Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Э. Деркачев, В. П. Спиридонов, Уравнение Янга–Бакстера, перестановки параметров и эллиптический бета-интеграл, *УМН*, 2013, том 68, выпуск 6, 59–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9552>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 16:02:59

УДК 517.3+517.9

Уравнение Янга–Бакстера, перестановки параметров и эллиптический бета-интеграл

С. Э. Деркачёв, В. П. Спиридонов

Строится бесконечномерное решение уравнения Янга–Бакстера ранга 1, которое представляется интегральным оператором с эллиптическим гипергеометрическим ядром, действующим в пространстве функций двух комплексных переменных. Этот R-оператор сплетает произведение двух стандартных L-операторов, ассоциированных с алгеброй Складина, эллиптической деформацией алгебры $sl(2)$. Он строится из трех базисных операторов S_1 , S_2 и S_3 , генерирующих группу перестановок четырех параметров $\mathfrak{S}_4$. Справедливость ключевых соотношений Кокстера (включая соотношение звезда-треугольник) основана на формуле для вычисления эллиптического бета-интеграла и лемме Бейли, ассоциированной с эллиптическим преобразованием Фурье. Операторы S_j определяются однозначно с помощью эллиптического модулярного дубля.

Библиография: 37 названий.

Ключевые слова: уравнение Янга–Бакстера, алгебра Складина, группа перестановок, эллиптический бета-интеграл.

DOI: 10.4213/rm9552

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	60
2. Алгебра Складина.....	61
3. Общая конструкция.....	64
4. Элементарные перестановки и сплетающие операторы.....	70
5. Соотношения Кокстера и эллиптический бета-интеграл.....	78
6. Связь с эллиптическим преобразованием Фурье.....	83
7. Единственность решений и эллиптический модулярный дубль.....	85
8. Конечномерная редукция.....	87
9. Решения при $\text{Im}(\eta) < 0$ и $\text{Im}(\eta) = 0$	94
10. Заключение.....	99
11. Приложение.....	101
Список литературы.....	104

Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 11-01-00570, 11-01-12037, 12-02-91052) и Немецкой ассоциации содействия исследованиям (грант KI 623/8-1). Работа второго автора выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00980) и НИУ “ВШЭ” (грант № 12-09-0064).

1. Введение

Уравнение Янга–Бакстера (УЯБ)

$$\mathbb{R}_{12}(u-v)\mathbb{R}_{13}(u)\mathbb{R}_{23}(v) = \mathbb{R}_{23}(v)\mathbb{R}_{13}(u)\mathbb{R}_{12}(u-v) \quad (1.1)$$

играет ключевую роль в теории квантовых вполне интегрируемых систем [1]–[7]. Его общее решение описывается операторами $\mathbb{R}_{ik}(u)$, действующими в тензорном произведении трех (в общем случае различных) пространств $\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2 \otimes \mathbb{V}_3$. Индексы i и k указывают, что оператор $\mathbb{R}_{ik}(u)$ действует нетривиальным образом в тензорном произведении $\mathbb{V}_i \otimes \mathbb{V}_k$ и является единичным оператором в оставшейся части $\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2 \otimes \mathbb{V}_3$. Оператор $\mathbb{R}_{ik}(u)$ зависит от комплексного спектрального параметра u и называется R-матрицей (или R-оператором).

Для пространств $\mathbb{V}_i$ конечной размерности имеется три возрастающих уровня сложности известных решений УЯБ, описываемых рациональными, тригонометрическими и эллиптическими функциями. Изучение наиболее сложного эллиптического уровня было инициировано Бакстером [8] в случае, когда все пространства $\mathbb{V}_i$ являются двумерными. В более сложной ситуации, когда одно из пространств становится бесконечномерным, основополагающую роль играет алгебра Складина [9], [10]. Наша основная цель состоит в построении решения УЯБ, когда все пространства $\mathbb{V}_i$ бесконечномерны и $\mathbb{R}_{ik}(u)$ описываются интегральными операторами. В этом случае иерархия решений УЯБ привязана к обычным гипергеометрическим, q -гипергеометрическим и эллиптическим гипергеометрическим функциям [11], в порядке возрастания сложности. Явная реализация R-матрицы в виде интегрального оператора в простейшем случае алгебры симметрии $\mathfrak{sl}(2)$ ранга 1 была детально рассмотрена в работе [12]. В настоящей статье мы обсуждаем только R-операторы, связанные с наиболее сложным эллиптическим уровнем.

Эллиптические гипергеометрические интегралы введены в работах [13], [14]. Они определяют общую форму эллиптических гипергеометрических функций, которые не могут быть описаны бесконечными рядами [15] из-за проблем со сходимостью. Открытие таких функций и различных соотношений для них составили прорыв в теории специальных функций. Эти функции обобщают все ранее сконструированные функции гипергеометрического типа и все еще обладают свойствами, характерными для классических специальных функций [16]. В частности, эллиптические бета-интегралы [11], [13] образуют новый класс точно вычисляемых интегралов, обобщающих бета-интегралы Эйлера, Сельберга и другие подобные интегралы и их q -аналоги. Некоторое интегральное преобразование типа эллиптического преобразования Фурье было предложено в работе [17] как интегральное обобщение хорошо известного преобразования цепочки Бейли для рядов [16]. Эллиптическое расширение модулярного дубля Фаддеева [18] было введено в работе [19]. Все эти конструкции будут играть ключевую роль в нашем последующем рассмотрении.

Мы используем общую стратегию построения операторных решений УЯБ, первоначальные шаги которой были открыты в работе [20]. Ее построение было завершено на рациональном уровне в работах [21], [22], в которых было построено $\mathrm{SL}(N, \mathbb{C})$ -инвариантное решение УЯБ, связанное с корневой системой A_{N-1} .

В работе [23] этот метод применялся также и к эллиптическому уровню с помощью некоторых формальных бесконечных рядов. Здесь мы применяем его для построения решений УЯБ, связанных с эллиптическими гипергеометрическими интегралами. Во-первых, мы определяем некоторые полезные формальные операторы S_1 , S_2 и S_3 , осуществляющие элементарные перестановки параметров в определяющем RLL-соотношении. Один из этих операторов является сплетающим оператором для алгебры Складина. Затем мы строим их в явном виде как интегральные операторы с эллиптическими гипергеометрическими ядрами. Наконец, мы доказываем для этих операторов соотношения Кокстера, используя эллиптический бета-интеграл и связанную с ним лемму Бейли, и, таким образом, подтверждаем, что эти операторы действительно генерируют группу $\mathfrak{S}_4$. Кубическое соотношение Кокстера представляет собой соотношение звезда-треугольник. Операторы S_1 , S_2 и S_3 определяются однозначно, при условии использования принципа модулярного дублирования. Как обсуждается в заключительном разделе 10, наши результаты применимы к описанию взаимосвязей между интегрируемыми $2d$ -спиновыми системами и $4d$ -суперсимметричными калибровочными теориями поля.

2. Алгебра Складина

Простейший пример уравнения (1.1) возникает, когда все пространства $\mathbb{V}_i$ двумерны, $\mathbb{V}_i = \mathbb{C}^2$. Для этого случая при решении восьмивершинной модели Р. Бакстер нашел следующую R-матрицу [1], [2], [8]:

$$\mathbb{R}_{12}(u) = \sum_{a=0}^3 w_a(u) \sigma_a \otimes \sigma_a, \quad w_a(u) = \frac{\theta_{a+1}(u + \eta)}{\theta_{a+1}(\eta)}, \quad (2.1)$$

где $\sigma_0 = \mathbb{1}$ и σ_α , $\alpha = 1, 2, 3$, являются стандартными матрицами Паули. Для краткости мы используем обозначение $\theta_j(x)$ вместо $\theta_j(x | \tau)$ для тэта-функций Якоби с модулярным параметром τ . Определения тэта-функций и их полезные свойства приведены в приложении. R-матрица (2.1) зависит от спектрального параметра $u \in \mathbb{C}$ и двух дополнительных свободных переменных $\eta \in \mathbb{C}$, $\theta_j(\eta) \neq 0$, $j = 1, \dots, 4$, и $\tau \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(\tau) > 0$. Другое (4×4) -матричное решение УЯБ было построено Б. Фельдерхофом [24]. Как показано И. М. Кричеве-ром [25], R-матрицы Бакстера и Фельдерхофа представляют все решения УЯБ для $\mathbb{V}_i = \mathbb{C}^2$.

На следующем уровне сложности соотношения (1.1) одно из пространств, скажем, $\mathbb{V}_3$, является произвольным, а $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2 = \mathbb{C}^2$. В этом случае R-матрица $\mathbb{R}_{13}(u) = L_{13}(u)$ (и $\mathbb{R}_{23}(u) = L_{23}(u)$) известна как квантовый L-оператор или матрица Лакса. Это матрица с двумя строками и двумя столбцами, действующая в пространстве $\mathbb{V}_1$,

$$\begin{aligned} L_{13}(u) &= L(u) = \sum_{a=0}^3 w_a(u) \sigma_a \otimes \mathbf{S}^a \\ &= \begin{pmatrix} w_0(u) \mathbf{S}^0 + w_3(u) \mathbf{S}^3 & w_1(u) \mathbf{S}^1 - i w_2(u) \mathbf{S}^2 \\ w_1(u) \mathbf{S}^1 + i w_2(u) \mathbf{S}^2 & w_0(u) \mathbf{S}^0 - w_3(u) \mathbf{S}^3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\mathbf{S}^a$, входящие в матричные элементы, являются некоторыми операторами, действующими в пространстве $\mathbb{V}_3$. Те же самые операторы $\mathbf{S}^a$ входят в $L_{23}(u)$, действующую как (2×2) -матрица в пространстве $\mathbb{V}_2$. В этом случае уравнением для L-оператора является УЯБ вида

$$\mathbb{R}_{12}(u-v)L_{13}(u)L_{23}(v) = L_{23}(v)L_{13}(u)\mathbb{R}_{12}(u-v), \quad (2.3)$$

где $\mathbb{R}_{12}(u)$ – бакстеровская R-матрица (2.1). Это уравнение эквивалентно следующему набору соотношений для четырех генераторов алгебры Складина $\mathbf{S}^0, \mathbf{S}^1, \mathbf{S}^2, \mathbf{S}^3$ [9], [10]:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^\alpha \mathbf{S}^\beta - \mathbf{S}^\beta \mathbf{S}^\alpha &= i \cdot (\mathbf{S}^0 \mathbf{S}^\gamma + \mathbf{S}^\gamma \mathbf{S}^0), \\ \mathbf{S}^0 \mathbf{S}^\alpha - \mathbf{S}^\alpha \mathbf{S}^0 &= i \mathbf{J}_{\beta\gamma} \cdot (\mathbf{S}^\beta \mathbf{S}^\gamma + \mathbf{S}^\gamma \mathbf{S}^\beta), \end{aligned}$$

где триплет (α, β, γ) является произвольной циклической перестановкой $(1, 2, 3)$ и структурные постоянные $\mathbf{J}_{\beta\gamma}$ параметризуются в терминах тэта-функций следующим образом:

$$\mathbf{J}_{12} = \frac{\theta_1^2(\eta)\theta_4^2(\eta)}{\theta_2^2(\eta)\theta_3^2(\eta)}, \quad \mathbf{J}_{23} = \frac{\theta_1^2(\eta)\theta_2^2(\eta)}{\theta_3^2(\eta)\theta_4^2(\eta)}, \quad \mathbf{J}_{31} = -\frac{\theta_1^2(\eta)\theta_3^2(\eta)}{\theta_2^2(\eta)\theta_4^2(\eta)}. \quad (2.4)$$

Можно записать $\mathbf{J}_{\alpha\beta} = (\mathbf{J}_\beta - \mathbf{J}_\alpha)/\mathbf{J}_\gamma$, $\gamma \neq \alpha, \beta$, где

$$\mathbf{J}_1 = \frac{\theta_2(2\eta)\theta_2(0)}{\theta_2^2(\eta)}, \quad \mathbf{J}_2 = \frac{\theta_3(2\eta)\theta_3(0)}{\theta_3^2(\eta)}, \quad \mathbf{J}_3 = \frac{\theta_4(2\eta)\theta_4(0)}{\theta_4^2(\eta)}.$$

Имеются два оператора Казимира, коммутирующие со всеми генераторами:

$$\mathbf{K}_0 = \sum_{a=0}^3 \mathbf{S}^a \mathbf{S}^a, \quad \mathbf{K}_2 = \sum_{\alpha=1}^3 \mathbf{J}_\alpha \mathbf{S}^\alpha \mathbf{S}^\alpha, \quad [\mathbf{K}_0, \mathbf{S}^a] = [\mathbf{K}_2, \mathbf{S}^a] = 0.$$

Мы будем пользоваться явной реализацией генераторов как конечно-разностных операторов, найденной в работе [10]:

$$[\mathbf{S}^a \Phi](z) = \frac{i^{\delta_{a,2}} \theta_{a+1}(\eta)}{\theta_1(2z)} [\theta_{a+1}(2z - 2\eta\ell) \cdot \Phi(z + \eta) - \theta_{a+1}(-2z - 2\eta\ell) \cdot \Phi(z - \eta)], \quad (2.5)$$

где $\Phi(z)$ – некоторые (предположительно мероморфные) функции $z \in \mathbb{C}$. В этой реализации операторы Казимира сводятся к следующим скалярным выражениям:

$$\mathbf{K}_0 = 4\theta_1^2((2\ell + 1)\eta), \quad \mathbf{K}_2 = 4\theta_1(2(\ell + 1)\eta)\theta_1(2\ell\eta).$$

Параметр $\ell \in \mathbb{C}$ называется *спином*. Он определяет представления алгебры Складина, поскольку фиксирует (совместно с η и τ) значения операторов Казимира. Заметим, что R-матрица (2.1) инвариантна относительно замены переменных $u \rightarrow -u$, $\eta \rightarrow -\eta$. Однако для операторов (2.5) отражение $\eta \rightarrow -\eta$ меняет знак: $\mathbf{S}^a \rightarrow -\mathbf{S}^a$. Поэтому L-оператор меняет знак, если одновременно изменить знаки спектрального параметра u и η .

Для реализации операторов $\mathbf{S}^a$ в виде (2.5) существует полезное факторизованное представление L-оператора [26]:

$$\begin{aligned} L(u_1, u_2) = \frac{1}{\theta_1(2z)} & \begin{pmatrix} \bar{\theta}_3(z - u_1) & -\bar{\theta}_3(z + u_1) \\ -\bar{\theta}_4(z - u_1) & \bar{\theta}_4(z + u_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\eta\partial_z} & 0 \\ 0 & e^{-\eta\partial_z} \end{pmatrix} \\ & \times \begin{pmatrix} \bar{\theta}_4(z + u_2) & \bar{\theta}_3(z + u_2) \\ \bar{\theta}_4(z - u_2) & \bar{\theta}_3(z - u_2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $e^{\eta\partial_z}$ обозначает оператор сдвига, $e^{\eta\partial_z} f(z) = f(z + \eta)$. Новые параметры $u_1 = u/2 + \eta(\ell + 1/2)$ и $u_2 = u/2 - \eta(\ell + 1/2)$ являются простыми линейными комбинациями спектрального параметра u и спина ℓ . Здесь мы используем также обозначение $\bar{\theta}_a(x) = \theta_a(x | \tau/2)$ для тэта-функций с модулярным параметром $\tau/2$.

Когда $2\ell + 1$ является положительным целым числом, существует $(2\ell + 1)$ -мерное пространство $\Theta_{4\ell}^+$ четных тэта-функций порядка 4ℓ (имеющих 4ℓ нулей в фундаментальном параллелограмме периодов), которое инвариантно относительно действия генераторов $\mathbf{S}^a$. При $\ell = 1/2$ можно выбрать базис Θ_2^+ -функций в виде $e_1 = \bar{\theta}_4(x)$ и $e_2 = \bar{\theta}_3(x)$. Генераторы алгебры Складина сводятся в этом базисе к сигма-матрицам $\mathbf{S}^a = \theta_1(2\eta | \tau)\sigma_a$ и L-оператор становится пропорциональным бакстеровской R-матрице (2.1).

Оператор L (2.2) не уникален. Например, оператор $\sigma_\beta L$, где σ_β – произвольная матрица Паули, также является решением уравнения (2.3). Это следует из того факта, что матрица $X_\beta = \sigma_\beta \otimes \sigma_\beta$ обладает свойствами $X_\beta^2 = 1$ и $X_\beta \mathbb{R}_{12}(u) X_\beta = \mathbb{R}_{12}(u)$. Эта свобода приводит также к существованию нетривиальных автоморфизмов алгебры Складина [10].

Наиболее высокий уровень сложности R-матрицы соответствует ситуации, когда все пространства $\mathbb{V}_i$ являются бесконечномерными. В этом случае возникают наиболее общие решения УЯБ.

В следующем разделе мы объясняем шаг за шагом нашу стратегию построения бесконечномерных решений, которая по существу совпадает с использованной в работе [23], где важную роль играет сплетающий оператор. Для $2\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ такой сплетающий оператор был впервые построен А. Забродным [27] в виде конечной суммы степеней конечно-разностного оператора $e^{-\eta\partial_z}$. Его прямолинейное обобщение на произвольные значения ℓ в виде бесконечного ряда, предложенное в [26], имеет только формальный смысл из-за проблемы со сходимостью. Тем не менее требуемые соотношения Кокстера были подтверждены проверкой совпадения коэффициентов в двух таких формальных бесконечных рядах с помощью формулы суммирования Френкеля–Тураева [15].

Здесь мы придаем этой конструкции строгое математическое обоснование, используя другой общий анзац для сплетающего оператора, являющийся более полезным для практических применений. Ключевыми ингредиентами, необходимыми для завершения этой программы, являются эллиптический бета-интеграл [11], [13], определяющий наиболее общую известную точную формулу интегрирования, обобщающую бета-интеграл Эйлера, и эллиптическое преобразование Фурье работы [17], определенное именно с помощью необходимого сплетающего оператора.

3. Общая конструкция

Мы решаем УЯБ (1.1), когда все пространства $\mathbb{V}_i$ бесконечномерны, в два этапа:

- на первом этапе мы решаем определяющее RLL-соотношение, используя в качестве элементарных строительных блоков некоторые простые операторы S_1 , S_2 и S_3 ; ключевыми структурными элементами на этом шаге являются соотношения Кокстера для S_i , справедливость которых гарантирована формулой для вычисления эллиптического бета-интеграла [13];
- на втором этапе мы доказываем, что оператор $\mathbb{R}_{12}(u)$, найденный с помощью определяющего RLL-соотношения, удовлетворяет УЯБ (1.1).

Рассмотрим реализацию УЯБ, отличающуюся от предыдущих, а именно, пусть пространства $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ являются произвольными, а пространство $\mathbb{V}_3$ двумерно. Тогда уравнение (1.1) сводится к определяющему уравнению для бесконечномерной (неизвестной) R-матрицы, называемому RLL-соотношением [9], [28]:

$$\mathbb{R}_{12}(u-v)L_1(u)L_2(v) = L_2(v)L_1(u)\mathbb{R}_{12}(u-v). \quad (3.1)$$

Здесь используется компактное обозначение: индекс k в L_k указывает, что генераторы алгебры Складина S_k^a , входящие в эту матрицу, являются операторами, действующими в пространстве $\mathbb{V}_k$, т.е. $S_k^a: \mathbb{V}_k \rightarrow \mathbb{V}_k$. Операторы S_1^a и S_2^b действуют в различных пространствах и, очевидно, коммутируют друг с другом, $[S_1^a, S_2^b] = 0$. Матрицы L_k в уравнении (3.1) умножаются как обычные (2×2) -матрицы, действующие в пространстве $\mathbb{V}_3 = \mathbb{C}^2$.

Из-за неединственности представления L-оператора существует несколько возможных форм уравнения (3.1) с различными $\mathbb{R}$ -операторами, нумеруемыми двумя индексами a и b , связанными с различными возможными L-операторами:

$$\mathbb{R}_{12}^{ab}(u-v)\sigma_a L_1(u)\sigma_b L_2(v) = \sigma_b L_2(v)\sigma_a L_1(u)\mathbb{R}_{12}^{ab}(u-v).$$

По причинам, которые станут ясными апостериори, мы фиксируем с самого начала $a = b = 3$ и обозначаем $\mathbb{R}_{jk}(u) = \mathbb{R}_{jk}^{33}(u)$. В этом случае можно сократить одну σ_3 -матрицу и наше главное определяющее RLL-соотношение принимает вид

$$\mathbb{R}_{12}(u-v)L_1(u)\sigma_3 L_2(v) = L_2(v)\sigma_3 L_1(u)\mathbb{R}_{12}(u-v). \quad (3.2)$$

Мы подразумеваем, что $\mathbb{V}_1$ является пространством функций комплексной переменной z_1 , а $\mathbb{V}_2$ – пространством функций комплексной переменной z_2 . Соответственно, пространство $\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2$, в котором действует оператор $\mathbb{R}_{12}$, есть пространство функций $\Phi(z_1, z_2)$ двух независимых переменных z_1 и z_2 .

Удобно выделить из R-матрицы оператор перестановки: $\mathbb{R}_{12}(u) = \mathbb{P}_{12}\mathbb{R}_{12}(u)$, где оператор $\mathbb{P}_{12}$ переставляет аргументы, $\mathbb{P}_{12}\Phi(z_1, z_2) = \Phi(z_2, z_1)$. Тогда определяющее уравнение для оператора $\mathbb{R}_{12}$ имеет следующий явный вид:

$$\mathbb{R}_{12}(u-v)L_1(u_1, u_2)\sigma_3 L_2(v_1, v_2) = L_1(v_1, v_2)\sigma_3 L_2(u_1, u_2)\mathbb{R}_{12}(u-v), \quad (3.3)$$

где z , ∂_z и ℓ в генераторах алгебры Складина (2.5), входящих в L_1 , заменены на z_1 , ∂_{z_1} и ℓ_1 , в то время как в L_2 они заменены на z_2 , ∂_{z_2} и ℓ_2 . Мы используем

также следующее обозначение для комбинаций спектральных параметров и спиновых переменных:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{u}{2} + \eta \left(\ell_1 + \frac{1}{2} \right), & u_2 &= \frac{u}{2} - \eta \left(\ell_1 + \frac{1}{2} \right), \\ v_1 &= \frac{v}{2} + \eta \left(\ell_2 + \frac{1}{2} \right), & v_2 &= \frac{v}{2} - \eta \left(\ell_2 + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для последующего использования удобно предполагать, что эти параметры не зависят от η и τ (т. е. подразумевать, что спектральные параметры u , v и переменные $g_{1,2} = \eta(2\ell_{1,2} + 1)$ не зависят от η и τ).

