Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Г. Гриневич, С. П. Новиков, Дискретные SL_n -связности и самосопряженные разностные операторы на двумерных многообразиях, *УМН*, 2013, том 68, выпуск 5, 81–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9553>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 09:00:05

УДК 514.7

*Посвящается памяти И. М. Гельфанда
в связи с его 100-летием*

Дискретные SL_n -связности и самосопряженные разностные операторы на двумерных многообразиях

П. Г. Гриневич, С. П. Новиков

Программа построения дискретных аналогов знаменитых вполне интегрируемых систем и ассоциированных с ними линейных операторов начала реализовываться в 1990-е годы. В частности, свойства разностных операторов второго порядка на триангулированных многообразиях и правильных треугольных решетках изучались в работах С. П. Новикова и И. А. Дынникова начиная с 1996 г. При этом исследовались так называемые преобразования Лапласа, новые дискретизации комплексного анализа и новые дискретизации GL_n -связностей на триангулированных n -мерных многообразиях. Была развита общая теория дискретных GL_n -связностей “ранга один” (см. определение во введении). Задача выделения подкласса SL_n -связностей (и унимодулярных $SL_n^\pm$ -связностей, удовлетворяющих условию $\det A = \pm 1$) решена не была. Как показано в настоящей работе, эти связности играют важную роль в теории самосопряженных разностных операторов Шрёдингера на правильных треугольных решетках в $\mathbb{R}^2$, аналогичную роли магнитных полей в непрерывном случае. В приложении 1 нами найдена полная характеристика унимодулярных $SL_n^\pm$ -связностей ранга 1 для всех $n > 1$ и тем самым исправлена ошибка (мы утверждали ранее, что при $n > 2$ они сводятся к канонической связности). Основываясь на информации, сообщенной нам И. Г. Корепановым, мы полностью проясняем связь классической теории электрических цепей и преобразования звезда-треугольник с дискретными преобразованиями Лапласа на треугольных решетках.¹

Библиография: 29 названий.

Ключевые слова: триангулированные многообразия с черно-белой раскраской, дискретные связности, дискретные комплексные структуры, факторизации самосопряженных операторов, преобразования Дарбу и Лапласа, дискретные интегрируемые системы.

DOI: 10.4213/rm9553

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-12469-офи_m2) и программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-4995.2012.1); первый автор поддержан также программой Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики”.

¹Работы С. П. Новикова по указанной тематике (часть из них выполнена в соавторстве с другими учеными) доступны на его персональной странице по адресу www.mi.ras.ru/~snovikov, статьи номер 136–138, 140, 146, 148, 159, 163, 173–175. Для перехода к списку работ кликните [Scientific Publications](#).

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение. Дискретные GL_n -связности	82
2. Оптимальная дискретизация и интегрируемые системы	88
3. Проблема редукции	91
4. SL_2 -связности и разностные самосопряженные операторы	93
5. Преобразования Лапласа–Дарбу, конечнозонные операторы и двумерная цепочка Тоды	94
Приложение 1. Дискретные SL_n -связности	101
Приложение 2. Электрические цепи и преобразования Лапласа	103
Приложение 3. Симплектические свойства операторов на графах	106
Список литературы	108

1. Введение. Дискретные GL_n -связности

Понятие дифференциально-геометрической связности в расслоениях имеет два источника.

Во-первых, это **голономия**, т. е. параллельный перенос точки слоя вдоль пути в базе, результат которого принадлежит группе G . Дискретизация этой идеи очевидна. Следует просто приписать ориентированному ребру элемент группы G . Отдельно физики решают вопрос о том, как приписать связности (полю Янга–Миллса) “функционал действия”. Для этого удобно работать с комплексами, где двумерный остов состоит из квадратов. Физики раньше работали с правильными решетками, но позднее расширили этот класс. Группа в теории частиц компактна, так что определение действия включает форму Киллинга.

Второй источник – это переопределенные системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Именно его дискретизация развивается нами. Это в точности та дискретизация, которая возникает при построении оптимальной дискретизации уравнения Шрёдингера, сохраняющей фундаментальное свойство “факторизации”.

Поясним вкратце основные понятия.

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial \psi^i}{\partial x_l} = A_{kl}^i(x) \psi^k(x)$$

или, в векторной форме,

$$\partial_l \Psi(x) = A_l(x) \Psi(x).$$

Здесь $i, k = 1, 2, \dots, m$, $l = 1, \dots, n$. Эта система, вообще говоря, переопределена при $n > 1$. Препятствием к разрешимости является ненулевая **кривизна**, возникающая как коммутатор

$$R_{ij} = [\partial_i - A_i, \partial_j - A_j].$$

Матричная форма $A = A_i dx^i$ и определяет связность. Решения уравнения вдоль пути дает параллельный перенос. Кривизна имеет вид

$$R = R_{ij} dx^i \wedge dx^j = -dA + A \wedge A$$

(произведения дифференциалов внешние). Для группы $U_m \subset GL_m(\mathbb{C})$ мы имеем $\bar{A}_l^t = -A_l$. Выражения $\text{Tr } R^s$ дают базис среди полиномов от классов Черна (над полем рациональных чисел). Для

$$SO_m \subset GL_m(\mathbb{R}), \quad s = 2p, \quad A_l^t = -A_l$$

мы получим полиномы от классов Понтрягина. При калибровочных преобразованиях $\Psi = B(x)\Phi(x)$ мы имеем

$$\begin{aligned} A_l &\rightarrow B^{-1} A_l B - B^{-1} \partial_l B, \\ R_{ij} &\rightarrow B^{-1} R_{ij} B. \end{aligned}$$

Как видно, классы Черна и Понтрягина не меняются. Это замкнутые скалярнозначные формы.

Как дискретизировать этот подход к идее связности? Определим класс операторов первого порядка, служащий нашим целям.

Рассмотрим некоторый симплициальный комплекс M^n — триангулированное многообразие. Зафиксируем семейство n -мерных симплексов X . Каждой паре (T, P) , где T — это n -мерный симплекс семейства X , а P — любая его вершина, поставлена в соответствие невырожденная $(r \times r)$ -матрица $u_{T:P}$, $\det u_{T:P} \neq 0$.

По этим данным определим разностный оператор первого порядка Q , отображающий вектор-функции на вершинах в вектор-функции на n -мерных симплексах из семейства X , формулой

$$Q\psi_T = \sum_P u_{T:P} \psi_P.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Дискретная GL_{rn} -связность ранга r задается уравнением $Q\psi = 0$, где семейство симплексов X состоит из всех n -симплексов.

Ее коэффициенты определены с точностью до калибровочного преобразования, задаваемого парой невырожденных $(r \times r)$ -матричных функций g_T , h_P , определенных на n -симплексах и вершинах соответственно:

$$\psi \rightarrow h_P \psi_P, \quad u_{T:P} \rightarrow g_T u_{T:P} h_P^{-1}, \quad Q \rightarrow g_T Q h_P^{-1}.$$

Фактически связность зависит только от отношений

$$\mu_{PP'}^T = u_{T:P}^{-1} u_{T:P'}, \quad \mu_{PP'}^T \rightarrow h_P \mu_{PP'}^T h_{P'}^{-1}.$$

Проблема восстановления связности по данным голономии, как и само определение голономии, даны ниже. Важно отметить здесь, что в нашем дискретном случае имеются следующие два вида голономии, в отличие от непрерывного случая (определения см. ниже).

$$\gamma = T_0 T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6 T_7 T_8 T_9 T_{10} T_0$$

Рис. 1. Замкнутый толстый путь

1. **Неабелева голономия** из группы GL_{rn} определена для всех **толстых путей**, составленных из n -симплексов $T_0 \dots T_m$ таких, что пересечение $T_i \cap T_{i+1} = F_i$ является их общей $(n-1)$ -гранью (см. рис. 1).

2. **Оснащенная голономия**, для ранга один называемая также Абелевой, определена для всех **оснащенных путей** $[P_0 P_1 \dots P_m; T_1 \dots T_m]$, где ребра $P_{i-1} P_i$ принадлежат симплексам T_i (см. рис. 2).

Рис. 2. а) Замкнутый длинный оснащенный путь; б) замкнутый короткий оснащенный путь

В наших работах исследовались связности ранга 1. Все существенные результаты относятся к этому случаю.

Простейшая **связность четности** – это отображение, сопоставляющее каждому замкнутому толстому пути γ его “четность” $P(\gamma) = (-1)^{m(\gamma)}$, где $m(\gamma)$ – число n -симплексов в толстом пути γ .

Очевидно, что связность четности тривиальна тогда и только тогда, когда n -симплексы допускают черно-белую раскраску. В предшествующих работах мы называли такую раскраску **дискретной конформной структурой**. Далее мы будем всегда считать, что мы работаем с SL_n -связностями ранга один, если связность четности тривиальна, и с $SL_n^\pm$ -связностями, если она нетривиальна (в некоторых случаях мы будем опускать в формулах индекс $\pm$).

Каноническая связность соответствует случаю, когда все коэффициенты $u_{T:P}$ равны 1.

При задании связности $Q\psi = 0$, как уже отмечалось, играют роль лишь отношения коэффициентов оператора Q . В случае ранга 1 мы имеем

$$\mu_{PP'}^T = \frac{u_{T:P}}{u_{T:P'}}.$$

“Оснащенный путь” – это набор $\gamma^{\text{fr}} = [P_0 P_1 \dots P_m; T_1 T_2 \dots T_m]$, где $P_{i-1} P_i$ – ребро в n -симплексе T_i , $i = 1, \dots, m$.

