Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Пенской, Метрики, экстремальные для собственных чисел оператора Лапласа–Бельтрами на поверхностях, *УМН*, 2013, том 68, выпуск 6, 107–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9565>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 03:03:27

УДК 514.76+517.9

Метрики, экстремальные для собственных чисел оператора Лапласа–Бельтрами на поверхностях

А. В. Пенской

В настоящей работе дан краткий обзор известных результатов в задаче геометрической оптимизации собственных значений оператора Лапласа и подробно изложены недавние результаты в теории экстремальных метрик на поверхностях.

Библиография: 78 названий.

Ключевые слова: геометрическая оптимизация собственных чисел, экстремальные метрики, минимальные поверхности в сферах.

DOI: 10.4213/rm9565

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	108
1.1. Геометрическая оптимизация собственных чисел оператора Лапласа в евклидовом пространстве	108
1.2. Геометрическая оптимизация собственных чисел оператора Лапласа–Бельтрами на замкнутых поверхностях	112
1.3. Метрики, экстремальные для собственных чисел оператора Лапласа–Бельтрами на замкнутых поверхностях	115
1.4. Геометрическая оптимизация собственных чисел в задаче Стеклова	119
2. Минимальные подмногообразия в сферах и экстремальные метрики...	123
3. Кратность собственных чисел оператора Лапласа–Бельтрами.....	127
4. Тау-поверхности Лоусона и формулировка теоремы об их экстремальных спектральных свойствах	129
5. Собственные числа оператора Лапласа–Бельтрами на тау-поверхностях Лоусона и вспомогательная периодическая задача Штурма–Лиувилля	131
6. Уравнение Магнуса–Уинклера–Айнса и собственные числа кратности 2	136
7. Уравнение Ламе	138

Работа выполнена при поддержке Лаборатории геометрических методов математической физики им. Н. Н. Боголюбова МГУ (грант № 2010-220-01-077 Правительства РФ, дог. № 11.G34.31.0005), программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-4995.2012.1), а также Simons-IUM fellowship.

8. Окончание доказательства теоремы 4.2 об экстремальных спектральных свойствах тау-поверхностей Лоусона	139
8.1. Случай двулистного накрытия $\hat{\tau}_{m,k}$ лоусонова тора	140
8.2. Случай лоусоновых торов $\tau_{m,k}$	142
8.3. Случай лоусоновых бутылок Клейна $\tau_{m,k}$	142
9. Торы Оцуки и формулировка теоремы об их экстремальных свойствах	144
10. Теорема Сяна–Лоусона о редукции минимальных подмногообразий по действию группы	145
11. Торы Оцуки как пример минимального $SO(2)$ -инвариантного подмногообразия координатности 1 в $\mathbb{S}^3$	146
12. Доказательство теоремы 9.1 об экстремальных спектральных свойствах торов Оцуки	150
13. Различные конструкции торов, минимальных в сферах	155
14. Расширение семейств минимальных торов в сферах с помощью теоремы Такахаси	157
15. Уравнение Ламе и теорема о построении трехпараметрического семейства $T_{a,b,c}$ минимальных поверхностей в сфере, продолжающего двухпараметрическое семейство тау-поверхностей Лоусона, и его экстремальных свойствах	160
16. Бутылка Клейна $T_{1,0,2}$	164
Список литературы	165

1. Введение

Вопрос описания метрик, экстремальных для собственных значений оператора Лапласа–Бельтрами на замкнутых поверхностях, является частью более общей проблемы геометрической оптимизации собственных значений оператора Лапласа, и история этой проблемы восходит к Рэлею.

В свою очередь, проблема геометрической оптимизации собственных значений оператора Лапласа является одной из классических проблем спектральной геометрии. Находясь на стыке дифференциальных уравнений с частными производными, дифференциальной геометрии и геометрического анализа, спектральная геометрия является интересной и богатой идеями областью математики, которая активно развивается в настоящее время – чтобы заметить это, достаточно посмотреть, сколько публикаций последних лет находится в списке литературы этого обзора.

1.1. Геометрическая оптимизация собственных чисел оператора Лапласа в евклидовом пространстве. Определим оператор Лапласа в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ формулой

$$\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Такое соглашение о знаках является удобным для спектральной геометрии.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область в евклидовом пространстве. Рассмотрим спектральную задачу для оператора Лапласа Δ в области Ω с граничным

условием Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Известно (см., например, [31]), что спектр является положительным, дискретным, причем собственные числа имеют конечные кратности и стремятся к бесконечности. Будем обозначать спектр задачи (1) через

$$0 < \lambda_1(\Omega) < \lambda_2(\Omega) \leq \lambda_3(\Omega) \leq \lambda_4(\Omega) \leq \dots,$$

причем каждое собственное число в этой последовательности встречается столько раз, какова его кратность. Величины $\lambda_i(\Omega)$ называются собственными числами Дирихле области Ω и образуют спектр Дирихле области Ω .

В изданной в 1877–1878 гг. знаменитой книге [72] лорд Рэлей поставил следующий вопрос: найти область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ заданной площади, для которой первое собственное число $\lambda_1(\Omega)$ минимально. Без условия фиксированной площади задача тривиальна: при гомотетии плоской области Ω с коэффициентом растяжения μ спектр Ω будет делиться на μ^2 , а потому $\lambda_1(\Omega)$ может быть легко сделано сколь угодно малым.

Вопрос Рэрея явился первым в истории вопросом о геометрической оптимизации собственных значений оператора Лапласа. Рэлей дал правильный ответ: минимум первого собственного числа Дирихле достигается на диске, но доказательство использовало физические соображения и не являлось строгим. Физически ответ можно интерпретировать следующим образом: среди всех барабанов с заданной площадью мембраны самый низкий звук издает барабан с круглой мембраной.

Строгое доказательство результата Рэрея и его обобщение на случай $\mathbb{R}^n$ было дано в двадцатых годах прошлого века независимо Фабером [20] и Краном [53].

ТЕОРЕМА 1.1 (Фабер, Кран). Пусть $c > 0$ и $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ – шар в $\mathbb{R}^n$ объема c . Тогда

$$\lambda_1(\mathbb{B}^n) = \min\{\lambda_1(\Omega) \mid \Omega \subset \mathbb{R}^n, \text{Vol}(\Omega) = c\}.$$

Минимум достигается не только на шаре: если, например, удалить из шара несколько точек, то собственные числа не изменятся. В некотором смысле все минимумы получаются из шара удалением “незначительного” множества, обсуждение этого вопроса и ссылки можно найти в книге [31; замечание 3.2.2].