Уравнение (3.3) допускает естественную интерпретацию: оператор R_{12} переставляет параметры (u_1, u_2) из первого L-оператора с параметрами (v_1, v_2) во втором L-операторе. Удобно скомбинировать эти четыре параметра в одно множество в естественном порядке $\mathbf{u} = (u_1, u_2, v_1, v_2)$. Тогда оператор

$$R_{12}(u - v) = R_{12}(\mathbf{u}) = R_{12}(u_1, u_2 | v_1, v_2)$$

соответствует определенной перестановке s в группе перестановок четырех параметров $\mathfrak{S}_4$:

$$s \rightarrow R_{12}(\mathbf{u}), \quad s\mathbf{u} = s(u_1, u_2, v_1, v_2) = (v_1, v_2, u_1, u_2).$$

Любая перестановка из группы $\mathfrak{S}_4$ может быть составлена из элементарных перестановок s_1 , s_2 и s_3 :

$$s_1\mathbf{u} = (u_2, u_1, v_1, v_2), \quad s_2\mathbf{u} = (u_1, v_1, u_2, v_2), \quad s_3\mathbf{u} = (u_1, u_2, v_2, v_1),$$

переставляющих лишь два ближайших соседних элемента в наборе (u_1, u_2, v_1, v_2) . Например, перестановка s имеет разложение $s = s_2 s_1 s_3 s_2$. Естественно искать операторы $S_i(u_1, u_2, v_1, v_2) = S_i(\mathbf{u})$, представляющие эти элементарные перестановки в L-операторах:

$$\left(\overbrace{(u_1, u_2)}^{S_1}, \overbrace{(v_1, v_2)}^{S_3} \right), \quad \left(u_1, \overbrace{(u_2, v_1)}^{S_2}, v_2 \right).$$

Конкретно, мы требуем чтобы S_i удовлетворяли следующим определяющим соотношениям:

$$S_1(\mathbf{u})L_1(u_1, u_2) = L_1(u_2, u_1)S_1(\mathbf{u}), \quad S_3(\mathbf{u})L_2(v_1, v_2) = L_2(v_2, v_1)S_3(\mathbf{u}), \quad (3.5)$$

$$S_2(\mathbf{u})L_1(u_1, u_2)\sigma_3L_2(v_1, v_2) = L_1(u_1, v_1)\sigma_3L_2(u_2, v_2)S_2(\mathbf{u}). \quad (3.6)$$

Поскольку матрица R_{12} действует в пространстве $\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2$, операторы S_i действуют как единичные операторы по отношению к $\mathbb{V}_3 = \mathbb{C}^2$. Более того, естественно потребовать, чтобы S_1 коммутировал с L_2 , а S_3 коммутировал с L_1 :

$$S_1(\mathbf{u})L_2(v_1, v_2) = L_2(v_1, v_2)S_1(\mathbf{u}), \quad S_3(\mathbf{u})L_1(u_1, u_2) = L_1(u_1, u_2)S_3(\mathbf{u}). \quad (3.7)$$

Нашим первым шагом является явное построение этих операторов (см. раздел 4). При наличии таких операторов мы можем построить R-матрицу.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что формальные операторы S_i удовлетворяют соотношениям (3.5)–(3.7). Тогда составной оператор $R_{12}(\mathbf{u})$,*

$$R_{12}(\mathbf{u}) = S_2(s_1 s_3 s_2 \mathbf{u}) S_1(s_3 s_2 \mathbf{u}) S_3(s_2 \mathbf{u}) S_2(\mathbf{u}), \quad (3.8)$$

удовлетворяет уравнению (3.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к довольно простой прямой проверке. А именно, используя уравнение (3.6), имеем

$$\begin{aligned} R_{12}(\mathbf{u}) L_1(u_1, u_2) \sigma_3 L_2(v_1, v_2) &= S_2(s_1 s_3 s_2 \mathbf{u}) S_1(s_3 s_2 \mathbf{u}) S_3(s_2 \mathbf{u}) \times \\ &\times L_1(u_1, v_1) \sigma_3 L_2(u_2, v_2) S_2(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Используя коммутативность $S_3(s_2 \mathbf{u})$ с σ_3 и $L_1(u_1, v_1)$ (см. (3.7)), а также второе уравнение в (3.5), это выражение можно переписать в виде

$$S_2(s_1 s_3 s_2 \mathbf{u}) S_1(s_3 s_2 \mathbf{u}) L_1(u_1, v_1) \sigma_3 L_2(v_2, u_2) S_3(s_2 \mathbf{u}) S_2(\mathbf{u}).$$

Теперь мы используем первое уравнение из (3.5) и коммутативность $S_1(s_3 s_2 \mathbf{u})$ с σ_3 и $L_2(v_2, u_2)$ (3.7) и получаем выражение

$$S_2(s_1 s_3 s_2 \mathbf{u}) L_1(v_1, u_1) \sigma_3 L_2(v_2, u_2) S_1(s_3 s_2 \mathbf{u}) S_3(s_2 \mathbf{u}) S_2(\mathbf{u}).$$

Наконец, применяя уравнение (3.6) с (v_1, u_1, v_2, u_2) вместо (u_1, u_2, v_1, v_2) , мы получаем выражение в правой части уравнения (3.3). Теорема доказана.

Выражение (3.8) для R -матрицы соответствует специальному разложению перестановки s : $s = s_2 s_1 s_3 s_2$. Мы увидим, что операторы S_i зависят от их параметров специальным образом:

$$S_1(\mathbf{u}) = S_1(u_1 - u_2), \quad S_2(\mathbf{u}) = S_2(u_2 - v_1), \quad S_3(\mathbf{u}) = S_3(v_1 - v_2), \quad (3.9)$$

так что оператор $R_{12}(\mathbf{u})$ зависит от разности спектральных параметров $u - v$, как оно и должно быть:

$$R_{12}(u_1, u_2 | v_1, v_2) = S_2(u_1 - v_2) S_1(u_1 - v_1) S_3(u_2 - v_2) S_2(u_2 - v_1). \quad (3.10)$$

Таким образом, мы имеем следующее соответствие между перестановками s_i и нашими операторами S_i :

$$s_i \rightarrow S_i(\mathbf{u}), \quad s_i s_j \rightarrow S_i(s_j \mathbf{u}) S_j(\mathbf{u}). \quad (3.11)$$

Для того чтобы доказать, что мы имеем такую твистованную реализацию группы перестановок $\mathfrak{S}_4$, еще осталось доказать определяющие соотношения Кокстера для генераторов:

$$s_i^2 = \mathbb{1} \rightarrow S_i(s_i \mathbf{u}) S_i(\mathbf{u}) = \mathbb{1}, \quad s_1 s_3 = s_3 s_1 \rightarrow S_1(s_3 \mathbf{u}) S_3(\mathbf{u}) = S_3(s_1 \mathbf{u}) S_1(\mathbf{u}), \quad (3.12)$$

$$s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2 \rightarrow S_1(s_2 s_1 \mathbf{u}) S_2(s_1 \mathbf{u}) S_1(\mathbf{u}) = S_2(s_1 s_2 \mathbf{u}) S_1(s_2 \mathbf{u}) S_2(\mathbf{u}), \quad (3.13)$$

$$s_2 s_3 s_2 = s_3 s_2 s_3 \rightarrow S_2(s_3 s_2 \mathbf{u}) S_3(s_2 \mathbf{u}) S_2(\mathbf{u}) = S_3(s_2 s_3 \mathbf{u}) S_2(s_3 \mathbf{u}) S_3(\mathbf{u}). \quad (3.14)$$

Можно попытаться работать с эквивалентной степенной формой этих соотношений, связанной с группами отражений:

$$(s_i s_j)^{m_{ij}} = 1, \quad m_{ii} = 1, \quad m_{ij} = 2, \quad |i - j| > 1, \quad m_{i, i \pm 1} = 3,$$

но это гораздо менее эффективно. Явный вид операторов S_i будет определен в следующем разделе 4. Доказательство соотношений (3.12)–(3.14) будет дано в разделе 5.

Рассмотрим теперь пространство $\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2 \otimes \mathbb{V}_3 \otimes \mathbb{C}^2$, где $\mathbb{V}_3$ является новым бесконечномерным пространством функций, зависящих от $z_3 \in \mathbb{C}$. Определим третью L-матрицу $L_3(w_1, w_2)$, $w_{1,2} = w/2 \pm \eta(\ell_3 + 1/2)$, где w – новый спектральный параметр, а ℓ_3 – новая спиновая переменная в генераторах алгебры Складина (2.5) с z , ∂_z , замененными на z_3 , ∂_{z_3} .

Естественно образовать множество $\mathbf{u} = (u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2)$ и рассмотреть группу перестановок шести параметров $\mathfrak{S}_6$. В дополнение к предыдущему случаю мы имеем генераторы двух новых элементарных перестановок $s_4 \mathbf{u} = (u_1, u_2, v_1, w_1, v_2, w_2)$ и $s_5 \mathbf{u} = (u_1, u_2, v_1, v_2, w_2, w_1)$. Мы определяем операторы S_4 и S_5 такие, что тройка $\{S_3, S_4, S_5\}$ имеет те же самые свойства, что и тройка $\{S_1, S_2, S_3\}$ после замены параметров (u_1, u_2, v_1, v_2) на (v_1, v_2, w_1, w_2) . Точнее, мы требуем, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{aligned} S_5(\mathbf{u})L_3(w_1, w_2) &= L_3(w_2, w_1)S_5(\mathbf{u}), \\ S_4(\mathbf{u})L_2(v_1, v_2)\sigma_3 L_3(w_1, w_2) &= L_2(v_1, w_1)\sigma_3 L_3(v_2, w_2)S_4(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

и чтобы оператор S_5 коммутировал с $S_{1,2,3}$, а S_4 – с $S_{1,2}$.

Определим два составных оператора, аналогичных $R_{12}(\mathbf{u})$:

$$\begin{aligned} R_{23}(\mathbf{u}) &= R_{23}(v_1, v_2 | w_1, w_2) = S_4(s_3 s_5 s_4 \mathbf{u}) S_3(s_5 s_4 \mathbf{u}) S_5(s_4 \mathbf{u}) S_4(\mathbf{u}) \\ &= S_4(v_1 - w_2) S_3(v_1 - w_1) S_5(v_2 - w_2) S_4(v_2 - w_1), \end{aligned} \quad (3.16)$$

а для определения R-матрицы R_{13} рассмотрим действие операторов перестановки $\mathbb{P}_{jk}$ на $S_i(\mathbf{u})$. Сопрягая соотношения (3.5) оператором $\mathbb{P}_{12}$, можно увидеть, что $\mathbb{P}_{12} S_3 \mathbb{P}_{12}$ необходимо идентифицировать с S_1 , имеющим тот же самый аргумент. Конкретно,

$$\mathbb{P}_{12} S_1(u_1 - u_2) = S_3(u_1 - u_2) \mathbb{P}_{12}, \quad \mathbb{P}_{12} S_3(v_1 - v_2) = S_1(v_1 - v_2) \mathbb{P}_{12}.$$

Сопрягая аналогичным образом соотношение (3.6), нельзя непосредственно вывести свойства S_2 . Как будет понятно из явного вида этого оператора, введенного ниже, $\mathbb{P}_{12} S_2(\mathbf{u}) = S_2(\mathbf{u}) \mathbb{P}_{12}$. Соотношения $\mathbb{P}_{12} S_{4,5}(\mathbf{u}) = S_{4,5}(\mathbf{u}) \mathbb{P}_{12}$ очевидны. Аналогичные рассуждения приводят к следующим коммутационным соотношениям:

$$\mathbb{P}_{13} S_2(u_2 - v_1) = S_4(u_2 - v_1) \mathbb{P}_{13}, \quad \mathbb{P}_{23} S_5(w_1 - w_2) = S_3(w_1 - w_2) \mathbb{P}_{23}$$

и т. д. Однако оператор $\mathbb{P}_{12} S_4 \mathbb{P}_{12} = \mathbb{P}_{23} S_2 \mathbb{P}_{23}$ не может быть выражен в терминах операторов $S_i(\mathbf{u})$. Определим

$$\begin{aligned} R_{13}(\mathbf{u}) &= R_{13}(u_1, u_2 | w_1, w_2) = \mathbb{P}_{12} R_{23}(u_1, u_2 | w_1, w_2) \mathbb{P}_{12} \\ &= \mathbb{P}_{12} S_4(u_1 - w_2) S_3(u_1 - w_1) S_5(u_2 - w_2) S_4(u_2 - w_1) \mathbb{P}_{12} \\ &= \mathbb{P}_{12} S_4(u_1 - w_2) \mathbb{P}_{12} S_1(u_1 - w_1) S_5(u_2 - w_2) \mathbb{P}_{12} S_4(u_2 - w_1) \mathbb{P}_{12}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} R_{13}(\mathbf{u}) &= \mathbb{P}_{23} R_{12}(u_1, u_2 | w_1, w_2) \mathbb{P}_{23} \\ &= \mathbb{P}_{23} S_2(u_1 - w_2) \mathbb{P}_{23} S_1(u_1 - w_1) S_5(u_2 - w_2) \mathbb{P}_{23} S_2(u_2 - w_1) \mathbb{P}_{23}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы видим, что оператор $R_{13}(\mathbf{u})$ не может быть факторизован только в терминах операторов S_i .

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что мы имеем множество корректно определенных операторов $S_i(\mathbf{u})$, $i = 1, \dots, 5$, удовлетворяющих перестановочным соотношениям (3.5)–(3.7), (3.15) и определяющим соотношениям группы кос $\mathfrak{B}_6$*

$$S_j S_k = S_k S_j, \quad |j - k| > 1, \quad S_j S_{j+1} S_j = S_{j+1} S_j S_{j+1}. \quad (3.18)$$

Тогда R-матрицы

$$\mathbb{R}_{12}(u - v) = \mathbb{P}_{12} R_{12}(\mathbf{u}), \quad \mathbb{R}_{23}(v - w) = \mathbb{P}_{23} R_{23}(\mathbf{u}), \quad \mathbb{R}_{13}(u - w) = \mathbb{P}_{13} R_{13}(\mathbf{u}),$$

где операторы $R_{ij}(\mathbf{u})$ зафиксированы в (3.8), (3.16) и (3.17), удовлетворяют уравнению Янга–Бакстера

$$\mathbb{R}_{12}(u - v) \mathbb{R}_{13}(u - w) \mathbb{R}_{23}(v - w) = \mathbb{R}_{23}(v - w) \mathbb{R}_{13}(u - w) \mathbb{R}_{12}(u - v). \quad (3.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующую перестановку параметров в произведении трех L-операторов:

$$L_1(u_1, u_2) \sigma_3 L_2(v_1, v_2) \sigma_3 L_3(w_1, w_2) \rightarrow L_1(w_1, w_2) \sigma_3 L_2(v_1, v_2) \sigma_3 L_3(u_1, u_2).$$

Она может быть реализована двумя различными способами:

$$\begin{array}{ccc} L_1(v_1, v_2) \sigma_3 L_2(u_1, u_2) \sigma_3 L_3(w_1, w_2) & \xrightarrow{R_{23}(u_1, u_2 | w_1, w_2)} & L_1(v_1, v_2) \sigma_3 L_2(w_1, w_2) \sigma_3 L_3(u_1, u_2) \\ \uparrow R_{12}(u_1, u_2 | v_1, v_2) & & R_{12}(v_1, v_2 | w_1, w_2) \downarrow \\ L_1(u_1, u_2) \sigma_3 L_2(v_1, v_2) \sigma_3 L_3(w_1, w_2) & & L_1(w_1, w_2) \sigma_3 L_2(v_1, v_2) \sigma_3 L_3(u_1, u_2) \\ \downarrow R_{23}(v_1, v_2 | w_1, w_2) & & R_{23}(u_1, u_2 | v_1, v_2) \uparrow \\ L_1(u_1, u_2) \sigma_3 L_2(w_1, w_2) \sigma_3 L_3(v_1, v_2) & \xrightarrow{R_{12}(u_1, u_2 | w_1, w_2)} & L_1(w_1, w_2) \sigma_3 L_2(u_1, u_2) \sigma_3 L_3(v_1, v_2) \end{array}$$

Условие коммутативности этой диаграммы удовлетворено, если

$$\begin{aligned} &R_{23}(u_1, u_2 | v_1, v_2) R_{12}(u_1, u_2 | w_1, w_2) R_{23}(v_1, v_2 | w_1, w_2) \\ &= R_{12}(v_1, v_2 | w_1, w_2) R_{23}(u_1, u_2 | w_1, w_2) R_{12}(u_1, u_2 | v_1, v_2). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Докажем это равенство, используя для операторов S_j определяющие соотношения для группы кос (3.18). Начнем с тождества

$$S_2 S_3 S_1 S_2 \cdot S_4 S_3 S_5 S_4 \cdot S_2 S_1 S_3 S_2 = S_2 S_3 S_4 S_1 \cdot S_3 S_2 S_3 \cdot S_1 S_5 S_4 S_3 S_2.$$

Выражение в левой части равно произведению R-матриц в левой части равенства (3.20) при принятом соглашении, что $S_j S_k = S_j(s_k \mathbf{u}) S_k(\mathbf{u})$. Выражение

в правой части получено перестановкой S_1S_2 с соседними S_4 и S_5S_4 с соседними S_2S_1 и применением кубического соотношения из (3.18) к возникающему произведению $S_2S_3S_2$. Заменяем теперь $S_1 \cdot S_3$ на S_3S_1 , переставим S_1S_5 с соседним S_3 , применим кубическое соотношение к возникающему произведению $S_1S_2S_1$ и получаем выражение в левой стороне равенства

$$S_2S_3S_4S_3 \cdot S_2S_1S_2 \cdot S_5S_3S_4S_3S_2 = S_4S_2S_3S_2 \cdot S_4S_1S_5S_4 \cdot S_2S_3S_2S_4.$$

Выражение в правой части возникает после применения кубического соотношения к двум произведениям $S_3S_4S_3$ и перестановки трех параметров S_2 с соседними S_4 и одного S_2 с соседним S_5S_4 . Теперь мы переставим соседние S_4 и S_1 и применим кубические соотношения к произведениям $S_2S_3S_2$ (дважды) и $S_4S_5S_4$. Это дает выражение в левой части соотношения

$$S_4S_3S_2S_3 \cdot S_1S_5S_4S_5 \cdot S_3S_2S_3S_4 = S_4S_3S_5S_4 \cdot S_2S_1S_3S_2 \cdot S_4S_3S_5S_4.$$

Выражение в правой части получается после переноса операторов S_5 влево и вправо от S_4 , перестановки соседних S_3 и S_1 , применения кубического соотношения к возникающему произведению $S_3S_4S_3$ и, наконец, переноса операторов S_4 влево и вправо от S_3 . Очевидным образом, оно совпадает с выражением в правой части равенства (3.20).

Поддействуем на выражение в левой части (3.20) оператором $\mathbb{P}_{12}\mathbb{P}_{13}\mathbb{P}_{23}$, а на выражение в правой части равным ему оператором $\mathbb{P}_{23}\mathbb{P}_{13}\mathbb{P}_{12}$. Переноса операторы перестановок $\mathbb{P}_{jk}$ к соответствующим R-матрицам и используя соотношения

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{13}\mathbb{P}_{23}\mathbf{R}_{23}(u_1, u_2 \mid v_1, v_2)\mathbb{P}_{23}\mathbb{P}_{13} \\ &= \mathbb{P}_{13}S_4(u_1 - v_2)S_5(u_1 - v_1)S_3(u_2 - v_2)S_4(u_2 - v_1)\mathbb{P}_{13} \\ &= S_2(u_1 - v_2)S_1(u_1 - v_1)S_3(u_2 - v_2)S_2(u_2 - v_1) = \mathbf{R}_{12}(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{13}\mathbb{P}_{12}\mathbf{R}_{12}(v_1, v_2 \mid w_1, w_2)\mathbb{P}_{12}\mathbb{P}_{13} \\ &= \mathbb{P}_{13}S_2(v_1 - w_2)S_3(v_1 - w_1)S_1(v_2 - w_2)S_2(v_2 - w_1)\mathbb{P}_{13} \\ &= S_4(v_1 - w_2)S_3(v_1 - w_1)S_5(v_2 - w_2)S_4(v_2 - w_1) = \mathbf{R}_{23}(\mathbf{u}), \end{aligned}$$

получаем требуемое уравнение (3.19). Теорема доказана.

Из приведенного рассмотрения мы заключаем, что соотношение Янга–Бакстера (3.20) является не чем иным, как тождеством между “словами” в групповой алгебре группы кос $\mathfrak{B}_6$. Уравнение (3.19) является более сложным, поскольку оно включает в себя внешние операторы $\mathbb{P}_{jk}$. Отметим, что приведенное доказательство не требует условий $S_j^2 = \mathbf{1}$, сводящих $\mathfrak{B}_6$ к группе перестановок $\mathfrak{S}_6$. Операторы S_j , которые мы конструируем в следующем разделе, удовлетворяют соотношениям $S_j^2 = \mathbf{1}$ после аналитического продолжения по параметрам, и, таким образом, они генерируют группу $\mathfrak{S}_6$.

4. Элементарные перестановки и сплетающие операторы

Мы воспользуемся факторизованной формой L-оператора, которая позволяет значительно упростить все вычисления:

$$L(u_1, u_2) = \frac{1}{\theta_1(2z)} M(z - u_1; z + u_1) \begin{pmatrix} e^{\eta\partial} & 0 \\ 0 & e^{-\eta\partial} \end{pmatrix} N(z - u_2; z + u_2), \quad (4.1)$$

где

$$M(a; b) = \begin{pmatrix} \bar{\theta}_3(a) & -\bar{\theta}_3(b) \\ -\bar{\theta}_4(a) & \bar{\theta}_4(b) \end{pmatrix}, \quad N(a; b) = \begin{pmatrix} \bar{\theta}_4(b) & \bar{\theta}_3(b) \\ \bar{\theta}_4(a) & \bar{\theta}_3(a) \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Для доказательства этой факторизации необходимо явно перемножить все три матрицы, входящие в нее, и использовать формулу сложения

$$\theta_1(x + y)\theta_1(x - y) + \theta_4(x + y)\theta_4(x - y) = \bar{\theta}_4(x)\bar{\theta}_3(y)$$

и ее вариации, перечисленные в приложении. Произведение матриц N и M имеет вид

$$N(a_1; b_1)M(a_2; b_2) = 2 \begin{pmatrix} \theta_1(b_1 - a_2)\theta_1(b_1 + a_2) & -\theta_1(b_1 - b_2)\theta_1(b_1 + b_2) \\ \theta_1(a_1 - a_2)\theta_1(a_1 + a_2) & -\theta_1(a_1 - b_2)\theta_1(a_1 + b_2) \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

в частности,

$$N(a; b)M(a; b) = -2\theta_1(a - b)\theta_1(b + a) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Чтобы избежать длинных формул, мы используем компактные обозначения $N(a \mp b) = N(a - b; a + b)$, $M(a \mp b) = M(a - b; a + b)$ и $\theta_j(a, b) = \theta_j(a)\theta_j(b)$, $\theta_j(a \mp b) = \theta_j(a - b)\theta_j(a + b)$, так что

$$L(u_1, u_2) = \frac{1}{\theta_1(2z)} M(z \mp u_1) \begin{pmatrix} e^{\eta\partial} & 0 \\ 0 & e^{-\eta\partial} \end{pmatrix} N(z \mp u_2).$$

Рассмотрим сначала определяющее соотношение для оператора S_2 (3.6):

$$\begin{aligned} S_2 \underline{M(z_1 \mp u_1)} & \begin{pmatrix} e^{\eta\partial_1} & 0 \\ 0 & e^{-\eta\partial_1} \end{pmatrix} N(z_1 \mp u_2) \sigma_3 M(z_2 \mp v_1) \begin{pmatrix} e^{\eta\partial_2} & 0 \\ 0 & e^{-\eta\partial_2} \end{pmatrix} \underline{N(z_2 \mp v_2)} \\ &= \underline{M(z_1 \mp u_1)} \begin{pmatrix} e^{\eta\partial_1} & 0 \\ 0 & e^{-\eta\partial_1} \end{pmatrix} N(z_1 \mp v_1) \sigma_3 M(z_2 \mp u_2) \begin{pmatrix} e^{\eta\partial_2} & 0 \\ 0 & e^{-\eta\partial_2} \end{pmatrix} \underline{N(z_2 \mp v_2)} S_2. \end{aligned}$$

