Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Павлов, О. В. Назарько, Обобщение теоремы Дуба
о свободном выборе для деформированных субмартин-
галов, *УМН*, 2013, том 68, выпуск 6, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9560>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 11:41:06

Обобщение теоремы Дуба о свободном выборе для деформированных субмартингалов

И. В. Павлов, О. В. Назарько

Данная работа посвящена развитию теории преобразования свободного выбора в случае дискретного времени (см., например, [1]) на структуре, значительно более общей, чем классический стохастический базис. Эта структура названа авторами деформированным стохастическим базисом и представляет собой фильтрованное пространство вместе с некоторым семейством вероятностей.

Пусть $(\Omega, \mathbf{F})$ – фильтрованное пространство с дискретным временем, где Ω – произвольное множество, а $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ – возрастающая последовательность σ -алгебр на нем (фильтрация). Семейство $\mathbf{Q} = (Q^{(n)}, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ вероятностных мер $Q^{(n)}$, определенных на $\mathcal{F}_n$, будем называть деформацией (выбор такого термина подробно аргументирован в [2]). Назовем $\mathbf{Q}$ деформацией 1-го рода (D1), если при всех $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ выполняются соотношения абсолютной непрерывности $Q^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n} \ll Q^{(n)}$, и деформацией 2-го рода (D2), если выполняются соотношения $Q^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n} \gg Q^{(n)}$.

Предположим, что при всех $n \in \mathbb{N}$ случайные величины (с. в.) Z_n принадлежат пространствам $L_p(\Omega, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})$. Если $\mathbf{Q}$ есть D1 (соответственно D2), то процесс $\mathbf{Z} = (Z_n, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})_{n=0}^\infty$ назовем деформированным субмартингалом 1-го рода – DSubM1 (соответственно 2-го рода – DSubM2) при выполнении $Q^{(n+1)}$ -п. н. (соответственно $Q^{(n)}$ -п. н.) неравенств $Z_n \leq E^{Q^{(n+1)}}[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n]$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Аналогично определяются деформированные супермартингалы и мартингалы 1-го и 2-го рода (DSupM1, DSupM2, DM1, DM2).

Пусть $\tau: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ – конечный момент остановки (м. о.) относительно фильтрации $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ (в данной работе мы будем рассматривать только такие м. о.). Пусть также $\mathbf{Q}$ – произвольная деформация. Для любого $A \in \mathcal{F}_\tau$ обозначим $Q^{(\tau)}(A) = \sum_{i=0}^\infty Q^{(i)}(A\{\tau = i\})$. Ясно, что $Q^{(\tau)}$ – неотрицательная σ -конечная мера, совпадающая на $\{\tau = n\}$ при любом $n \in \mathbb{N}$ с мерой $Q^{(n)}$. Если м. о. τ принимает лишь конечное число значений, то мера $Q^{(\tau)}$ ограничена. В дальнейшем, если интеграл по мере $Q^{(\tau)}$ от $\mathcal{F}_\tau$ -измеримой с. в. f определен, то он обозначается $E^{(\tau)}(f) = E^{Q^{(\tau)}}(f)$.

Следующие технические результаты, используемые в доказательствах основных теорем данной работы, представляют и самостоятельный интерес.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть м. о. τ и ν таковы, что $0 \leq \nu - \tau \leq 1$, с. в. f измерима относительно $\mathcal{F}_\nu$ и либо $f \geq 0$ $Q^{(\nu)}$ -п. в., либо $f \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_\nu, Q^{(\nu)})$. Тогда $Q^{(\nu)}$ -п. в. справедливо равенство

$$E^{(\nu)}[f | \mathcal{F}_\tau] = \sum_{k=0}^\infty f I_{\{\tau=k\}} I_{\{\nu=k\}} + \sum_{k=0}^\infty E^{(k+1)}[f I_{\{\nu=k+1\}} | \mathcal{F}_k] I_{\{\tau=k\}} I_{\{\nu=k+1\}}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть м. о. τ и ν таковы, что $0 \leq \nu - \tau \leq N < \infty$. Если $\mathbf{Q}$ есть D1, то $Q^{(\nu)}|_{\mathcal{F}_\tau} \ll Q^{(\tau)}$. Если $\mathbf{Q}$ есть D2, то $Q^{(\tau)} \ll Q^{(\nu)}|_{\mathcal{F}_\tau}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть м. о. τ ограничен, а $\mathbf{Q}$ есть D1 или D2. Тогда $Q^{(\tau)}(\Omega) > 0$.

Отметим, что если м. о. τ неограничен, то легко конструируются примеры деформаций 1-го и 2-го рода, для которых $Q^{(\tau)}(\Omega) = 0$.

С помощью предложений 1 и 2 доказывается следующая теорема, неутрачиваемая для D1 и обобщаемая в дальнейшем для D2.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-00637-а).

DOI: 10.4213/rm9560

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(Z_n, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})_{n=0}^\infty$ есть DSubM, м.о. τ и ν таковы, что $0 \leq \nu - \tau \leq 1$ и $Z_\nu \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_\nu, Q^{(\nu)})$. Если Q есть D1, то $E^{(\nu)}[Z_\nu | \mathcal{F}_\tau] \geq Z_\tau$ $Q^{(\nu)}$ -п. в. Если Q есть D2, то $E^{(\nu)}[Z_\nu | \mathcal{F}_\tau] \geq Z_\tau$ $Q^{(\tau)}$ -п. в.