Вопрос о минимизации первого собственного числа Дирихле области может быть обобщен различными способами: можно рассматривать плоские области, границами которых являются многоугольники, можно рассматривать плоские области внутри заданного прямоугольника и т.д. Описание этих вопросов с немногочисленными результатами и многочисленными открытыми проблемами может быть найдено в книге [31; гл. 3].

Наиболее естественным обобщением является вопрос о минимизации второго собственного числа Дирихле $\lambda_2(\Omega)$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с фиксированным объемом. Ответ на этот вопрос был дан в не очень явной форме в работе Крана [54] 1926 г. и поэтому иногда приписывается П. Сегё (см. работу Пойа [71]).

ТЕОРЕМА 1.2 (Кран, П. Сегё). Пусть $c > 0$ и $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ – шар в $\mathbb{R}^n$ объема $c/2$. Тогда минимум достигается на объединении двух шаров:

$$\lambda_2(\mathbb{B}^n \sqcup \mathbb{B}^n) = \min\{\lambda_2(\Omega) \mid \Omega \subset \mathbb{R}^n, \text{Vol}(\Omega) = c\}.$$

Этот ответ может выглядеть неудовлетворительным, так как два шара не являются связной областью. Проблема в том, что минимум в данной задаче не достигается на связной области. В то же время, если вместо минимума искать инфимум по всем связным областям данного объема, то последовательность из двух шаров равного радиуса, соединенных тонкой трубкой, чьи длина и радиус стремятся к нулю, дает инфимум, но при этом мы приходим к двум шарам, касающимся в точке, поэтому $\inf \lambda_2(\Omega) = \lambda_2(\mathbb{B}^n \sqcup \mathbb{B}^n)$, где инфимум берется по всем связным областям данного объема.

Вопрос о минимизации второго собственного числа Дирихле области также может быть обобщен различными способами, например, интересна проблема о минимуме среди выпуклых областей. Эта проблема является открытой, известные результаты по данной проблеме можно найти в книге [31; гл. 4].

Проблема минимизации следующих собственных чисел Дирихле области является открытой, и известны лишь частичные результаты, которые описаны в книге [31; гл. 5]. В частности, существует гипотеза о том, что для третьего собственного числа Дирихле минимум в размерности 2 и 3 достигается на шаре, а в размерности $n \geq 4$ – на объединении трех шаров равного радиуса.

Компьютерное моделирование показывает, что в плоском случае для $\lambda_4(\Omega)$ минимум достигается на объединении двух дисков неравного радиуса, и есть гипотеза о том, что отношение этих радиусов выражается через нули функций Бесселя как $\sqrt{j_{0,1}/j_{1,1}}$. Для λ_k , $k \geq 5$, полученные компьютерными методами области довольно причудливы (см. [31; рис. 5.1]) и не сформулированы даже гипотезы, описывающие ответ.

Естественным продолжением этих задач являются задачи о геометрической оптимизации функций от собственных значений Дирихле области. Например, Пэйн, Поля и Вейнбергер в работе [65] 1956 г. рассматривали отношения собственных чисел. В частности, они доказали, что $\lambda_2(\Omega)/\lambda_1(\Omega) \leq 3$ в размерности 2, и предположили, что максимум достигается на диске. Данная гипотеза была доказана Ашбоу и Бенгуриа сначала для двумерного случая в работе [2] 1991 г., а затем для произвольной размерности в работе [3] 1992 г. Другие результаты о геометрической оптимизации функций от собственных значений Дирихле области, а также еще большее количество открытых проблем можно найти в книге [31; гл. 6].

Вместо спектральной задачи с граничным условием Дирихле (1) можно рассматривать спектральную задачу для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с граничным условием Неймана

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Известно (см., например, [31]), что при выполнении условия регулярности границы спектр является положительным, дискретным, причем собственные числа имеют конечные кратности и стремятся к бесконечности. Условие регуля-

ности границы довольно сложно, но есть простые достаточные для регулярности условия, например, липшицевость границы. Будем обозначать спектр задачи (2) через

$$0 = \mu_1(\Omega) < \mu_2(\Omega) \leq \mu_3(\Omega) \leq \mu_4(\Omega) \leq \dots,$$

причем каждое собственное число в этой последовательности встречается столько раз, какова его кратность. Величины $\mu_i(\Omega)$ называются собственными числами Неймана области Ω и образуют спектр Неймана области Ω . Первое собственное число Неймана всегда равно нулю, так как константы являются решением задачи (2) с $\lambda = 0$.

Так как $\mu_1(\Omega) = 0$, то содержательные задачи об оптимизации начинаются со второго собственного числа $\mu_2(\Omega)$. В отличие от собственных значений Дирихле, для собственных значений Неймана имеет место формула

$$\inf\{\mu_k(\Omega) \mid \Omega \subset \mathbb{R}^n, \text{Vol}(\Omega) = c\} = 0,$$

в чем легко убедиться самому. В самом деле, пусть для простоты $n = 2$ и $c = 1$, тогда рассмотрим прямоугольник $[0, l] \times [0, 1/l]$ площади 1. Собственные числа Неймана легко находятся разделением переменных: они естественно параметризуются парами неотрицательных целых чисел $p, q = 0, 1, 2, \dots$ и равны

$$\mu_{p,q} = \pi^2 \left(\frac{p^2}{l^2} + q^2 l^2 \right).$$

Чтобы получить спектр Неймана, эти числа надо расположить по возрастанию. Если фиксировать k , то при достаточно большом l мы имеем

$$\mu_k = \frac{\pi^2}{l^2} (k-1)^2,$$

поэтому при росте l можно сделать μ_k сколь угодно малым.

Оказывается, что собственные числа Неймана ограничены сверху, и надо искать максимум $\mu_i(\Omega)$. В частности, для второго собственного числа Неймана имеет место следующая теорема, доказанная Г. Сегё в работе [73] 1954 г. для размерности 2 и Вейнбергером в работе [76] 1956 г. для произвольной размерности.

ТЕОРЕМА 1.3 (Г. Сегё, Вейнбергер). Пусть $c > 0$ и $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ – шар в $\mathbb{R}^n$ объема c . Тогда максимум $\mu_2(\Omega)$ достигается на шаре:

$$\mu_2(\mathbb{B}^n) = \max\{\mu_2(\Omega) \mid \Omega \subset \mathbb{R}^n, \text{Vol}(\Omega) = c\},$$

где рассматриваются области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с регулярной границей. При этом шар является единственной областью с данным свойством максимальнойности.

Для третьего собственного числа Неймана имеет место следующая теорема, доказанная в 2009 г. Жируаром, Надирашвили и Полтеровичем в работе [26].