Каждая связность ранга r порождает **оснащенное представление голономии**: каждому оснащеному пути γ^{fr} ставится в соответствие $(r \times r)$ -матрица:

$$\gamma^{\text{fr}} \rightarrow \prod_i \mu_{P_{i-1} P_i}^{T_i} = \mu(\gamma^{\text{fr}}).$$

Мы имеем отображение полугруппы замкнутых оснащенных путей с фиксированной начальной точкой P_0 в группу $GL_r(k)$ для нашего основного поля k . В нашей работе мы ограничимся абелевым случаем $r = 1$, причем все $u_{PP'}$ строго больше 0, т. е. $u \in \mathbb{R}^+ \subset k^* = \mathbb{R}^*$:

$$\mu: \Omega_{\text{fr}} \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

Интересный случай $k = \mathbb{C}$ мы изучим в следующих работах. Неоднозначность извлечения квадратного корня приводит к дополнительным небольшим топологическим трудностям.

Указанное отображение не зависит от выбора начальной точки для $r = 1$, поскольку оснащенная голономия абелева. **Все выражения $\mu(\gamma^{\text{fr}})$ калибровочно инвариантны.** Простейший инвариант такого типа,

$$\rho_{PP'}^{TT'} = \mu_{PP'}^T \mu_{P'P}^{T'} = \rho_{P'P}^{T'T} = \frac{\mu_{PP'}^T}{\mu_{P'P}^{T'}},$$

получается, если рассмотреть оснащенный путь $\gamma^{\text{fr}} = [PP'P; TT']$. Эти инварианты определены и для неабелева случая, но для $r > 1$ их не хватает для решения задачи о восстановлении связности. Для $r = 1$ эта задача была решена в работе [1]. Мы приведем решение для наиболее простого случая $n = 2$.

Восстановление связностей ранга 1 в размерности $n = 2$. Для восстановления связности по инвариантам достаточно знать все функции $\rho_{PP'}^{TT'}$, а также набор чисел $\mu(\gamma_j^{\text{fr}})$, отвечающий генераторам группы $H_1(M, \mathbb{Z})$. Соответствующая процедура описана в работе [1]. Эта процедура существенно упрощается в размерности $n = 2$, особенно в предположении, что многообразие ориентировано. Опишем указанный случай.

Рассмотрим двумерное ориентированное многообразие M .

Определим мультипликативную 2-коцепь $\rho(T)$ формулой

$$\rho(T) = \prod_{R_q \in T} \rho_{R_q}^{TT_q},$$

где $T_q \cap T = R_q = ij$, $T = ijk$, R_q – ребро треугольника T . В работе [1] было доказано, что эта коцепь когомологична нулю. Действительно, в некомпактном случае это очевидно. Для компактных ориентированных многообразий легко проверить, что

$$\prod_{T \in M} \rho(T) = 1.$$

Согласно определению, $\rho(T) = \prod_{R_i} \rho_{R_i}^{TT_i}$, где R_i – все ориентированные ребра T и $T_i \cap T = R_i$. Поскольку $\rho_{ij}^{TT'} \rho_{ji}^{T'T'} = 1$, наше произведение равно 1, что и означает когомологичность коцепи тривиальной.

Рассмотрим 1-цепь λ такую, что $\delta\lambda = \rho^{-1/2} > 0$. Мы видим, что

$$\lambda_{ij}\lambda_{jk}\lambda_{ki} = \rho^{-1/2}(T), \quad T = ijk, \quad \lambda_{ij}\lambda_{ji} = 1.$$

Полагая

$$\mu_{ij}^T = \lambda_{ij} \cdot (\rho_{ij}^{TT_q})^{1/2},$$

приходим к формуле для связности, найденной в работе [1].

Конечно же, коцепь λ определена неоднозначно: ее можно умножить на произвольный коцикл. Однако когомологические классы при этом не меняются, поскольку эти преобразования в точности соответствуют абелевым заменам калибровок. Тем самым, мы получаем инварианты связностей в группе $H^1(M)$, дополняющие “локальные” инварианты типа $\rho_{ij}^{TT'}$.

Неабелево представление голономии, как уже говорилось, определяется с использованием “толстых путей” (см. рис. 1).

По определению, толстый путь $\gamma^{\text{thick}} = T_1 \dots T_m$, где $T_m = T_0$, – это последовательность n -симплексов таких, что пересечение любых двух соседей $F_i = T_i \cap T_{i+1}$ есть $(n-1)$ -мерная грань, причем $F_i \neq F_{i+1}$. Каждый замкнутый толстый путь порождает линейное отображение

$$K: \Omega_{\text{thick}}(M, T_0) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$$

по следующему правилу: на каждом n -симплексе T_i уравнение $Q\psi = 0$ порождает отображение пространства r -вектор-функций на вершинах грани F_i в пространство таких же функций на вершинах грани F_{i+1} . Мы рассматриваем композицию этих отображений начиная с $T_0 = T_m$.

Неабелева кривизна в точке P для $n = 2$ определена как неабелева голономия, отвечающая толстому пути $\gamma_P^{\text{thick}} = T_1 \dots T_m$, составленному из всех 2-симплексов $T_i = PP_iP_{i+1}$, содержащих вершину P (см. рис. 3).

Рис. 3. Звезда вершины P

Это множество называют звездой вершины P : $\text{St}(P) = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_m$. Неабелева кривизна для группы GL_2 и $r = 1$ – это верхнетреугольная (2×2) -матрица $K(P, T_1)$ с диагональю $(1, \pm\mu_P)$, где $\mu_P = \mu(\gamma_P^{\text{fr}})$ и вторая строка имеет вид $(\alpha(P_i, P), \pm\mu_P)$. Здесь γ_P^{thick} – замкнутый толстый путь $\partial \text{St}(P)$, начинающийся и заканчивающийся в любой из вершин $P_i \in T_i \in \text{St}(P)$, $P_i \neq P$. Легко проверить справедливость следующей леммы.

ЛЕММА 1. Для замкнутого пути вокруг вершины P мы имеем

$$\mu_P = \prod_{i=1, \dots, m} \rho_{PP_i}^{T_i T_{i+1}},$$

где индекс i пробегает все значения по модулю m .

Приведем выражения коэффициентов неабелевой кривизны для всех n , следуя работе [1].

Для всех $n \geq 2$ можно определить неабелеву кривизну, используя звезду $\text{St}(\sigma^{n-2})$ для каждого $(n-2)$ -мерного симплекса σ с вершинами $0, \dots, n-2$. При этом, точно так же, как и для $n = 2$, возникают верхнетреугольные матрицы A_p перехода от грани σ , p к σ , $p+1$. Вершины звезды занумерованы номерами p для $(n-1)$ -граней σ , p , где p пробегает весь цикл $p = 1, 2, \dots, m, 1$, как и для $n = 2$. Полное циклическое произведение по j матриц A_{p+j} и дает кривизну

$$K_{\sigma, p} = A_{p+m-1} \cdots A_p$$

вокруг симплекса коразмерности 2, отвечающую начальной точке p . Она имеет диагональные члены вида

$$1, \quad \dots, \quad 1, \quad \mu_\sigma = \prod_{s=p}^{s=p+m-1} (-\mu_{s, s+1}^{T_{s+1}}).$$

Здесь n -симплексы T_s имеют вид $\sigma, s-1, s$, где s считается по модулю m .

Последняя строка – единственная нетривиальная – имеет вид

$$\alpha_{\sigma, 0, p}, \dots, \alpha_{\sigma, m-2, p}, \mu_\sigma.$$

Следующая формула выражает коэффициенты через связность:

$$\alpha_{\sigma,q,p} = -\mu_{q,p}^{T_p} + \mu_{p-1,p}^{T_p} \mu_{q,p-1}^{T_{p-1}} - \cdots + (-1)^m \mu_{p-1,p}^{T_p} \mu_{p-2,p-1}^{T_{p-1}} \cdots \mu_{q,p-m+1}^{T_{p-m+1}}.$$

Калибровочно инвариантными являются величины

$$\alpha_{\sigma,q,p}^* = \alpha_{\sigma,q,p} \mu_{q,p}^{T_p}.$$

Для них верна формула

$$\alpha_{\sigma,q,p+1}^* = -\frac{\alpha_{\sigma,q,p}^*}{\mu_{pq}^{T_p} \mu_{qp}^{T_{p+1}}} + 1 - (-1)^{m(\gamma)} \mu_{\sigma},$$

где $m(\gamma)$ – связность четности. Эти величины выражаются через оснащенную голономию $\rho_{ij}^{T_j T'}$ по формуле

$$\alpha_{\sigma,q,p}^* = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \prod_{j=0}^k \rho_{p-j,q}^{T_{p-j+1}, T_{p-j}}, \quad \prod_p \rho_{qp}^{T_p, T_{p+1}} = (-1)^m \mu_{\sigma}.$$

Мы видим из этой формулы, что для случая SL_n -связностей, отвечающих тривиальной связности четности, выражение кардинально улучшается, так как $\mu_{\sigma} = 1$.

Решение проблемы редукции связности к группе $SL_n^{\pm}$ дается в настоящей работе.

Наши определения связности не позволяют эффективно выделить компактные группы, необходимые в физике частиц. Мы работаем с линейными операторами и используем эти идеи применительно к теории дискретного оператора Шрёдингера в электрическом и магнитном полях в размерности $n = 2$.