Мы подчеркнули матрицы, которые могут быть сокращены при условии коммутативности $[S_2, z_1] = [S_2, z_2] = 0$. Благодаря этому наблюдению естественно предполагать, что S_2 является простым оператором умножения:

$$[S_2 \Phi](z_1, z_2) = S(z_1, z_2) \Phi(z_1, z_2).$$

Соответственно, оператор S_2 коммутирует с матрицами $M(z_1 \mp u_1)$ и $N(z_2 \mp v_2)$, так что они обе сокращаются в уравнении и мы получаем значительно более простое определяющее соотношение для функции $S(z_1, z_2)$:

$$\begin{aligned} S(z_1, z_2) & \begin{pmatrix} e^{\eta\partial_1} & 0 \\ 0 & e^{-\eta\partial_1} \end{pmatrix} N(z_1 \mp u_2) \sigma_3 M(z_2 \mp v_1) \begin{pmatrix} e^{\eta\partial_2} & 0 \\ 0 & e^{-\eta\partial_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\eta\partial_1} & 0 \\ 0 & e^{-\eta\partial_1} \end{pmatrix} N(z_1 \mp v_1) \sigma_3 M(z_2 \mp u_2) \begin{pmatrix} e^{\eta\partial_2} & 0 \\ 0 & e^{-\eta\partial_2} \end{pmatrix} S(z_1, z_2), \end{aligned}$$

или, в эквивалентной форме,

$$\begin{pmatrix} S(z_1 - \eta, z_2) & 0 \\ 0 & S(z_1 + \eta, z_2) \end{pmatrix} N(z_1 \mp u_2) \sigma_3 M(z_2 \mp v_1) \\ = N(z_1 \mp v_1) \sigma_3 M(z_2 \mp u_2) \begin{pmatrix} S(z_1, z_2 + \eta) & 0 \\ 0 & S(z_1, z_2 - \eta) \end{pmatrix}.$$

Используя тождество для тэта-функций (11.9), приведенное в приложении, можно увидеть, что

$$N(a_1; b_1) \sigma_3 M(a_2; b_2) = 2 \begin{pmatrix} \theta_4(b_1 \mp a_2) & -\theta_4(b_1 \mp b_2) \\ \theta_4(a_1 \mp a_2) & -\theta_4(a_1 \mp b_2) \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Полученное матричное уравнение может быть упрощено далее, поскольку тэта-функции, зависящие от комбинации параметров $u_2 + v_1$, выпадают из него. В результате мы получаем систему из четырех линейных конечно-разностных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \theta_4(z_1 + z_2 + u_2 - v_1) S(z_1 - \eta, z_2) &= \theta_4(z_1 + z_2 + v_1 - u_2) S(z_1, z_2 + \eta), \\ \theta_4(z_1 + z_2 - u_2 + v_1) S(z_1 + \eta, z_2) &= \theta_4(z_1 + z_2 - v_1 + u_2) S(z_1, z_2 - \eta), \\ \theta_4(z_1 - z_2 + u_2 - v_1) S(z_1 - \eta, z_2) &= \theta_4(z_1 - z_2 + v_1 - u_2) S(z_1, z_2 - \eta), \\ \theta_4(z_1 - z_2 - u_2 + v_1) S(z_1 + \eta, z_2) &= \theta_4(z_1 - z_2 - v_1 + u_2) S(z_1, z_2 + \eta). \end{aligned}$$

Их структура указывает, что надо искать решение в факторизованной форме

$$S(z_1, z_2) = \Phi_+(z_1 + z_2) \Phi_-(z_1 - z_2).$$

Тогда в каждом из четырех уравнений один из множителей $\Phi_{\pm}$ выпадает и мы получаем уравнения

$$\theta_4(z + u_2 - v_1) \Phi_{\pm}(z - \eta) = \theta_4(z - u_2 + v_1) \Phi_{\pm}(z + \eta), \quad (4.6)$$

или, в эквивалентной форме,

$$\Phi_{\pm}(z + 2\eta) = e^{2\pi i(u_2 - v_1)} \frac{\theta_1(z + u_2 - v_1 + \eta + \tau/2)}{\theta_1(z - u_2 + v_1 + \eta + \tau/2)} \Phi_{\pm}(z).$$

В этом разделе мы предполагаем, что $\text{Im}(\eta) > 0$. Тогда частное решение этого уравнения описывается отношением эллиптических гамма-функций $\Gamma(z) = \Gamma(z | \tau, 2\eta)$ (см. формулу (11.13) в приложении):

$$\Phi(z + 2\eta) = e^{\pi i(a-b)} \frac{\theta_1(z + a)}{\theta_1(z + b)} \Phi(z), \quad \Phi(z) = \frac{\Gamma(z + a | \tau, 2\eta)}{\Gamma(z + b | \tau, 2\eta)}, \quad \text{Im}(\eta), \text{Im}(\tau) > 0. \quad (4.7)$$

Уравнение на $\Phi(z)$ не предполагает каких-либо ограничений на η . Его решение и соответствующие сплетающие операторы, определенные при $\text{Im}(\eta) < 0$, используют функцию $\Gamma(z | \tau, -2\eta)$, а для $\text{Im}(\eta) = 0$ необходимо воспользоваться модифицированной эллиптической гамма-функцией [11], [14]. Эти решения будут описаны ниже в разделе 9.

Используя (4.7), мы можем записать общее решение $S(z_1, z_2)$ в виде

$$S(z_1, z_2) = \frac{\Gamma(z_1 + z_2 + u_2 - v_1 + \eta + \tau/2)}{\Gamma(z_1 + z_2 - u_2 + v_1 + \eta + \tau/2)} \times \frac{\Gamma(z_1 - z_2 + u_2 - v_1 + \eta + \tau/2)}{\Gamma(z_1 - z_2 - u_2 + v_1 + \eta + \tau/2)} \varphi_2(z_1, z_2), \quad (4.8)$$

где φ_2 является произвольной функцией, удовлетворяющей условиям периодичности

$$\varphi_2(z_1 + 2\eta, z_2) = \varphi_2(z_1, z_2 + 2\eta) = \varphi_2(z_1 + \eta, z_2 + \eta) = \varphi_2(z_1, z_2).$$

Используя формулу отражения для эллиптической гамма-функции (11.17) и обозначение

$$\Gamma(\pm x \pm y + a) = \Gamma(-x - y + a)\Gamma(-x + y + a)\Gamma(x - y + a)\Gamma(x + y + a),$$

можно переписать формулу (4.8) в намного более компактной форме

$$S(z_1, z_2) = \Gamma\left(\pm z_1 \pm z_2 + u_2 - v_1 + \eta + \frac{\tau}{2} \mid \tau, 2\eta\right) \varphi_2(z_1, z_2).$$

Свобода в выборе функции $\varphi_2(z_1, z_2)$, сильно влияющая на конечные результаты, будет зафиксирована в разделе, посвященном эллиптическому модулярному дублю (см. раздел 7). Заметим также, что мы выбрали L-оператор в форме $\sigma_3 L$ для того, чтобы иметь перестановочную симметрию $z_1 \leftrightarrow z_2$ в (4.8), т. е. $\mathbb{P}_{12} S_2(\mathbf{u}) = S_2(\mathbf{u}) \mathbb{P}_{12}$, которая отсутствует для других выборов.

Рассмотрим теперь определяющие уравнения (3.5) для операторов S_1 и S_3 . Перестановка параметров $u_1 = u/2 + \eta(\ell_1 + 1/2)$ и $u_2 = u/2 - \eta(\ell_1 + 1/2)$ эквивалентна замене спина $\ell_1 \rightarrow -1 - \ell_1$ и, аналогичным образом, перестановка параметров $v_1 = v/2 + \eta(\ell_2 + 1/2)$ и $v_2 = u/2 - \eta(\ell_2 + 1/2)$ эквивалентна замене $\ell_2 \rightarrow -1 - \ell_2$. В L-матрице (2.3) только генераторы $\mathbf{S}^a$ зависят от спина, поэтому уравнения (3.5) могут быть переписаны в терминах отдельных генераторов $\mathbf{S}^a$:

$$S_1 \cdot \mathbf{S}^a(\ell_1) = \mathbf{S}^a(-1 - \ell_1) \cdot S_1, \quad S_3 \cdot \mathbf{S}^a(\ell_2) = \mathbf{S}^a(-1 - \ell_2) \cdot S_3, \quad (4.9)$$

где мы явно указали зависимость от спина ℓ для операторов $\mathbf{S}^a$. Эти соотношения имеют следующий смысл: оператор S_1 сплетает представления со спинами ℓ_1 и $-1 - \ell_1$, реализованные в пространстве функций переменной z_1 , а оператор S_3 сплетает представления со спинами ℓ_2 и $-1 - \ell_2$, реализованные в пространстве функций переменной z_2 . Заметим, что в терминах переменной $g = \eta(2\ell + 1)$ это соответствует простому изменению знака $g \rightarrow -g$.

Очевидно, что операторы S_1 и S_3 эквивалентны друг другу и отличаются только пространствами, в которых они действуют. Построим общий сплетающий оператор W , определяемый двумя эквивалентными способами: или как решение матричного уравнения для L-оператора

$$W \cdot L(u_1, u_2) = L(u_2, u_1) \cdot W,$$

или, альтернативно, как решение системы уравнений, использующей генераторы алгебры Складина

$$W \cdot \mathbf{S}^a(\ell) = \mathbf{S}^a(-1 - \ell) \cdot W. \quad (4.10)$$

При $2\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ такой сплетающий оператор W был построен в работе [27] в виде конечной суммы степеней конечно-разностного оператора $e^{-\eta\partial_z}$ (см. раздел 8). Формальное обобщение этого W на бесконечные ряды и произвольные значения ℓ , предложенное в работе [26], не представляет собой строго определенный оператор.

В нашей работе мы используем другой подход, связанный с эллиптическими гипергеометрическими интегралами [13], [14]. А именно, мы строим сплетающий оператор W , используя достаточно общий анзац для него в виде интегрального оператора

$$[W\Phi](z) = \int_{\alpha}^{\beta} \Delta(z, x) \Phi(x) dx \quad (4.11)$$

для некоторого интервала интегрирования $[\alpha, \beta] \in \mathbb{R}$.

Таким образом, мы собираемся решить уравнение

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Delta(z, x) [S^a(\ell)\Phi(x)] dx = S^a(-1 - \ell) \int_{\alpha}^{\beta} \Delta(z, x) \Phi(x) dx,$$

где операторы S^a в левой части действуют на функции переменной x , в то время как в правой части они действуют на функции переменной z . В более явном виде имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\Delta(z, x)}{\theta_1(2x)} (\theta_a(2x - 2\eta\ell)\Phi(x + \eta) - \theta_a(-2x - 2\eta\ell)\Phi(x - \eta)) dx \\ &= \int_{\alpha+\eta}^{\beta+\eta} \frac{\theta_a(2x - 2\eta(\ell + 1))}{\theta_1(2x - 2\eta)} \Delta(z, x - \eta) \Phi(x) dx \\ & \quad - \int_{\alpha-\eta}^{\beta-\eta} \frac{\theta_a(-2x - 2\eta(\ell + 1))}{\theta_1(2x + 2\eta)} \Delta(z, x + \eta) \Phi(x) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\theta_a(2z + 2\eta(\ell + 1))}{\theta_1(2z)} \Delta(z + \eta, x) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\theta_a(-2z + 2\eta(\ell + 1))}{\theta_1(2z)} \Delta(z - \eta, x) \right) \Phi(x) dx, \end{aligned}$$

где $a = 1, 2, 3, 4$. Для того чтобы получить согласованные уравнения для ядра $\Delta(z, x)$, мы потребуем, чтобы интегрирования $\int_{\alpha \pm \eta}^{\beta \pm \eta} dx$ давали тот же самый

результат, что и интегрирование $\int_{\alpha}^{\beta} dx$. При $\text{Im}(\eta) > 0$ или $\text{Im}(\eta) < 0$ это будет верным, если интегралы по интервалам $[\alpha, \alpha + \eta]$ и $[\beta, \beta + \eta]$, а также по интервалам $[\alpha, \alpha - \eta]$ и $[\beta, \beta - \eta]$ совпадают и если контурные интегралы по параллелограммам $[\alpha, \beta, \beta + \eta, \alpha + \eta]$ и $[\alpha, \beta, \beta - \eta, \alpha - \eta]$ равны нулю. Первое условие удовлетворяется, если интегрируемые функции периодичны с периодом $\beta - \alpha$, а второе условие выполнено, если интегрируемые функции аналитичны в соответствующих параллелограммах и не имеют простых полюсов в них (или сумма вычетов простых полюсов равна нулю). Случай $\text{Im}(\eta) = 0$ будет рассмотрен в разделе 9.

Предполагая, что эти требования выполнены (условия, необходимые для этого, будут изучены после формального вывода решения), мы получаем уравнение

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\theta_a(2x-s)}{\theta_1(2x-2\eta)} \Delta(z, x-\eta) - \frac{\theta_a(-2x-s)}{\theta_1(2x+2\eta)} \Delta(z, x+\eta) - \frac{\theta_a(2z+s)}{\theta_1(2z)} \Delta(z+\eta, x) + \frac{\theta_a(-2z+s)}{\theta_1(2z)} \Delta(z-\eta, x) \right) \Phi(x) dx = 0, \quad (4.12)$$

где $s = 2\eta(\ell+1)$. Поскольку этот интеграл должен быть равным нулю для произвольной допустимой функции $\Phi(x)$, ее подынтегральное выражение должно быть равным нулю само по себе. Поэтому должна удовлетворяться следующая система из четырех конечно-разностных уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_a(2x-s)}{\theta_1(2x-2\eta)} \Delta(z, x-\eta) - \frac{\theta_a(-2x-s)}{\theta_1(2x+2\eta)} \Delta(z, x+\eta) \\ &= \frac{\theta_a(2z+s)}{\theta_1(2z)} \Delta(z+\eta, x) - \frac{\theta_a(-2z+s)}{\theta_1(2z)} \Delta(z-\eta, x), \quad a = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Умножим уравнение с номером $a = 3$ на $\theta_4(2z+s)$, а уравнение с номером $a = 4$ на $\theta_3(2z+s)$ и вычтем их друг из друга. Используя тождество для тэта-функций (11.6) из приложения, получаем равенство

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_1(2z+2x, 2z-2x+2s|2\tau)}{\theta_1(2x-2\eta|\tau)} \Delta(z, x-\eta) \\ & - \frac{\theta_1(2z-2x, 2z+2x+2s|2\tau)}{\theta_1(2x+2\eta|\tau)} \Delta(z, x+\eta) = - \frac{\theta_1(2s, 4z|2\tau)}{\theta_1(2z|\tau)} \Delta(z-\eta, x). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Аналогично, умножим теперь уравнение с номером $a = 1$ на $\theta_2(2z+s)$, а уравнение с номером $a = 2$ на $\theta_1(2z+s)$ и вычтем их друг из друга. Применяя тождество для тэта-функций (11.10) из приложения, мы получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_4(2z+2x|2\tau)\theta_1(2z-2x+2s|2\tau)}{\theta_1(2x-2\eta|\tau)} \Delta(z, x-\eta) \\ & - \frac{\theta_4(2z-2x|2\tau)\theta_1(2z+2x+2s|2\tau)}{\theta_1(2x+2\eta|\tau)} \Delta(z, x+\eta) \\ &= - \frac{\theta_4(2s|2\tau)\theta_1(4z|2\tau)}{\theta_1(2z|\tau)} \Delta(z-\eta, x). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Исключим член $\Delta(z-\eta, x)$ из полученных уравнений. Конкретно, поделим уравнение (4.14) на $\theta_1(2s|2\tau)$, уравнение (4.15) на $\theta_4(2s|2\tau)$ и вычтем их друг из друга. Это приводит к уравнению

$$\begin{aligned} & (\theta_1(2z+2x|2\tau)\theta_4(2s|2\tau) - \theta_4(2z+2x|2\tau)\theta_1(2s|2\tau)) \\ & \times \frac{\theta_1(2z-2x+2s|2\tau)}{\theta_1(2x-2\eta|\tau)} \Delta(z, x-\eta) \\ &= (\theta_1(2z-2x|2\tau)\theta_4(2s|2\tau) - \theta_4(2z-2x|2\tau)\theta_1(2s|2\tau)) \\ & \times \frac{\theta_1(2z+2x+2s|2\tau)}{\theta_1(2x+2\eta|\tau)} \Delta(z, x+\eta). \end{aligned}$$

Применяя тождества для тэта-функций (11.11) и (11.12) из приложения, мы получаем следующее компактное линейное конечно-разностное уравнение первого порядка:

$$\frac{\Delta(z, x + \eta)}{\Delta(z, x - \eta)} = \frac{\theta_1(2x + 2\eta, z + x - s, z - x + s)}{\theta_1(2x - 2\eta, z - x - s, z + x + s)}. \quad (4.16)$$

Исключим теперь из системы (4.13) члены $\Delta(z, x \pm \eta)$. Повторяя шаги, аналогичные предыдущим, мы исключим сначала $\Delta(z, x - \eta)$, затем $\Delta(z, x + \eta)$ и придем к аналогичным уравнениям с $\theta_1(2x \pm 2\eta)$, замененными на $\theta_1(2z)$, и немного измененными аргументами в других тэта-функциях. Конечный результат выглядит следующим образом:

$$\frac{\Delta(z + \eta, x)}{\Delta(z - \eta, x)} = \frac{\theta_1(x - z + s, x + z - s)}{\theta_1(x + z + s, x - z - s)}. \quad (4.17)$$

Исключая член $\Delta(z, x - \eta)$ из уравнений (4.14) и (4.15), мы получаем третье необходимое уравнение

$$\frac{\Delta(z, x + \eta)}{\Delta(z - \eta, x)} = \frac{\theta_1(2x + 2\eta, z + x - s)}{\theta_1(2x, z + x + s)}. \quad (4.18)$$

Это же уравнение возникает (другим путем), если исключить член $\Delta(z + \eta, x)$ из пары уравнений, приводящих к соотношению (4.17).

После этих рассмотрений нетрудно найти общее решение уравнений (4.16), (4.17) и (4.18) при $\text{Im}(\eta) > 0$:

$$\Delta(z, x) = e^{(\pi i/\eta)(x^2 - z^2)} \frac{\Gamma(\pm z \pm x + \eta - s | \tau, 2\eta)}{\Gamma(\pm 2x | \tau, 2\eta)} \varphi(z, x), \quad (4.19)$$

где $\varphi(z + 2\eta, x) = \varphi(z, x + 2\eta) = \varphi(z + \eta, x + \eta) = \varphi(z, x)$ является произвольной периодической функцией. Один из способов фиксации этой функциональной свободы, исходя из требования наличия дополнительной симметрии, будет рассмотрен в разделе об эллиптическом модулярном дубле (см. раздел 7).

Ключевой элемент в выражении (4.19), описываемый отношением эллиптических гамма-функций, периодичен по x с периодом 1. Аналогично, функции $\theta_a(2x)$, входящие в сплетающее соотношение (4.12), имеют этот период. Поэтому мы должны потребовать, чтобы оставшая часть подынтегрального выражения в (4.12) была периодична с тем же самым периодом 1. Это условие вынуждает выбрать длину интервала интегрирования равной 1, $\beta - \alpha = 1$. Эта периодичность позволяет нам зафиксировать точку α произвольным образом, и мы берем $\alpha = 0$ и $\beta = 1$. После сдвигов $x \rightarrow x \pm \eta$ множитель $e^{\pi i x^2/\eta}$ умножается на функцию $e^{\pm 2\pi i x + \pi i \eta}$, которая имеет период 1. Поэтому мы должны потребовать, чтобы произведения $e^{\pi i x^2/\eta} \varphi(z, x \pm \eta) \Phi(x)$ были периодическими функциями x с периодом 1.

Теперь мы отметим, что отношение эллиптических гамма-функций в $\Delta(z, x)$ инвариантно относительно преобразований $z \rightarrow z + 1$ и $z \rightarrow -z$. Если мы потребуем, чтобы такие свойства были у функции $\varphi(z, x)$, тогда функция $\Psi(z) = e^{\pi i z^2/\eta} [W\Phi](z)$ становится периодической, $\Psi(z + 1) = \Psi(z)$, и четной, $\Psi(-z) = \Psi(z)$. Поэтому естественно потребовать, чтобы начальные функции $\Phi(x)$ принадлежали тому же классу функций, т. е. чтобы $e^{\pi i x^2/\eta} \Phi(x)$ были

инвариантны относительно преобразований $x \rightarrow x + 1$ и $x \rightarrow -x$. Это подразумевает, что выполняются условия $\varphi(z, x + 1) = \varphi(z, -x) = \varphi(z, x)$, которые снимают все ограничения периодичности и вынуждают $\varphi(z, x)$ быть четной эллиптической функцией z и x с периодами 2η и 1 . Таким образом фиксируется пространство функций $\Phi(x)$, в котором оператор W может действовать как сдвиг оператор генераторов алгебры Складина. Отметим, что его структура не противоречит тому свойству, что при $2\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ алгебра Складина имеет конечномерные представления в пространстве четных тэта-функций порядка 4ℓ , поскольку $e^{\pi i x^2/\eta}$ является тэта-функцией нулевого порядка.

Остается рассмотреть сингулярности подынтегрального выражения в (4.12). Уравнение отражения для эллиптической гамма-функции (11.17) показывает, что произведение $\theta_1(2x|\tau)\Gamma(2x|\tau, 2\eta)\Gamma(-2x|\tau, 2\eta)$ не имеет нулей, т. е. полюсы при $x = \eta$ или $x = -\eta$ в подынтегральных выражениях в соотношении (4.12) являются мнимыми. Структура дивизора эллиптической гамма-функции показывает, что если

$$e^{2\pi i(\pm x \pm z + \eta - s + \tau j + 2\eta k)} \neq 1, \quad j, k = 0, 1, 2, \dots,$$

для любого выбора знаков и x , принимающих значения в прямоугольнике $[-\operatorname{Im}(\eta), 1 - \operatorname{Im}(\eta), 1 + \operatorname{Im}(\eta), \operatorname{Im}(\eta)]$, то никакие полюсы не входят в интересующую нас область. В мультипликативных обозначениях $X = e^{2\pi i x}$, $Z = e^{2\pi i z}$, $p = e^{2\pi i \tau}$, $q = e^{4\pi i \eta}$ возникает ограничение $|XZ^{\pm 1}t^j q^k| \neq 1$, $t = e^{2\pi i(\eta - s)} = e^{-2\pi i \eta(2\ell + 1)} = e^{2\pi i(u_2 - u_1)}$, когда $|q|^{1/2} \leq |X| \leq |q|^{-1/2}$. Очевидно, что для таких значений X кольца $|Xq^j|$, $j = 0, 1, 2, \dots$, покрывают весь диск радиуса $|q|^{-1/2}$. Поэтому мы не столкнемся с полюсами, если

$$|Z^{\pm 1}t| < |q|^{1/2} \quad \text{или} \quad \operatorname{Im}(u_1 - u_2 \pm z) < \operatorname{Im}(\eta). \quad (4.20)$$

Если z является действительной переменной, т. е. $|Z| = 1$, то тогда мы приходим к ограничению $|t| < |q|^{1/2}$ или $\operatorname{Im}(\eta(\ell + 1)) < 0$. Для действительных ℓ это означает, что $\ell < -1$, поскольку $\operatorname{Im}(\eta) > 0$. Таким образом, конечномерные реализации R-матрицы, возникающие для полуцелых спинов, $2\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, требуют особого рассмотрения.

Потребовав, чтобы функции нашего основного пространства $\Phi(x)$ и периодические множители $\varphi(z, x)$ не имели простых полюсов в интересующей области, мы полностью удовлетворяем условиям, которые гарантируют справедливость уравнений (4.13). Подчеркнем, что функции, возникающие под действием нашего оператора $\int_0^1 \Delta(z, x)\Phi(x)dx$, удовлетворяют требованиям, наложенным на $\Phi(x)$. Действительно, поскольку $\operatorname{Im}(x) = 0$, интересующие нас функции аналитичны при z , принимающем значения в прямоугольнике $[-\operatorname{Im}(\eta), 1 - \operatorname{Im}(\eta), 1 + \operatorname{Im}(\eta), \operatorname{Im}(\eta)]$.