ТЕОРЕМА 1.4 (Жируар, Надирашвили и Полтерович). Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – одностовая плоская область площади S с регулярной границей, а $\mathbb{D}$ – диск площади $S/2$. Тогда

$$\mu_3(\Omega) \leq 2\mu_2(\mathbb{D}) = \mu_3(\mathbb{D} \sqcup \mathbb{D})$$

и равенство достигается в пределе на последовательности из областей, вырождающихся в дизъюнктное объединение двух дисков $\mathbb{D} \sqcup \mathbb{D}$.

Про другие собственные числа Неймана известно немного. Например, мы знаем, что они ограничены сверху, но какие области их максимизируют, неизвестно. Есть отдельные результаты о функциях собственных чисел Неймана, например результат Г. Сегё из той же работы [73] о том, что диск минимизирует величину

$$\frac{1}{\mu_2(\Omega)} + \frac{1}{\mu_3(\Omega)}$$

среди всех связных открытых областей Ω с регулярной границей, имеющих данную площадь. Подробнее о ситуации с собственными значениями Неймана, а также о других постановках проблемы геометрической оптимизации собственных чисел оператора Лапласа для евклидовых областей (смешанные граничные условия Дирихле–Неймана, граничные условия Робена, собственные числа задачи Стеклова и т. д.) можно узнать в книге [31; гл. 7]. В других главах книги [31] рассматриваются аналогичные задачи для оператора Шрёдингера, билапласиана Δ^2 и др.

Особо стоит отметить недавний обзор [27] Жируара и Полтеровича, описывающий последние результаты по геометрической оптимизации собственных чисел Неймана и Стеклова.

Вопрос геометрической оптимизации собственных чисел в задаче Стеклова формально не связан с рассматриваемой нами темой, но, как показал опыт, близок по используемым идеям, поэтому мы рассмотрим его в п. 1.4.

1.2. Геометрическая оптимизация собственных чисел оператора Лапласа–Бельтрами на замкнутых поверхностях. У рассмотренной в п. 1.1 задачи геометрической оптимизации собственных чисел оператора Лапласа евклидовых областей есть естественные обобщения на случай римановых многообразий.

Можно рассматривать задачи Дирихле и Неймана на многообразиях с краем, эти задачи похожи на рассмотренные в п. 1.1 задачи для областей евклидова пространства. Но совершенно новым является случай многообразий без края. Особенно интересен для нас случай замкнутых поверхностей.

Пусть M – замкнутая поверхность и g – риманова метрика на M . Рассмотрим ассоциированный оператор Лапласа–Бельтрами

$$\Delta: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M),$$

который можно определить, например, явной формулой в локальных координатах

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right).$$

Спектр оператора Лапласа–Бельтрами на замкнутой поверхности неотрицателен, дискретен, причем собственные числа имеют конечные кратности и возрастают к бесконечности. Так как оператор Лапласа–Бельтрами Δ зависит от метрики g , то и собственные числа (обратим внимание на использование нумерации собственных чисел – начиная с нулевого!)

$$0 = \lambda_0(M, g) < \lambda_1(M, g) \leq \lambda_2(M, g) \leq \lambda_3(M, g) \leq \dots \quad (3)$$

зависят от метрики g . Хорошо известно, что собственные числа оператора Лапласа–Бельтрами Δ обладают следующим свойством масштабирования:

$$\forall t > 0 \quad \lambda_i(M, tg) = \frac{\lambda_i(M, g)}{t}.$$

Поэтому идея искать супремум функционала $\lambda_i(M, g)$ на пространстве всех (гладких) римановых метрик g на фиксированной поверхности M не является разумной. Вместо $\lambda_i(M, g)$ лучше рассматривать функционалы

$$\Lambda_i(M, g) = \lambda_i(M, g) \text{Area}(M, g) \quad (4)$$

(здесь $\text{Area}(M, g)$ обозначает площадь), которые инвариантны при преобразованиях $g \mapsto tg$. Итак, рассмотрим задачу нахождения при фиксированном i супремума $\sup \Lambda_i(M, g)$ функционала $\Lambda_i(M, g)$ на пространстве всех римановых метрик g на фиксированной поверхности M . Конечно же, эта задача эквивалентна задаче нахождения супремума $\sup \lambda_i(M, g)$ функционала $\lambda_i(M, g)$ на пространстве всех римановых метрик g на фиксированной поверхности M таких, что площадь M равна 1.

Заметим, что задача о нахождении инфимума $\inf \Lambda_i(M, g)$ не представляет интереса, так как он равен нулю. Для случая тора в этом легко убедиться, рассматривая тор, полученный факторизацией евклидовой плоскости по прямоугольной решетке: в этом случае собственные числа находятся явно разделением переменных и рассуждение похоже на рассуждение про $\inf \mu_k(\Omega)$ из п. 1.1.

Оказывается, что вопрос о нахождении при фиксированном i супремума $\sup \Lambda_i(M, g)$ является очень трудным, и к настоящему времени получено сравнительно мало результатов.

В 1980 г. Янг и Яу в работе [78] доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.5 (Янг, Яу). *Для ориентируемой поверхности M рода γ верно неравенство*

$$\Lambda_1(M, g) \leq 8\pi(\gamma + 1).$$

Обобщение этого результата на произвольный функционал $\Lambda_i(M, g)$ было найдено в 1993 г. Коревааром в работе [52].

ТЕОРЕМА 1.6 (Кореваар). *Существует такая константа C , что для любого $i > 0$ и любой компактной поверхности M рода γ верна оценка сверху*

$$\Lambda_i(M, g) \leq C(\gamma + 1)i.$$

Из теорем 1.5, 1.6 следует, что при всех i значения $\sup \Lambda_i(M, g)$ конечны, так как функционалы $\Lambda_i(M, g)$ ограничены.

Необходимо заметить, что в 1994 г. Кольбуа и Додзюк доказали в работе [13], что для многообразия M размерности $\dim M \geq 3$ функционал $\lambda_i(M, g)$ не ограничен на пространстве римановых метрик g на M объема 1. Именно поэтому в данной работе мы рассматриваем геометрическую оптимизацию собственных чисел оператора Лапласа–Бельтрами только на поверхностях. В случае более высокой размерности необходимо рассматривать другие постановки задач и наиболее естественной, судя по всему, является задача о нахождении

$\sup \lambda_i(M, g)$ на множестве всех метрик, конформно эквивалентных некоторой фиксированной метрике g_0 , т. е. на конформном классе метрики g_0 . Такая постановка задачи интересна и в размерности 2. В то же время задача геометрической оптимизации собственного числа в конформном классе достаточно отличается от рассматриваемой нами задачи, и мы не будем ее рассматривать.

