Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Зудилин, О мере иррациональности π^2 , *УМН*, 2013, том 68, выпуск 6, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9564>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 17:25:51

О мере иррациональности π^2

В. В. Зудилин

В настоящей заметке мы доказываем новую оценку качества рациональных приближений числа $\zeta(2) = \pi^2/6$.

ТЕОРЕМА 1. Показатель иррациональности $\mu(\zeta(2))$ числа $\zeta(2) = \pi^2/6$ оценивается сверху величиной $5.09541178\dots$.

Напомним, что показатель иррациональности $\mu(\alpha)$ вещественного числа α есть точная верхняя грань множества показателей μ , для которых неравенство $|\alpha - p/q| < q^{-\mu}$ имеет бесконечное число решений в рациональных p/q . Наилучшая предыдущая оценка $\mu(\zeta(2)) \leq 5.44124250\dots$ была получена Дж. Рином и К. Виолой [2] в 1996 г. Одним из следствий теоремы 1 является следующий общий результат.

ТЕОРЕМА 2. Для любого $d \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ справедлива оценка $\mu(\pi\sqrt{d}) \leq 10.19082357\dots$.

Отметим, однако, что для некоторых частных значений d известны лучшие оценки. Например, В. Салихов [3] показал, что $\mu(\pi) \leq 7.606308\dots$.

Для доказательства теоремы 1 мы используем одновременно две гипергеометрические конструкции рациональных приближений к $\zeta(2)$:

$$r_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} R_n(t) \left(\frac{\pi}{\sin \pi t} \right)^2 dt \quad \text{и} \quad \hat{r}_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \hat{R}_n(t) \frac{\pi}{\sin 2\pi t} dt, \quad (1)$$

где

$$R_n(t) = \frac{\prod_{j=1}^{7n} (t+j)}{(7n)!} \frac{\prod_{j=1}^{5n} (t+n+j)}{(5n)!} \frac{\prod_{j=1}^{3n} (t+2n+j)}{(3n)!} \frac{(6n)!}{\prod_{j=1}^{6n+1} (t+8n+j)},$$

$$\hat{R}_n(t) = \frac{\prod_{j=2}^{9n+1} (2t+2n+j)}{(9n)!} \frac{\prod_{j=1}^{3n} (t+j)}{(3n)!} \frac{(6n)!}{\prod_{j=1}^{6n+1} (t+4n+j)} \frac{(6n)!}{\prod_{j=1}^{6n+1} (t+5n+j)},$$

пути интегрирования в (1) разделяют две группы полюсов подынтегральных выражений и $n = 0, 1, 2, \dots$.

ЛЕММА 1. Для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$ справедливо равенство $r_n = \hat{r}_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применение алгоритма Госпера–Цайльбергера созидательного телескопирования к рациональным функциям $R_n(t)$ и $\hat{R}_n(t)$ показывает, что интегралы в (1) удовлетворяют одному и тому же разностному уравнению порядка 3, коэффициенты которого – многочлены от n степени 64. Проверяя равенство $r_n = \hat{r}_n$ непосредственно при $n = 0, 1$ и 2 , заключаем, что оно верно для всех n .

Обозначение D_n далее используется для наименьшего общего кратного чисел $1, 2, \dots, n$.

ЛЕММА 2. Для $n = 0, 1, 2, \dots$ величина r_n представима в виде $r_n = q_n \zeta(2) - p_n \in \mathbb{Z} \zeta(2) + \mathbb{Q}$. Более точно, $\Phi_n^{-1} q_n, \Phi_n^{-1} D_{9n} D_{8n} p_n \in \mathbb{Z}$, где произведение по простым $\Phi_n = \prod_p p^{\varphi(n/p)}$ определяется 1-периодической функцией