2. Оптимальная дискретизация и интегрируемые системы

Согласно нашему подходу, оптимальная дискретизация оператора должна сохранять черты, связывающие оператор с вполне интегрируемыми системами типа КдФ и изоспектральными деформациями типа пар Лакса – для $n = 1$, или троек Манакова (изучавшихся Б. А. Дубровиным, И. М. Кричевером и С. П. Новиковым с 1976 г. [2]) – для $n = 2$, где деформации подвергается лишь один уровень энергии. В обоих случаях определяющим свойством хорошей дискретизации является сохранение свойства факторизуемости оператора, которое является источником возникновения дискретных почти изоспектральных преобразований, называемых **преобразованиями Дарбу** для всех уровней энергии ($n = 1$), где нужна сильная факторизация, или **преобразованиями Лапласа** одного уровня для $n = 2$, основанными на слабой факторизации (ниже).

$n = 1$ (сильная факторизуемость):

$$L = -\partial_x^2 + u(x) = Q^+ Q + \text{const}, \quad Q = \partial_x + a(x), \\ a_x + a^2 = u + C.$$

Рис. 4. Базисные сдвиги на квадратной решетке

Дискретизация:

$$L = c_{n-1}T^{-1} + c_nT + u_n = (Q')^+Q' + C' = Q^+Q + C,$$

где $Q = aT + b$, $Q' = aT^{-1} + b$ и $T(n) = n + 1$.

Преобразования Дарбу (правые и левые) имеют вид

$$\psi \rightarrow Q\psi = \psi', \quad L \rightarrow L' = QQ^+$$

и соответственно

$$\psi \rightarrow Q'\psi = \psi'', \quad L \rightarrow L'' = Q'(Q')^+$$

для всех решений уравнения $L\psi = \lambda\psi$.

$n = 2$ (слабая факторизуемость, по модулю диагональных членов).

А. Гиперболический случай:

$$L\psi = 0, \quad L = Q_1Q_2 + W(x) = Q_2Q_1 + V(x), \\ Q_i = \partial_i + A_i.$$

Дискретизация оператора (см. рис. 4) отвечает квадратной решетке с базисными сдвигами T_1, T_2 :

$$L = a + bT_1 + cT_2 + dT_1T_2;$$

калибровочная группа уравнения $L\psi = 0$ имеет вид

$$L \rightarrow fLg^{-1}, \quad \psi \rightarrow g\psi.$$

Эти преобразования имеют два инварианта, похожих на аналоги кривизны. Преобразование Лапласа (см. ниже) можно выразить через эти инварианты.

Оператор допускает правую и левую факторизацию:

$$L = f[(1 + uT_1)(1 + vT_2) + w], \\ L = f'[(1 + v'T_2)(1 + u'T_1) + w'].$$

Рис. 5. Базисные сдвиги на правильной треугольной решетке

Б. Эллиптический случай:

$$L = Q^+Q + W = QQ^+ + V,$$

$$Q = \partial + A(z, \bar{z}),$$

где $\partial = \partial_x - i\partial_y$, $z = x + iy$, $i^2 = -1$.

Дискретизации оператора отвечает правильная треугольная решетка с базисными сдвигами $T_1, T_2, T_1^{-1}T_2$:

$$L = a + bT_1 + cT_2 + dT_1^{-1}T_2 + T_1^{-1}b + T_2^{-1}c + T_2^{-1}T_1d, \quad (1)$$

где все коэффициенты вещественны. Мы имеем черно-белую раскраску (см. рис. 5) и факторизации

$$L = Q^+Q + F = P^+P + G, \quad Q = u + vT_1 + wT_2, \quad P = u' + v'T_1^{-1} + w'T_2^{-1}.$$

Преобразования Лапласа (правые и левые) имеют вид

$$\psi \rightarrow Q_i\psi$$

в непрерывном гиперболическом случае, и аналогично в дискретном, исходя из факторизации.

В эллиптическом случае они имеют вид

$$\psi \rightarrow Q\psi \quad (\text{правое}), \quad \psi \rightarrow P\psi \quad (\text{левое}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мы назовем связностью, порожденной оператором (1), прямую сумму операторов $Q \oplus P$. Эта связность имеет ранг 1 по определению.

Мы докажем ниже, что это есть SL_2 -связность. Эта конструкция обобщается на все триангулированные поверхности, и наиболее естественно – на поверхности с дискретной конформной структурой, т. е. черно-белой раскраской (см. рис. 5 и 6). В этом случае имеются следующие три семейства n -симплексов.

Рис. 6. Черно-белая раскраска звезды вершины

1. Все симплексы Q . Это связность.
2. Черные симплексы Q^b . Этот оператор (в случае канонической связности) берется за дискретизацию $\bar{\partial}$ при построении дискретного комплексного анализа.
3. Белые симплексы Q^w . Этот оператор берется за дискретизацию ∂ .

Соответственно, возникают операторы, играющие роль ковариантных производных в нашей теории:

$$Q^b, \quad Q^w, \quad Q = Q^b \oplus Q^w.$$

3. Проблема редукции

ЗАДАЧА. Как эффективно построить все дискретные $SL_2^\pm$ -связности на триангулированном многообразии M^2 ?

КОНСТРУКЦИЯ. Используем следующую процедуру. Поставим в соответствие каждому ребру $R \in M$ положительное число $A(R) > 0$. Каждый треугольник $T \in M$ имеет ровно 3 вершины P_1, P_2, P_3 и 3 ребра R_1^T, R_2^T, R_3^T . Пусть $R_i = P_i P_{i+1}$, где индекс i берется по модулю 3. Рассмотрим следующий оператор связности Q :

$$Q\psi_T = \sum_i u_{T:P_i} \psi_{P_i}, \quad (2)$$

где $u_{T:P_i}$ заданы как решения системы уравнений (см. рис. 7)

$$u_{T:P_i} u_{T:P_{i+1}} = A(P_i P_{i+1}).$$

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. 1. Дискретные связности, порождаемые указанным оператором Q , принадлежат классу $SL_2^\pm$ как локально, так и глобально.

2. Все $SL_2^\pm$ -связности получаются в рамках данной конструкции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПЕРВОЙ ЧАСТИ. Рассмотрим толстый путь $\gamma = T_1 \dots T_m$, $T_m = T_0$, где $F_i = T_i \cap T_{i+1}$. Определитель матрицы перехода от пространства, связанного с ребром F_{i-1} , к пространству, связанному с ребром F_i , равен

$$\det M_i = -\frac{u_{T_i:P'}}{u_{T_i:P''}} = -\frac{u_{T_i:P} u_{T_i:P'}}{u_{T_i:P} u_{T_i:P''}} = -\frac{A(F_{i-1})}{A(F_i)},$$

Рис. 7. Построение связности по функциям на ребрах

где $P' \in F_{i-1}$, $P' \notin F_i$, $P'' \notin F_{i-1}$, $P'' \in F_i$, $P = F_{i-1} \cap F_i$. Для замкнутого толстого пути каждый из сомножителей появляется один раз в числителе и один раз в знаменателе, что и означает унимодулярность матрицы монодромии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВТОРОЙ ЧАСТИ. Каждое из ребер F нашей триангуляции принадлежит ровно двум треугольникам: $F = T' \cap T''$. Убедимся, что можно выбрать нормировку связности, т. е. калибровочное преобразование $Q \rightarrow fQ$, где f – некоторая положительная функция на треугольниках, так, чтобы для всех ребер $F = PP'$ имело место соотношение

$$A(T' : PP') = A(T'' : PP'),$$

где $A(T' : PP') = u_{T',P} u_{T',P'}$, $A(T'' : PP') = u_{T'',P} u_{T'',P'}$.

Зафиксируем один из треугольников T_0 . Положим $f(T_0) = 1$. Рассмотрим произвольный толстый путь, начинающийся в T_0 и завершающийся в T . Условие $A(T' : PP') = A(T'' : PP')$ однозначно фиксирует нормировку на всех треугольниках этого пути. Рассмотрим замкнутый толстый путь, начинающийся и заканчивающийся в T_0 . Унимодулярность матрицы монодромии в точности означает, что при обходе по такому пути мы снова приходим к $f(T_0) = 1$, а следовательно, данная процедура самосогласована.

ЗАМЕЧАНИЕ. Произвольную связность, локально принадлежащую классу $SL_2^\pm$, можно рассматривать как $SL_2^\pm$ -связность на универсальном накрывающем пространстве $SL_2^\pm$, причем оператор Q определяется набором чисел $A(E)$ на ребрах и его коэффициенты $u_{T:P}$ таковы, что для $g \in \pi_1(M)$ имеет место равенство

$$u_{gT:gP} = \lambda_g u_{T:P}$$

или, что эквивалентно, $g^*Q = \lambda_g Q$ для некоторого представления $\pi_1(M) \rightarrow \mathbb{R}^+$.

4. SL_2 -связности и разностные самосопряженные операторы

Рассмотрим произвольное триангулированное 2-мерное многообразие M^2 , снабженное “дискретной конформной структурой”, т.е. черно-белой раскраской 2-симплексов этой триангуляции (треугольников), использованной в работах [3]–[6]. Рассмотрим скалярный вещественный самосопряженный оператор на таком многообразии:

$$L\psi_P = \sum_{P'} b_{P:P'} \psi_{P'} = \sum_{P \neq P'} b_{P:P'} \psi_{P'} + W(P) \psi_P,$$

где либо $P = P'$, либо точки P и P' соединены ребром. Самосопряженность означает, что для всех пар P, P' имеет место равенство $b_{P:P'} = b_{P':P}$. Коэффициенты $b_{P:P}$ мы будем называть потенциалом: $W(P) = b_{P:P}$, мы также будем предполагать, что $b_{P:P'} > 0$ для всех P, P' .