Так как на замкнутых поверхностях функционал Λ_i ограничен, разумно дать следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Метрика g_0 на фиксированной поверхности M называется максимальной для функционала $\Lambda_i(M, g)$, если

$$\sup \Lambda_i(M, g) = \Lambda_i(M, g_0),$$

где супремум берется по пространству всех римановых метрик g на фиксированной поверхности M .

К настоящему времени мы знаем удивительно мало максимальных метрик.

ТЕОРЕМА 1.8 (Херш [32], 1970 г.). *Стандартная метрика на сфере является единственной максимальной метрикой для $\Lambda_1(\mathbb{S}^2, g)$.*

ТЕОРЕМА 1.9 (Ли, Яу [57], 1982 г.). *Стандартная метрика на проективной плоскости является единственной максимальной метрикой для $\Lambda_1(\mathbb{RP}^2, g)$.*

ТЕОРЕМА 1.10 (Надирашвили [62], 1996 г.). *Единственной максимальной метрикой для $\Lambda_1(\mathbb{T}^2, g)$ является метрика на равностороннем торе, т. е. на торе, который является фактором евклидовой плоскости по решетке из параллелограммов, составленных из двух равносторонних треугольников.*

Мы намеренно указали год опубликования этих теорем: эти результаты не только немногочисленны, но и разделены большими промежутками времени. Причина этого не в недостатке интереса, а в сложности вопроса: по сути в каждой упомянутой выше статье применяется новая специально разработанная техника.

Заметим также, что мы знаем пример, в котором значение $\sup \Lambda_i(M, g)$ достигается на негладкой максимальной метрике. Схема доказательства была предложена Надирашвили в работе [63] 2002 г., другое доказательство было недавно опубликовано Петридесом в препринте [69].

ТЕОРЕМА 1.11 (Надирашвили [63], Петридес [69]). *Имеет место равенство*

$$\sup \Lambda_2(\mathbb{S}^2, g) = 16\pi,$$

и этот супремум достигается как предел значений $\Lambda_2(\mathbb{S}^2, g)$ на последовательности гладких метрик, сходящейся к сингулярной метрике, получающейся на объединении двух сфер равного радиуса со стандартной метрикой, касающихся друг друга в одной точке.

Заметим, что неизвестно, является ли данная особая метрика единственной максимальной метрикой, поэтому в настоящее время нет оснований утверждать, что супремум известен, но не достигается на пространстве гладких метрик.

Также мы должны упомянуть и про гипотезу, касающуюся поверхности рода 2. В 2005 г. была опубликована работа Якобсона, Левитина, Надирашвили, Нигам и Полтеровича [40], в которой с использованием комбинации аналитических и численных методов показано, что максимальной метрикой для первого собственного числа на поверхности рода 2 будет метрика на поверхности Больццы $\mathcal{P}$, индуцированная из канонической метрики на сфере с помощью стандартного накрытия $\mathcal{P} \rightarrow \mathbb{S}^2$. Результат формулируется авторами как гипотеза, так как часть рассуждения основана на компьютерных вычислениях методом конечных элементов. В недавнем препринте Карпухина [47] предложено доказательство гипотезы Якобсона–Левитина–Надирашвили–Нигам–Полтеровича, но данный результат еще не опубликован в реферируемом журнале.

Буквально в последние дни подготовки настоящего обзора Петридес анонсировал в препринте [70] весьма сильный результат существования. Хотя данный результат еще не опубликован в реферируемом журнале, его невозможно не упомянуть.

ТЕОРЕМА 1.12 (Петридес [70]). *Пусть Σ_γ обозначает ориентируемую замкнутую поверхность рода γ . Если*

$$\sup \Lambda_1(\Sigma_\gamma, g) > \sup \Lambda_1(\Sigma_{\gamma-1}, g),$$

то $\sup \Lambda_1(\Sigma_\gamma, g)$ достигается на метрике, которая является гладкой, за исключением конечного числа конических особенностей.

Данная теорема имеет интересное следствие.

ТЕОРЕМА 1.13 (Петридес [70]). *Если $\gamma \geq 1$ и*

$$\sup \Lambda_1(\Sigma_\gamma, g) > \sup \Lambda_1(\Sigma_{\gamma-1}, g),$$

то верно по крайней мере для бесконечного числа значений γ , то существует минимальное погружение (возможно, с точками ветвления) компактной поверхности Σ_γ в некоторую сферу $\mathbb{S}^k$ с помощью собственных функций, отвечающих первому собственному числу.

Возникновение связи с минимальными погружениями неслучайно, в разделе 2 мы обсудим связь между геометрической оптимизацией собственных чисел оператора Лапласа–Бельтрами и минимальными поверхностями.

1.3. Метрики, экстремальные для собственных чисел оператора Лапласа–Бельтрами на замкнутых поверхностях. Если мы хотим найти максимум функции нескольких переменных, то обычно мы начинаем с поиска экстремумов этой функции. Подобный подход разумен и для функционалов $\sup \Lambda_i(M, g)$. Однако такой подход требует осторожности. Дело в том, что функционал $\Lambda_i(M, g)$ непрерывно зависит от метрики g , но не является дифференцируемым. Тем не менее для аналитических деформаций g_t правая и левая производные функционала $\Lambda_i(M, g_t)$ по отношению к t существуют (см. работы Берже [5], Бандо и Уракавы [4], Эль Суфи и Илиаса [18]). Это приводит к следующему определению (см. работу Надирашвили [62] и работы Эль Суфи и Илиаса [17], [18]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.14. Риманова метрика g_0 на замкнутой поверхности M называется экстремальной метрикой для функционала $\Lambda_i(M, g)$, если для любой аналитической деформации g_t выполняется неравенство

$$\left. \frac{d}{dt} \Lambda_i(M, g_t) \right|_{t=0+} \cdot \left. \frac{d}{dt} \Lambda_i(M, g_t) \right|_{t=0-} \leq 0.$$

Как показала практика, исследование экстремальных метрик оказалось полезным. Например, Якобсон, Надирашвили и Полтерович доказали в 2006 г. в работе [41] следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.15 (Якобсон, Надирашвили и Полтерович). *Метрика на бутылке Клейна, реализованной как биполярная поверхность Лоусона $\tilde{\tau}_{3,1}$, является экстремальной для $\Lambda_1(\mathbb{KL}, g)$.*

Мы не будем давать сейчас определение биполярной поверхности Лоусона $\tilde{\tau}_{3,1}$, мы дадим позже определение 4.1 тау-поверхностей Лоусона и определение 13.1 биполярных поверхностей, а пока просто заметим, что это некоторая весьма нетривиальная метрика вращения.