Присутствие экспоненциального множителя $e^{\pi i x^2/\eta}$ в определении основного пространства функций раздражает, и мы хотим перейти к более естественному формализму. Для того чтобы сделать это, мы сопрягаем все наши операторы этой экспоненциальной функцией и определяем новую реализацию генераторов

алгебры Складина

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\text{mod}}^a &= e^{\pi iz^2/\eta} \mathbf{S}^a e^{-\pi iz^2/\eta} = e^{-\pi i \eta \frac{i^{\delta_{a,2}} \theta_{a+1}(\eta)}{\theta_1(2z)}} [\theta_{a+1}(2z - g + \eta) \cdot e^{-2\pi iz} \cdot e^{\eta \partial_z} \\ &\quad - \theta_{a+1}(-2z - g + \eta) \cdot e^{2\pi iz} \cdot e^{-\eta \partial_z}], \end{aligned} \quad (4.21)$$

где мы обозначили $g = \eta(2\ell + 1)$. Аналогично, мы определяем оператор

$$\mathbf{W}_{\text{mod}} = e^{\pi iz^2/\eta} \mathbf{W} e^{-\pi iz^2/\eta},$$

действующий как

$$[\mathbf{W}_{\text{mod}} \Psi](z) = \int_0^1 \frac{\Gamma(\pm z \pm x + \eta - s | \tau, 2\eta)}{\Gamma(\pm 2x | \tau, 2\eta)} \varphi(z, x) \cdot \Psi(x) dx.$$

Тогда соотношение сплетения $\mathbf{W}_{\text{mod}} \cdot \mathbf{S}_{\text{mod}}^a(\ell) = \mathbf{S}_{\text{mod}}^a(-1 - \ell) \cdot \mathbf{W}_{\text{mod}}$ справедливо при условии, что наши операторы действуют в пространстве четных периодических функций $\Psi(x) = \Psi(-x) = \Psi(x+1)$, которые не имеют простых полюсов в области $-\text{Im}(\eta) \leq \text{Im}(x) \leq \text{Im}(\eta)$. Просуммируем полученные результаты.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\text{Im}(\eta) > 0$ (или $|q| < 1$). Обозначим V пространство функций двух комплексных переменных $\Psi(z_1, z_2)$, которые четны и периодичны по каждой переменной с периодом 1 и которые не имеют простых полюсов в областях $-\text{Im}(\eta) \leq \text{Im}(z_1), \text{Im}(z_2) \leq \text{Im}(\eta)$. Определим три оператора

$$[\mathbf{S}_2(u_2 - v_1)\Psi](z_1, z_2) = \Gamma\left(\pm z_1 \pm z_2 + u_2 - v_1 + \eta + \frac{\tau}{2}\right) \varphi_2(z_1, z_2) \cdot \Psi(z_1, z_2), \quad (4.22)$$

где $\text{Im}(u_2 - v_1 + \tau/2 - \eta) > 0$ (или $|\sqrt{pq} e^{2\pi i(u_2 - v_1)}| < |q|$),

$$\begin{aligned} &[\mathbf{S}_1(u_1 - u_2)\Psi](z_1, z_2) \\ &= \frac{\kappa}{\Gamma(2u_2 - 2u_1)} \int_0^1 \frac{\Gamma(\pm z_1 \pm x + u_2 - u_1)}{\Gamma(\pm 2x)} \varphi_1(z_1, x) \cdot \Psi(x, z_2) dx, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где $\text{Im}(u_2 - u_1 \pm z_1 - \eta) > 0$ (или $|e^{2\pi i(u_2 - u_1 \pm z_1)}| < |q|^{1/2}$),

$$\kappa = \frac{(q; q)_\infty (p; p)_\infty}{2}, \quad (t; q)_\infty = \prod_{j=0}^{\infty} (1 - tq^j),$$

и

$$\begin{aligned} &[\mathbf{S}_3(v_1 - v_2)\Psi](z_1, z_2) \\ &= \frac{\kappa}{\Gamma(2v_2 - 2v_1)} \int_0^1 \frac{\Gamma(\pm z_2 \pm x + v_2 - v_1)}{\Gamma(\pm 2x)} \varphi_3(z_2, x) \cdot \Psi(z_1, x) dx, \end{aligned} \quad (4.24)$$

где $\text{Im}(v_2 - v_1 \pm z_2 - \eta) > 0$ (или $|e^{2\pi i(v_2 - v_1 \pm z_2)}| < |q|^{1/2}$). Здесь $\varphi_k(z, x)$ являются произвольными четными эллиптическими функциями z и x с периодами 1 и 2η , удовлетворяющими дополнительным ограничениям

$$\varphi_k(z + \eta, x + \eta) = \varphi_k(z, x), \quad k = 1, 2, 3,$$

и не имеющими простых полюсов в областях $-\text{Im}(\eta) \leq \text{Im}(z), \text{Im}(x) \leq \text{Im}(\eta)$.

Тогда операторы $S_k(\mathbf{u})$ отображают пространство V само на себя и удовлетворяют определяющим сплетающим соотношениям (3.5), (3.6) и (3.7) при условии, что в соответствующем L -операторе (2.2) используются генераторы алгебры Складина в форме (4.21).

Для краткости мы здесь не используем обозначение $S_{k,\text{mod}}$, подразумевая, что это не вызовет затруднений в отождествлении, какая форма сплетающих операторов используется в дальнейшем. Функции φ_k могут зависеть от параметров u_1, u_2, v_1, v_2 произвольным образом. Если бы они не зависели от координат z и x , то можно было бы полностью опустить φ_k , поскольку они становятся несущественными для решений УЯБ (без рассмотрения условия унитарности). Тогда операторы $S_{1,3}$ не будут зависеть от спектрального параметра, поскольку в них вовлечены только разности $u_1 - u_2$ и $v_1 - v_2$. Аналогично, S_2 будет зависеть только от разности $u_2 - v_1$. Приведенный выше выбор нормировочной постоянной κ , так же как и множителей из эллиптических гамма-функций перед интегралами в $S_{1,3}$, продиктован эллиптическим бета-интегралом [13], возникающим, как описано в следующем разделе, при специальном выборе $\varphi_k(z, x) = 1$.

Обозначим $y_{1,2} = e^{2\pi i z_{1,2}}$. Разложение в ряд Фурье наших функций $\Psi(z_1, z_2)$ показывает, что наше пространство эквивалентно пространству мероморфных функций $y_1, y_2 \in \mathbb{C}^*$, удовлетворяющих ограничениям $f(y_1^{-1}, y_2) = f(y_1, y_2^{-1}) = f(y_1, y_2)$. Поэтому мы можем перейти в определении операторов $S_{1,3}$ от реальных интегралов по интервалу $[0, 1]$ к контурным интегралам по единичной окружности с положительной ориентацией $\mathbb{T}$:

$$[S_1(u_1 - u_2)f](y_1, y_2) = \kappa \int_{\mathbb{T}} \frac{\Gamma(ty_1^{\pm 1}y^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(t^2, y^{\pm 2}; p, q)} \varphi_1(y_1, y) \cdot f(y, y_2) \frac{dy}{2\pi i y}, \quad (4.25)$$

где $t = e^{2\pi i(u_2 - u_1)}$, $|ty_1^{\pm 1}| < |q|^{1/2}$, $\varphi_1(qy_1, y) = \varphi_1(y_1, qy) = \varphi_1(q^{1/2}y_1, q^{1/2}y) = \varphi_1(y_1, y)$, и $\Gamma(t; p, q)$ является эллиптической гамма-функцией в мультипликативном обозначении (11.18). Очевидно, что последовательное действие операторов S_k приводит к многократным контурным интегральным операторам. Деформируя контуры интегрирования, можно ослабить ограничения на параметры и определить результирующие функции аналитическим продолжением.

5. Соотношения Кокстера и эллиптический бета-интеграл

В этом разделе мы докажем, что полученные операторы S_i удовлетворяют соотношениям (3.12), (3.13) и (3.14), определяющим группу перестановок $\mathfrak{S}_4$ для специального выбора периодических множителей

$$\varphi_k(z, x) = 1, \quad k = 1, 2, 3.$$

При этих условиях операторы (4.22)–(4.24) зависят только от разностей параметров. Поэтому соотношения Кокстера для них могут быть записаны в более простой форме:

$$S_k(a)S_k(-a) = \mathbb{1}, \quad S_1(a)S_2(a+b)S_1(b) = S_2(b)S_1(a+b)S_2(a), \quad (5.1)$$

$$S_1(a)S_3(b) = S_3(b)S_1(a), \quad S_2(a)S_3(a+b)S_2(b) = S_3(b)S_2(a+b)S_3(a). \quad (5.2)$$

В теории квантовых интегрируемых систем кубические соотношения известны как соотношения звезда-треугольник [22]. Если привязаться к генерирующим соотношениям в виде $(s_i s_{i\pm 1})^3 = 1$, тогда кубическое соотношение в (5.1) заменится на

$$S_1(-b)S_2(-a-b)S_1(-a)S_2(b)S_1(a+b)S_2(a) = \mathbb{1}$$

и аналогичная замена имеет место для (5.2).

Мы имеем два очевидных равенства. Оператор $S_3(a)$ отличается от оператора $S_1(a)$ только заменой переменной $z_1 \rightarrow z_2$, так что эти операторы коммутируют: $S_1(a)S_3(b) = S_3(b)S_1(a)$. Равенство $S_2(a)S_2(-a) = \mathbb{1}$ легко проверяется с помощью формулы отражения для эллиптической гамма-функции (мы полагаем $\varphi_2 = 1$), поскольку оператор S_2 сводится к умножению на заданную функцию. Если бы мы имели произвольную периодическую функцию $\varphi_2(z_1, z_2; a)$ в определении $S_2(a)$ (на самом деле, φ_2 может зависеть от u_2 и v_1 отдельно, не только от их разности), тогда это условие не фиксировало бы φ_2 , поскольку имеется много нетривиальных функций переменных z_1, z_2 , удовлетворяющих условию $\varphi_2(z_1, z_2; a)\varphi_2(z_1, z_2; -a) = 1$. Только если $\varphi_2(z_1, z_2; a)$ не зависит от z_1, z_2 , это условие зафиксирует S_2 с точностью до постоянного множителя $\varphi(a)$, удовлетворяющего ограничению $\varphi_2(a)\varphi_2(-a) = 1$.

Покажем, что оставшиеся нетривиальные соотношения Кокстера вытекают из формулы для вычисления эллиптического бета-интеграла [13]. Обозначим

$$[S_2(a)\Psi](z_1, z_2) = D_a(z_1, z_2) \cdot \Psi(z_1, z_2), \quad D_a(z_1, z_2) = \Gamma\left(\pm z_1 \pm z_2 + a + \eta + \frac{\tau}{2}\right)$$

и

$$[S_1(b)\Psi](z_1, z_2) = \int_0^1 dz W_b(z_1, z) \Psi(z, z_2), \quad W_b(z_1, z) = \kappa \frac{\Gamma(\pm z \pm z_1 - b)}{\Gamma(-2b, \pm 2z)},$$

где $\Gamma(a, b) = \Gamma(a | 2\eta, \tau) \Gamma(b | 2\eta, \tau)$. Аналогично, оператор $S_3(b)$ имеет ту же самую форму что и $S_1(b)$, но он действует в пространстве функций переменной z_2 .

Первое соотношение Кокстера

$$S_1(a)S_2(a+b)S_1(b) = S_2(b)S_1(a+b)S_2(a) \quad (5.3)$$

эквивалентно следующему уравнению для ядер:

$$\int_0^1 dz W_a(z_1, z) D_{a+b}(z, z_2) W_b(z, x) = D_b(z_1, z_2) W_{a+b}(z_1, x) D_a(x, z_2). \quad (5.4)$$

Второе соотношение Кокстера

$$S_3(a)S_2(a+b)S_3(b) = S_2(b)S_3(a+b)S_2(a) \quad (5.5)$$

эквивалентно аналогичному уравнению для ядер:

$$\int_0^1 dz W_a(z_2, z) D_{a+b}(z_1, z) W_b(z, x) = D_b(z_1, z_2) W_{a+b}(z_2, x) D_a(z_1, x). \quad (5.6)$$

Это уравнение может быть получено из первого перестановкой $z_1 \leftrightarrow z_2$ при условии, что функция $D_a(z_1, z_2)$ симметрична, $D_a(z_1, z_2) = D_a(z_2, z_1)$, что очевидно в нашем случае. Поэтому нам достаточно доказать только первое соотношение Кокстера.

Сопоставим теперь формулу для вычисления эллиптического бета-интеграла [13]

$$\kappa \int_0^1 \frac{\prod_{k=1}^6 \Gamma(g_k \pm z)}{\Gamma(\pm 2z)} dz = \prod_{1 \leq j < k \leq 6} \Gamma(g_j + g_k), \quad (5.7)$$

где

$$g_1 + \dots + g_6 = 2\eta + \tau \pmod{\mathbb{Z}}, \quad \text{Im}(g_k), \text{Im}(\eta), \text{Im}(\tau) > 0, \quad (5.8)$$

с соотношением (5.6), которое имеет следующий явный вид:

$$\begin{aligned} \kappa \int_0^1 dz \frac{\Gamma(\pm z \pm z_1 - a)}{\Gamma(-2a, \pm 2z)} \cdot \Gamma\left(\pm z \pm z_2 + a + b + \eta + \frac{\tau}{2}\right) \cdot \frac{\Gamma(\pm x \pm z - b)}{\Gamma(-2b, \pm 2x)} \\ = \Gamma\left(\pm z_1 \pm z_2 + b + \eta + \frac{\tau}{2}\right) \cdot \frac{\Gamma(\pm x \pm z_1 - a - b)}{\Gamma(-2a - 2b, \pm 2x)} \cdot \Gamma\left(\pm x \pm z_2 + a + \eta + \frac{\tau}{2}\right). \end{aligned}$$

После очевидных упрощений мы приходим к эллиптическому бета-интегралу (5.7) для следующего выбора параметров:

$$\begin{aligned} g_1 &= z_1 - a, & g_2 &= -z_1 - a, & g_3 &= z_2 + a + b + \eta + \frac{\tau}{2}, \\ g_4 &= -z_2 + a + b + \eta + \frac{\tau}{2}, & g_5 &= x - b, & g_6 &= -x - b. \end{aligned}$$

Ограничения на значения z_1 , z_2 , x , a и b , использованные при построении сплетающих операторов, гарантируют, что $|e^{2\pi i g_{1,2,5,6}}| < |q|^{1/2}$ и $|e^{2\pi i g_{3,4}}| < |q|$. Поскольку $\prod_{k=1}^6 e^{2\pi i g_k} = pq$, можно заключить, что мы должны иметь $|p| < |q|^3$. Однако с помощью аналитического продолжения можно увидеть, что тождество (5.4) справедливо для более широкой области значений параметров $\text{Im}(g_k) > 0$, которая симметрична по 2η и τ (или p и q). Таким образом, кубические соотношения Кокстера оказываются справедливыми как следствие точной формулы интегрирования (5.7).

Тот же результат получается для изначальной реализации генераторов алгебры Склянина (2.5), приводящей к экспоненциальным множителям $e^{\pi i(z^2 - x^2)/\eta}$ в определении операторов $S_{1,3}$. А именно, все такие экспоненциальные множители сокращаются из интегрального тождества.

Остается непонятным, является ли наша нормировка $\varphi_k = 1$ (или более общее требование, чтобы φ_k не зависели от z_1, z_2) критической для полученного результата. Кубическое соотношение Кокстера справедливо для всех функций φ_k , удовлетворяющих ограничению

$$\varphi_1(z_1, z; a) \varphi_2(z, z_2; a + b) \varphi_1(z, x; b) = \varphi_2(z_1, z_2; b) \varphi_1(z_1, x; a + b) \varphi_2(x, z_2; a).$$

Необходимо понять, насколько сильно это соотношение ограничивает функции $\varphi_k(z, x)$. Вполне возможно, что существуют нетривиальные решения, так что желательно зафиксировать имеющуюся функциональную свободу некоторым другим способом.

Рассмотрим предел $b \rightarrow -a$ в соотношении (5.3). Очевидно, что $S_2(0) = \mathbb{1}$, т. е. выражение в левой части сводится к произведению $S_1(a)S_1(-a)$, а в правой части — к $S_2(-a)S_1(0)S_2(a)$. Как будет показано ниже в разделе о конечномерных редукциях (раздел 8), имеет место равенство $S_1(0) = \mathbb{1}$ (это вытекает после

аккуратного разрешения неопределенности, возникающей из-за стремящегося к нулю множителя перед интегралом и расходящегося значения самого интеграла). Поскольку $S_2(-a)S_2(a) = \mathbb{1}$, мы формально приходим к оставшимся квадратичным соотношениям Кокстера

$$S_1(a)S_1(-a) = \mathbb{1}, \quad S_3(a)S_3(-a) = \mathbb{1}.$$

Проблема состоит в том, что на данный момент операторы $S_{1,3}(a)$ определены только в ограниченной области значений a и z_1 , а именно $\text{Im}(a \pm z_1) < -\text{Im}(\eta)$. Поэтому нам необходимо дать корректное определение операторов $S_{1,3}(-a)$, чтобы соотношение отражения стало верным.

Предположим, что интегральный оператор $S_1(a)$ в форме (4.25) действует на голоморфную функцию $y \in \mathbb{C}^*$ и все сингулярности результирующей функции определяются ядром $S_1(a)$. Из структуры дивизора эллиптических гамма-функций можно увидеть, что это ядро имеет полюсы в точках

$$\text{in}: y = ty_1^{\pm 1} p^j q^k, \quad \text{out}: y = t^{-1} y_1^{\pm 1} p^{-j} q^{-k}, \quad (5.9)$$

где $j, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и первая последовательность сходится к нулю $y = 0$, а вторая уходит на бесконечность. При $|ty_1^{\pm 1}| < |q|^{1/2}$ контур $\mathbb{T}$ разделяет эти два множества полюсов. Заменяем теперь контур интегрирования $\mathbb{T}$ в (4.25) на произвольный контур C , отделяющий полюсы in от out. По теореме Коши, при изменении значений переменных t и y_1 не появляется никаких сингулярностей до тех пор, пока полюсы ядра интеграла не пересекают контур интегрирования. Очевидно, что эта процедура расширяет область определения оператора S_1 на произвольные значения t и y_1 , обеспечивающие существование контура C . Это условие нарушено, если полюсы из множеств in и out зажимают контур интегрирования, что может произойти при

$$ty_1^{\pm 1} p^{j_1} q^{k_1} = (ty_1^{\pm 1})^{-1} p^{-j_2} q^{-k_2} \quad \text{или} \quad ty_1^{\pm 1} p^{j_1} q^{k_1} = (ty_1^{\mp 1})^{-1} p^{-j_2} q^{-k_2}. \quad (5.10)$$

Ядро оператора S_1 содержит также множитель $1/\Gamma(t^2; p, q)$, равный нулю при $t^2 \rightarrow p^{-j} q^{-k}$ и расходящийся при $t^2 \rightarrow p^{j+1} q^{k+1}$ с $j, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. В результате мы получаем ограничения

$$t^2 \neq p^{-j} q^{-k}, p^{j+1} q^{k+1}, \quad j, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad (5.11)$$

и $y_1^2 \neq t^2 p^j q^k, t^{-2} p^{-j} q^{-k}$ для произвольных фиксированных t и $j, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Таким образом, мы определили действие оператора $[S_1(a)\Phi](z)$ для произвольных значений z в общем положении с $a \neq \eta j + \tau k/2$ и $a \neq 1/2 + \eta j + \tau k/2$, $j, k \in \mathbb{Z}$, $(j, k) \neq (-1, 0), (0, -1)$.

При $t^2 = q^{-n} p^{-m}$ с целыми $n, m \geq 0$ и значениями q и p в общем положении, что мы все время подразумеваем, второе множество равенств в (5.10) удовлетворяется, если $j_1 + j_2 = m$ и $k_1 + k_2 = n$, т. е. имеется $(n+1) \times (m+1)$ пар полюсов, зажимающих контур C . Как будет показано в разделе 8, для этих исключительных значений t , кроме точек $t = \pm 1$ (т. е. $a = 0, 1/2$), оператор $S_1(a)$ имеет нетривиальные нулевые моды. Аналогично, оператор $S_1(-a)$ имеет нулевые моды при $t^2 = q^n p^m$ с целыми $n, m \geq 0$, $(n, m) \neq (0, 0)$. В результате соотношение $S_1(a)S_1(-a) = \mathbb{1}$ не может быть верным при $t^2 = q^n p^m$, $n, m \in \mathbb{Z}$, $(n, m) \neq 0$.

Следующее строгое утверждение было получено в работе [29].

ТЕОРЕМА 4. Пусть $p, q, t \in \mathbb{C}$ таковы, что $\max\{|p|, |q|\} < |t|^2 < 1$. Для фиксированных $w \in \mathbb{T}$ пусть C_w обозначает контур, находящийся внутри кольца $\mathbb{A} = \{z \in \mathbb{C}; |t| - \varepsilon < |z| < |t|^{-1} + \varepsilon\}$ для инфинитезимально малого положительного ε , такой, что C_w содержит точки wt^{-1} , $(wt)^{-1}$ внутри себя и исключает их $(z \rightarrow 1/z)$ -партнеров. Пусть $f(z) = f(z^{-1})$ – голоморфная функция на $\mathbb{A}$. Тогда для $|t| < |x| < |t|^{-1}$ справедливо соотношение

$$\frac{(p; p)_{\infty}^2 (q; q)_{\infty}^2}{(4\pi i)^2} \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{C_w} \frac{\Gamma(tw^{\pm 1}x^{\pm 1}, t^{-1}w^{\pm 1}z^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(t^{\pm 2}, z^{\pm 2}, w^{\pm 2}; p, q)} f(z) \frac{dz}{z} \right) \frac{dw}{w} = f(x). \quad (5.12)$$

Переписывая соотношение (5.12) в виде

$$\kappa \int_{\mathbb{T}} \frac{\Gamma(tw^{\pm 1}x^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(t^2, w^{\pm 2}; p, q)} \frac{dw}{2\pi i w} \left(\kappa \int_{C_w} \frac{\Gamma(t^{-1}w^{\pm 1}z^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(t^{-2}, z^{\pm 2}; p, q)} f(z) \frac{dz}{2\pi i z} \right) = f(x),$$

мы очевидным образом приходим к равенству $[S_1(a)S_1(-a)f](x) = f(x)$ для аналитически продолженных операторов $S_1(a)$. Здесь оператор $S_1(a)$ продолжен в область параметров $|tx^{\pm 1}| < 1$, а $S_1(-a)$ является продолжением оператора $S_1(a)$ в область $|tw^{\pm 1}| < 1/\max\{|p|^{1/2}, |q|^{1/2}\} + \varepsilon$.

В соотношении (5.12), конечно, подразумевается, что полюсы подынтегральной функции $z = t^{-1}w^{\pm 1}p^j q^k$ при $j, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ находятся внутри C_w , а их $(z \rightarrow 1/z)$ -партнеры – вне C_w . Ограничение снизу $\max\{|p|, |q|\} < |t|^2$ было наложено для обеспечения того, что только полюсы $t^{-1}w^{\pm 1}$ и $tw^{\mp 1}$ пересекаются при деформации контура C_w к $\mathbb{T}$. При более слабых условиях $|q|, |p| < |t|$ ряд полюсов может войти в кольцо $\mathbb{A}$ с обеих сторон, но они все еще не будут пересекать единичную окружность. Поэтому применимы те же самые аргументы, что и в работе [29], и мы получаем требуемое соотношение инверсии $S_1(a)S_1(-a) = \mathbb{1}$ в более широкой области изменения параметра a . В частности, при $|x| = 1$ и $\max\{|p|, |q|\} < |t| < |q|^{1/2}$ мы можем удовлетворить даже изначальные ограничения для параметров оператора $S_1(a)$, $|tx^{\pm 1}| < |q|^{1/2}$. Таким образом, мы доказали, что аналитически продолженные операторы $S_{1,2,3}$ удовлетворяют соотношениям Кокстера для группы перестановок $\mathfrak{S}_4$.