Как было указано в работах [7]–[9], каждый такой оператор может быть представлен в факторизованном виде: существует единственная пара операторов Q^b и Q^w , действующих на черных и белых треугольниках соответственно, такая, что

$$L = Q^{b+} Q^b + W^b = Q^{w+} Q^w + W^w.$$

Здесь $Q^b \psi_T = \sum_{P \in T} u_{T:P} \psi_P$, где T – произвольный черный треугольник, и $Q_T^w = \sum_{P \in T} u_{T:P} \psi_P$, где T – произвольный белый треугольник (см. рис. 5 и 6).

Рассмотрим составной оператор $Q_L = \{Q^b, Q^w\}$, совпадающий с Q^b на черных треугольниках и с Q^w на белых. Он порождает некоторую дискретную GL_2 -связность на многообразии M^2 , ассоциированную с вещественным оператором L .

ТЕОРЕМА 2. *Связность Q_L является SL_2 -связностью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любое ребро триангуляции является пересечением черного и белого треугольников: $R = T \cap T'$. Поскольку имеет место равенство $L = Q^{b+} Q^b = Q^{w+} Q^w$ с точностью до диагональных членов, то все внедиагональные коэффициенты оператора L могут быть представлены как произведения пар коэффициентов операторов Q^b или Q^w соответственно (см. рис. 7):

$$u_{T':P} u_{T:P'} = u_{T':P} u_{T':P'} = A(PP').$$

Как было доказано в теореме 2, задание набора чисел $A(R)$ на ребрах $R = PP'$ определяет $SL_2^\pm$ -связность. Поскольку каждый толстый путь на многообразии с дискретной конформной структурой содержит четное число симплексов, то мы имеем SL_2 -связность. Теорема доказана.

5. Преобразования Лапласа–Дарбу, конечнозонные операторы и двумерная цепочка Тоды

Преобразования Дарбу для одномерной задачи $L\psi = \lambda\psi$:

$$L = Q^+Q \rightarrow QQ^+ = \tilde{L}, \quad \psi \rightarrow \tilde{\psi} = Q\psi,$$

и **преобразования Лапласа** для двумерного уравнения $L\psi = 0$ (см. раздел 2) имеют глубокую связь с вполне интегрируемыми системами типа Кортевега–де Фриза, Кадомцева–Петвиашвили и т. д.

В непрерывном случае $L = -\partial_x^2 + u$ циклические цепочки преобразований Дарбу нечетной длины приводят к конечнозонным операторам и их интересным обобщениям (см. работы Дж. Вейсса, А. П. Веселова, А. Б. Шабата [10]–[12]). Разностный аналог этого не завершен (см. [13]).

В двумерном непрерывном гиперболическом случае

$$L\psi = 0, \quad L = \partial_x\partial_y + a\partial_x + b\partial_y + c$$

имеется связь преобразований Лапласа с трехмерной геометрией. Их цепочки (включая циклические) исследовались школой Дарбу в девятнадцатом веке. Удобно выражать преобразование Лапласа через калибровочные инварианты.

Двумерный непрерывный эллиптический случай исследовался С. П. Новиковым и А. П. Веселовым в [9]. В этом случае оператор

$$L = -\Delta + A\partial + B\bar{\partial} + c = L^+ = Q^+Q + V, \\ Q^+ = -\partial + A, \quad Q = \bar{\partial} + \bar{A}$$

(заряд полагается равным 1) самосопряжен и периодичен. Требуется гладкость и периодичность инвариантов – магнитного поля $2H = (\bar{\partial}A - \partial B)$, $B = \bar{A}$, и потенциала $V = e^f$:

$$H' = H + \frac{1}{2}\Delta f, \quad e^{f'} = e^f + H'.$$

Оператор называется топологически тривиальным, если интеграл по элементарной ячейке решетки равен нулю: $\bar{H} = 0$, или, что эквивалентно, коэффициенты A, B, V оператора периодичны. Рассмотрим цепочку преобразований Лапласа

$$\cdots \rightarrow L_{-n} \rightarrow L_{-n+1} \rightarrow \cdots \rightarrow L_{-1} \rightarrow L_0 \rightarrow L_1 \rightarrow \cdots.$$

Выразив магнитные поля через потенциалы: $H' = e^{f'} - e^f$ для всех n , мы получим

$$\frac{1}{2}\Delta f_n = H_{n+1} - H_n = (e^{f_{n+1}} - e^{f_n}) - (e^{f_n} - e^{f_{n-1}}).$$

После подстановки $f_n = g_n - g_{n-1}$ мы получаем двумерную цепочку Тоды

$$\frac{1}{2}\Delta g_n = e^{g_{n+1}-g_n} - e^{g_n-g_{n-1}}$$

в эллиптическом случае. Вывод цепочки Тоды в гиперболическом случае такой же.

Отличие состоит в глобальных свойствах. Согласно теореме Новикова–Весселова [9], циклическая цепочка Лапласа гладких периодических операторов $L_0, L_1, \dots, L_n = L_0$ в эллиптическом случае состоит из алгебро-геометрических операторов (на нулевом уровне). Все они топологически тривиальны. Подобного результата нет в гиперболическом случае, это результат глобального анализа, основанного на конечномерности многообразий решений эллиптических нелинейных уравнений на компактном многообразии (здесь – торе).

Были исследованы также цепочки

$$L_0 \rightarrow L_1 \rightarrow \dots \rightarrow L_n$$

такие, что операторы $L_0 = Q_0^+ Q_0 + C$, $L_n = Q_n^+ Q_n$ оба факторизуемы сильно. Такие операторы обладают замечательным свойством спектра: они всегда топологически нетривиальны и имеют два бесконечнократно вырожденных уровня, один из которых основной. Для длины цепочки $n = 1$ такой оператор один, это оператор Ландау в однородном магнитном поле и нулевом электрическом. Для длины $n = 2$ такие операторы образуют конечномерные семейства, порождаемые любыми двояко-периодическими гладкими решениями уравнения

$$\frac{1}{2} \Delta f = e^f + C,$$

где C – это n -кратный топологический заряд, не равный нулю (см. [9]). Согласно нашей гипотезе, этот феномен существует только для малых длин цепочки ($n = 2, 3, \dots?$).

Перейдем теперь к дискретным системам. Несложно доказывается такое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть M^2 – триангулированная поверхность. Любой самосопряженный вещественный разностный оператор второго порядка

$$L\psi_P = \sum_{P'} b_{P:P'} \psi_{P'},$$

где $b_{P:P} = b_{P:P'} > 0$ для $P \neq P'$, представляется в виде

$$L = Q^+ Q + W.$$

Здесь Q – оператор $SL_2^\pm$ -связности и W – потенциал. Если триангуляция окрашена черно-белым, то оператор однозначно представляется в виде

$$L = (Q^b)^+ Q^b + U = (Q^w)^+ Q^w + V = \frac{1}{2} Q^+ Q + W,$$

где $Q = Q^b \oplus Q^w$.

Доказательство легко следует из данного в теореме 2 описания $SL_2^\pm$ -связности. Коэффициент $b_{P,P'}$ однозначно факторизуется как произведение коэффициентов оператора связности Q вдоль любого прилегающего к ребру PP' треугольника (см. рис. 7). Это однозначно определяет связность Q .

Можно ли определить преобразование Лапласа? В статье С. П. Новикова и И. А. Дынникова [8] 1997 г. определены все возможные преобразования Лапласа для крашенных триангуляций. В приложении 2 об электрических цепях мы встретим интересную физическую реализацию этого в специальной калибровке, где $L(\text{const}) = 0$.

Ситуация такова. Пусть $L\psi = 0$. Мы определяем преобразование так же, как в работе [8]:

$$\begin{aligned} L &= Q^+Q + W \rightarrow QW^{-1}Q^+ + 1 = \tilde{L}, \\ \psi &\rightarrow \tilde{\psi} = Q\psi. \end{aligned}$$

Вместо оператора Q могут быть Q^b или Q^w . Это преобразование Лапласа корректно определено и калибровочно инвариантно относительно преобразований $L \rightarrow U^{1/2}LU^{1/2}$. Квадрат такого преобразования Лапласа, однако, единичен.

В двумерном случае нам удалось найти только следующие классы, для которых преобразование Лапласа всегда корректно определено и может быть нетривиально проитерировано бесконечное число раз, образуя цепочку.

1. Квадратная решетка. Рассматривается квадратная решетка с базисными сдвигами T_1, T_2 . Операторы L действуют на пространстве функций ее вершин и являются гиперболическими (см. [7], [8]):

$$L = a(m, n) + b(m + 1, n)T_1 + c(m, n + 1)T_2 + d(m + 1, n + 1)T_1T_2.$$

На нулевом уровне гиперболической задачи $L\psi = 0$ действует калибровочная группа

$$L \rightarrow fLg, \quad \psi \rightarrow g^{-1}\psi,$$

причем предполагается, что обе функции f, g нигде не обращаются в 0. Мы имеем две факторизации (“левую” и “правую”):

$$L = f[(1 + uT_1)(1 + vT_2) + w] = g[(1 + vT_2)(1 + uT_1) + w_L].$$

Преобразование Лапласа задается стандартным способом:

$$\tilde{L} = f'[(1 + vT_2)w^{-1}(1 + uT_1) + 1].$$

Для того чтобы применить преобразование Лапласа, мы используем следующий выбор представителя L в классе калибровочно эквивалентных на нулевом уровне энергии операторов: $L = (1 + uT_1)(1 + vT_2) + w$. Здесь $u = u(m + 1, n)$,

$v = v(m, n+1)$, $w = w(m, n)$. Коэффициенты оператора $\tilde{L}$, получающиеся после применения преобразования Лапласа, мы обозначим u' , v' , w' соответственно. Они берутся в тех же точках.