В работе [41] была высказана гипотеза, что метрика на бутылке Клейна $\tilde{\tau}_{3,1}$ является максимальной для $\Lambda_1(\mathbb{KL}, g)$. В том же 2006 г. Эль Суфи, Джакомини и Жазар [16] доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.16 (Эль Суфи, Джакомини и Жазар). *Метрика на биполярной поверхности Лоусона $\tilde{\tau}_{3,1}$ является единственной экстремальной метрикой для первого собственного числа $\Lambda_1(\mathbb{KL}, g)$.*

К сожалению, в настоящее время не существует строгого доказательства того, что $\sup \Lambda_1(\mathbb{KL}, g)$ достигается на гладкой метрике, поэтому, строго говоря, то, что метрика на биполярной поверхности Лоусона $\tilde{\tau}_{3,1}$ является максимальной для $\Lambda_1(\mathbb{KL}, g)$, является гипотезой.

Как можно было ожидать, мы знаем больше про экстремальные метрики, чем про максимальные. К тому моменту, когда автор начал свои исследования в данной области, кроме упомянутых выше результатов были известны также следующие.

Во-первых, были полностью изучены экстремальные метрики для $\Lambda_1(\mathbb{T}^2, g)$.

ТЕОРЕМА 1.17 (Эль Суфи, Илиас [17], 2000 г.). *Единственной экстремальной метрикой для $\Lambda_1(\mathbb{T}^2, g)$, отличной от уже упомянутой выше максимальной метрики на равностороннем торе, является метрика на клиффордовом торе, т. е. на факторе евклидовой плоскости по квадратной решетке.*

Заметим, что метрики на построенных автором поверхностях $T_{a,b,c}$ из изложенной ниже теоремы 15.1 включают обе метрики, экстремальные для первого собственного числа на торе, т. е. метрику на клиффордовом торе $T_{1,1,\sqrt{2}}$, метрику на равностороннем торе $T_{1,1,2}$, а также, как мы покажем в разделе 16, метрику на бутылке Клейна $\tilde{\tau}_{3,1} \cong T_{1,0,2}$, являющуюся единственной экстремальной метрикой для первого собственного числа на бутылке Клейна. Таким образом, семейство $T_{a,b,c}$ включает в себя все поверхности, несущие экстремальные метрики для первого собственного числа на торе и бутылке Клейна.

Во-вторых, Ляпуант обобщил результаты работы Якобсона, Надирашвили и Полтеровича [41] на другие биполярные поверхности Лоусона $\tilde{\tau}_{m,k}$. Мы не будем давать сейчас определение этих поверхностей – см. определение 4.1 тау-поверхностей Лоусона и определение 13.1 биполярных поверхностей, а пока скажем, что $\tilde{\tau}_{m,k}$ является двухпараметрическим семейством торов и бутылок Клейна, минимальных в $\mathbb{S}^4$. В формулировке следующей теоремы и далее символом $\hookrightarrow$ мы обозначаем погружение.

ТЕОРЕМА 1.18 (Ляпуант [55], 2008 г.). *Рассмотрим биполярные поверхности Лоусона $\tilde{\tau}_{m,k} \hookrightarrow \mathbb{S}^4$. Пусть $m, k \in \mathbb{N}$, $0 < k < m$, $(m, k) = 1$.*

- 1) *Если $mk \equiv 0 \pmod{2}$, то $\tilde{\tau}_{m,k}$ является тором, и метрика на нем экстремальна для $\Lambda_{4m-2}(\mathbb{T}^2, g)$.*
- 2) *Если $mk \equiv 1 \pmod{4}$, то $\tilde{\tau}_{m,k}$ является тором, и метрика на нем экстремальна для $\Lambda_{2m-2}(\mathbb{T}^2, g)$.*
- 3) *Если $mk \equiv 3 \pmod{4}$, то $\tilde{\tau}_{m,k}$ является бутылкой Клейна, и метрика на ней экстремальна для $\Lambda_{m-2}(\mathbb{K}, g)$.*

Дальнейшее развитие теории экстремальных метрик основано на приведенной в следующем разделе теореме 2.8 Надирашвили, Эль Суфи и Илиаса, связывающей экстремальные метрики с минимальными погружениями в сферы и с подсчитывающей собственные числа функцией Вейля

$$N(\lambda) = \#\{\lambda_i \mid \lambda_i < \lambda\}. \quad (5)$$

Последние продвижения в теории экстремальных метрик связаны с развитием в работах автора [66]–[68] метода, позволяющего практически изучать экстремальные метрики вращения на торах и бутылках Клейна. Заметим, что некоторые элементы данного метода встречаются уже в работе Ляпуанта [55]. Метод основан на применении комбинации нескольких инструментов, среди которых основными являются следующие:

- теорема Надирашвили, Эль Суфи и Илиаса,
- метод разделения переменных,
- теорема Штурма об осцилляции решений в периодической задаче Штурма–Лиувилля,
- различные методы построения минимальных торов в сферах (теория Сяна–Лоусона о редукции минимальных подмногообразий по действию группы, предлагаемый автором метод расширения семейств минимальных торов),
- различные сведения о конкретных периодических задачах Штурма–Лиувилля, в частности, теория уравнения Ламе и теория уравнения Магнуса–Уинклера–Айнса.

С помощью этого метода получены следующие результаты.

- В работе [66] изучены экстремальные спектральные свойства метрик на поверхностях Лоусона $\tau_{m,k} \hookrightarrow \mathbb{S}^3$. Мы не будем пока давать строгое определение этих поверхностей, см. ниже определение 4.1, но скажем, что $\tau_{m,k}$ образуют двухпараметрическое семейство поверхностей, минимальных в $\mathbb{S}^3$. Полученные в работе [66] результаты изложены ниже в теореме 4.2, которая, если говорить кратко, утверждает, что метрика на тау-поверхностях Лоусона $\tau_{m,k}$, которые

в зависимости от четности m и k являются или лоусоновыми торами, или лоусоновыми бутылками Клейна, является экстремальной для функционалов

$$\Lambda_{2[\sqrt{m^2+k^2}/2]+m+k-1}(\mathbb{T}^2, g) \quad \text{или} \quad \Lambda_{2[\sqrt{m^2+k^2}/2]+m+k-1}(\mathbb{KL}, g)$$

соответственно.

• В работе [67] изучены экстремальные спектральные свойства метрик на торах Оцуки $O_{p/q} \hookrightarrow \mathbb{S}^3$ (см. ниже определения 11.1 и 11.3). Эти результаты изложены ниже как теорема 9.1. Пока мы кратко скажем, что каждой несократимой дроби $1/2 < p/q < \sqrt{2}/2$ отвечает тор Оцуки $O_{p/q} \hookrightarrow \mathbb{S}^3$, и в теореме 9.1 доказывается, что метрика на этом торе экстремальна для $\Lambda_{2p-1}(\mathbb{T}^2, g)$.