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{5}) \cup [\frac{1}{4}, \frac{2}{7}) \cup [\frac{1}{2}, \frac{4}{7}) \cup [\frac{5}{6}, \frac{6}{7}), \\ 1, & \text{если } x \in [\frac{1}{8}, \frac{1}{7}) \cup [\frac{1}{5}, \frac{1}{4}) \cup [\frac{2}{7}, \frac{3}{7}) \cup [\frac{4}{7}, \frac{5}{6}) \cup [\frac{6}{7}, \frac{8}{9}), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рациональная функция $R_n(t)$ имеет полюс на бесконечности, так что ее разложение в сумму простейших дробей содержит многочлен (степени $9n-2$) помимо самих простейших дробей. Интегрирование возникающего многочлена – и именно в этом основная новизна конструкции – осуществляется с помощью второй леммы Барнса:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \left(\frac{\pi}{\sin \pi t} \right)^2 \frac{(t-1)(t-2)\cdots(t-k)}{k!} dt = \frac{(-1)^k}{k+1}, \quad k=1, 2, \dots$$

Остальные ингредиенты доказательства аналогичны соответствующим в [4] и [5].

Подобно результатам в [5] также доказывается следующая лемма.

ЛЕММА 3. Для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$ величина $\hat{r}_n$ представима в виде $\hat{r}_n = \hat{q}_n \zeta(2) - \hat{p}_n \in \mathbb{Z} \zeta(2) + \mathbb{Q}$, причем $\hat{\Phi}_n^{-1} \hat{q}_n, \hat{\Phi}_n^{-1} D_{14n} D_{12n} \hat{p}_n \in \mathbb{Z}$ и произведение по простым $\hat{\Phi}_n = \prod_p p^{\hat{\varphi}(n/p)}$ задается 1-периодической функцией

$$\hat{\varphi}(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x \in [\frac{1}{6}, \frac{2}{9}) \cup [\frac{1}{2}, \frac{5}{9}) \cup [\frac{5}{6}, \frac{7}{8}), \\ 1, & \text{если } x \in [\frac{2}{9}, \frac{4}{9}) \cup [\frac{5}{9}, \frac{7}{9}) \cup [\frac{7}{8}, \frac{8}{9}), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Асимптотическое поведение линейных форм $r_n = \hat{r}_n = q_n \zeta(2) - p_n$ и их коэффициентов $q_n = \hat{q}_n$ определяется стандартными методами [5] (или на основе рекуррентного уравнения из доказательства леммы 1):

$$-\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |r_n|}{n} = C_0 = 15.88518998\dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |q_n|}{n} = C_1 = 23.22906071\dots$$

Леммы 2 и 3 приводят к включениям $\tilde{\Phi}_n^{-1} q_n, \tilde{\Phi}_n^{-1} D_{9n} D_{8n} p_n \in \mathbb{Z}$, где $\tilde{\Phi}_n = \text{lcm}(\Phi_n, \hat{\Phi}_n)$, и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\tilde{\Phi}_n^{-1} D_{9n} D_{8n})}{n} = C_2 = 9 + 8 - 8.79117698\dots = 8.20882301\dots$$

Применяя лемму 2.1 из [1], получаем требуемую оценку $\mu(\zeta(2)) \leq (C_0 + C_1)/(C_0 - C_2) = 5.09541178\dots$ для показателя иррациональности $\zeta(2) = \pi^2/6$.

Я благодарен Р. Марковеккио, Ю.В. Нестеренко и С. Фишлеру за ряд ценных комментариев к предварительным версиям этой заметки.

Список литературы

- [1] M. Hata, *Acta Arith.*, **63**:4 (1993), 335–349. [2] G. Rhin, C. Viola, *Acta Arith.*, **77**:1 (1996), 23–56. [3] В. Х. Салихов, *УМН*, **63**:3(381) (2008), 163–164; англ. пер.: V. Kh. Salikhov, *Russian Math. Surveys*, **63**:3 (2008), 570–572. [4] В. В. Зудилин, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:3 (2002), 49–102; англ. пер.: W. Zudilin, *Izv. Math.*, **66**:3 (2002), 489–542. [5] W. Zudilin, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **16**:1 (2004), 251–291.

Вадим Валентинович Зудилин
(Wadim V. Zudilin)
School of Mathematical and Physical Sciences,
University of Newcastle, Callaghan, Australia
E-mail: wzudilin@gmail.com

Представлено А. В. Михалёвым
Принято редколлегией
17.11.2013