Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. А. Люлько, О распределении максимума скошенного броуновского движения и скошенного случайного блуждания на некоторых случайных отрезках времени, *УМН*, 2013, том 68, выпуск 6, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9561>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 17:50:58

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

**О распределении максимума скошенного броуновского движения
и скошенного случайного блуждания
на некоторых случайных отрезках времени**

Я. А. Люлько

1. На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ рассмотрим скошенное броуновское движение $W^\alpha = (W_t^\alpha)_{t \geq 0}$ и его дискретный аналог $S^\alpha = (S_k^\alpha)_{k \geq 0}$ — скошенное случайное блуждание. Параметр α принимает значения из отрезка $[0, 1]$. Чтобы не повторять одни и те же определения, введем единый процесс $X^\alpha = (X_t^\alpha)_{t \geq 0}$ следующим образом: $X_t^\alpha = W_t^\alpha$ при $t \in [0, \infty)$ (непрерывное время) и $X_t^\alpha = S_t^\alpha$ при $t = 0, 1, \dots$ (дискретное время).

Напомним, что согласно [1] скошенное броуновское движение W^α определяется следующим образом. Обозначим $Z = \{t \geq 0: B_t = 0\}$ — множество нулей стандартного броуновского движения $B = (B_t)_{t \geq 0}$. Это множество замкнуто и определяется траекторией $B(\omega)$. Тогда $\mathbb{R}_+ \setminus Z$ может быть представлено в виде объединения счетного числа непересекающихся интервалов $J_n = (l_n, r_n)$, $n \in \mathbb{N}$, т. е. $\mathbb{R}_+ \setminus Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$. Введем последовательность независимых бернуллиевских случайных величин $\{e_n\}_{n \geq 1}$ таких, что $P(e_n = 1) = \alpha$, $P(e_n = -1) = 1 - \alpha$. При этом каждая случайная величина e_n не зависит от броуновского движения B . Тогда скошенное броуновское движение определяется как такой процесс $(W_t^\alpha)_{t \geq 0}$, что

$$W_t^\alpha = e_n |B_t|, \quad \text{если } t \in J_n. \quad (1)$$

Вероятностные свойства процесса W^α наиболее полно отражены в работе [2]. В [3] введено скошенное случайное блуждание S^α как дискретный аналог скошенного броуновского движения.

2. Пусть θ — случайная величина, не зависящая от X^α . В непрерывном случае $P(\theta \in dx) = (\lambda^2/2)e^{-\lambda^2 x/2} dx$, $x \geq 0$; в дискретном случае $P(\theta = k) = (1 - q)q^k$, $k = 0, 1, \dots$. Рассмотрим следующие моменты: $g_t = \sup\{s < t: W_s^\alpha = 0\}$, $d_t = \inf\{s > t: W_s^\alpha = 0\}$, $t > 0$.

Любые два момента времени a, b ($a \leq b$) из множества $\{0, g_\theta, \theta, d_\theta\}$ определяют случайный отрезок $\Delta = [a, b]$. Нас будут интересовать распределения функционалов вида $\sup_{t \in \Delta} X_t^\alpha$. При всех возможных значениях a и b получим шесть различных функционалов: 1) $\sup_{0 \leq t \leq \theta} X_t^\alpha$, 2) $\sup_{0 \leq t \leq g_\theta} X_t^\alpha$, 3) $\sup_{g_\theta \leq t \leq \theta} X_t^\alpha$, 4) $\sup_{\theta \leq t \leq d_\theta} X_t^\alpha$, 5) $\sup_{0 \leq t \leq d_\theta} X_t^\alpha$, 6) $\sup_{g_\theta \leq t \leq d_\theta} X_t^\alpha$.

Работа выполнена при поддержке Международной лаборатории количественных финансов НИУ “ВШЭ” (грант Правительства РФ, дог. 14.А12.31.0007) и ФЦП “Кадры” (грант № 8226).

DOI: 10.4213/rm9561

Заметим, что аналогичные функционалы рассматривались в работе [4]. При этом вместо W^α ведущим процессом служил модуль стандартного броуновского движения $(|B_t|)_{t \geq 0}$. Этот случай соответствует значению параметра $\alpha = 1$.

3. Основные результаты настоящей работы состоят в следующем.