• В работе [68] предложен метод расширения известных семейств минимальных торов в сферах, который изложен ниже, в разделе 14. С помощью этого метода в разделе 15 двухпараметрическое семейство поверхностей Лоусона $\tau_{m,k}$ расширено до трехпараметрического семейства поверхностей $T_{a,b,c}$, которые являются в зависимости от значений параметров a , b и c либо торами, либо бутылками Клейна, минимально погруженными в сферы. В теореме 15.1 исследовано как семейство $T_{a,b,c}$, так и его экстремальные спектральные свойства.

Данный метод изучения экстремальных спектральных свойств метрик был развит и упрощен Карпухиным, который получил следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1.19 (Карпухин [45]). *При нечетных q метрика на биполярном торе Оцуки $\tilde{O}_{p/q}$ экстремальна для $\Lambda_{2q+4p-2}(\mathbb{T}^2, g)$, а при четных q метрика на биполярном торе Оцуки $\tilde{O}_{p/q}$ экстремальна для $\Lambda_{q+2p-2}(\mathbb{T}^2, g)$.*

В работе [48] Карпухин изучил экстремальные спектральные свойства некоторого семейства торов $M_{m,k} \hookrightarrow \mathbb{S}^5$, где $m \geq k$ и $(m, k) = 1$, которое мы немного обсудим в конце раздела 13, не останавливаясь на нем подробно, так как это семейство является подсемейством построенного автором трехпараметрического семейства $T_{a,b,c}$ из теоремы 15.1, $M_{m,k} \cong T_{m,k,m+k}$. Семейство $M_{m,k}$ было впервые описано в конформных координатах Джойсом в работе [44] и Хаскинсом в работе [30], но в параметризации как у $T_{m,k,m+k}$ это семейство впервые появилось в работе Миронова [60]. Данное семейство содержит равносторонний тор как поверхность $M_{1,1}$.

ТЕОРЕМА 1.20 (Карпухин [48]). *Если $mk \equiv 0 \pmod{2}$, то метрика на $M_{m,k}$ экстремальна для $\Lambda_{4(m+k)-3}(\mathbb{T}^2, g)$, а если $mk \equiv 1 \pmod{2}$, то метрика на $M_{m,k}$ экстремальна для $\Lambda_{2(m+k)-3}(\mathbb{T}^2, g)$.*

Необходимо отметить также и результат Карпухина о немаксимальности большинства из описанных выше экстремальных метрик.

ТЕОРЕМА 1.21 (Карпухин [46], [48]). *Среди метрик на поверхностях Лоусона, биполярных поверхностях Лоусона, торах Оцуки, биполярных торах Оцуки и торах $M_{m,k}$ нет максимальных метрик, за исключением метрики на равностороннем торе $M_{1,1}$ и, возможно, бутылке Клейна $\tilde{\tau}_{3,1}$.*

Основной текст данного обзора посвящен подробному изложению результатов из работ [66]–[68] и обширного сопутствующего материала. Изложение

построено следующим образом. В разделе 2 собраны сведения о связи между минимальными подмногообразиями в сферах и экстремальными метриками. Далее в разделе 3 приводятся некоторые результаты о кратностях собственных значений оператора Лапласа–Бельтрами. В разделе 4 определяются тау-поверхности Лоусона и формулируется теорема 4.2 об экстремальных спектральных свойствах метрик на них. В разделе 5 изучается связь между собственными числами оператора Лапласа–Бельтрами на тау-поверхностях Лоусона и вспомогательной периодической задачей Штурма–Лиувилля. В разделе 6 излагаются элементы теории уравнения Магнуса–Уинклера–Айнса и на ее основе изучаются собственные числа кратности 2 вспомогательной периодической задачи Штурма–Лиувилля. В разделе 7 излагаются элементы теории уравнения Ламе, необходимые нам для завершения в разделе 8 доказательства теоремы 4.2 об экстремальных спектральных свойствах метрик на тау-поверхностях Лоусона. В разделе 9 мы кратко обсуждаем торы Оцуки и формулируем теорему об их экстремальных свойствах. Затем в разделе 10 мы излагаем теорию Сяна–Лоусона о редукции минимальных подмногообразий по действию группы, с помощью которой в разделе 11 мы строго определяем торы Оцуки. После этого в разделе 12 доказывается теорема 9.1 об экстремальных спектральных свойствах торов Оцуки. Затем в разделе 13 описываются различные конструкции торов, минимальных в сферах, а в разделе 14 предлагается метод расширения семейств минимальных торов в сферах с помощью теоремы Такахаси. В разделе 15 мы иллюстрируем этот метод теоремой 15.1 о построении трехпараметрического семейства $T_{a,b,c}$ минимальных поверхностей в сфере, продолжающего двухпараметрическое семейство тау-поверхностей Лоусона, и его экстремальных свойствах. Завершается этот обзор обсуждением в разделе 16 интересной бутылки Клейна $T_{1,0,2}$ из этого семейства: метрика на ней является единственной экстремальной метрикой для $\Lambda_1(\mathbb{KL}, g)$.

В тексте используются следующие обозначения и соглашения. Квадратные скобки $[\cdot]$ обозначают целую часть числа. Стрелка $\hookrightarrow$ обозначает погружение. Через $K(\cdot)$ и $E(\cdot)$ мы обозначаем полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно, определенные, как в книге [19], формулами

$$K(k) = \int_0^1 \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-k^2\alpha^2}}, \quad E(k) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}} d\alpha. \quad (6)$$

Но прежде чем переходить к подробному изложению последних результатов, касающихся экстремальных метрик, затронем и вопрос геометрической оптимизации собственных чисел в задаче Стеклова.

1.4. Геометрическая оптимизация собственных чисел в задаче Стеклова. Задачей Стеклова называется задача

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \sigma u & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – евклидова область с регулярной границей. В качестве достаточного условия регулярности можно взять, например, условие липшицевости. Величина σ называется собственным числом задачи Стеклова для области Ω .

Как и в случае задач Дирихле и Неймана, спектр задачи Стеклова (7) дискретен:

$$0 = \sigma_0(\Omega) \leq \sigma_1(\Omega) \leq \sigma_2(\Omega) \leq \sigma_3(\Omega) \leq \dots,$$

где нулевое собственное число равно нулю, так как константы являются решением задачи (7). Стоит обратить внимание на нумерацию собственных чисел – в некоторых работах нумеруют с нулевого, в некоторых – с первого: мы придерживаемся нумерации с нулевого. Величины $\sigma_i(\Omega)$ называют собственными числами Стеклова области Ω , они образуют спектр Стеклова области Ω .