Если подставить в соотношение $S_1(a)S_1(-a) = \mathbb{1}$ выражение (4.23), не обращая внимания на имеющиеся ограничения, и подразумевать, что z_1 и z_2 действительны, то тогда прямое рассмотрение дает

$$\int_0^1 W_a(z_1, z) W_{-a}(z, z_2) dz = \frac{1}{2} [\delta(z_1 - z_2) + \delta(z_1 + z_2)], \quad (5.13)$$

где $\delta(z)$ обозначает дельта-функцию Дирака. Используя явные выражения для W_a -функций, мы получаем следующее интегральное тождество:

$$\kappa \int_0^1 \frac{\Gamma(\pm z_1 \pm z - a, \pm z_2 \pm z + a)}{\Gamma(\pm 2z)} dz = \frac{\Gamma(\pm 2a, \pm 2z_2)}{2\kappa} [\delta(z_1 - z_2) + \delta(z_1 + z_2)], \quad (5.14)$$

которое было частично рассмотрено в работах [19], [30], [31].

В правой части равенства (5.14) стоит произведение

$$\Gamma(\pm 2a) = \Gamma(t^{\pm 2}; p, q) = \frac{1}{(t^2; p)_{\infty} (pt^{-2}; p)_{\infty} (t^{-2}; q)_{\infty} (qt^2; q)_{\infty}},$$

которое расходится при $t^2 = p^j$ или $t^2 = q^j$, $j \in \mathbb{Z}$. Поэтому для переменных z_1, z_2 в общем положении можно было бы ожидать проблемы с соотношением инверсии по крайней мере для этих значений параметра t . Однако, как отмечено выше, соотношение инверсии остается справедливым при $t = \pm 1$ и нарушается при $t^2 = p^j q^k$, $j, k \in \mathbb{Z}$, $(j, k) \neq (0, 0)$. Поэтому соотношение (5.14) не может выполняться для этих значений параметра t . Необходимо провести аккуратный анализ соотношения инверсии для более широкой области значений параметров, чем это обсуждалось выше, и строго определить, когда формула (5.14) является справедливой.

Более детальное обсуждение свойств сплетающих операторов дается в последующих разделах.

6. Связь с эллиптическим преобразованием Фурье

Техника цепочек Бейли является хорошо известным средством для порождения бесконечных последовательностей тождеств для простых и q -гипергеометрических рядов [16]. Она весьма полезна для доказательства тождеств Роджерса–Рамануджана, использовавшихся для решения $2d$ -моделей статистической механики [1]. Интегральный аналог цепочек Бейли был открыт в [17] сразу на эллиптическом уровне с помощью нового универсального интегрального преобразования для функций, зависящих от одного параметра t . Как показано в работе [29], обращение этого преобразования по существу эквивалентно отражению параметра $t \rightarrow t^{-1}$, что напоминает преобразование Фурье. Опишем ключевые элементы этого формализма эллиптического преобразования Фурье.

Для заданной функции $\alpha(z, t)$, аналитической вблизи единичной окружности $z \in \mathbb{T}$, определим интегральное преобразование

$$\beta(w, t) = M(t)_{wz} \alpha(z, t) = \frac{(p; p)_{\infty} (q; q)_{\infty}}{4\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\Gamma(tw^{\pm 1} z^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(t^2, z^{\pm 2}; p, q)} \alpha(z, t) \frac{dz}{z}, \quad (6.1)$$

где $|tw|, |t/w| < 1$. В работе [17] функции, связанные таким образом, назывались интегральной эллиптической парой Бейли по отношению к параметру t (приведенная специальная перенормированная форма этого определения была представлена в работе [29]).

Интегральный аналог леммы Бейли предоставляет метод порождения бесконечной последовательности пар Бейли, исходя из затравочной пары. А именно, предположим, что $\alpha(z, t)$ и $\beta(w, t)$ образуют интегральную эллиптическую пару Бейли по отношению к параметру t . Тогда при $|s|, |t| < 1$, $|\sqrt{pq} y^{\pm 1}| < |st|$ новые функции

$$\alpha'(w, st) = D(s; y, w) \alpha(w, t), \quad D(s; y, w) = \Gamma(\sqrt{pq} s^{-1} y^{\pm 1} w^{\pm 1}; p, q), \quad (6.2)$$

$$\beta'(w, st) = D(t^{-1}; y, w) M(s)_{wx} D(st; y, x) \beta(x, t), \quad (6.3)$$

где $w \in \mathbb{T}$, образуют интегральную эллиптическую пару Бейли по отношению к параметру st .

Это утверждение легко доказывается. Действительно, требование

$$\beta'(w, st) = M(st)_{wz} \alpha'(z, st)$$

эквивалентно равенству

$$D(t^{-1}; y, w) M(s)_{wx} D(st; y, x) M(t)_{xz} \alpha(z, t) = M(st)_{wz} D(s; y, z) \alpha(z, t).$$

Поскольку $D(t^{-1}; y, w) D(t; y, w) = 1$ благодаря уравнению отражения для эллиптической гамма-функции, его можно привести к операторному тождеству

$$M(s)_{wx} D(st; y, x) M(t)_{xz} = D(t; y, w) M(st)_{wz} D(s; y, z). \quad (6.4)$$

Подставим явные выражения для M - и D -операторов и изменим порядок интегрирований в выражении в левой части. Тогда можно проверить, что соотношение (6.4) эквивалентно формуле для вычисления эллиптического бета-интеграла с правильными ограничениями на параметры, что доказывает требуемое утверждение.

Соотношение (6.4) является не чем иным, как операторной формой соотношения звезда-треугольник [22]. Равенство (6.4) было явно представлено в [11] в матричной форме (см. в [11] соотношение (6.5), связанное с некоторой редукцией сплетающих операторов).

Сравнивая оператор $M(t)$ со сплетающим оператором, представленным в мультипликативной форме (4.25), можно увидеть, что

$$M(t)_{wy} f(y) = [S_1(u_1 - u_2) f](w) \quad (6.5)$$

для $t = e^{2\pi i(u_2 - u_1)}$ и $\varphi_1 = 1$. Кроме того, очевидно,

$$S_2(a) = D(e^{-2\pi i a}; e^{2\pi i z_1}, e^{2\pi i z_2}),$$

при условии, что в (6.2) в аргументах эллиптических гамма-функций стоит $+\sqrt{pq}$, поскольку $e^{2\pi i(\eta+\tau/2)} = +\sqrt{pq}$. Выбор другого знака квадратного корня в (6.2) дает оператор S_2 , соответствующий генераторам алгебры Склинина, отличающимся от (2.5) добавлением $1/2$ к аргументам тэта-функций, зависящих от спина ℓ (см. (9.7)).

Таким образом, операторы D и M , входящие в интегральную лемму Бейли, определяют операторы элементарных перестановок, удовлетворяющих соотношениям инверсии $S_2(a)S_2(-a) = \mathbb{1}$, $S_1(a)S_1(-a) = \mathbb{1}$, а базовое соотношение (6.4) эквивалентно соотношению Кокстера

$$S_1(a)S_2(a+b)S_1(b) = S_2(b)S_1(a+b)S_2(a). \quad (6.6)$$

Возьмем это операторное тождество (или (6.4)), используем аддитивные обозначения для операторов S_k (4.22)–(4.24) (с $\varphi_k = 1$) и подействуем им на дираковскую дельта-функцию $(\delta(x-z) + \delta(x+z))/2$. Тогда получаем равенство (5.4), которое может быть записано в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \rho(u) D_{\xi-a}(x, u) D_{a+b}(y, u) D_{\xi-b}(w, u) du \\ &= \chi(a, b) D_b(x, y) D_{\xi-a-b}(x, w) D_a(y, w), \end{aligned} \quad (6.7)$$

где

$$D_a(x, u) = S_2(a) = D(e^{-2\pi i a}; e^{2\pi i x}, e^{2\pi i u}) = \Gamma(e^{2\pi i(a-\xi \pm x \pm u)}; p, q) \quad (6.8)$$

и

$$\begin{aligned} e^{-4\pi i \xi} &= pq, & \rho(u) &= \frac{(p; p)_\infty (q; q)_\infty}{2\Gamma(e^{\pm 4\pi i u}; p, q)}, \\ \chi(a, b) &= \Gamma(e^{-4\pi i a}, e^{-4\pi i b}, e^{4\pi i(a+b-\xi)}; p, q). \end{aligned}$$

Равенство (6.7) представляет собой соотношение звезда-треугольник в функциональной форме, рассмотренное в работе [31], где $D_a(x, u)$ является больцмановским весом для ребра, соединяющего спины x и u , находящиеся в соседних вершинах решетки, $\rho(u)$ описывает собственную энергию спинов, ξ называется кроссинг-параметром. В этой картине интегрирование означает вычисление статистической суммы для элементарной ячейки, имеющей форму звезды, содержащей вклады от всех возможных значений непрерывного “спина”, находящегося в центральной вершине. Таким образом, можно заключить, что лемма Бейли, установленная в работе [17], эквивалентна соотношению звезда-треугольник для специфических эллиптических гипергеометрических больцмановских весов.

Определяя $S_3(a)$ как оператор эллиптического преобразования Фурье для переменной z_2 , мы получаем другой генератор группы $\mathfrak{S}_4$. Таким образом, алгебраические соотношения для составляющих элементов леммы Бейли оказываются эквивалентными кокстеровским соотношениям для генераторов группы перестановок. Этот факт не был осознан в оригинальной статье [17], однако связь соотношения звезда-треугольник с интегральным аналогом цепочек Бейли была кратко упомянута в работе [30].

7. Единственность решений и эллиптический модулярный дубль

Концепция эллиптического модулярного дубля, введенная в работе [19], позволяет нам зафиксировать функциональную свободу в определении генераторов группы перестановок $\mathfrak{S}_4$.

Бесконечномерное решение УЯБ, которое мы получили,

$$\mathbb{R}_{12}(\mathbf{u}) = \mathbb{P}_{12} S_2(u_1 - v_2) S_1(u_1 - v_1) S_3(u_2 - v_2) S_2(u_2 - v_1),$$

симметрично по параметрам p и q , поскольку мы подразумеваем, что $u_{1,2}$ и $v_{1,2}$ являются независимыми переменными (или, эквивалентно, u и $g = \eta(2\ell + 1)$ должны быть рассмотрены как не зависящие от η и τ величины). Используя мультипликативные обозначения и модифицированную форму генераторов алгебры Складина и сплетающих операторов, мы можем записать действие этого R-оператора на функции двух переменных в следующем явном виде:

$$\begin{aligned} [\mathbb{R}_{12}(\mathbf{u})f](z_1, z_2) &= \frac{(p; p)_\infty^2 (q; q)_\infty^2}{(4\pi i)^2} \Gamma(\sqrt{pq} z_1^{\pm 1} z_2^{\pm 1} e^{2\pi i(u_1 - v_2)}; p, q) \\ &\times \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\Gamma(e^{2\pi i(v_1 - u_1)} z_2^{\pm 1} x^{\pm 1}, e^{2\pi i(v_2 - u_2)} z_1^{\pm 1} y^{\pm 1}, \sqrt{pq} e^{2\pi i(u_2 - v_1)} x^{\pm 1} y^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(e^{4\pi i(v_1 - u_1)}, e^{4\pi i(v_2 - u_2)}, x^{\pm 2}, y^{\pm 2}; p, q)} \\ &\times f(x, y) \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Благодаря симметрии между p и q , мы имеем не одно, а два RLL-сплетающих соотношения. Второе соотношение получается из (3.7) простой перестановкой 2η и τ (или p и q):

$$\mathbb{R}_{12}(u-v)L_1^{\text{doub}}(u)\sigma_3L_2^{\text{doub}}(v)=L_2^{\text{doub}}(v)\sigma_3L_1^{\text{doub}}(u)\mathbb{R}_{12}(u-v). \quad (7.2)$$

Напомним, что после нашего преобразования подобия начальный L-оператор дается выражением (2.2), в котором $w_a(u) = \theta_{a+1}(u + \eta | \tau) / \theta_{a+1}(\eta | \tau)$ и генераторы алгебры Складина $\mathbf{S}^a$ имеют вид (4.21). Оператор $L^{\text{doub}}(u)$ получается из $L(u)$ простой перестановкой 2η и τ . Это означает, что $L^{\text{doub}}(u)$ также имеет форму (2.2), но теперь $w_a(u) = \theta_{a+1}(u + \tau/2 | 2\eta) / \theta_{a+1}(\tau/2 | 2\eta)$ и операторы $\mathbf{S}_{\text{mod}}^a$ (4.21) должны быть заменены на

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}_{\text{mod}}^a = e^{-\pi i \tau / 2} \frac{i^{\delta_{a,2}} \theta_{a+1}(\tau/2 | 2\eta)}{\theta_1(2z | 2\eta)} & \left[\theta_{a+1} \left(2z - g + \frac{\tau}{2} \middle| 2\eta \right) \cdot e^{-2\pi i z} \cdot e^{\tau \partial_z / 2} \right. \\ & \left. - \theta_{a+1} \left(-2z - g + \frac{\tau}{2} \middle| 2\eta \right) \cdot e^{2\pi i z} \cdot e^{-\tau \partial_z / 2} \right], \end{aligned} \quad (7.3)$$

где g – тот же самый произвольный параметр, что и в (4.21). Такое прямое произведение двух алгебр Складина было введено в работе [19] под названием *эллиптический модулярный дубль*. Оно представляет собой эллиптический аналог модулярного дубля Фаддеева [18], описываемого прямым произведением двух q -аналогов $\mathfrak{sl}(2)$ -алгебры, $U_q(\mathfrak{sl}(2)) \otimes U_{\tilde{q}}(\mathfrak{sl}(2))$, с $q = e^{4\pi i \eta}$ и $\tilde{q} = e^{-\pi i / \eta}$.

Модифицированные операторы $S_{1,3}(g)$ инвариантны относительно перестановок p и q , и поэтому они удовлетворяют также, в дополнение к (4.9), сплетающим соотношениям для операторов $\tilde{\mathbf{S}}_{\text{mod}}^a$:

$$\begin{aligned} S_1(g_1) \cdot \tilde{\mathbf{S}}_{\text{mod}}^a(g_1) &= \tilde{\mathbf{S}}_{\text{mod}}^a(-g_1) \cdot S_1(g_1), \\ S_3(g_2) \cdot \tilde{\mathbf{S}}_{\text{mod}}^a(g_2) &= \tilde{\mathbf{S}}_{\text{mod}}^a(-g_2) \cdot S_3(g_2). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Эта бонусная симметрия по p и q в $S_k(a)$ и R-операторе возникла благодаря специальному выбору произвольных эллиптических функций $\varphi_k(z_1, z_2)$, возникающих в решениях соответствующих конечно-разностных уравнений. Мы можем обратить логику рассуждений и потребовать с самого начала существование эллиптического модулярного дубля (7.2). Тогда можно повторить те же самые рассуждения, что были проделаны ранее, и получить те же самые решения конечно-разностных уравнений, но теперь множители φ_k ограничиваются дополнительными условиями периодичности

$$\varphi_k(z_1 + \tau, z_2) = \varphi_k(z_1, z_2 + \tau) = \varphi_k\left(z_1 + \frac{\tau}{2}, z_2 + \frac{\tau}{2}\right) = \varphi_k(z_1, z_2). \quad (7.5)$$

Воспользуемся хорошо известной теоремой Якоби, утверждающей, что любая функция с тремя несоизмеримыми периодами,

$$\varphi(z + \omega_1) = \varphi(z + \omega_2) = \varphi(z + \omega_3) = \varphi(z), \quad \sum_{k=1}^3 n_k \omega_k \neq 0, \quad n_k \in \mathbb{Z},$$

должна быть постоянной, $\varphi = \text{const}$. Поскольку наши функции φ_k были уже зафиксированы как эллиптические функции с периодами 1 и 2η , мы приходим

к заключению, что ограничения (7.5) с параметрами τ и η в общем положении вынуждают зафиксировать $\varphi_k(z_1, z_2) = \text{const}$. Таким образом, φ_k может зависеть только от параметров $u_{1,2}$, $v_{1,2}$, и мы выбрали нормировку $\varphi_k = 1$, согласованную с условием унитарности.

Таким образом, эллиптический модулярный дубль (т. е. наличие двух RLL-соотношений для заданного R-оператора) фиксирует сплетающие операторы S_k единственным образом (с точностью до умножения на константу). Заметим, что генераторы $\mathbf{S}^a$ и $\tilde{\mathbf{S}}^a$ этого дубля не коммутируют друг с другом, но они удовлетворяют некоторым простым антикоммутационным соотношениям [19]. Как описано в той же в работе [19], существует второй модулярный дубль, получаемый использованием модулярных преобразований для тэта-функций и модифицированной эллиптической гамма-функции [14], который будет рассмотрен в разделе 9.

8. Конечномерная редукция

Сплетающий оператор для генераторов алгебры Складина с положительными целыми значениями $2\ell + 1$ был построен в работе [27] в виде конечно-разностного оператора конечного порядка. Его формальное обобщение на оператор бесконечного порядка использовался в работе [23] для построения решений УЯБ по той же схеме, что описана выше. В частности, оператор $S_1(a)$ имел следующий вид (см. начало параграфа 5.1 в работе [23]):

$$S_1(a) = e^{2\pi i a \eta x + \pi i \eta a^2} \frac{\Gamma(2\eta x)}{\Gamma(2\eta(x+a))} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[2k-x-a]}{[-x-a]} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{[j-x-a][j-a]}{[j+1-x][j+1]} e^{(a-2k)\partial_x}, \quad (8.1)$$

где $[x] = \theta_1(2\eta x | \tau)$. Однако этот оператор не определен в строгом смысле, кроме случаев, когда ряд обрывается. В частности, формальное действие этого оператора на мероморфную функцию x дает в общем случае расходящийся ряд. Поэтому мы подразумеваем, как в работе [27], что $a = 2\ell + 1$ является положительным целым числом.

Обозначим

$$q = e^{4\pi i \eta}, \quad p = e^{2\pi i \tau}, \quad w = e^{-2\pi i \eta x}, \quad t = e^{-2\pi i \eta a}$$

и будем считать, что $|q| < 1$. Тогда, используя тэта-функцию $\theta(x; p) = (x; p)_{\infty} \times (px^{-1}; p)_{\infty}$, мы можем записать

$$\begin{aligned} S_1(a)f(w) &= q^{ax/2+a^2/4} \frac{\Gamma(w^{-2}; p, q)}{\Gamma(t^{-2}w^{-2}; p, q)} \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} t^{-2k} \frac{\theta(t^2w^2q^{2k}; p)}{\theta(t^2w^2; p)} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\theta(t^2w^2q^j, t^2q^j; p)}{\theta(w^2q^{j+1}, q^{j+1}; p)} f(tq^k w), \end{aligned} \quad (8.2)$$

где $\theta(t_1, \dots, t_k; p) = \theta(t_1; p) \cdots \theta(t_k; p)$ и $\Gamma(x; p, q)$ является эллиптической гамма-функцией (11.18). Поскольку ряд обрывается, оператор (8.2) корректно определен при $|q| < 1$ и $|q| > 1$, и даже при $|q| = 1$ — при условии, что q не является корнем из единицы.

Определим теперь интегральный оператор, действующий в пространстве функций, инвариантных относительно преобразования $z \rightarrow z^{-1}$, $f(z^{-1}) = f(z)$:

$$[B(t)f](w) = \frac{\kappa}{\Gamma(t^2; p, q)} \int_C \frac{dz}{2\pi iz} g(z, w, t) \frac{\Gamma(tw^{\pm 1} z^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(z^{\pm 2}; p, q)} f(z),$$

где $g(z, w, t)$ – некоторая фиксированная функция, которая будет определена из сравнения с оператором $S_1(a)$ (8.1), а постоянная κ была определена в теореме 3. Контур интегрирования C выбран таким образом, что он отделяет геометрические прогрессии полюсов подынтегральной функции, сходящихся к нулю $z = 0$, от их $(z \rightarrow 1/z)$ -партнеров. В частности, если $|tw|$, $|t/w| < 1$ и произведение $g(z, w, t)f(z)$ аналитично вблизи единичной окружности с положительной ориентацией $\mathbb{T}$, то можно выбрать $C = \mathbb{T}$.

Теперь мы берем $|twq^k| > 1$, $k = 0, \dots, N$, $|twq^{N+1}| < 1$, $|twp| < 1$, $|t/w| < 1$, и контур интегрирования C в виде деформации $\mathbb{T}$, содержащей внутри себя полюсы в точках $z = twq^k$, $k = 0, \dots, N$, которые лежат снаружи $\mathbb{T}$, и исключающей полюсы в точках $z = t^{-1}w^{-1}q^{-k}$, $k = 0, \dots, N$, находящихся внутри $\mathbb{T}$. Стягиваем C к $\mathbb{T}$ и учитываем вычеты полюсов в точках $z^{\pm 1} = twq^k$, $k = 0, \dots, N$. Это приводит к формуле

$$\begin{aligned} [B(t)f](w) &= \frac{\kappa}{\Gamma(t^2; p, q)} \sum_{k=0}^N \lim_{z \rightarrow twq^k} (z - twq^k) \frac{\Gamma(tw^{\pm 1} z^{\pm 1}; p, q)}{z \Gamma(z^{\pm 2}; p, q)} \\ &\quad \times (g(twq^k, w, t) + g(t^{-1}w^{-1}q^{-k}, w, t)) f(twq^k) \\ &\quad + \frac{\kappa}{\Gamma(t^2; p, q)} \int_{\mathbb{T}} \frac{dz}{2\pi iz} g(z, w, t) \frac{\Gamma(tw^{\pm 1} z^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(z^{\pm 2}; p, q)} f(z). \end{aligned}$$

Используя соотношение $\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z) \Gamma(z; p, q) = 1/((p; p)_{\infty} (q; q)_{\infty})$, находим

$$\lim_{z \rightarrow twq^k} \left(1 - \frac{twq^k}{z} \right) \Gamma(twz^{-1}; p, q) = \frac{1}{(p; p)_{\infty} (q; q)_{\infty}} \frac{1}{\theta(q^{-k}, \dots, q^{-1}; p)}.$$

В результате мы получаем

$$\begin{aligned} [B(t)f](w) &= \frac{\Gamma(w^{-2}; p, q)}{\Gamma(t^{-2}w^{-2}; p, q)} \sum_{k=0}^N \frac{g(twq^k, w, t) + g(t^{-1}w^{-1}q^{-k}, w, t)}{2} \\ &\quad \times t^{-4k} w^{-2k} q^{-k^2} \frac{\theta(t^2 w^2 q^{2k}; p)}{\theta(t^2 w^2; p)} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\theta(t^2 q^j, t^2 w^2 q^j; p)}{\theta(q^{j+1}, w^2 q^{j+1}; p)} f(twq^k) \\ &\quad + \frac{\kappa}{\Gamma(t^2; p, q)} \int_{\mathbb{T}} \frac{dz}{2\pi iz} g(z, w, t) \frac{\Gamma(tw^{\pm 1} z^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(z^{\pm 2}; p, q)} f(z). \end{aligned}$$

Возьмем теперь предел $t^2 \rightarrow q^{-2\ell-1}$, означающий, что $a \rightarrow 2\ell + 1 \in \mathbb{Z}_{>0}$. Поскольку $1/\Gamma(t^2; p, q) = 1/\Gamma(q^{-2\ell-1}; p, q) = 0$, а интеграл $\int_{\mathbb{T}}$ конечен, мы видим,

что второй член обращается в нуль, что приводит к конечному результату

$$\begin{aligned}
 [B(t)f](w) \Big|_{t^2=q^{-2\ell-1}} &= \frac{\Gamma(w^{-2}; p, q)}{\Gamma(q^{2\ell+1}w^{-2}; p, q)} \\
 &\times \sum_{k=0}^{2\ell+1} \frac{g(wq^{k-(2\ell+1)/2}, w, q^{-(2\ell+1)/2}) + g(w^{-1}q^{-k+(2\ell+1)/2}, w, q^{-(2\ell+1)/2})}{2} \\
 &\times q^{2k(2\ell+1)} w^{-2k} q^{-k^2} \frac{\theta(w^2 q^{2k-2\ell-1}; p)}{\theta(q^{-2\ell-1} w^2; p)} \\
 &\times \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\theta(q^{j-2\ell-1}, w^2 q^{j-2\ell-1}; p)}{\theta(q^{j+1}, w^2 q^{j+1}; p)} f(wq^{k-(2\ell+1)/2}). \tag{8.3}
 \end{aligned}$$

Этот ряд обрывается автоматически при $k = 2\ell + 1 = N$.