ТЕОРЕМА 1. В случае непрерывного времени распределения функционалов $F(\theta, W^\alpha) = \sup_{t \in \Delta} W_t^\alpha$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} 1) \ P\left(\sup_{0 \leq t \leq \theta} W_t^\alpha \geq A\right) &= \frac{2\alpha e^{-\lambda A}}{1 + (2\alpha - 1)e^{-2\lambda A}}; & 2) \ P\left(\sup_{0 \leq t \leq g_\theta} W_t^\alpha \geq A\right) &= \frac{2\alpha e^{-2\lambda A}}{1 + (2\alpha - 1)e^{-2\lambda A}}; \\ 3) \ P\left(\sup_{g_\theta \leq t \leq \theta} W_t^\alpha \geq A\right) &= \alpha \left(1 - \tanh \frac{\lambda A}{2}\right); & 4) \ P\left(\sup_{\theta \leq t \leq d_\theta} W_t^\alpha \geq A\right) &= \frac{\alpha}{\lambda A} (1 - e^{-\lambda A}); \\ 5) \ P\left(\sup_{0 \leq t \leq d_\theta} W_t^\alpha \geq A\right) &= \frac{\alpha}{\lambda A} \frac{1 - e^{-2\lambda A}}{1 + (2\alpha - 1)e^{-2\lambda A}}; \\ 6) \ P\left(\sup_{g_\theta \leq t \leq d_\theta} W_t^\alpha \geq A\right) &= \alpha \left(1 - \coth(\lambda A) + \frac{1}{\lambda A}\right) \end{aligned}$$

для любого $A \geq 0$.

ТЕОРЕМА 2. В случае дискретного времени распределения функционалов $F(\theta, S^\alpha) = \sup_{k \in \Delta} S_k^\alpha$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} 1) \ P\left(\sup_{0 \leq k \leq \theta} S_k^\alpha \geq A\right) &= \frac{2\alpha \gamma^A}{1 + (2\alpha - 1)\gamma^{2A}}; & 2) \ P\left(\sup_{0 \leq k \leq g_\theta} S_k^\alpha \geq A\right) &= \frac{2\alpha \gamma^{2A}}{1 + (2\alpha - 1)\gamma^{2A}}; \\ 3) \ P\left(\sup_{g_\theta \leq k \leq \theta} S_k^\alpha \geq A\right) &= \frac{2\alpha \gamma^{A/2}}{\gamma^{-A/2} + \gamma^{A/2}}; & 4) \ P\left(\sup_{\theta \leq k \leq d_\theta} S_k^\alpha \geq A\right) &= \frac{2\alpha}{\gamma^{-1} - \gamma} \frac{1 - \gamma^A}{A}; \\ 5) \ P\left(\sup_{0 \leq k \leq d_\theta} S_k^\alpha \geq A\right) &= \frac{2\alpha}{A(\gamma^{-1} - \gamma)} \frac{1 - \gamma^{2A}}{1 + (2\alpha - 1)\gamma^{2A}}; \\ 6) \ P\left(\sup_{g_\theta \leq k \leq d_\theta} S_k^\alpha \geq A\right) &= \frac{2\alpha}{A(\gamma^{-1} - \gamma)} - \frac{2\alpha \gamma^A}{\gamma^{-A} - \gamma^A} \end{aligned}$$

для любого $A \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Здесь $\gamma = (1 - \sqrt{1 - q^2})/q$.

4. Доказательство теорем основано на представлении (1) и его аналоге в дискретном времени, а также на соотношениях $P(\sup_{0 \leq t \leq \theta} W_t^\alpha \geq A) = P(\tau_A^\alpha \leq \theta) = E e^{-\lambda^2 \tau_A^\alpha / 2}$, $P(\sup_{0 \leq k \leq \theta} S_k^\alpha \geq A) = P(\tau_A^\alpha \leq \theta) = E q^{\tau_A^\alpha}$, где $\tau_A^\alpha = \inf\{t \geq 0: X_t^\alpha \geq A\}$ – момент первого достижения процессом X^α уровня $A \in \mathbb{R}$. В работе также найдены преобразования Лапласа момента τ_A^α в случае дискретного и непрерывного времени.

Список литературы

- [1] К. Ито, Г. Маккин, *Диффузионные процессы и их траектории*, Мир, М., 1968, 394 с.
 [2] A. Lejay, *Probab. Surv.*, **3** (2006), 413–466. [3] J. M. Harrison, L. A. Shepp, *Ann. Probab.*, **9**:2 (1981), 309–313. [4] T. Fujita, M. Yor, *Probab. Math. Statist.*, **27**:1 (2007), 89–104.

Ярослав Александрович Люлько
 (Yaroslav A. Lyulko)
 НИУ “Высшая школа экономики”
 E-mail: yaroslav.lyulko@gmail.com

Представлено А. В. Булинским
 Принято редколлегией
 05.10.2013