Отметим, что для сохранения калибровки после преобразования Лапласа нужно правильно подобрать функцию f' : $f' = (1+w')w/(1+w)$. Мы получаем

$$\tilde{L} = f'[(1+vT_2)w^{-1}(1+uT_1) + 1] = (1+u'T_1)(1+v'T_2) + w'.$$

Здесь мы используем следующие обозначения для функций со сдвигом аргумента: $u_i = T_i^*(u)$, $v'_i = T_i^*(v')$, $\dots$.

Прямая подстановка дает

$$u' = \frac{f'u}{w}, \quad v' = \frac{f'v}{w_2}, \quad u'v'_1 = \frac{f'vu_2}{w_2}.$$

У нас еще остаются калибровочные преобразования, сохраняющие используемую форму оператора: $L \rightarrow f^{-1}Lf$, $\psi \rightarrow f\psi$. Инвариантными относительно данных преобразований являются потенциал w факторизованной формы и **кривизна** $H = vu_2u^{-1}v_1^{-1}$, аналогичная магнитному полю в непрерывном случае. В результате применения преобразования Лапласа мы получаем

$$H' = \frac{1+w'_2}{1+w_2}, \quad 1+w' = (1+w)w_{m-1,n}w_{m,n+1}w^{-1}w_{m-1,n+1}^{-1}H_{m-1,n},$$

или, после сдвига на T_1 :

$$1+w'_1 = (1+w_1)ww_1^{-1}w_{1,2}^{-1}H.$$

Тем самым, действуя по схеме работы [8], мы можем выразить инварианты H' , w' через инварианты H , w по аналогии с непрерывным случаем. Далее исключим из уравнений H , H' , выражая тем самым всю цепочку исключительно через переменную w (см. [9]).

В результате, действуя согласно классической схеме Дарбу и его школы и используя цепочки преобразований Лапласа (см. ссылки в работе [9]), мы получаем дискретизацию 2-мерной цепочки Тоды. Цепочка преобразований Лапласа

$$\dots \rightarrow L_{k-1} \rightarrow L_k \rightarrow L_{k+1} \rightarrow \dots$$

описывается уравнением

$$\frac{w''_1 + 1}{w'_1 + 1} \frac{w_2 + 1}{w'_2 + 1} = \frac{w'w'_{1,2}}{w'_1w'_2},$$

где f' и f'' обозначают результат соответственно однократного и двукратного применения преобразования Лапласа к функции f . В частности, w , w' , w'' отвечают дискретным временам $k-1$, k , $k+1$ нашей решетки: $w^{k-1}(m, n) = w$,

$w^k(m, n) = w'$, $w^{k+1}(m, n) = w''$ в точке (m, n) , w_i означает сдвиг функции в направлении T_i , $i = 1, 2$, т. е. $w_{m+1, n}$ и $w_{m, n+1}$ соответственно. Тем самым, уравнение на $w^k(m, n)$ имеет следующий вид:

$$\frac{w_1^{k+1} + 1}{w_1^k + 1} \frac{w_2^{k-1} + 1}{w_2^k + 1} = \frac{w^k w_{12}^k}{w_1^k w_2^k}.$$

Подобное исследование проводил также А. Долива [14].

ПРИМЕР. Действуя в соответствии с [8], рассмотрим задачу о циклической цепочке длины 2, которая в непрерывном случае приводит к уравнению синус-Гордон (sinh-Гордон). Положим $a = w^{2k}$, $b = w^{2k+1}$ для всех k . Мы получаем пару уравнений на функции $a(m, n)$ и $b(m, n)$. Вводя новую функцию $G = ab$, получаем

$$\frac{GG_{12}}{G_1 G_2} = 1.$$

Рассмотрим решения специального вида, отвечающие $G = C$, где C – некоторая константа. В результате получается система

$$\frac{C + b_1}{1 + b_1} \frac{C + b_2}{1 + b_2} = bb_{12}.$$

Как было отмечено ранее в работе [8] 1997 г., ее можно рассматривать как дискретный аналог системы sinh-Гордон. При $C = 1$ система вырождается в тривиальную: $bb_{12} = 1$.

Эквивалентность этого дискретного аналога 2-мерной цепочки Тоды известной 3-мерной полностью дискретной системе Хироты была установлена через несколько лет Долива (см. [15]).

Семейство систем Хироты можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \gamma F(k+1, m+1, n)F(k-1, m, n+1) + \alpha F(k, m, n)F(k, m+1, n+1) \\ + \beta F(k, m+1, n)F(k, m, n+1) = 0, \end{aligned}$$

причем предполагается, что $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

II. Тривалентное дерево. Рассматривается самосопряженный оператор 4-го порядка L , действующий на функциях вершин тривалентного дерева – см. [16]. Он имеет следующий вид:

$$L\psi_P = \sum_{P''} a_{P:P''} \psi_{P''} + \sum_{P'} b_{P:P'} \psi_{P'} + W_P \psi_P,$$

где $PP'P''$ – короткий путь длины 2, $|PP'| = 1$ и $|P'P''| = 1$ – см. рис. 8.

Оператор L допускает факторизацию в виде $L = Q^+ Q + u_P$, где

$$\begin{aligned} Q\psi_P &= \sum_{P'} d_{P:P'} \psi_{P'} + v_P \psi_P, \\ a_{P:P''} &= d_{P':P} d_{P':P''}, \quad b_{P:P'} = d_{P':P} v_{P'} + d_{P:P'} v_P, \\ W_P &= v_P^2 + \sum_{P'} d_{P':P}^2 + u_P. \end{aligned}$$

Рис. 8. Тривалентное дерево

Преобразование Лапласа задается стандартными формулами

$$\tilde{L} = Qu^{-1}Q^+ + 1, \quad \tilde{\psi} = Q\psi,$$

при этом мы работаем в классе эквивалентности самосопряженных операторов $L \rightarrow fLf$, $\psi \rightarrow f^{-1}\psi$. Итерируя преобразования Лапласа, получаем цепочки Лапласа

$$\cdots \rightarrow L_n \rightarrow L_{n+1} \rightarrow \cdots,$$

где $\tilde{L}_n = L_{n+1}$.

В данной ситуации выбор факторизации зависит от непрерывного параметра, поскольку уравнение

$$b_{P,P'} = d_{P',P}v_P + d_{P,P'}v_{P'}$$

имеет однопараметрическое семейство решений v , зависящих от начального значения v_{P_0} в заданной точке $P_0 \in \Gamma$. Мы можем применять серию преобразований Лапласа, каждый раз выбирая другое значение параметра. Тем самым легко получить длинные нетривиальные цепочки Лапласа. Они аналогичны цепочкам Дарбу, которые для одномерного непрерывного 1-мерного оператора Шрёдингера изучались Дж. Вейссом, А.Б. Шабатом и А.П. Веселовым в [10]–[12], при этом факторизация также зависела от параметра, задающего решения уравнения Риккати. Мы планируем в дальнейшем изучить соответствующие аналоги дискретных цепочек Тоды, используя последовательности цепочек Лапласа–Дарбу. Похоже, что эти системы будут существенно проще обсуждавшихся выше.

III. Правильная треугольная решетка. Рассматривается вещественный самосопряженный оператор L , действующий на функциях вершин правильной треугольной решетки с базисными сдвигами $T_1^{\pm 1}$, $T_2^{\pm 1}$, $(T_1^{-1}T_2)^{\pm 1}$ равной длины:

$$L = a(m, n) + \{b(m+1, n)T_1 + c(m, n+1)T_2 + d(m-1, n+1)T_1^{-1}T_2 + (\text{adjoint})\},$$

где $T_i^+ = T_i^{-1}$. Мы имеем правую и левую факторизации:

$$L = Q^+Q + W, \quad Q = (u + vT_1 + wT_2),$$

и

$$L = Q'^+Q' + W', \quad Q' = u' + v'T_1^{-1} + w'T_2^{-1}.$$

Данной решетке естественно отвечает триангуляция плоскости $\mathbb{R}^2$ с черно-белой раскраской, причем $Q = Q^b$ и $Q' = Q^w$ – см. рис. 5.

Коэффициенты b, c, d заданы на ребрах $R = PP', PP'', P'P''$, где $P = (m, n)$, $P' = (m + 1, n)$, $P'' = (m - 1, n + 1)$.

Указанная решетка является частным случаем триангулированного 2-мерного многообразия с черно-белой раскраской треугольников – см. раздел 1. При этом имеется естественный изоморфизм как множества черных треугольников, так и множества белых треугольников с множеством вершин (m, n) . Используя его, мы записываем Q^+ , Q и Q'^+ , Q' как операторы, отображающие пространства функций вершин решетки в себя. В данном случае преобразование Лапласа можно применять бесконечное число раз. Бесконечные цепочки преобразований Лапласа необходимы для построения дискретизаций 2-мерной системы Тоды.

