}(x, q) \right) \right),$$

где особенности $\mathcal{N}_i$ — из списка простых особенностей [5], [1], сумма μ их чисел Милнора не превосходит $t+1$ (функция (1) явно зависит от $\mu-1$ переменных), σ_i — относительные циклы, а P обозначает нетривиальный смежный класс по некоторой подгруппе группы $\bigoplus H_N(\mathcal{N}_i)_{x_i} \equiv \bigoplus_{i=1}^s H_N(O_i, O_i \cap X_{u-\varepsilon})$ (R^+ -тип этой нормальной формы задается набором классов особенностей $\mathcal{N}_i$, подгруппой этой группы и ее смежным классом).

(ii) Для всякого t функция минимакса u_F локально топологически R^+ -эквивалентна одной из нормальных форм, принадлежащих некоторому конечному списку (зависящему от t).

(iii) График функции минимакса u_F локально диффеоморфен замкнутому полуалгебраическому множеству, в частности, кусочно гладок.

Я благодарю М. Шапрона за постановку задачи и руководство при ее решении, а также В.А. Васильева, С.М. Гусейн-Заде, В.М. Закалюкина и А.А. Давыдова за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, 1982. [2] Chaperon M. // C. R. A. Sci. Paris. 1991. V. 312. Série I. P. 345–384. [3] Debeneix T. Études de certains systèmes hyperboliques de N equations à N variables, thèse, 1978. [4] Joukovskaja T. Singularités de minimax et solutions faibles d'équations aux dérivées partielles, thèse de doctorat. Paris, 1994. [5] Thom R. // Bull. AMS. 1960. V. 75. P. 240–284. [6] Viterbo C. // Math. Ann. 1992. V. 292. P. 685–710.

Математический факультет
Университет Париж-7

Принято редколлегией
15.01.1996