Мы получили этот результат при следующих ограничениях на переменную w : $|twq^{N+1}| < 1$ и $|t/w| < 1$, или $|q^{\ell-1/2}| < |w| < |q^{\ell-N-1/2}|$. Однако полученный результат не зависит от этих ограничений, поскольку в пределе $t^2 \rightarrow q^{-2\ell-1}$ имеется $2\ell + 2$ пар полюсов, которые зажимают контур интегрирования, и с неизбежностью требуется переход к сумме вычетов указанной выше формы, независимо от значений w .

Приравнивая это выражение к оператору в виде обрывающегося ряда $S_1(a)$ (8.2), мы получаем соотношение

$$\frac{1}{2} (g(z, w, t) + g(z^{-1}, w, t)) t^{-4k} w^{-2k} q^{-k^2} = q^{ax/2+a^2/2} t^{-2k}, \quad z = twq^k.$$

Оно имеет единственное решение, инвариантное относительно преобразования $z \rightarrow 1/z$:

$$g(z, w, t) = q^{ax/2+a^2/2} \exp \left[\frac{(\log z)^2 - (\log tw)^2}{\log q} \right],$$

что и хотелось получить. Однако оно не является аналитической функцией z . Но для справедливости нашего рассмотрения нам была необходима только аналитичность произведения $g(z, w, t)f(z)$. Обозначим $z = e^{2\pi i \eta u}$. Тогда мы можем записать

$$g(z = e^{2\pi i \eta u}, w = e^{-2\pi i \eta x}, t = e^{-2\pi i \eta a}) = e^{\pi i \eta (u^2 - x^2)}.$$

Таким образом, необходимо потребовать, чтобы $\phi(z) = e^{\pi i \eta u^2} f(z)$ была мероморфной функцией z . Потребуем дополнительно $\phi(z^{-1}) = \phi(z)$. Тогда оператор $B_{\text{mod}}(t)$, получающийся после преобразования подобия,

$$B_{\text{mod}}(t) = e^{\pi i \eta x^2} B(t) e^{-\pi i \eta u^2},$$

отображает пространство мероморфных A_1 -симметричных функций $\phi(z)$ на себя. Сделаем в $B_{\text{mod}}(t)$ замену переменных $u \rightarrow u/\eta$, $x \rightarrow x/\eta$, т.е. перейдем к параметризации $z = e^{2\pi i u}$, $w = e^{-2\pi i x}$. Тогда имеем в явном виде

$$[B_{\text{mod}}(t)\psi](w) = \frac{(p; p)_{\infty}(q; q)_{\infty}}{2\Gamma(t^2; p, q)} \int_0^1 \frac{\Gamma(te^{2\pi i(\pm x \pm u)}; p, q)}{\Gamma(e^{\pm 4\pi i u}; p, q)} \psi(e^{2\pi i u}) du.$$

Очевидно, что при $t = e^{-2\pi i(u_1 - u_2)}$ этот оператор совпадает со сплетающим оператором $S_1(u_1 - u_2)$ (4.23) (при $\varphi_1 = 1$), так что

$$[S_1(b)\Psi](x) = [B_{\text{mod}}(e^{-2\pi ib})\psi](e^{2\pi ix}),$$

где $\Psi(x) = \psi(e^{2\pi ix})$ (т.е. разница только в аддитивных или мультипликативных обозначениях). Можно сделать заключение, что дискретный сплетающий оператор работы [27] является специальным предельным случаем сплетающего оператора $S_1(b)$.

Рассмотрим тождество

$$S_3(u_1 - u_2)R_{12}(u_1, u_2 | v_1, v_2) = R_{12}(u_2, u_1 | v_1, v_2)S_1(u_1 - u_2),$$

которое легко проверяется с помощью факторизации R-матрицы. Умножая его на оператор перестановки $\mathbb{P}_{12}$ и используя соотношение $\mathbb{P}_{12}S_3 = S_1\mathbb{P}_{12}$, мы приходим к тождеству

$$S_1(u_1 - u_2)\mathbb{R}_{12} = \mathbb{R}'_{12}S_1(u_1 - u_2),$$

где $\mathbb{R}_{12} = \mathbb{P}_{12}R_{12}(u_1, u_2 | v_1, v_2)$ и $\mathbb{R}'_{12} = \mathbb{P}_{12}R_{12}(u_2, u_1 | v_1, v_2)$. Оно показывает, что наша R-матрица $\mathbb{R}_{12}$ отображает пространство нулевых мод оператора S_1 само на себя, т.е. нулевые моды S_1 образуют инвариантное пространство для оператора (7.1).

Точно таким же образом, сплетающие соотношения (4.9) и (7.4) показывают, что нулевые моды оператора S_1 образуют инвариантное пространство для эллиптического модулярного дубля, т.е. оно отображается само на себя генераторами алгебр Складина $\mathbf{S}_{\text{mod}}^a$ (4.21) и $\tilde{\mathbf{S}}_{\text{mod}}^a$ (7.3). Стандартная алгебра Складина допускает конечномерные представления в пространстве тэта-функций с модулярным параметром τ , и, естественно, ее модулярный партнер имеет аналогичные представления в пространстве тэта-функций с модулярным параметром 2η . Поэтому должны существовать конечномерные представления алгебры Складина в пространстве произведений тэта-функций с модулярными параметрами τ и 2η . Как показано в работе [19], эллиптический модулярный дубль имеет нетривиальный автоморфизм, переставляющий подмодули из этих тэта-функций.

В общем, указанная факторизация модулей для алгебры Складина связана с тем фактом, что суммы вычетов полюсов эллиптических гипергеометрических интегралов разлагаются в произведение двух эллиптических гипергеометрических рядов с переставленными модулярными параметрами p и q , что приводит к концепции двухиндексных соотношений биортогональности [14]. Покажем, что соответствующий анализ вычетов демонстрирует существование нетривиального конечномерного пространства нулевых мод у оператора $S_1(a)$ при $a = \eta(2\ell_q + 1) + \tau(\ell_p + 1/2)$ и $a = 1/2 + \eta(2\ell_q + 1) + \tau(\ell_p + 1/2)$, где $2\ell_q, 2\ell_p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (т.е. редукция, рассмотренная выше, является только частным случаем намного более общей конечномерной редукции).

Для этого повторим наше рассмотрение, принимая во внимание другое множество полюсов. А именно, рассмотрим предел $t^2 \rightarrow q^{-N}p^{-M}$, где $N, M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Теперь некоторое число полюсов уходит из диска единичного радиуса, а некоторое число входит в него. Как указывалось при обсуждении аналитического

продолжения S_1 -оператора, имеется ровно $(N+1)(M+1)$ пар полюсов, зажимающих контур интегрирования C в B_{mod} (для которого $g(z, w, t) = 1$). Протянем контур интегрирования через половину полюсов, подходящих к нему, скажем, через $z = tp^j q^k$, $j = 0, \dots, M$, $k = 0, \dots, N$, и просуммируем соответствующие вычеты. Обозначим также $N = 2\ell_q + 1$ и $M = 2\ell_p + 1$ с полуцелыми числами $\ell_p, \ell_q \geq -1/2$ для того, чтобы согласовать обозначения со спинами в алгебрах Складина, входящих в эллиптический модулярный дубль. Теперь, используя соотношения

$$\lim_{z \rightarrow twq^k p^j} \left(1 - \frac{twq^k p^j}{z}\right) \Gamma\left(\frac{tw}{z}; p, q\right) = \frac{(-1)^{jk+j+k} q^{(j+1)k(k+1)/2} p^{(k+1)j(j+1)/2}}{(p; p)_\infty (q; q)_\infty \theta(q, \dots, q^k; p) \theta(p, \dots, p^j; q)} \quad (8.4)$$

и

$$\theta(p^k z; p) = (-z)^{-k} p^{-k(k-1)/2} \theta(z; p), \quad k \in \mathbb{Z},$$

мы получаем

$$\begin{aligned} [B_{\text{mod}}(t)f](w) &= \frac{\Gamma(w^{-2}; p, q)}{\Gamma(t^{-2}w^{-2}; p, q)} \sum_{k=0}^{2\ell_q+1} \frac{\theta((tw)^2 q^{2k}; p)}{\theta((tw)^2; p)} \\ &\times \prod_{b=0}^{k-1} \frac{\theta(t^2 q^b, (tw)^2 q^b; p)}{\theta(q^{b+1}, w^2 q^{b+1}; p)} \sum_{j=0}^{2\ell_p+1} \frac{\theta((tw)^2 p^{2j}; q)}{\theta((tw)^2; q)} \\ &\times \prod_{a=0}^{j-1} \frac{\theta(t^2 p^a, (tw)^2 p^a; q)}{\theta(p^{a+1}, w^2 p^{a+1}; q)} \frac{f(tq^k p^j w)}{t^{4(jk+j+k)} w^{2(j+k)} p^{2jk+j^2} q^{2jk+k^2}}, \end{aligned} \quad (8.5)$$

где необходимо подставить действующие значения параметра t , а именно

$$t = \pm q^{-\ell_q-1/2} p^{-\ell_p-1/2}.$$

Заметим, что при $\ell_p = \ell_q = -1/2$, когда $t = \pm 1$ (или $a = 0, 1/2$), этот ряд содержит только один член. Таким образом, при $t = 1$ (или $a = 0$) сплетающий оператор становится единичным оператором: $B_{\text{mod}}(1) = \mathbb{1}$ (или $S_1(0) = \mathbb{1}$). При $t = -1$ (или $a = 1/2$) сплетающий оператор становится оператором четности:

$$B_{\text{mod}}(-1) = P, \quad Pf(w) = f(-w).$$

В аддитивных обозначениях мы можем записать $S_1(1/2) = e^{(1/2)\partial_x}$, что является оператором сдвига на полупериод для переменной $w = e^{-2\pi i x}$. Все наши функции аналитичны по w (после устранения экспоненциальных множителей из операторов $S_{1,3}$) и $t = e^{-2\pi i a}$. Поэтому $S_1(a+1) = S_1(a)$ и $S_1(-1/2) = S_1(1/2)$, так что

$$S_1^2\left(\frac{1}{2}\right) = S_1\left(-\frac{1}{2}\right) S_1\left(\frac{1}{2}\right) = P^2 = e^{\partial_x},$$

что эквивалентно единичному оператору, поскольку мы получили оператор сдвига на период 1.

Если мы устраним ограничение $t = \pm q^{-\ell_q-1/2} p^{-\ell_p-1/2}$ в (8.5) (что не является допустимым в нашем рассмотрении, поскольку тогда пришлось бы восстановить интегральную часть в B_{mod}) и положим формально $\ell_q, \ell_p \rightarrow \infty$,

мы получим двойной бесконечный ряд, который качественно отличается от однократного бесконечного ряда, использованного в работе [23]. Этот факт демонстрирует принципиальное отличие строго определенного интегрального оператора $B_{\text{mod}}(t)$ работы [17] от реализации оператора S_1 бесконечным эллиптическим гипергеометрическим рядом работы [23].

Из формулы (8.5) видно, что при специальных квантованных значениях t оператор $B_{\text{mod}}(t)$ имеет почти факторизованную форму, его единственными нефакторизованными частями являются множитель $(pqt^2)^{-2jk}$ и его действие на саму функцию $f(tq^k p^j w)$. Предположим теперь, что мы работаем в пространстве функций вида

$$f(z) = \theta_{4\ell_q}^+(z; p) \theta_{4\ell_p}^+(z; q), \quad (8.6)$$

где $\theta_{4\ell}^+(z; q)$ – произвольная A_1 -симметричная тэта-функция порядка $4\ell \geq 0$ с модулярным параметром q , т.е. голоморфная функция переменной $z \in \mathbb{C}^*$, обладающая свойствами

$$\theta_{4\ell}^+(z^{-1}; q) = \theta_{4\ell}^+(z; q), \quad \theta_{4\ell}^+(qz; q) = \frac{1}{(qz^2)^{2\ell}} \theta_{4\ell}^+(z; q). \quad (8.7)$$

Как уже упоминалось, такое рассмотрение мотивировано нашим начальным сплетающим соотношением (4.9) и его партнером (7.4) с $S_1 \sim B(t)$, которые показывают, что нулевые моды B -оператора образуют инвариантное пространство для генераторов двух алгебр Складина. Известно, что стандартные генераторы алгебры Складина оставляют инвариантным пространство тэта-функций $\theta_{4\ell}^+(z; q)$ [10]. Но наш оператор $B_{\text{mod}}(t)$ симметричен по p и q . Поэтому представляется естественным рассмотреть приведенный анзац для $f(z)$, чтобы иметь явную реализацию автоморфизма эллиптического модулярного дубля, переставляющего две алгебры Складина [19].

Подставим теперь выражение (8.6) в формулу (8.5), используем второе соотношение из (8.7), подставим явное выражение для значений t и устраним все возможные степени p или q из аргументов тэта-функций. Тогда для целых ℓ_p и ℓ_q мы получаем

$$\begin{aligned} [B_{\text{mod}} f](w) = & \frac{(-1)^{(2\ell_q+1)(2\ell_p+1)} p^{\ell_p(1-2\ell_p\ell_q+2\ell_p-2\ell_q)} q^{\ell_q(1-2\ell_p\ell_q+2\ell_q-2\ell_p)}}{w^{2(2\ell_p+2\ell_q+1)} \prod_{b=0}^{2\ell_q} \theta(w^{-2}q^b; p) \prod_{a=0}^{2\ell_p} \theta(w^{-2}p^a; q)} \\ & \times \left(\sum_{k=0}^{2\ell_q+1} q^k \frac{\theta(w^2 q^{2k-2\ell_q-1}; p)}{\theta(w^2 q^{-2\ell_q-1}; p)} \prod_{b=0}^{k-1} \frac{\theta(q^{b-2\ell_q-1}, w^2 q^{b-2\ell_q-1}; p)}{\theta(q^{b+1}, w^2 q^{b+1}; p)} \right. \\ & \quad \left. \times \theta_{4\ell_q}^+(p^{-1/2} q^{k-\ell_q-1/2} w; p) \right) \\ & \times \left(\sum_{j=0}^{2\ell_p+1} p^j \frac{\theta(w^2 p^{2j-2\ell_p-1}; q)}{\theta(w^2 p^{-2\ell_p-1}; q)} \prod_{a=0}^{j-1} \frac{\theta(p^{a-2\ell_p-1}, w^2 p^{a-2\ell_p-1}; q)}{\theta(p^{a+1}, w^2 p^{a+1}; q)} \right. \\ & \quad \left. \times \theta_{4\ell_p}^+(q^{-1/2} p^{j-\ell_p-1/2} w; q) \right). \quad (8.8) \end{aligned}$$

Аналогичные выражения возникают, когда один из параметров ℓ_p, ℓ_q (или оба) является полужелым числом. Теперь видна полная факторизация действия

нашего оператора на соответствующие подпространства $\theta_{4\ell_q}^+(z; p)$ и $\theta_{4\ell_p}^+(z; q)$, так что каждый из его множителей независим от другого. Это означает, что после построения нулевых мод для одного из множителей другие нулевые моды находятся простой заменой $p \leftrightarrow q$ и $\ell_p \leftrightarrow \ell_q$.

Заметим, что в формуле (8.8) нельзя зафиксировать $\ell_p = -1/2$ (или $\ell_q = -1/2$), поскольку второе соотношение в (8.7) справедливо только при $\ell \geq 0$. При $2\ell_p + 1 = 0$ (или $2\ell_q + 1 = 0$), когда отсутствует вторая сумма, мы получаем рассмотренный ранее оператор (8.3). Таким образом, мы построили пространство нулевых мод оператора эллиптического преобразования Фурье $B_{\text{mod}}(t)$ размерности $d_{zm} = (2\ell_p + 1)(2\ell_q + 1)$ при $\ell_p, \ell_q \geq 0$. При $2\ell_p + 1 = 0$ имеем $d_{zm} = 2\ell_q + 1$ и, наоборот, при $2\ell_q + 1 = 0$ имеем $d_{zm} = 2\ell_p + 1$. При $2\ell_p + 1 = 2\ell_q + 1 = 0$ (т. е. $t = \pm 1$) нулевые моды отсутствуют, поскольку $B_{\text{mod}}(1) = 1$ и $B_{\text{mod}}(-1) = P$ – оператор четности. Это пространство образует нетривиальное конечномерное инвариантное подпространство для R-оператора $\mathbb{R}_{12}$, которое мы планируем детально изучить в будущем.

Было бы интересно охарактеризовать полное пространство нулевых мод интегрального оператора $B_{\text{mod}}(t)$. Мы предполагаем, что для голоморфных функций $f(z)$, $z \in \mathbb{C}^*$, удовлетворяющих условию $f(z^{-1}) = f(z)$, и для значений базисных переменных p и q в общем положении такие нулевые моды существуют только при $t^2 = q^N p^M$, где $N, M \in \mathbb{Z}$, $(N, M) \neq (0, 0)$. Мы выдвигаем гипотезу, что A_1 -симметричное произведение тэта-функций с модулярными параметрами p и q , описанное выше, представляет собой полное конечномерное подпространство этих нулевых мод. Соответственно, мы выдвигаем предположение, что это пространство описывает все конечномерные представления для нашего R-оператора $\mathbb{R}_{12}$, основанные на голоморфных функциях. В этом отношении, было бы интересно понять, как выражение (7.1) редуцируется к бакстеровской R-матрице (2.1), склянинскому L-оператору [9] и как оно связано с решением УЯБ Фельдερхофа [24].

Примеры мероморфных нулевых мод для $B_{\text{mod}}(t)$ с непрерывными значениями параметра t в общем положении находятся из формулы для вычисления эллиптического бета-интеграла (5.7). Действительно, перепишем эту формулу в виде

$$[B_{\text{mod}}(t)f](w) = g(w), \quad f(z) = \prod_{j=1}^4 \Gamma(t_j z^{\pm 1}; p, q),$$

$$g(w) = \prod_{j=1}^4 \Gamma(tw^{\pm 1}t_j; p, q) \prod_{1 \leq j < k \leq 4} \Gamma(t_j t_k; p, q),$$

где $t^2 \prod_{j=1}^4 t_j = pq$ и контур интегрирования C в $B_{\text{mod}}(t)$ выбран соответствующим образом. Возьмем теперь, например, $t_3 t_4 = pq$ и будем подразумевать, что параметры t_1 и t_2 не зависят от w и $t_1 t_2 p^j q^k \neq 1$, $j, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (или $t^2 \neq p^{-j} q^{-k}$, поскольку мы имеем ограничение $t^2 t_1 t_2 = 1$). Тогда $\Gamma(t_3 t_4; p, q) = 0$ и никакие сингулярности не возникают из других эллиптических гамма-функций в $g(w)$. Поэтому получаем $g(w) = 0$, т. е. функция $f(z) = \Gamma(t_1 z^{\pm 1}, t_2 z^{\pm 1}; p, q)$ является мероморфной нулевой модой интегрального оператора $B_{\text{mod}}(t)$. Если значения t_1 и t_2 зависят от w , то вместо обращения в нуль функция $g(w)$ может расходиться, что демонстрируется соотношением инверсии $B_{\text{mod}}(t)B_{\text{mod}}(t^{-1}) = \mathbb{1}$.

9. Решения при $\text{Im}(\eta) < 0$ и $\text{Im}(\eta) = 0$

Предположим теперь, что $\text{Im}(\eta) < 0$. Тогда частное решение начального уравнения для $\Phi(z)$ в (4.7) имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{\Gamma(z + b - 2\eta | \tau, -2\eta)}{\Gamma(z + a - 2\eta | \tau, -2\eta)}.$$

Отметим перестановку гамма-функций числителя и знаменателя и сдвиг z на 2η по сравнению со случаем $\text{Im}(\eta) > 0$. Используя этот результат, нетрудно найти решения уравнений (4.6), (4.16), (4.17) и (4.18) при $\text{Im}(\eta) < 0$. Например, вместо (4.19) имеем

$$\Delta(z, x) = e^{-(\pi i/\eta)(x^2 - z^2)} \frac{\Gamma(\pm z \pm x - \eta + s | \tau, -2\eta)}{\Gamma(\pm 2x | \tau, -2\eta)} \varphi(z, x),$$

где $\varphi(z, x)$ имеет те же самые свойства, что и ранее. Теперь оператор S_k должен действовать на функции вида $e^{(\pi i/\eta)x^2} \Psi(x)$, где $\Psi(x+1) = \Psi(-x) = \Psi(x)$. Переходя к пространству функций $\Psi(x)$, мы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\text{Im}(\eta) < 0$ (или $|q| > 1$) и V – пространство четных периодических функций двух комплексных переменных $\Psi(z_1, z_2)$ с периодом 1, которые не имеют простых полюсов в областях $\text{Im}(\eta) \leq \text{Im}(z_1)$, $\text{Im}(z_2) \leq -\text{Im}(\eta)$. Определим три оператора

$$[S_2(u_2 - v_1)\Psi](z_1, z_2) = \Gamma\left(\pm z_1 \pm z_2 - u_2 + v_1 - \eta + \frac{\tau}{2} \mid \tau, -2\eta\right) \varphi_2(z_1, z_2) \cdot \Psi(z_1, z_2), \quad (9.1)$$

$$\text{где } |\sqrt{p/q} e^{2\pi i(v_1 - u_2)}| < |q|^{-1},$$

$$\begin{aligned} [S_1(u_1 - u_2)\Psi](z_1, z_2) &= \frac{\kappa'}{\Gamma(2u_1 - 2u_2 | \tau, -2\eta)} \\ &\times \int_0^1 \frac{\Gamma(\pm z_1 \pm x + u_1 - u_2 | \tau, -2\eta)}{\Gamma(\pm 2x | \tau, -2\eta)} \varphi_1(z_1, x) \cdot \Psi(x, z_2) dx, \end{aligned} \quad (9.2)$$

$$\text{где } |e^{2\pi i(u_1 - u_2 \pm z_1)}| < |q|^{-1/2} \text{ и } \kappa' = (p; p)_\infty (q^{-1}; q^{-1})_\infty / 2,$$

$$\begin{aligned} [S_3(v_1 - v_2)\Psi](z_1, z_2) &= \frac{\kappa'}{\Gamma(2v_1 - 2v_2 | \tau, -2\eta)} \\ &\times \int_0^1 \frac{\Gamma(\pm z_2 \pm x + v_1 - v_2 | \tau, -2\eta)}{\Gamma(\pm 2x | \tau, -2\eta)} \varphi_3(z_2, x) \cdot \Psi(z_1, x) dx, \end{aligned} \quad (9.3)$$

где $|e^{2\pi i(v_1 - v_2 \pm z_2)}| < |q|^{-1/2}$. Здесь функции $\varphi_k(z, x)$ имеют те же самые свойства, что и в случае $\text{Im}(\eta) > 0$.