В нашем случае отсутствует калибровочная свобода, поскольку преобразования $L \rightarrow f^{-1}Lf$, $\psi \rightarrow f^{-1}\psi$ разрушают самосопряженность оператора, а преобразования $L \rightarrow fLf$ разрушают потенциалы W, W' , где $L = Q^+Q + W = Q'^+Q' + W'$. Для построения дискретизации 2-мерной цепочки Тоды нужно рассматривать преобразования Лапласа, связанные со всеми факторизациями $L = Q_j^+Q_j + W_j$, отвечающими базисным сдвигам $T_{j,1}, T_{j,2}$, $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, где $T_{0,1} = T_1$, $T_{0,2} = T_2$ и остальные получаются из них поворотами на угол $2j\pi/6$. Базисные сдвиги с номерами j и $j + 3 \pmod{6}$ обратны друг к другу:

$$\begin{aligned} L = Q_j^+Q_j + \text{const} &\rightarrow \tilde{L}_j = Q_jQ_j^+ + \text{const} = \tilde{\psi}_j, \\ \psi &\rightarrow Q_j\psi = \tilde{\psi}_j. \end{aligned}$$

Для построения дискретизации 2-мерной цепочки Тоды можно пользоваться другой калибровкой на нулевом уровне энергии $L\psi = 0$:

$$L \rightarrow fLf, \quad \psi \rightarrow f^{-1}\psi,$$

фиксируемой условием $W = \text{const}$, где $\text{const} = 0$ или $\text{const} = 1$.

Преобразования Лапласа в этой калибровке приобретают вид

$$\begin{aligned} L = Q_j^+Q_j + \text{const} &\rightarrow \tilde{L}_j = Q_jQ_j^+ + \text{const}, \\ \psi &\rightarrow Q_j\psi = \tilde{\psi}_j. \end{aligned}$$

На каждом шаге мы осуществляем новую факторизацию и после этого калибровочным преобразованием заново приводим потенциал к константе. Полный набор преобразований Лапласа в этом случае может быть наилучшим образом организован с учетом соотношений между ними. В любом случае мы придем к некоторой дискретной системе типа цепочки Тоды на 3-мерной решетке в $\mathbb{R}^3$. Не производя вычислений, заметим, что похожая система известна с начала 1980-х (см. [17]). Мы называем ее “четырёхчленной системой Хироты–Мивы”. Представляется правдоподобным, что кроме нее мы здесь ничего не получим. Тем самым, вполне интегрируемые системы типа дискретной двумерной цепочки Тоды уже возникали в работах начала 1980-х в период интенсивного поиска новых вполне интегрируемых систем рядом научных групп.

Заметим следующее.

ТЕОРЕМА 3. *Черные и белые операторы $Q^b = Q_j = u_j + v_j T_{j1} + w_j T_{j2}$ и $Q^w = P_j = u'_j + v'_j T_{j1}^{-1} + w'_j T_{j2}^{-1}$, построенные выше, задают SL_2 -дискретную связность $\{Q^w, Q^b\}$, не зависящую от j .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко убедиться, что эта связность в точности совпадает со связностью, полученной из факторизации вещественных самосопряженных операторов в разделе 1 и выписанной в терминах трех различных пар операторов сдвига.

Согласно теореме 2, эта связность всегда класса SL_2 , поскольку соотношения для произведений коэффициентов черных и белых операторов немедленно следуют из того факта, что мы имеем две различных факторизации одного и того же оператора, как это было указано выше. Это завершает доказательство теоремы.

ВЫВОДЫ. *Каноническая SL_2 -связность, построенная по вещественному самосопряженному оператору на правильной треугольной решетке, аналогична магнитному члену оператора Шрёдингера в квантовой механике.*

Приложение 1. Дискретные SL_n -связности

Введем следующие обозначения. Рассмотрим $(n - 1)$ -мерную грань F , принадлежащую n -мерному симплексу T с вершинами $P_0, P_1, \dots, P_n$, $P_n \notin F$. Обозначим $A(T : F)$ произведение всех коэффициентов связности в вершинах F :

$$A(T : F) = \prod_{0 \leq i < n} u_{T:P_i}.$$

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. *Дискретная связность Q принадлежит классу $SL_n^\pm$ тогда и только тогда, когда калибровочным преобразованием $Q \rightarrow fQ$, где f – некоторая положительная функция на n -симплексах, ее можно отнормировать*

так, что для любой пары n -симплексов T', T'' , пересекающихся по грани максимальной размерности, $F = T' \cap T''$, $\dim F = n - 1$, имеет место равенство

$$A(T' : F) = A(T'' : F) = A(F). \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО практически дословно повторяет доказательство теоремы 1.

Предположим, что соотношение (3) имеет место для всех гиперграней. Рассмотрим толстый путь $\gamma = T_1 \dots T_m$, $T_m = T_0$, где $F_i = T_i \cap T_{i+1}$. Определитель матрицы перехода от пространства, связанного с гранью F_{i-1} , к пространству, связанному с гранью F_i , равен

$$\det M_i = -\frac{u_{T_i:P'}}{u_{T_i:P''}} = -\frac{\prod_{P \in F_{i-1}} u_{T_i:P}}{\prod_{P \in F_i} u_{T_i:P}} = -\frac{A(F_{i-1})}{A(F_i)},$$

где $P' \in F_{i-1}$, $P' \notin F_i$, $P'' \notin F_{i-1}$, $P'' \in F_i$. Для замкнутого толстого пути каждый из сомножителей $A(F_i)$ появляется один раз в числителе и один раз в знаменателе, что и означает унимодулярность матрицы монодромии.

Пусть теперь матрица монодромии унимодулярна вдоль любого толстого пути. Зафиксируем один из n -симплексов, который обозначим T_0 . Положим $f(T_0) = 1$. Рассмотрим произвольный толстый путь, начинающийся в T_0 и завершающийся в некотором симплексе T . Условие $A(T' : F) = A(T'' : F)$ однозначно фиксирует нормировку на всех n -симплексах этого пути. Рассмотрим замкнутый толстый путь, начинающийся и заканчивающийся в T_0 . Унимодулярность матрицы монодромии в точности означает, что при обходе по такому пути мы снова приходим к $f(T_0) = 1$, а следовательно, данная процедура самосогласована, что и завершает доказательство.

СЛЕДСТВИЕ. Полная классификация $SL_n^\pm$ -связностей такова: связность задается произвольной положительной вещественнозначной функцией на $(n - 1)$ -мерных гранях $A(\Delta) \in \mathbb{R}^+$ с калибровочной эквивалентностью

$$A(\Delta) \rightarrow \prod_{P_i \in \Delta} f(P_i) A(\Delta)$$

для любой функции от вершин.

ПРИМЕР. Для простейших триангуляций n -сфер как граней симплексов $S^n = \partial \Delta^{n+1}$ мы имеем $s_k = (n + 2)! / ((k + 1)! (n - k + 1)!)$ симплексов размерности k . Размерность пространства калибровочных классов $SL_n^\pm$ -связностей равна

$$s_{n-1} - s_0 = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2) - (n + 2) = \frac{1}{2}(n + 2)(n - 1).$$

Это число равно 2, 5, 9, 14 для $n = 2, 3, 4, 5$ и далее растет квадратично по n .

Ранее мы уже работали с каноническими связностями при построении дискретизации комплексного анализа для $n = 2$ (см. [3], [6]). Для всех $n \geq 2$ известно, что кривизна канонической связности в каждой точке равна нулю (т. е. тривиальна) тогда и только тогда, когда симплектическая звезда $\text{St}(\sigma^{n-2})$ любого $(n-2)$ -мерного симплекса содержит четное число вершин. Мы можем раскрасить n -симплексы в черный и белый цвета тогда и только тогда, когда любой замкнутый толстый путь содержит четное число n -симплексов. Группа голономии G – всегда подгруппа группы перестановок: $G \subset S_{n+1}$.

Для построения дискретного аналога комплексного анализа необходимо, чтобы каноническая связность была глобально плоской. В этом случае мы имеем черно-белую раскраску n -симплексов и n -мерное семейство ковариантных констант $Q\psi = 0$, $\psi \in \mathbb{R}^n$. В этом случае черный и белый операторы Q^b , Q^w корректно определены и оператор связности есть прямая сумма $Q = Q^b \oplus Q^w$. Ковариантная константа фиксируется заданием набора $n+1$ вещественного числа ψ_j на любом из n -симплексов с условием $\sum_j \psi_j = 0$. Для $n > 2$ аналог этой теории пока не построен.

Приложение 2. Электрические цепи и преобразования Лапласа

Рассмотрим некоторый граф Γ (т. е. одномерный симплициальный комплекс). Пусть Γ является 1-мерным остовом 2-мерного комплекса K такого, что:

- 1) каждое ребро графа Γ входит в границу ровно одного 2-мерного треугольника;
- 2) каждая вершина принадлежит по меньшей мере трем треугольникам.

Рассматривая наш граф как электрическую цепь, мы предполагаем, что каждому его ребру I приписано положительное число – **проводимость** $c(I) > 0$. **Сопротивление** ребра – величина, обратная к проводимости: $r(I) = 1/c(I)$. Если в каждой вершине графа задано напряжение $U(P)$, то через каждое ориентированное ребро $\hat{I} = P_0P_1$ графа протекает ток

$$J(P_0P_1) = c(I) \cdot (U(P_1) - U(P_0)) = (C\partial^*U)(P_0P_1), \quad U = U(P).$$

Ток J естественно рассматривать как одномерную цепь на графе. Назовем вершину графа **свободной**, если она не входит в границу ∂J этой цепи (точнее, входит с коэффициентом 0). Для напряжения на свободной вершине имеет место соотношение

$$U(P) = \frac{\sum_i U(P_i)c(PP_i)}{\sum_i c(PP_i)},$$

где P_i – все соседи точки P . Если все точки графа свободны, то напряжение $U(P)$ удовлетворяет линейному разностному уравнению второго порядка $LU = 0$. В общей ситуации образ $LU(P)$ есть **сумма токов**, протекающих через данную точку.