Собственные числа Стеклова и соответствующие собственные функции совпадают с собственными числами и собственными функциями оператора Дирихле–Неймана

$$\Gamma: H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega),$$

определенного формулой

$$\Gamma f = \frac{\partial}{\partial n}(\mathcal{H}f),$$

где $\mathcal{H}f$ обозначает единственное гармоническое продолжение функции $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ на Ω .

Как и в случае задачи Неймана, интерес представляет задача о максимизации собственных чисел Стеклова среди всех областей данного объема. Следующая теорема была доказана в 1954 г. для размерности 2 Вейнстоком [77], использовавшим идеи Сегё из доказательства теоремы 1.3, и в 2001 г. Брокком [7] в общем случае.

ТЕОРЕМА 1.22 (Вейнсток, Брок). *На шаре $\mathbb{B}^n$ объема с первое собственное число $\sigma_1(\Omega)$ достигает максимума среди всех областей Ω объема с.*

Нетрудно доказать, что для n -мерного шара $\mathbb{B}^n$ радиуса r имеет место равенство

$$\sigma_1(\mathbb{B}^n) = \dots = \sigma_n(\mathbb{B}^n) = \frac{1}{r},$$

причем в качестве соответствующих собственных функций можно взять координатные функции $x^1, \dots, x^n$.

Надо сказать, что Вейнсток доказал более сильный результат в случае односвязных плоских областей. Им была доказана следующая теорема, из которой теорема 1.22 для плоских односвязных областей следует в силу изопериметрического неравенства.

ТЕОРЕМА 1.23 (Вейнсток). *На диске $\mathbb{D}$ с периметром l первое собственное число $\sigma_1(\Omega)$ достигает максимума среди всех односвязных плоских областей Ω с периметром l .*

Были получены и результаты о максимизации или минимизации некоторых функций от собственных чисел Стеклова, в частности следующий результат, полученный в 1968 г. в размерности 2 Хершем и Пэйном в работе [33] и в общем случае Брокком в уже упомянутой работе [7].

ТЕОРЕМА 1.24 (Херш, Пэйн, Брок). *Шар $\mathbb{B}^n$ объема с минимизирует функцию*

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i(\Omega)}$$

среди всех областей Ω объема с.

На самом деле теорема 1.22 в работе Брока [7] вытекает из теоремы 1.24. Интересен и следующий результат, доказанный в 1974 г. Хершем, Пэйном и Шиффером [34].

ТЕОРЕМА 1.25 (Херш, Пэйн, Шиффер). *Диск $\mathbb{D}$ площади s максимизирует функцию*

$$\sigma_1(\Omega)\sigma_2(\Omega)$$

среди всех плоских областей Ω площади s .

В той же работе [34] Херш, Пэйн и Шиффер доказывают более общие оценки сверху на величины $\sigma_n(\Omega)\sigma_m(\Omega)$ для плоских областей Ω . Пусть $L(\partial\Omega)$ обозначает периметр Ω .

ТЕОРЕМА 1.26 (Херш, Пэйн, Шиффер). *Имеют место следующие оценки сверху:*

$$\sigma_m(\Omega)\sigma_n(\Omega)L(\partial\Omega)^2 \leq \begin{cases} (m+n-1)^2\pi^2, & \text{если } m+n \text{ нечетно,} \\ (m+n)^2\pi^2, & \text{если } m+n \text{ четно,} \end{cases} \quad (8)$$

для плоских областей Ω .

В 2010 г. Жируар и Полтерович доказали в работе [28], что оценки (8) являются точными при $m = n$ и $m = n + 1$.

ТЕОРЕМА 1.27 (Жируар, Полтерович). *Оценки сверху*

$$\begin{aligned} \sigma_n(\Omega)L(\partial\Omega) &\leq 2\pi n, \\ \sigma_n(\Omega)\sigma_{n+1}(\Omega)L(\partial\Omega)^2 &\leq 4\pi^2 n^2 \end{aligned} \quad (9)$$

являются точными для плоских областей Ω при всех $n \geq 1$, причем неравенство (9) на самом деле является строгим для $n = 2$:

$$\sigma_2(\Omega)L(\partial\Omega) < 4\pi.$$

Задача Стеклова может рассматриваться и на поверхности Σ с краем. В подобной постановке задача активно изучалась в последнее время, что привело к интересным результатам. Введем аналог нормализованных собственных значений (4) для задачи Стеклова:

$$\bar{\sigma}_k(\Sigma) = \sigma_k(\Sigma)L(\partial\Sigma),$$

где $L(\partial\Sigma)$ обозначает периметр Σ . Величины $\bar{\sigma}_k(\Sigma)$ уже возникали в формулировке теорем 1.26 и 1.27 и довольно удобны.

Приведем в качестве примера несколько недавних результатов. В работе 2011 г. Фрейзер и Шейн [23] обобщили оценку Вейнстока [77], опубликованную еще в 1954 г.

ТЕОРЕМА 1.28 (Вейнсток – при $\gamma = 0$, $k = 1$, Фрейзер и Шейн). *Пусть Σ – компактная поверхность рода γ с k компонентами связности границы. Тогда*

$$\bar{\sigma}_1(\Sigma) \leq 2(\gamma + k)\pi.$$

Результат Фрейзер и Шейна опирается на интересную связь между собственными числами Стеклова и минимальными погружениями в шар (см. предложение 2.9).

В том же 2011 г. Кольбуа, Эль Суфи и Жируар [14] доказали следующий аналог теоремы Кореваара 1.6 для случая задачи Стеклова.

ТЕОРЕМА 1.29 (Кольбуа, Эль Суфи и Жируар). *Существует такая константа C , что для любой компактной ориентируемой поверхности Σ рода γ с непустой гладкой границей имеет место оценка*

$$\bar{\sigma}_k(\Sigma) \leq C \left\lfloor \frac{\gamma + 3}{2} \right\rfloor k,$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ обозначает целую часть числа.

Эта теорема обобщает оценки Вейнстока, Фрейзер и Шейна из теоремы 1.28.

В 2012 г. Жируар и Полтерович, используя методы Херша, Пэйна и Шиффера, обобщили в работе [29] оценки Вейнстока, Фрейзер и Шейна из теоремы 1.28 и Херша, Пэйна и Шиффера из теоремы 1.26.