Тогда операторы $S_k(\mathbf{u})$ отображают пространство V на себя и удовлетворяют определяющим сплетающим соотношениям (3.10), (3.11) и (3.12), при условии, что в соответствующем L-операторе (2.2) используются генераторы алгебры Складина в реализации

$$\mathbf{S}_{\text{mod}}^a = e^{\pi i \eta} \frac{i^{\delta_{a,2}} \theta_{a+1}(\eta)}{\theta_1(2z)} [\theta_{a+1}(2z - 2\eta\ell) e^{2\pi i z} e^{\eta\partial} - \theta_{j+1}(-2z - 2\eta\ell) e^{-2\pi i z} e^{-\eta\partial}].$$

Они удовлетворяют также соотношениям Кокстера (3.17), (3.18) и (3.19), вследствие формулы для вычисления эллиптического бета-интеграла с переменной q , замененной на q^{-1} .

Если выбрать $\varphi_k = 1$, то R-матрица имеет следующий явный вид:

$$\begin{aligned} [\mathbb{R}_{12}(\mathbf{u})f](z_1, z_2) &= \frac{(p; p)_{\infty}^2 (q^{-1}; q^{-1})_{\infty}^2}{(4\pi i)^2} \Gamma\left(\sqrt{\frac{p}{q}} z_1^{\pm 1} z_2^{\pm 1} e^{2\pi i(v_2 - u_1)}; p, q^{-1}\right) \\ &\times \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\Gamma(e^{2\pi i(u_1 - v_1)} z_2^{\pm 1} x^{\pm 1}, e^{2\pi i(u_2 - v_2)} z_1^{\pm 1} y^{\pm 1}, \sqrt{p/q} e^{2\pi i(v_1 - u_2)} x^{\pm 1} y^{\pm 1}; p, q^{-1})}{\Gamma(e^{4\pi i(u_1 - v_1)}, e^{4\pi i(u_2 - v_2)}, x^{\pm 2}, y^{\pm 2}; p, q^{-1})} \\ &\times f(x, y) \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Очевидно, что это выражение симметрично по p и q^{-1} , т. е. существует второе RLL-сплетающее соотношение, полученное из (3.7) простой перестановкой -2η и τ (или p и q^{-1}). Требование существования этого модулярного дубля вынуждает функции φ_k быть постоянными, не зависящими от z_1 и z_2 . Заметим, что оператор (9.4) формально получается из (7.1) простыми заменами $u - v \rightarrow v - u$ и $\eta \rightarrow -\eta$. Однако, в отличие от бакстеровской R-матрицы (2.1), это не является преобразованием симметрии, так как оба выражения определены только для своего специально выбранного знака $\text{Im}(\eta)$.

Рассмотрение режима $\text{Im}(\eta) = 0$, или $|q| = 1$, значительно более сложное. Для этого необходимо использовать модифицированную гамма-функцию [14]. Прежде чем перейти к соответствующему анализу, мы хотим рассмотреть ситуацию, когда $|q| < 1$ и генераторы алгебры Складина имеют вид

$$\mathbf{S}^a = \frac{i^{\delta_{a,2}} \theta_{a+1}(\eta)}{\theta_1(2z)} \left[\theta_{a+1}\left(2z - 2\eta\ell + \frac{1}{2}\right) e^{\eta\partial_z} - \theta_{a+1}\left(-2z - 2\eta\ell + \frac{1}{2}\right) e^{-\eta\partial_z} \right], \quad (9.5)$$

который отличается от (2.5) добавлением $1/2$ к аргументам тэта-функций, зависящих от спина ℓ . Эти операторы представляют специальный автоморфизм алгебры [10] с операторами Казимира, замененными на

$$\mathbf{K}_0 = 4\theta_2^2((2\ell + 1)\eta), \quad \mathbf{K}_2 = 4\theta_2(2(\ell + 1)\eta)\theta_2(2\ell\eta).$$

Можно проверить, что в этом случае факторизация (4.1) имеет тот же самый вид с заменами $u_1 \rightarrow u_1 - 1/4$ и $u_2 \rightarrow u_2 + 1/4$. Аналогичные сдвиги $v_1 \rightarrow v_1 - 1/4$ и $v_2 \rightarrow v_2 + 1/4$ имеют место и во втором L-операторе, входящем в сплетающее соотношение (3.11). Подставляя эти сдвиги в соответствующие места вывода вида оператора $\mathbf{S}_2$, на этот раз мы приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \theta_3(z_1 + z_2 + u_2 - v_1)S(z_1 - \eta, z_2) &= \theta_3(z_1 + z_2 + v_1 - u_2)S(z_1, z_2 + \eta), \\ \theta_3(z_1 + z_2 - u_2 + v_1)S(z_1 + \eta, z_2) &= \theta_3(z_1 + z_2 - v_1 + u_2)S(z_1, z_2 - \eta), \\ \theta_3(z_1 - z_2 + u_2 - v_1)S(z_1 - \eta, z_2) &= \theta_3(z_1 - z_2 + v_1 - u_2)S(z_1, z_2 - \eta), \\ \theta_3(z_1 - z_2 - u_2 + v_1)S(z_1 + \eta, z_2) &= \theta_3(z_1 - z_2 - v_1 + u_2)S(z_1, z_2 + \eta) \end{aligned} \quad (9.6)$$

со следующим общим решением для оператора $\mathbf{S}_2$:

$$\mathbf{S}_2(a) = \Gamma\left(\pm z_1 \pm z_2 + a + \frac{1}{2} + \eta + \frac{\tau}{2} \mid \tau, 2\eta\right) \varphi_2(z_1, z_2), \quad a = u_2 - v_1. \quad (9.7)$$

При $\varphi_2 = 1$ мы по-прежнему имеем соотношение $S_2(-a)S_2(a) = \mathbb{1}$, как и требуется. Аналогичная картина справедлива и в режиме $|q| > 1$.

Что касается операторов S_1 и S_3 , они вовсе не меняют своего вида. Действительно, сплетающие соотношения (4.10) приводят к уравнениям (4.13) с заменами $s \rightarrow s-1/2$ в этта-функциях первого ряда и $s \rightarrow s+1/2$ во втором ряду. Из-за этой неоднородности оказывается, что уравнение (4.15) вовсе не меняется. В результате окончательные уравнения (4.16), (4.17) и (4.18) также не претерпевают изменений. Поэтому форма оператора S_1 остается прежней. Справедливость кубического соотношения Кокстера снова гарантируется эллиптическим бета-интегралом с заменой соответствующих параметров $g_3 \rightarrow g_3 + 1/2$ и $g_4 \rightarrow g_4 + 1/2$, что не нарушает условия балансировки (5.8), определенного по модулю $\mathbb{Z}$. В результате R-оператор (7.1) претерпевает небольшие изменения – необходимо заменить в ядре этого оператора $+\sqrt{pq}$ на $-\sqrt{pq}$. Модулярный дубль также существует с генераторами партнера алгебры Складина, полученными из (7.3) после замены $g \rightarrow g - 1/2$.

Теперь можно непосредственно построить решение уравнений (9.6), корректно определенное при $\text{Im}(\eta) = 0$. Сначала мы полагаем $2\eta = \omega_1/\omega_2$, $\tau = \omega_3/\omega_2$ и перенормируем другие переменные в складинском L-операторе:

$$z_1 \rightarrow \frac{z_1}{\omega_2}, \quad z_2 \rightarrow \frac{z_2}{\omega_2}, \quad u \rightarrow \frac{u}{\omega_2}, \quad v \rightarrow \frac{v}{\omega_2}.$$

Тогда уравнение (4.7) примет вид

$$\Phi(z + \omega_1) = e^{\pi i(a-b)/\omega_2} \frac{\theta_1((z+a)/\omega_2)}{\theta_1((z+b)/\omega_2)} \cdot \Phi(z).$$

Оно имеет частное решение вида

$$\Phi(z) = \frac{G(z+a; \omega)}{G(z+b; \omega)},$$

где $G(z; \omega)$ есть модифицированная эллиптическая гамма-функция (11.19), корректно определенная при $|q| \leq 1$ и удовлетворяющая тому же самому ключевому уравнению (11.22), что и $\Gamma(e^{2\pi i u/\omega_2}; p, q)$. Используя эти факты, мы сразу же можем выписать конечное общее выражение для оператора S_2 , вытекающее из уравнений (9.6) и справедливое при $\text{Im}(\tau) > 0$, $\text{Im}(\eta/\tau) < 0$ (т.е. значения $\text{Im}(\eta) = 0$ допустимы):

$$S_2(a) = G\left(\pm z_1 \pm z_2 + a + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \omega_k; \omega\right) \varphi_2(z_1, z_2), \quad a = u_2 - v_1,$$

где $\varphi_2(z_1 + \omega_1, z_2) = \varphi_2(z_1, z_2 + \omega_1) = \varphi_2(z_1 + \omega_1/2, z_2 + \omega_1/2) = \varphi_2(z_1, z_2)$. Благодаря формуле отражения для $G(z; \omega)$, при $\varphi_2 = 1$ имеем $S_2(-a)S_2(a) = \mathbb{1}$.

Решение уравнений (4.16), (4.17) и (4.18) для ядра Δ , справедливое при $\text{Im}(\eta) = 0$, имеет вид

$$\Delta(z, x) = \exp\left\{\frac{2\pi i}{\omega_1 \omega_2}(x^2 - z^2)\right\} \frac{G(\pm x \pm z - u_1 + u_2; \omega)}{G(\pm 2x; \omega)} \varphi_1(z, x), \quad (9.8)$$

где функция φ_1 обладает теми же самыми свойствами периодичности, что и φ_2 .

Подставим теперь в эти выражения второе представление (11.20) функции $G(x; \omega)$. Тогда мы можем записать

$$S_2(a) = \exp \left\{ -\frac{4\pi i a}{\omega_1 \omega_2 \omega_3} (z_1^2 + z_2^2) \right\} \\ \times \Gamma \left(-\frac{1}{\omega_3} \left(\pm z_1 \pm z_2 + a + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \omega_k \right) \middle| -\frac{\omega_2}{\omega_3}, -\frac{\omega_1}{\omega_3} \right) \varphi'_2(z_1, z_2),$$

где

$$\varphi'_2(z_1, z_2) = \exp \left\{ -\frac{4\pi i}{3} B_{3,3} \left(a + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \omega_k; \omega \right) \right\} \varphi_2(z_1, z_2).$$

Аналогично,

$$\Delta(z, x) = \exp \left\{ \frac{2\pi i}{\omega_1 \omega_2} (x^2 - z^2) \right\} \\ \times \exp \left\{ \frac{4\pi i}{\omega_1 \omega_2 \omega_3} \left[x^2 \left(b - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \omega_k \right) + z^2 \left(b + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \omega_k \right) \right] \right\} \\ \times \frac{\Gamma(-(\pm x \pm z - b)/\omega_3 \mid -\omega_2/\omega_3, -\omega_1/\omega_3)}{\Gamma(\pm 2x/\omega_3 \mid -\omega_2/\omega_3, -\omega_1/\omega_3)} \varphi'_1(z, x),$$

где $b = u_1 - u_2$ и

$$\varphi'_1(z, x) = \exp \left\{ \frac{2\pi i}{3} (B_{3,3}(0; \omega) - 2B_{3,3}(-b; \omega)) \right\} \varphi_1(z, x).$$

После вывода вида ядра Δ нам необходимо зафиксировать интервал интегрирования $[\alpha, \beta]$ и пространство функций, на котором оператор S_1 действительно удовлетворяет сплетающим соотношениям. Прежде всего, как это было сделано ранее, мы переходим к модифицированным генераторам алгебры Складина (4.21) с дополнительным сдвигом на $1/2$ в аргументах тэта-функций, зависящих от ℓ , и сопрягаем аналогичным образом операторы S_k . Это не меняет оператор S_2 , но устраняет из $\Delta(z, x)$ экспоненциальный множитель $\exp \left\{ \frac{2\pi i}{\omega_1 \omega_2} (x^2 - z^2) \right\}$. Затем мы замечаем, что отношение эллиптических гамма-функций в Δ является периодической функцией z и x с периодом ω_3 . Поэтому мы полагаем $\alpha = 0$ и $\beta = \omega_3$ и требуем, чтобы модифицированный оператор S_1 действовал на функции $\Phi(x)$ такие, что

$$\Psi(x) = \exp \left\{ \frac{4\pi i}{\omega_1 \omega_2 \omega_3} x^2 \left(b - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \omega_k \right) \right\} \Phi(x)$$

является четной ω_3 -периодической функцией x : $\Psi(-x) = \Psi(x + \omega_3) = \Psi(x)$. Наконец, уравнения на ядро Δ справедливы, если $\Delta(z, x)$ не имеет полюсов в параллелограмме $x \in [-\omega_1, \omega_3 - \omega_1, \omega_3 + \omega_1, \omega_1]$, что гарантировано, по полной аналогии с предыдущим случаем, при $|e^{2\pi i(b \pm z)/\omega_3}| < |e^{\pi i \omega_1/\omega_3}|$.

Таким образом, мы построили операторы S_1 , S_2 и S_3 (S_3 отличается от S_1 только пространством, в котором он действует). Возвращаясь к прежним обозначениям, т. е. перенормируя назад $x \rightarrow x\omega_2$, $u \rightarrow u\omega_2$ и т. д., мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\text{Im}(\tau) > 0$ (т.е. $|p| < 1$) и $\text{Im}(\eta/\tau) < 0$ (при $\text{Im}(\eta) = 0$, т.е. при $|q| = 1$, это означает, что $\text{Re}(\eta) > 0$). Обозначим $\varphi'_k(z, x)$, $k = 1, 2, 3$, произвольные четные эллиптические функции переменных z и x с периодами τ и 2η соответственно, удовлетворяющие дополнительным ограничениям

$$\varphi'_k(z + \eta, x + \eta) = \varphi'_k(z, x), \quad k = 1, 2, 3,$$

и не имеющие полюсов в областях $\text{Im}(\eta/\tau) \leq \text{Im}(z/\tau)$, $\text{Im}(x/\tau) \leq -\text{Im}(\eta/\tau)$.

Определим следующие операторы:

$$\begin{aligned} S_2(u_2 - v_1) = \exp \left\{ \frac{2\pi i(v_1 - u_2)}{\eta\tau} (z_1^2 + z_2^2) \right\} \\ \times \Gamma \left(\frac{\pm z_1 \pm z_2 + v_1 - u_2}{\tau} - \frac{1}{2} - \frac{\eta}{\tau} - \frac{1}{2\tau} \mid -\frac{1}{\tau}, -\frac{2\eta}{\tau} \right) \varphi'_2(z_1, z_2), \end{aligned} \quad (9.9)$$

где $|\sqrt{\tilde{p}\tilde{r}} e^{2\pi i(v_1 - u_2)/\tau}| < |\tilde{r}|$ и $\tilde{p} = e^{-2\pi i/\tau}$ и $\tilde{r} = e^{-4\pi i\eta/\tau}$;

$$\begin{aligned} [S_1(a)\Phi](z_1, z_2) = \tilde{\kappa} \int_0^\tau \exp \left\{ \frac{2\pi i}{\eta\tau} \left[x^2 \left(a - \frac{1}{2} - \eta - \frac{\tau}{2} \right) + z_1^2 \left(a + \frac{1}{2} + \eta + \frac{\tau}{2} \right) \right] \right\} \\ \times \frac{\Gamma((\pm x \pm z_1 + a)/\tau \mid -1/\tau, -2\eta/\tau)}{\Gamma(2a/\tau, \pm 2x/\tau \mid -1/\tau, -2\eta/\tau)} \varphi'_1(z_1, x) \Phi(x, z_2) \frac{dx}{\tau}, \end{aligned}$$

где $a = u_1 - u_2$, $|e^{2\pi i(a \pm z_1)/\tau}| < |\tilde{r}|^{1/2}$ и $\tilde{\kappa} = (\tilde{p}; \tilde{q})_\infty(\tilde{r}; \tilde{r})_\infty/2$;

$$\begin{aligned} [S_3(b)\Phi](z_1, z_2) = \tilde{\kappa} \int_0^\tau \exp \left\{ \frac{2\pi i}{\eta\tau} \left[x^2 \left(b - \frac{1}{2} - \eta - \frac{\tau}{2} \right) + z_2^2 \left(b + \frac{1}{2} + \eta + \frac{\tau}{2} \right) \right] \right\} \\ \times \frac{\Gamma((1 \pm x \pm z_2 + b)/\tau \mid -1/\tau, -2\eta/\tau)}{\Gamma(2b/\tau, \pm 2x/\tau \mid -1/\tau, -2\eta/\tau)} \varphi'_3(z_2, x) \Phi(z_1, x) \frac{dx}{\tau}, \end{aligned} \quad (9.10)$$

где $b = v_1 - v_2$, $|e^{2\pi i(b \pm z_2)/\tau}| < |\tilde{r}|^{1/2}$.

Пусть $V_{a,b}$ обозначает пространство функций двух комплексных переменных $\Phi(z_1, z_2)$ таких, что произведения

$$\exp \left\{ \frac{2\pi i}{\eta\tau} z_1^2 \left(a - \frac{1}{2} - \eta - \frac{\tau}{2} \right) \right\} \exp \left\{ \frac{2\pi i}{\eta\tau} z_2^2 \left(b - \frac{1}{2} - \eta - \frac{\tau}{2} \right) \right\} \Phi(z_1, z_2)$$

определяют четные τ -периодические функции переменных z_1 и z_2 , не имеющие простых полюсов в областях $\text{Im}(\eta/\tau) \leq \text{Im}(z_1/\tau)$, $\text{Im}(z_2/\tau) \leq -\text{Im}(\eta/\tau)$. Тогда операторы S_1 , S_2 и S_3 отображают пространство $V_{a,b}$ при $a = u_1 - u_2$ и $b = v_1 - v_2$ на себя и удовлетворяют определяющим сплетающим соотношениям (3.10), (3.11) и (3.12) при условии, что в соответствующем L-операторе (2.2) используются генераторы алгебры Складина в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\text{mod}}^a = e^{-\pi i \eta \frac{i^{\delta_{a,2}} \theta_{a+1}(\eta)}{\theta_1(2z)}} \left[\theta_{a+1} \left(2z - 2\eta\ell + \frac{1}{2} \right) e^{-2\pi i z} e^{\eta \partial_z} \right. \\ \left. - \theta_{a+1} \left(-2z - 2\eta\ell + \frac{1}{2} \right) e^{2\pi i z} e^{-\eta \partial_z} \right]. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Остается подтвердить соотношения Кокстера при $\varphi'_k = 1$. Соотношение $S_2(a)S_2(-a) = \mathbb{1}$ очевидно. Нетрудно проверить кубическое соотношение Кокстера (5.3), поскольку оно приводит к решению соотношения звезда-треугольник при $\text{Im}(\eta) = 0$, рассмотренному в работе [30]. Мы не будем приводить соответствующих деталей – хотя ситуация более сложная, чем раньше, все экспоненциальные множители сокращаются и проверка этого тождества опять сводится к вычислению эллиптического бета-интеграла в специальной параметризации [13]. Это следует также и из интегрального аналога леммы Бейли, сформулированной в терминах функции $G(z; \omega)$. Аналогичным образом, равенства $S_1(a)S_1(-a) = S_3(a)S_3(-a) = \mathbb{1}$ редуцируются, благодаря сокращению экспоненциальных множителей, к ранее рассмотренным соотношениям инверсии в другой параметризации. В общем, в произвольном произведении $\dots S_i S_j S_k \dots$ никогда не нарушаются ограничения на пространства функций $\Phi(z_1, z_2)$, необходимые для операторов S_1 и S_3 , т.е. все экспоненциальные множители могут быть вытянуты в крайнее левое и крайнее правое положения.

Мы могли бы выписать явное выражение для R-оператора, используя его факторизованную форму, но мы не делаем этого, поскольку это достаточно прямая процедура, приводящая к довольно громоздкому выражению. После устранения экспоненциальных множителей из этого выражения возник бы R-оператор, получающийся из (7.1) (с множителем $\sqrt{pq}$, замененным на $-\sqrt{pq}$) простым модулярным преобразованием $(\omega_2, \omega_3) \rightarrow (-\omega_3, \omega_2)$.

Что касается модулярного дубля, R-оператор, выписанный в терминах функций $G(u; \omega)$ (т.е. в форме, полученной после перенормировок $z \rightarrow z/\omega_2$ и т.д.), симметричен при перестановке $\omega_1 \leftrightarrow \omega_2$. В начальных обозначениях $z, g = \eta(2\ell + 1)$, η, τ перестановка этих квазипериодов эквивалентна следующим заменам: $\eta \rightarrow 1/(4\eta)$, $\tau \rightarrow \tau/(2\eta)$, $z \rightarrow z/(2\eta)$, $g \rightarrow g/(2\eta)$ (здесь g рассматривается как независимая переменная). Поэтому полученный R-оператор также обладает вторым RLL-соотношением, в котором оператор L^{doub} составлен из новых генераторов алгебры Складина вида

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\text{mod}}^a = e^{-\pi i/(4\eta)} \frac{i^{\delta_{a,2}} \theta_{a+1}(1/(4\eta) | \tau/(2\eta))}{\theta_1(z/\eta | \tau/(2\eta))} & \left[\theta_{a+1} \left(\frac{2z - g + 1}{2\eta} \middle| \frac{\tau}{2\eta} \right) e^{-\pi i z/\eta} e^{(1/(4\eta))\partial_z} \right. \\ & \left. - \theta_{a+1} \left(\frac{-2z - g + 1}{2\eta} \middle| \frac{\tau}{2\eta} \right) e^{\pi i z/\eta} e^{-(1/(4\eta))\partial_z} \right]. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Этот модулярный дубль также был определен в работе [19]. Таким образом, мы нашли решения УЯБ (1.1) для всех допустимых областей значений комплексного параметра η .

10. Заключение

В этой работе мы соединили две конструкции из теории квантовых интегрируемых систем и теории специальных функций. Одна из конструкций состоит в специфическом подходе к построению решений УЯБ, развитом в работах [20]–[23]. Он основан на реализации генераторов группы перестановок различными операторами, действующими в функциональных пространствах,

и прямо приводит к факторизованной форме R -матриц как произведений операторов элементарных перестановок. Другой конструкцией является эллиптический бета-интеграл [13] и связанные с ним эллиптическое преобразование Фурье и интегральная лемма Бейли [17]. Вычисление этого интеграла дало основу для развития теории принципиально нового и очень мощного класса специальных функций – эллиптических гипергеометрических интегралов [11], [14]. В результате нашего рассмотрения оба направления исследований взаимно обогатили друг друга. Оказалось, что наиболее сложная известная R -матрица на эллиптическом уровне определяется интегральным оператором с эллиптическим гипергеометрическим ядром, а составные элементы интегральной леммы Бейли получили естественную интерпретацию генераторов группы перестановок и соотношений Кокстера для них. Более того, ключевой интегральный оператор, определяющий эллиптическое преобразование Фурье, оказался сплетающим оператором для алгебры Складина. Общая конструкция показывает, что УЯБ является простым следствием специфического тождества для “слов” в групповой алгебре группы кос $\mathfrak{B}_6$ или, в нашем случае, симметрической группы $\mathfrak{S}_6$, генераторы которой реализованы в виде интегральных операторов.