Рис. 9. Преобразование звезда-треугольник

Преобразование звезда-треугольник² для одного треугольника P_1, P_2, P_3 с проводимостями c_3 для P_2P_1 , c_1 для P_3P_2 и c_2 для P_1P_3 соответственно выглядит следующим образом (см. рис. 9): мы добавляем новую вершину T в центр треугольника T (будем считать его “черным треугольником”) и соединяем ее с вершинами P_1, P_2, P_3 новыми ребрами с проводимостями c'_1 для P_1T , c'_2 для P_2T и c'_3 для P_3T , где

$$c'_1(T) = \frac{c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3}{c_1}, \quad c'_2(T) = \frac{c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3}{c_2},$$

$$c'_3(T) = \frac{c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3}{c_3}.$$

Уберем из полученного графа все три ребра P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 нашего треугольника. Зададим напряжение на новом графе следующими условиями:

1) на всех вершинах, кроме новой вершины T , напряжение то же, что и раньше: $U' = U$;

2) сумма токов в вершине T равна 0.

Эти условия однозначно определяют напряжение на новой вершине T , и имеет место равенство $\partial J' = \partial J$.

Применяя **преобразование звезда-треугольник** ко всем двумерным (черным) симплексам T комплекса K по очереди, мы задаем преобразование на всем комплексе K . Оно порождает отображение пространства функций напряжений на старых вершинах $U(P)$ в пространство функций напряжений $U'(T)$ на новых вершинах. Поскольку имеет место взаимно однозначное соответствие между черными треугольниками и новыми вершинами, это отображение можно интерпретировать как отображение из пространства функций на вершинах в пространство функций на черных треугольниках.

²По-видимому, это преобразование было введено А. Э. Кеннелли [18] в 1899 г. для классических электрических цепей.

Напряжения $U(P)$ на исходном графе Γ с вершинами P_i в предположении, что все они свободны, удовлетворяет уравнению

$$LU = 0, \quad L = \partial C \partial^*, \quad C: I \rightarrow c_I I,$$

где I – ребра графа. Рассмотрим **оператор черных треугольников**

$$Q^b \psi(T) = \sum c'_i \psi(P_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

отображающий функции вершин в функции черных треугольников, введенный в работах авторов и И. А. Дынникова начиная с 1997 г.

ТЕОРЕМА 5. *Оператор $L = \partial C \partial^*$ может быть факторизован в чернотреугольной форме (Новикова–Дынникова)*

$$L = Q^+(C')^{-1}Q - W, \quad C': T \rightarrow \left(\sum_{i=1}^{i=3} c'_i(T) \right) T,$$

для всех черных треугольников T .

Доказательство легко получается прямой подстановкой. В работах С. П. Новикова и И. А. Дынникова (см. [8], [19]) использовалась факторизация $L = P^+P - V$, где $P = (\sqrt{(C')})^{-1}Q$ и P – чернотреугольный оператор, $\psi' = P\psi$. В нашем случае $\psi' = (C')^{-1}Q\psi$. Здесь мы работаем в калибровке $L\psi = 0$ для $\psi = \text{const}$. Используя калибровочную группу $L \rightarrow f(P)Lf(P)$, $\psi(P) \rightarrow f^{-1}(P)\psi(P)$, мы всегда можем записать преобразование в удобном нам специальном виде.

ТЕОРЕМА 6. *Оператор L' , действующий на функциях черных треугольников, получается из L преобразованием звезда-треугольник из теории электрических цепей. Он имеет вид*

$$L' = QW^{-1}Q^+ - C',$$

и из соотношения $LU = 0$ следует, что $L'U' = 0$, $U' = C'QU$. Тем самым, оператор L' получается из оператора L преобразованием Новикова–Дынникова типа Лапласа (записанного в специальной калибровке) для любого введенного выше комплекса K , состоящего из черных треугольников.

Данное приложение появилось после того, как информация о преобразованиях звезда-треугольник была сообщена авторам И. Г. Корепановым. И. Г. Корепанов и Р. М. Кашаев использовали его для построения решений уравнений типа Янга–Бакстера – см. [20], [21]. В результате дискуссии с Корепановым мы пришли к выводу, что это преобразование связано с преобразованиями типа Лапласа для дискретных систем на триангулированных структурах, развивавшимися в работах авторов начиная с 1990-х годов.

Приложение 3. Симплектические свойства операторов на графах

В 1970 г. один из авторов этой работы (С. П. Новиков) опубликовал работы [22], [23], посвященные применению симплектических идей (т. е. “гамильтонова формализма”) в дифференциальной топологии и связанной с ней алгебраической K -теории. Эти идеи не были подхвачены тогда достаточно широким сообществом – топологи их переизложили на абстрактном языке, забывающем общематематические идеи. Этот раздел топологии в 1970-х годах стал дрейфовать в сторону изоляции и хоронить идеи в глубоко замурованных гробницах.

Однако с этими идеями познакомился И. М. Гельфанд, и они ему понравились. Он сделал важное наблюдение, которое и сообщил Новикову в 1971 г. Оказывается, фон-неймановская теория расширений самосопряженных операторов, согласно Гельфанду, является по существу разделом симплектической алгебры, где ведущую роль играют лагранжевы подпространства в симплектическом линейном пространстве. Этот язык не был известен в 1930-х годах, он возник только в 1960-х. Все излагалось только на языке эрмитовых операторов.

Эти наблюдения Новикову удалось использовать только много лет спустя, начиная с работы [24] 1997 г. Приведем здесь некоторые из этих идей.

Рассмотрим граф Γ – возможно бесконечный, но такой, что в каждой вершине сходится лишь конечное число ребер. Зададим вещественный самосопряженный оператор конечного порядка

$$L\psi_P = \sum_{P'} b_{P:P'} \psi_{P'},$$

где расстояние между P и P' ограничено: $d(P, P') \leq k$. Расстояние между вершинами определяется как минимальное число ребер, соединяющих их пути. Самосопряженность (симметрия) оператора содержится в условии $\bar{b}_{P:P'} = b_{P':P}$, т. е. их равенстве в вещественном случае. Порядок оператора есть по определению $2k$.

Зафиксируем простой кратчайший ориентированный путь

$$\gamma(PP') = -\gamma(P'P),$$

соединяющий вершины P, P' . Для любой пары решений

$$L\psi = \lambda\psi, \quad L\phi = \lambda\phi$$

мы определяем их **симплектический вронскиан**

$$\langle \psi, \phi \rangle = \sum_{P, P'} b_{P:P'} [\gamma(PP')] (\psi_P \phi_{P'} - \phi_P \psi_{P'}).$$

Это 1-цепь. Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7. *Симплектический вронскиан $\langle \psi, \phi \rangle = -\langle \phi, \psi \rangle$ является билинейной формой на пространстве решений уравнения $L\psi = \lambda\psi$ со значениями в открытых 1-гомологиях*

$$0 = \partial\langle \psi, \phi \rangle, \quad \langle \psi, \phi \rangle \in H_1^{\text{open}}(\Gamma, \mathbb{R}).$$

В работах, предшествовавших работе 1997 г. [24], эта величина не появлялась и симплектические свойства не обсуждались.

По существу, это условие означает, что для тока $J = \langle \Psi, \Psi^- \rangle / (2i)$ в заряженном (т.е. комплексном) квантовом состоянии $\Psi = \psi + i\phi$ на графе выполнен закон Кирхгофа без какого-либо отвода тока в другие неконтролируемые направления. Квантовая система в чистом состоянии, описываемая ψ -функцией, всегда замкнута и консервативна. Через вершины ток, порожденный чистым квантовым состоянием, не идет: система замкнута. Сравнивая с приложением 2, мы видим, что там описывалось принципиально неквантовое состояние, исключая случай $L\psi = 0$. В квантовой системе всегда вершины как бы свободно “висят в воздухе”.

Для графов с набором концов, уходящих в бесконечность, определяется понятие рассеяния. Если оператор имеет порядок 2 (т.е. $k = 1$) и коэффициенты тривиализуются на бесконечности (т.е. $b_{P:P'} = 1$, $b_{P:P} = -2$ для вершин ребра), то поведение на бесконечности при данном λ определяется лагранжевым подпространством половинной размерности $S \subset H_\infty$ в симплектическом пространстве, состоящим из всех решений, определенных около бесконечности: подпространство S состоит из всех решений, продолжаемых на весь граф. Оно оказывается лагранжевым, как следует из свойств симплектического вронскиана.

Зона рассеяния в квантовой теории отвечает (вещественным) энергиям λ таким, что базис решений на бесконечности комплексно сопряжен и унитарен. Матрица рассеяния A оказывается симметричной и унитарной. С точки зрения симплектической алгебры это просто физический способ параметризации лагранжевых подпространств. Действительно, мы можем представить такую матрицу в виде $A = BB^t$, где B унитарна. Для $O \subset O_n$ мы имеем

$$A = BB^t = BOO^tB^t,$$

так как $OO^t = 1$. Поэтому симметричные унитарные матрицы A параметризуются классами $B \in U_n/O_n$, $B \in S$. Это и есть многообразие лагранжевых подпространств половинной размерности.

