Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Штогрин, Изгибаемый диск с ручкой, *УМН*, 2013, том 68, выпуск 5, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9555>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 11:09:18

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Изгибаемый диск с ручкой

М. И. Штогрин

В 1976 г. Р. Коннелли построил изгибаемое погружение [1], а в 1977 г. — вложение [2] полиэдральной сферы в $\mathbb{R}^3$, подробно описанное в [3]. Там (см. [3; замечание 5]) оно было перенесено со сферы на замкнутую ориентируемую поверхность произвольного рода. Однако при изгибании этой поверхности активным был лишь некоторый ее участок, гомеоморфный диску, а все ее ручки оставались *пассивными*.

Ниже построено вложение в $\mathbb{R}^3$ изгибаемой замкнутой ориентируемой полиэдральной поверхности произвольного рода, каждая ручка которой является *активной*.

В 1995 г. В. А. Александров построил [4] изгибаемый тор (см. рис. 1 ниже и [5]). Тор (*рама*, см. [4]) не вложен и не погружен в $\mathbb{R}^3$. Он имеет две седловые вершины.

Тор перестроим в изгибаемую ручку. Ее пристроим к изгибаемой поверхности.

Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

С помощью гомотетии с центром в одной из седловых вершин тора и коэффициентом $k > 1$ увеличим сходящиеся в этой вершине 4 параллелограмма. Удалим внутренности исходных 4 параллелограммов, внутренности 4 ребер, по которым они смежны, и их общую вершину. Вместо 4 удаленных параллелограммов получим 4 невыпуклых 6-угольника. Они вместе с оставшимися 12 параллелограммами тора составляют диск с ручкой (см. рис. 2). Он вложен в $\mathbb{R}^3$ и изгибаем.

Ручка имеет седловую вершину (вторую из имевшихся у тора). В ней сходятся 4 параллелограмма. Построим достаточно малую ее окрестность из 4 гомотетичных им параллелограммов. Назовем ее *седлом*. Заменяем это седло на диск с ручкой, подобный изображенному на рис. 2. Получим диск с двумя ручками. Он вложен

Работа выполнена при поддержке Правительства РФ (дог. 11.G34.31.0053), программы «Ведущие научные школы» (грант НШ-4995.2012.1) и РФФИ (грант № 11-01-00633-а).

DOI: 10.4213/rm9555

в $\mathbb{R}^3$, так как заменяемое на ручку седло выбрано достаточно малым. Новая ручка также имеет седловую вершину, и ее достаточно малую окрестность из четырех параллелограммов (новое седло) опять можно заменить на диск с ручкой, подобный изображенному на рис. 2. Через конечное число шагов получится вложенный изгибаемый полиэдральный диск с произвольным числом ручек.

ТЕОРЕМА. (i) *Существует вложенный в $\mathbb{R}^3$ изгибаемый полиэдральный диск с произвольным числом ручек, все ручки и двугранные углы которого активны.*

(ii) *Существует изометрически отображенный в $\mathbb{R}^3$ изгибаемый полиэдральный тор с любым числом ручек, все ручки и двугранные углы которого активны.*

В обоих случаях для полиэдральных поверхностей взяты не триангуляции. Тут, как это принято, тор – сфера с ручкой, крендель – сфера с двумя ручками, В случае (ii) тор с ручками имеет 4 вершины, окрестности которых являются зонтиками Уитни, значит, это отображение не есть ни вложение, ни погружение.

Напомним, что для устранения пересечения двух ребер погруженной изгибаемой полиэдральной поверхности в окрестности точки пересечения этих ребер было построено углубление в одном из двугранных углов (см. рис. 5 в [3] или рис. 3) и в итоге получено вложение полиэдральной поверхности (гомеоморфной сфере).

Здесь A, B, C, A', B', C' суть вершины октаэдра Брикара с осью 2-го порядка. Вершины A', B', C лежат в плоскости α ; вершины A', B', C' лежат в β . В 4-угольнике $ABA'B'$ с равными противоположными сторонами отсутствует сторона $A'B'$.

Возьмем вложение изгибаемой сферы [2], [3]. Ребро активного двугранного угла разделим на куски. Для каждого куска построим свою седловую вершину A' (см. рис. 3). Пусть седло в вершине A' , как и октаэдр Брикара, имеет симметрию $C_{2\nu} = tm2$ (что легко достигается). Тогда седло, состоящее из 4 равных параллелограммов, является частью тора (см. рис. 1). Заменяем седло на дополнение к тору. Получим ручку.

ТЕОРЕМА. *Существует вложенная в $\mathbb{R}^3$ изгибаемая замкнутая ориентируемая полиэдральная поверхность произвольного рода, все ручки которой активны.*

Изгибаемый диск с ручкой (см. рис. 2) получен из изгибаемого тора (см. рис. 1) заменой 4 параллелограммов, входящих в седло, на их продолжения – 4 невыпуклых 6-угольника. Углубление в окрестности точки, расположенной на ребре двугранного угла, получено аналогично – заменой двух смежных треугольников, пересекающихся с двумя другими смежными треугольниками октаэдра Брикара, на их продолжения в своих плоскостях, т. е. на 2 невыпуклых 6-угольника (см. рис. 3).

Край диска с ручкой на рис. 2 можно сделать 4-угольным, заменив все 6-угольники на 5-угольники. Если он конгруэнтен краю диска, изображенного на рис. 3, то отождествим оба края. В результате диск с ручкой и диск объединятся в погруженный тор, который неизгибаем.

Список литературы

- [1] R. Connelly, *Indiana Univ. Math. J.*, **25**:10 (1976), 965–972. [2] R. Connelly, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **47**:1 (1977), 333–338. [3] Н. Х. Кёйпер, *Исследования по метрической теории поверхностей*, Новое в зарубежной науке. Математика, **18**, ред. А. Н. Колмогоров, С. П. Новиков, Мир, М., 1980, 210–227. [4] В. А. Александров, *Сиб. матем. журн.*, **36**:6 (1995), 1215–1224. [5] М. И. Штогрин, *Классическая и современная математика в поле деятельности Бориса Николаевича Делоне*, Тр. МИАН, **275**, МАИК, М., 2011, 144–166.

М. И. Штогрин (M. I. Shtogrin)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: stogrin@mi.ras.ru

Представлено С. П. Новиковым
Принято редколлегией
20.07.2013