Наши результаты могут быть применены ко всем известным формам УЯБ [7]. В частности, относительно легко обобщить нашу конструкцию на корневые системы благодаря обилию эллиптических бета-интегралов на корневых системах [11] и соответствующих эллиптических преобразований Фурье [29]. В рациональном случае наиболее общий известный R -оператор для системы корней A_n был сконструирован в [21], [22]. Соотношения типа звезда-треугольник и звезда-звезда для корневых систем, вытекающие из тождеств для эллиптических гипергеометрических интегралов, обсуждались в работах [30], [32].

В работе [33] Волков и Фаддеев построили решение УЯБ на q -гипергеометрическом уровне с помощью пентагонального соотношения для некомпактных квантовых дилогарифмов. Обобщение этой модели было найдено в [30], где был поставлен вопрос – связана ли по-прежнему эта модель с пентагональным соотношением и существует ли эллиптический аналог этого соотношения? Как показано в работе [23], метод, примененный нами, работает на компактном q -гипергеометрическом уровне с использованием q -экспоненциальных функций. Некомпактный случай также может быть рассмотрен после подходящей замены q -экспонент на некомпактные квантовые дилогарифмы. Однако наши эллиптические результаты легко вырождаются на оба эти q -уровня. Из нашего анализа эллиптических гипергеометрических конструкций неясно, какое соотношение можно принять за прямой эллиптический аналог пентагонального соотношения. Вместо возможного пятичленного соотношения ключевую роль играет гексагональное соотношение (6.4), возникающее в теории эллиптического преобразования Фурье [17] и определяющее соотношение Кокстера для операторов перестановки (или соотношение звезда-треугольник для интегрируемых моделей статистической механики).

Необходимо подчеркнуть, что в нашем рассмотрении спинная переменная ℓ принимает непрерывные значения. Поэтому, строго говоря, мы имеем дело не с дискретными моделями типа Изинга, а с двумерными квантовыми теориями поля. В этом контексте УЯБ может быть проинтерпретировано как условие факторизации N -частичной S -матрицы на произведения двухчастичных матриц рассеяния [7].

Обсудим кратко приложение наших результатов к четырехмерным ($4d$) суперсимметричным теориям поля. Ключевое открытие работы [34] состоит в обнаружении того факта, что суперконформные индексы этих теорий поля описываются эллиптическими гипергеометрическими интегралами. Например, формула для вычисления эллиптического бета-интеграла приобретает замечательную интерпретацию как прямое указание на явление конфайнмента в простейшей $4d$ -суперсимметричной квантовой хромодинамике.

Соотношение между $4d$ -статистической суммой для инстантонов Некрасова и конформными блоками в $2d$ -теории поля Лиувилля было эмпирически обнаружено в работе [35]. В работе [36] суперконформные индексы $4d$ -теорий поля с расширенной $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрией были связаны с корреляционными функциями $2d$ -топологических теорий поля. Наши результаты имеют отношение к $4d/2d$ -соответствию другого типа, открытого в [30], где $4d$ -суперконформные индексы совпадают со статистическими суммами в интегрируемых моделях $2d$ -спиновых систем.

Дуальность Сайберга является специальной электромагнитной дуальностью $4d$ -суперсимметричных неабелевых калибровочных теорий поля. На языке эллиптических гипергеометрических интегралов, имеются две качественно различные ситуации. Если дуальная теория находится в режиме конфайнмента, то соответствующий суперконформный индекс описывается некоторым эллиптическим бета-интегралом на корневой системе или, с точки зрения статистической механики, соотношением звезда-треугольник для многокомпонентных спиновых систем. Если дуальная теория описывается нетривиальной взаимодействующей калибровочной теорией поля, то тогда возникают преобразования симметрии для интегралов, эквивалентные в статистической механике соотношениям звезда-звезда [30].

Поскольку суперконформные индексы для простых калибровочных групп совпадают со статистическими суммами элементарных ячеек для спиновых систем на плоскости, преобразования дуальности Сайберга представляют собой соотношения типа Крамерса–Ванье для соответствующих новых $2d$ -интегрируемых моделей. Как отмечено в работе [37], последовательные интегральные преобразования, вытекающие из леммы Бейли, определяют суперконформные индексы некоторых квиверных калибровочных теорий. Эта процедура соответствует построению статистической суммы для полной двумерной решетки, как это предписано в теории квантовых интегрируемых систем.

Авторы глубоко признательны Л. Д. Фаддееву и А. М. Вершику за полезные обсуждения и общую поддержку.

11. Приложение

В этом приложении мы собрали некоторые полезные формулы. Стандартное бесконечное q -произведение определяется следующим образом:

$$(x; q)_\infty = \prod_{k=0}^{+\infty} (1 - q^k \cdot x), \quad q \in \mathbb{C}, \quad |q| < 1. \quad (11.1)$$

Общая тэта-функция с характеристиками a и b имеет вид

$$\theta_{a,b}(z | \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i(n+a/2)^2 \tau} e^{2\pi i(n+a/2)(z+b/2)}.$$

Мы используем четыре стандартные тэта-функции

$$\begin{aligned}\theta_1(z|\tau) &= -\theta_{1,1}(z|\tau) = -\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i(n+1/2)^2 \tau} e^{2\pi i(n+1/2)(z+1/2)} \\ &= ip^{1/8} e^{-\pi iz} (p; p)_\infty \theta(e^{2\pi iz}; p),\end{aligned}\quad (11.2)$$

где $p = e^{2\pi i \tau}$ и $\theta(t; p) = (t; p)_\infty (pt^{-1}; p)_\infty$,

$$\theta_2(z|\tau) = \theta_{1,0}(z|\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i(n+1/2)^2 \tau} e^{2\pi i(n+1/2)z}, \quad (11.3)$$

$$\theta_3(z|\tau) = \theta_{0,0}(z|\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n z}, \quad (11.4)$$

$$\theta_4(z|\tau) = \theta_{0,1}(z|\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n(z+1/2)}. \quad (11.5)$$

Следующие тождества используются для факторизации L-оператора и вывода определяющих уравнений для операторов S_1 , S_2 и S_3 :

$$2\theta_1(x+y)\theta_1(x-y) = \bar{\theta}_4(x)\bar{\theta}_3(y) - \bar{\theta}_4(y)\bar{\theta}_3(x), \quad (11.6)$$

$$2\theta_2(x+y)\theta_2(x-y) = \bar{\theta}_3(x)\bar{\theta}_3(y) - \bar{\theta}_4(y)\bar{\theta}_4(x), \quad (11.7)$$

$$2\theta_3(x+y)\theta_3(x-y) = \bar{\theta}_3(x)\bar{\theta}_3(y) + \bar{\theta}_4(y)\bar{\theta}_4(x), \quad (11.8)$$

$$2\theta_4(x+y)\theta_4(x-y) = \bar{\theta}_4(x)\bar{\theta}_3(y) + \bar{\theta}_4(y)\bar{\theta}_3(x), \quad (11.9)$$

$$2\theta_4(x+y)\theta_1(x-y) = \bar{\theta}_1(x)\bar{\theta}_2(y) - \bar{\theta}_1(y)\bar{\theta}_2(x), \quad (11.10)$$

$$\bar{\theta}_1(x-y)\bar{\theta}_2(x+y) = \theta_1(2x)\theta_4(2y) - \theta_1(2y)\theta_4(2x), \quad (11.11)$$

где $\bar{\theta}_a(z) = \theta_a(z|\tau/2)$. Нам необходима также формула удвоения

$$\theta_1(2x|2\tau) = \frac{(-p; p)_\infty}{(p; p)_\infty} \theta_1(x|\tau)\theta_2(x|\tau), \quad p = e^{2\pi i \tau}. \quad (11.12)$$

При $\text{Im}(\tau) > 0$, $\text{Im}(\eta) > 0$ эллиптическая гамма-функция определяется двойным бесконечным произведением:

$$\Gamma(z|\tau, 2\eta) = \prod_{n,m=0}^{\infty} \frac{1 - e^{2\pi i(\tau(n+1)+2\eta(m+1)-z)}}{1 - e^{2\pi i(\tau n + 2\eta m + z)}}. \quad (11.13)$$

Она симметрична по ее модулярным параметрам $\Gamma(z|\tau, 2\eta) = \Gamma(z|2\eta, \tau)$ и удовлетворяет уравнениям

$$\Gamma(z+1|\tau, 2\eta) = \Gamma(z|\tau, 2\eta), \quad (11.14)$$

$$\Gamma(z+\tau|\tau, 2\eta) = \theta(e^{2\pi iz}; e^{4\pi i \eta}) \cdot \Gamma(z|\tau, 2\eta), \quad (11.15)$$

$$\Gamma(z+2\eta|\tau, 2\eta) = \theta(e^{2\pi iz}; e^{2\pi i \tau}) \cdot \Gamma(z|\tau, 2\eta) \quad (11.16)$$

и условию нормировки $\Gamma(\eta + \tau/2|\tau, 2\eta) = 1$. Очевидно, что в этих уравнениях можно сделать замену

$$\theta(e^{2\pi iz}; e^{2\pi i \tau}) = R(\tau) e^{\pi iz} \theta_1(z|\tau), \quad \theta(e^{2\pi iz}; e^{4\pi i \eta}) = R(2\eta) e^{\pi iz} \theta_1(z|2\eta),$$

где постоянная $R(\tau)$ не зависит от z : $R(\tau) = -ie^{-\pi i \tau/4} / (e^{2\pi i \tau}; e^{2\pi i \tau})_\infty$.

Нули $\Gamma(z | \tau, 2\eta)$ расположены в точках $z = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}_{>0} + 2\eta\mathbb{Z}_{>0}$, а полюсы – в точках $z = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}_{\leq 0} + 2\eta\mathbb{Z}_{\leq 0}$. Уравнение отражения для этой функции имеет вид

$$\Gamma(z | \tau, 2\eta)\Gamma(-z + 2\eta + \tau | \tau, 2\eta) = 1. \quad (11.17)$$

В мультипликативных обозначениях имеем

$$\Gamma(t; p, q) = \prod_{j,k=0}^{\infty} \frac{1 - t^{-1}p^{j+1}q^{k+1}}{1 - tp^jq^k}, \quad |p|, |q| < 1, \quad (11.18)$$

так что $\Gamma(t; p, q)\Gamma(pq/t; p, q) = 1$ и

$$\Gamma(qt; p, q) = \theta(t; p)\Gamma(t; p, q), \quad \Gamma(pt; p, q) = \theta(t; q)\Gamma(t; p, q).$$

Для несоизмеримых $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathbb{C}$ определим три базисные переменные

$$\begin{aligned} q &= e^{2\pi i \omega_1 / \omega_2}, & p &= e^{2\pi i \omega_3 / \omega_2}, & r &= e^{2\pi i \omega_3 / \omega_1}, \\ \tilde{q} &= e^{-2\pi i \omega_2 / \omega_1}, & \tilde{p} &= e^{-2\pi i \omega_2 / \omega_3}, & \tilde{r} &= e^{-2\pi i \omega_1 / \omega_3}, \end{aligned}$$

где $\tilde{q}, \tilde{p}, \tilde{r}$ обозначают специальные модулярно преобразованные базисы. Условие $\sum_{k=1}^3 n_k \omega_k \neq 0$, $n_k \in \mathbb{Z}$, гарантирует, что ни один из параметров p, q, r не является корнем из единицы.

При $|q|, |p|, |r| < 1$ модифицированная эллиптическая гамма-функция определяется так:

$$G(u; \omega) = \Gamma(e^{2\pi i u / \omega_2}; p, q) \Gamma(re^{-2\pi i u / \omega_1}; \tilde{q}, r) = \frac{\Gamma(e^{2\pi i u / \omega_2}; p, q)}{\Gamma(\tilde{q}e^{2\pi i u / \omega_1}; \tilde{q}, r)}. \quad (11.19)$$

Это мероморфная функция u даже при условии $\omega_1 / \omega_2 > 0$, приводящем к $|q| = 1$, что легко увидеть из другого ее представления

$$G(u; \omega) = e^{-(\pi i / 3)B_{3,3}(u; \omega)} \Gamma(e^{-2\pi i u / \omega_3}; \tilde{r}, \tilde{p}), \quad (11.20)$$

где $B_{3,3}$ обозначает многочлен Бернулли третьей степени:

$$B_{3,3}(u; \omega) = \frac{1}{\omega_1 \omega_2 \omega_3} \left(u - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \omega_k \right) \left(\left(u - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \omega_k \right)^2 - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^3 \omega_k^2 \right). \quad (11.21)$$

Многочленные Бернулли определяются в теории многократной дзета-функции Барнса с помощью следующего разложения:

$$\frac{x^m e^{xu}}{\prod_{k=1}^m (e^{\omega_k x} - 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{m,n}(u; \omega_1, \dots, \omega_m) \frac{x^n}{n!}.$$

Эта функция удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} G(u + \omega_1) &= \theta(e^{2\pi i u / \omega_2}; p) G(u), \\ G(u + \omega_2) &= \theta(e^{2\pi i u / \omega_1}; r) G(u), \quad G(u + \omega_3) = e^{-\pi i B_{2,2}(u; \omega)} G(u) \end{aligned} \quad (11.22)$$

и условию нормировки $G\left(\sum_{m=1}^3 \frac{\omega_m}{2}\right) = 1$. Здесь

$$B_{2,2}(u; \omega) = \frac{u^2}{\omega_1 \omega_2} - \frac{u}{\omega_1} - \frac{u}{\omega_2} + \frac{\omega_1}{6\omega_2} + \frac{\omega_2}{6\omega_1} + \frac{1}{2}$$

– многочлен Бернулли второй степени, появляющийся в законе модулярного преобразования для тэта-функции

$$\theta(e^{-2\pi i u / \omega_1}; e^{-2\pi i \omega_2 / \omega_1}) = e^{\pi i B_{2,2}(u; \omega)} \theta(e^{2\pi i u / \omega_2}; e^{2\pi i \omega_1 / \omega_2}). \quad (11.23)$$

Уравнение отражения для функции $G(u)$ имеет вид

$$G(a, b; \omega) = G(a; \omega) G(b; \omega) = 1, \quad a + b = \sum_{k=1}^3 \omega_k.$$

Список литературы

- [1] Р. Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, Мир, М., 1985, 488 с.; пер. с англ.: R. J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London, 1982, xii+486 pp.
- [2] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, “Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга”, *УМН*, **34**:5(209) (1979), 13–63; англ. пер.: L. A. Takhtadzhyan, L. D. Faddeev, “The quantum method of the inverse problem and the Heisenberg XYZ model”, *Russian Math. Surveys*, **34**:5 (1979), 11–68.
- [3] П. П. Кулиш, Е. К. Склянин, “О решениях уравнения Янга–Бакстера”, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика*. III, Зап. науч. сем. ЛОМИ, **95**, Изд-во “Наука”, Ленинград. отд., Л., 1980, 129–160; англ. пер.: P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, “Solutions of the Yang–Baxter equation”, *J. Soviet Math.*, **19**:5 (1982), 1596–1620.
- [4] P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, “Quantum spectral transform method. Recent developments”, *Lecture Notes in Phys.*, **151**, Springer, Berlin–New York, 1982, 61–119.
- [5] M. Jimbo (ed.), *Yang–Baxter equation in integrable systems*, Adv. Ser. Math. Phys., **10**, World Sci. Publ. Co., Inc., Teaneck, NJ, 1989, x+715 pp.
- [6] L. D. Faddeev, “How the algebraic Bethe ansatz works for integrable model”, *Symétries quantiques* (Les Houches, 1995), North-Holland, Amsterdam, 1998, 149–219.
- [7] J. H. H. Perk, H. Au-Yang, “Yang–Baxter equations”, *Encyclopedia of mathematical physics*, v. 5, Elsevier Science, Oxford, 2006, 465–473; arXiv: math-ph/0606053.
- [8] R. J. Baxter, “Partition function of the eight-vertex lattice model”, *Ann. Physics*, **70**:1 (1972), 193–228; Reprinted in: *Ann. Physics*, **281**:1-2 (2000), 187–222.

- [9] Е. К. Склянин, “О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга–Бакстера”, *Функц. анализ и его прил.*, **16**:4 (1982), 27–34; англ. пер.: Е. К. Sklyanin, “Some algebraic structures connected with the Yang–Baxter equation”, *Funct. Anal. Appl.*, **16**:4 (1982), 263–270.
- [10] Е. К. Склянин, “О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга–Бакстера. Представления квантовой алгебры”, *Функц. анализ и его прил.*, **17**:4 (1983), 34–48; англ. пер.: Е. К. Sklyanin, “Some algebraic structures connected with the Yang–Baxter equation. Representations of quantum algebras”, *Funct. Anal. Appl.*, **17**:4 (1983), 273–284.
- [11] В. П. Спиридонов, “Очерки теории эллиптических гипергеометрических функций”, *УМН*, **63**:3(381) (2008), 3–72; англ. пер.: V. P. Spiridonov, “Essays on the theory of elliptic hypergeometric functions”, *Russian Math. Surveys*, **63**:3 (2008), 405–472; arXiv:0805.3135.
- [12] S. E. Derkachov, D. Karakhanyan, R. Kirschner, “Universal R -matrix as integral operator”, *Nuclear Phys. B*, **618**:3 (2001), 589–616.
- [13] В. П. Спиридонов, “Об эллиптической бета-функции”, *УМН*, **56**:1(337) (2001), 181–182; англ. пер.: V. P. Spiridonov, “On the elliptic beta function”, *Russian Math. Surveys*, **56**:1 (2001), 185–186.
- [14] V. P. Spiridonov, “Theta hypergeometric integrals”, *Алгебра и анализ*, **15**:6 (2003), 161–215; *St. Petersburg Math. J.*, **15**:6 (2004), 929–967; arXiv:math/0303205.
- [15] I. B. Frenkel, V. G. Turaev, “Elliptic solutions of the Yang–Baxter equation and modular hypergeometric functions”, *The Arnold–Gelfand mathematical seminars*, Birkhäuser, Boston, MA, 1997, 171–204.
- [16] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special Functions*, Encyclopedia Math. Appl., **71**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, xvi+664 pp.
- [17] В. П. Спиридонов, “Дерево Бэйли для интегралов”, *ТМФ*, **139**:1 (2004), 104–111; англ. пер.: V. P. Spiridonov, “A Bailey tree for integrals”, *Theoret. and Math. Phys.*, **139**:1 (2004), 536–541; arXiv:math/0312502.
- [18] L. D. Faddeev, “Modular double of a quantum group”, *Conférence Moshé Flato 1999*, v. I (Dijon), Math. Phys. Stud., **21**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000, 149–156.
- [19] В. П. Спиридонов, “Непрерывная биортогональность эллиптической гипергеометрической функции”, *Алгебра и анализ*, **20**:5 (2008), 155–185; англ. пер.: V. P. Spiridonov, “Continuous biorthogonality of the elliptic hypergeometric function”, *St. Petersburg Math. J.*, **20**:5 (2009), 791–812; arXiv:0801.4137.
- [20] S. E. Derkachov, “Factorization of the R -matrix. I”, *Вопросы квантовой теории поля и статистической физики*. 19, Зап. науч. сем. ПОМИ, **335**, ПОМИ, СПб., 2006, 134–163; *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **143**:1 (2007), 2773–2790; arXiv:math/0503396.
- [21] S. È. Derkachov, A. N. Manashov, “ $\mathcal{R}$ -matrix and Baxter $\mathcal{Q}$ -operators for the noncompact $SL(N, \mathbb{C})$ invariant spin chain”, *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, **2** (2006), 084, 20 pp.
- [22] С. Э. Деркачёв, А. Н. Манашов, “Общее решение уравнения Янга–Бакстера с группой симметрии $SL(n, \mathbb{C})$ ”, *Алгебра и анализ*, **21**:4 (2009), 1–94; англ. пер.: S. E. Derkachev, A. N. Manashov, “General solution of the Yang–Baxter equation with symmetry group $SL(n, \mathbb{C})$ ”, *St. Petersburg Math. J.*, **21**:4 (2010), 513–577.
- [23] S. Derkachov, D. Karakhanyan, R. Kirschner, “Yang–Baxter $\mathcal{R}$ -operators and parameter permutations”, *Nuclear Phys. B*, **785**:3 (2007), 263–285.
- [24] B. U. Felderhof, “Diagonalization of the transfer matrix of the free-fermion model. II”, *Physica*, **66**:2 (1973), 279–297.
- [25] И. М. Кричевер, “Уравнения Бакстера и алгебраическая геометрия”, *Функц. анализ и его прил.*, **15**:2 (1981), 22–35; англ. пер.: I. M. Krichever, “Baxter’s equations and algebraic geometry”, *Funct. Anal. Appl.*, **15**:2 (1981), 92–103.

- [26] A. Zabrodin, “Commuting difference operators with elliptic coefficients from Baxter’s vacuum vectors”, *J. Phys. A*, **33**:20 (2000), 3825–3850.
- [27] A. Zabrodin, “On the spectral curve of the difference Lamé operator”, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 1999, № 11, 589–614.
- [28] P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin, E. K. Sklyanin, “Yang–Baxter equation and representation theory. I”, *Lett. Math. Phys.*, **5**:5 (1981), 393–403.
- [29] V. P. Spiridonov, S. O. Warnaar, “Inversions of integral operators and elliptic beta integrals on root systems”, *Adv. Math.*, **207**:1 (2006), 91–132.
- [30] V. P. Spiridonov, “Elliptic beta integrals and solvable models of statistical mechanics”, *Contemp. Math.*, **563** (2012), 181–211; arXiv: 1011.3798.
- [31] V. V. Bazhanov, S. M. Sergeev, “A master solution of the quantum Yang–Baxter equation and classical discrete integrable equations”, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **16**:1 (2012), 65–95.
- [32] V. V. Bazhanov, S. M. Sergeev, “Elliptic gamma-function and multi-spin solutions of the Yang–Baxter equation”, *Nuclear Phys. B*, **856**:2 (2012), 475–496.
- [33] А. Ю. Волков, Л. Д. Фаддеев, “Янг-бакстеризация квантового дилогарифма”, *Вопросы квантовой теории поля и статистической физики*. 13, Зап. науч. сем. ПОМИ, **224**, ПОМИ, СПб., 1995, 146–154; англ. пер.: A. Yu. Volkov, L. D. Faddeev, “Yang-baxterization of the quantum dilogarithm”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **88**:2 (1998), 202–207.
- [34] F. A. Dolan, H. Osborn, “Applications of the superconformal index for protected operators and q -hypergeometric identities to $\mathcal{N} = 1$ dual theories”, *Nucl. Phys. B*, **818**:3 (2009), 137–178.
- [35] L. F. Alday, D. Gaiotto, Y. Tachikawa, “Liouville correlation functions from four-dimensional gauge theories”, *Lett. Math. Phys.*, **91**:2 (2010), 167–197.
- [36] A. Gadde, E. Pomoni, L. Rastelli, S. S. Razamat, “ S -duality and 2d topological QFT”, *J. High Energy Phys.*, 2010, № 3, 032, 22 pp.
- [37] V. P. Spiridonov, G. S. Vartanov, “Elliptic hypergeometry of supersymmetric dualities”, *Comm. Math. Phys.*, **304**:3 (2011), 797–874.

Сергей Эдуардович Деркачёв
(Sergei È. Derkachov)

Санкт-Петербургское отделение

Математического института им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: derkach@pdmi.ras.ru

Поступила в редакцию

29.11.2012

Вячеслав Павлович Спиридонов
(Vyacheslav P. Spiridonov)

Max Planck Institute for Mathematics,

Bonn, Germany;

Лаборатория теоретической физики

им. Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт

ядерных исследований

E-mail: spiridon@theor.jinr.ru