Для деформации 2-го рода Q введем процесс плотностей $(h^{(n)}, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ формулой $dQ^{(n)} = h^{(n)} dQ^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n}$. Будем говорить, что деформация Q ограничена (BD2), если $\|h^{(n)}\|_{L_\infty(\Omega, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})} < \infty$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Равномерная ограниченность (UBD2) определяется неравенством $\sup_n \|h^{(n)}\|_{L_\infty(\Omega, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})} < \infty$.

Пусть $0 \leq \nu - \tau \leq 1$. Рассмотрим операторы $E_\tau^{(\nu)} f := E^{(\nu)}[f | \mathcal{F}_\tau]$. Нетрудно доказать, что если Q есть D2, то $E_\tau^{(\nu)}: L_\infty(\Omega, \mathcal{F}_\nu, Q^{(\nu)}) \rightarrow L_\infty(\Omega, \mathcal{F}_\tau, Q^{(\tau)})$ – ограниченный линейный оператор с нормой 1, и если Q есть UBD2, то $E_\tau^{(\nu)}: L_p(\Omega, \mathcal{F}_\nu, Q^{(\nu)}) \rightarrow L_p(\Omega, \mathcal{F}_\tau, Q^{(\tau)})$ – ограниченный линейный оператор для любого $1 \leq p < \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть Q есть D2 и $\tau \leq \nu$ – два м.о., удовлетворяющие условию $0 \leq \nu - \tau \leq N < \infty$. Образует следующую последовательность м.о. $\{\tau_k\}_{k=0}^K$:

$$\tau = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_K = \nu, \quad 0 \leq \tau_{k+1} - \tau_k \leq 1, \quad k = 0, 1, \dots, K-1$$

(например, можно положить $\tau_k = \nu \wedge (\tau + k)$, $k = 0, 1, \dots, N$). Если f – $\mathcal{F}_\nu$ -измеримая с.в. такая, что $f \geq 0$ $Q^{(\nu)}$ -п. в., то определим оператор $E_\tau^{(\nu)} f = E_{\tau_0}^{(\tau_1)} E_{\tau_1}^{(\tau_2)} \dots E_{\tau_{K-1}}^{(\tau_K)} f$.

ТЕОРЕМА 2. В условиях определения 1 $Q^{(\tau)}$ -п. в. справедлива формула (обосновывающая корректность определения $E_\tau^{(\nu)}$): $E_\tau^{(\nu)} f = \sum_{k=0}^\infty I_{\{\tau=k\}} \sum_{i=0}^\infty E_k^{(k+i)}(f I_{\{\nu=k+i\}})$.

ТЕОРЕМА 3 (обобщение теоремы Дуба о преобразовании свободного выбора). Предположим, что Q есть UBD2, $Z = (Z_n, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})_{n=0}^\infty$ есть DSubM, $0 \leq \nu - \tau \leq N < \infty$ и $Z_\nu \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_\nu, Q^{(\nu)})$. Справедливо неравенство

$$E_\tau^{(\nu)} Z_\nu \geq Z_\tau \quad Q^{(\tau)}\text{-п. в.}$$

Теоремы 1 и 3 с очевидными видоизменениями справедливы для деформированных супермартингалов и мартингалов.

СЛЕДСТВИЕ 1. Теорема о преобразовании свободного выбора справедлива, если Q есть BD2 в случае, когда м.о. ν принимает конечное число значений.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть P – вероятностная мера, определенная на $\mathcal{F}_\infty$ – наименьшей σ -алгебре, содержащей все $\mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbb{N}$), а $Q^{(n)} = P|_{\mathcal{F}_n}$. Тогда следствие 1 совпадает с классической теоремой о преобразовании свободного выбора для ограниченных м.о. Что касается основной теоремы 3, то для классического стохастического базиса $(\Omega, \mathbf{F}, \mathcal{F}_\infty, P)$ при условиях $0 \leq \nu - \tau \leq N < \infty$ и $Z_\nu \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_\nu, P)$ получаем выполнение P -п. н. неравенства $E(Z_\nu | \mathcal{F}_\tau) \geq Z_\tau$. Возможно, такое достаточное условие является новым.

Список литературы

- [1] А. Н. Ширяев, *О мартингалных методах в задачах о пересечении границ броуновским движением*, Совр. пробл. матем., 8, МИАН, М., 2007, 80 с. [2] О. В. Назарько, И. В. Павлов, *Вестн. Ростов. гос. ун-та путей сообщения*, 2012, №1(45), 200–208.

И. В. Павлов (I. V. Pavlov)

Ростовский государственный строительный университет

E-mail: pavloviv2005@mail.ru

Представлено Д. В. Трещёвым

Принято редколлегией

05.10.2013

О. В. Назарько (O. V. Nazarko)

Ростовский государственный строительный университет

E-mail: pavloviv2005@mail.ru