Эти идеи развивались в работах С. П. Новикова, А. С. Шварца, Р. Шрадера и В. Кострыкина [24]–[29]. В непрерывном случае лагранжевы подпространства берутся в каждой вершине, определяя условие сшивки. Для нелинейных уравнений на графах в работе С. П. Новикова и А. С. Шварца [27] определен аналог симплектического вронскиана, который является замкнутой 2-формой

на многообразии решений нелинейного уравнения Эйлера–Лагранжа на графе со значениями в $H_1^{\text{open}}(\Gamma, \mathbb{R})$.

Список литературы

- [1] С. П. Новиков, “Дискретные связности и разностные линейные уравнения”, *Геометрическая топология и теория множеств*, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения профессора Людмилы Всеволодовны Келдыш, Тр. МИАН, **247**, Наука, М., 2004, 186–201; англ. пер.: S. P. Novikov, “Discrete connections and difference linear equations”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **247** (2004), 168–183, arXiv: math-ph/0303035.
- [2] Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, “Уравнение Шрёдингера в периодическом поле и римановы поверхности”, *Докл. АН СССР*, **229**:1 (1976), 15–18; англ. пер.: B. A. Dubrovin, I. M. Krichever, S. P. Novikov, “The Schrödinger equation in a periodic field and Riemann surfaces”, *Soviet Math. Dokl.*, **17** (1977), 947–951.
- [3] I. A. Dynnikov, S. P. Novikov, “Geometry of the triangle equation on two-manifolds”, *Mosc. Math. J.*, **3**:2 (2003), 419–438.
- [4] S. P. Novikov, *New discretization of complex analysis: the Euclidean and hyperbolic planes*, arXiv: 0809.2963.
- [5] S. P. Novikov, “Four lectures on discrete systems”, *Symmetries and integrability of difference equations* (Montreal, QC, June 8–21, 2008), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **381**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2011, 191–206.
- [6] П. Г. Гриневич, Р. Г. Новиков, “Ядро Коши для DN-дискретного комплексного анализа Новикова–Дынникова на треугольной решетке”, *УМН*, **62**:4(376) (2007), 155–156; англ. пер.: P. G. Grinevich, R. G. Novikov, “The Cauchy kernel for the Novikov–Dynnikov DN-discrete complex analysis in triangular lattices”, *Russian Math. Surveys*, **62**:4 (2007), 799–801.
- [7] С. П. Новиков, “Алгебраические свойства двумерных разностных операторов”, *УМН*, **52**:1(313) (1997), 225–226; англ. пер.: S. P. Novikov, “Algebraic properties of two-dimensional difference operators”, *Russian Math. Surveys*, **52**:1 (1997), 226–227.
- [8] С. П. Новиков, И. А. Дынников, “Дискретные спектральные симметрии маломерных дифференциальных операторов и разностных операторов на правильных решетках и двумерных многообразиях”, *УМН*, **52**:5(317) (1997), 175–234; англ. пер.: S. P. Novikov, I. A. Dynnikov, “Discrete spectral symmetries of low-dimensional differential operators and difference operators on regular lattices and two-dimensional manifolds”, *Russian Math. Surveys*, **52**:5 (1997), 1057–1116.
- [9] S. P. Novikov, A. Veselov, “Exactly solvable two-dimensional Schrödinger operators and Laplace transformations”, Appendix 1 (by S. P. Novikov): Difference analogs of the Laplace transformations, Appendix 2 (by S. P. Novikov, I. A. Taĭmanov): Difference analogs of harmonic oscillator, *Solitons, geometry, and topology: on the crossroad*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **179**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 109–132.
- [10] J. Weiss, “Periodic fixed points of Bäcklund transformations and the Korteweg–de Vries equation”, *J. Math. Phys.*, **27**:11 (1986), 2647–2656.
- [11] А. Б. Шабат, “К теории преобразований Лапласа–Дарбу”, *ТМФ*, **103**:1 (1995), 170–175; англ. пер.: A. B. Shabat, “On the theory of Laplace–Darboux transformations”, *Theoret. and Math. Phys.*, **103**:1 (1995), 482–485.
- [12] А. П. Веселов, А. Б. Шабат, “Одевающая цепочка и спектральная теория оператора Шрёдингера”, *Функц. анализ и его прил.*, **27**:2 (1993), 1–21; англ.

- пер.: A. P. Veselov, A. B. Shabat, “Dressing chains and the spectral theory of the Schrödinger operator”, *Funct. Anal. Appl.*, **27**:2 (1993), 81–96.
- [13] V. Spiridonov, L. Vinet, A. Zhedanov, “Difference Schrödinger operators with linear and exponential discrete spectra”, *Lett. Math. Phys.*, **29**:1 (1993), 63–73.
- [14] A. Doliwa, “Geometric discretization of the Toda system”, *Phys. Lett. A*, **234**:3 (1997), 187–192.
- [15] A. Doliwa, “Lattice geometry of the Hirota equation”, *SIDE III – Symmetries and integrability of difference equations* (Sabaudia, Italy, May 16–22, 1998), CRM Proc. Lecture Notes, **25**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 93–100.
- [16] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, “Трехвалентные графы и солитоны”, *УМН*, **54**:6(330) (1999), 149–150; англ. пер.: I. M. Krichever, S. P. Novikov, “Trivalent graphs and solitons”, *Russian Math. Surveys*, **54**:6 (1999), 1248–1249.
- [17] T. Miwa, “On Hirota’s difference equations”, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **58**:1 (1982), 9–12.
- [18] A. E. Kennelly, “The equivalence of triangles and three-pointed stars in conducting networks”, *Electrical World and Engineer*, **34**:12 (1899), 413–414.
- [19] И. А. Дынников, С. П. Новиков, “Преобразования Лапласа и симплициальные связности”, *УМН*, **52**:6(318) (1997), 157–158; англ. пер.: I. A. Dynnikov, S. P. Novikov, “Laplace transforms and simplicial connections”, *Russian Math. Surveys*, **52**:6 (1997), 1294–1295.
- [20] R. M. Kashaev, “On discrete three-dimensional equations associated with the local Yang–Baxter relation”, *Lett. Math. Phys.*, **38**:4 (1996), 389–397.
- [21] I. G. Korepanov, “A dynamical system connected with an inhomogeneous 6-vertex model”, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика*. 14, Зап. науч. сем. ПОМИ, **215**, ПОМИ, СПб., 1994, 178–196; *J. Math. Sci. (New York)*, **85**:1 (1997), 1671–1683.
- [22] С. П. Новиков, “Алгебраическое построение и свойства эрмитовых аналогов K -теории над кольцами с инволюцией с точки зрения гамильтонова формализма. Некоторые применения к дифференциальной топологии и теории характеристических классов. I”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **34**:2 (1970), 253–288; англ. пер.: S. P. Novikov, “Algebraic construction and properties of hermitian analogs of K -theory over rings with involutions from the viewpoint of hamiltonian formalism. Applications to differential topology and the theory of characteristic classes. I”, *Math. USSR-Izv.*, **4**:2 (1970), 257–292.
- [23] С. П. Новиков, “Алгебраическое построение и свойства эрмитовых аналогов K -теории над кольцами с инволюцией с точки зрения гамильтонова формализма. Некоторые применения к дифференциальной топологии и теории характеристических классов. II”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **34**:3 (1970), 475–500; англ. пер.: S. P. Novikov, “Algebraic construction and properties of hermitian analogs of K -theory over rings with involutions from the viewpoint of hamiltonian formalism. Applications to differential topology and the theory of characteristic classes. II”, *Math. USSR-Izv.*, **4**:3 (1970), 479–505.
- [24] С. П. Новиков, “Оператор Шрёдингера на графах и топология”, *УМН*, **52**:6(318) (1997), 177–178; англ. пер.: S. P. Novikov, “The Schrödinger operator on graphs and topology”, *Russian Math. Surveys*, **52**:6 (1997), 1320–1321.
- [25] S. P. Novikov, “Discrete Schrödinger operators and topology”, *Asian J. Math.*, **2**:4 (1998), 921–933.

- [26] S. P. Novikov, “Schrödinger operators on graphs and symplectic geometry”, *The Arnoldfest. Proceedings of a conference in honour of V. I. Arnold for his 60th birthday* (Toronto, ON, June 15–21, 1997), Fields Inst. Commun., **24**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 397–413.
- [27] С. П. Новиков, А. С. Шварц, “Дискретные лагранжевы системы на графах. Симплекто-топологические свойства”, *УМН*, **54**:1(325) (1999), 257–258; англ. пер.: S. P. Novikov, A. S. Shvarts, “Discrete Lagrangian systems on graphs. Symplectic-topological properties”, *Russian Math. Surveys*, **54**:1 (1999), 258–259.
- [28] V. Kostrykin, R. Schrader, “Kirchhoff’s rule for quantum wires”, *J. Phys. A*, **32**:4 (1999), 595–630.
- [29] V. Kostrykin, R. Schrader, “Kirchhoff’s rule for quantum wires. II. The inverse problem with possible applications to quantum computers”, *Fortschr. Phys.*, **48**:8 (2000), 703–716.

П. Г. Гриневич (P. G. Grinevich)

Институт теоретической физики

им. Л. Д. Ландау РАН

E-mail: pgg@landau.ac.ru

Поступила в редакцию

04.09.2013

С. П. Новиков (S. P. Novikov)

Институт теоретической физики

им. Л. Д. Ландау РАН;

Institute for Physical Sciences and Technology,

University of Maryland at College Park, USA

E-mail: novikov@ipst.umd.edu