ТЕОРЕМА 1.30 (Жируар, Полтерович). *Пусть Σ – компактная ориентируемая поверхность рода γ с k компонентами связности границы. Тогда для любых целых $p, q \geq 1$ имеют место неравенства*

$$\bar{\sigma}_p(\Omega) \bar{\sigma}_q(\Omega) \leq \begin{cases} \pi^2(\gamma + k)^2(p + q)^2, & \text{если } p + q \text{ четно,} \\ \pi^2(\gamma + k)^2(p + q - 1)^2, & \text{если } p + q \text{ нечетно.} \end{cases}$$

В частности,

$$\bar{\sigma}_p \leq 2\pi(\gamma + k)p.$$

Следующее определение является естественным аналогом определения 1.7 для случая задачи Стеклова.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.31. Метрика g_0 называется максимальной метрикой для k -го собственного числа Стеклова на поверхности M , если

$$\bar{\sigma}(g_0) = \sup_g \bar{\sigma}_k(g),$$

где супремум ищется среди всех гладких метрик на M .

Вопрос о максимальных метриках в задаче Стеклова является крайне сложным. В настоящее время известны ответы для первых собственных чисел Стеклова в случае кольца и ленты Мёбиуса. Эти результаты были получены Фрейзер и Шейном в недавней работе [24] с помощью установленной ими связи между максимальными метриками и минимальными погружениями в шар, о чем будет написано ниже – см. теорему 2.10.

Чтобы сформулировать эти результаты, нам нужно следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.32. Назовем σ -гомотетией такое конформное преобразование, при котором на границе метрика умножается на константу.

Легко доказать, что при σ -гомотетии собственные числа Стеклова не меняются, поэтому любая метрика, σ -гомотетичная максимальной, тоже максимальна.

ТЕОРЕМА 1.33 (Фрейзер, Шейн). *Единственной с точностью до σ -гомотетии метрикой, максимальной для первого собственного числа Стеклова $\bar{\sigma}_1(g)$ на кольце, является метрика на критическом катеноиде.*

Критическим катеноидом называется содержащаяся внутри единичного шара часть некоторого катеноида, который пересекает граничную сферу ортогонально (см. пример 1.2 в работе [25]).

В работе [24] строится и некоторая минимально погруженная в единичный шар лента Мёбиуса, которая пересекает граничную сферу ортогонально, авторы называют ее критической лентой Мёбиуса.

ТЕОРЕМА 1.34 (Фрейзер, Шейн). *Единственной с точностью до σ -гомотетии метрикой, максимальной для первого собственного числа Стеклова $\bar{\sigma}_1(g)$ на ленте Мёбиуса, является метрика на критической ленте Мёбиуса.*

Более подробно про задачу Стеклова можно прочитать в обзоре [27] Жируара и Полтеровича, описывающем последние результаты по геометрической оптимизации собственных чисел Неймана и Стеклова.

2. Минимальные подмногообразия в сферах и экстремальные метрики

Оказывается, что важную роль в спектральной геометрии играют минимальные подмногообразия в сферах и шарах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть N – риманово многообразие. Подмногообразие $M \overset{\iota}{\hookrightarrow} N$ называется минимальным в N , если оно является критической точкой функционала объема относительно индуцированной погружением ι метрики для всех вариаций с компактным носителем.

Свойство минимальности может быть сформулировано не только в вариационных, но и в чисто геометрических терминах. Пусть ∇^N – связность Леви-Чивиты на многообразии N , ∇^M – связность Леви-Чивиты на подмногообразии M , снабженном индуцированной метрикой, а P – поле ортогональных проекторов $P(x): T_x N \rightarrow T_x M$. Используя единственность связности Леви-Чивиты, нетрудно доказать, что для касательных к M векторных полей X и Y имеет место равенство

$$\nabla_X^M Y = P(\nabla_X^N Y).$$

Билинейная форма

$$B(X, Y) = \nabla_X^N Y - \nabla_X^M Y = (\text{id} - P)(\nabla_X^N Y)$$

со значениями в сечениях нормального расслоения к M называется второй квадратичной формой. Пусть $e_1, \dots, e_m$ – ортонормированный базис в касательных к M векторных полях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Нормальное к M векторное поле

$$\zeta = B(e_1, e_1) + \cdots + B(e_m, e_m)$$

называется векторным полем нормалей средней кривизны.

Имеет место следующее утверждение, описывающее минимальные подмногообразия в геометрических терминах.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Подмногообразие $M \overset{l}{\hookrightarrow} N$ является минимальным в N тогда и только тогда, когда $\zeta = 0$.*

В классическом случае, когда M есть двумерная поверхность в $N = \mathbb{R}^3$, легко проверить, что $B(X, Y) = \Pi(X, Y)t$, где $\Pi(X, Y)$ – классическая вторая квадратичная форма, а t – векторное поле единичных нормалей к M . Поэтому $\zeta = Ht$ (где H обозначает среднюю кривизну), что объясняет связь предложения 2.3 с классическим описанием двумерных минимальных поверхностей в трехмерном пространстве как поверхностей нулевой средней кривизны.

Напомним хорошо известный результат об описании минимальных поверхностей в $\mathbb{R}^n$ в терминах гармонических функций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Подмногообразие $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ минимально тогда и только тогда, когда ограничения $x^1|_M, \dots, x^n|_M$ на M координатных функций в $\mathbb{R}^n$ являются гармоническими по отношению к оператору Лапласа–Бельтрами Δ^M на M , снабженном индуцированной погружением метрикой,*

$$\Delta^M x^i|_M = 0.$$

Нам полезно переписать это предложение в терминах изометрических погружений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Изометрическое погружение риманова многообразия $f: M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ минимально тогда и только тогда, когда компоненты погружения $f = (f^1, \dots, f^n)$ являются гармоническими относительно оператора Лапласа–Бельтрами Δ на M ,*

$$\Delta f^i = 0.$$

Если изометрическое погружение с помощью гармонических функций (т. е. собственных функций оператора Δ с собственным числом 0) минимально в $\mathbb{R}^n$, то что мы можем сказать об изометрических погружениях с помощью собственных функций оператора Δ с общим собственным числом $\lambda > 0$? Ответ дан в теореме Такахаси.

ТЕОРЕМА 2.6 (Такахаси [74], 1966 г.). *Изометрическое погружение риманова многообразия $f: M \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, где $f = (f^1, \dots, f^{n+1})$, определенное собственными функциями f^i оператора Лапласа–Бельтрами Δ с общим собственным числом $\lambda > 0$,*

$$\Delta f^i = \lambda f^i,$$

обладает следующими свойствами:

- образ $f(M)$ лежит на сфере $\mathbb{S}_R^n$ радиуса R с центром в начале координат, причем

$$\lambda = \frac{\dim M}{R^2}; \quad (10)$$

- погружение $f: M \hookrightarrow \mathbb{S}_R^n$ минимально.

Если $f: M \looparrowright \mathbb{S}_R^n$, где $f = (f^1, \dots, f^{n+1})$, является минимальным изометрическим погружением риманова многообразия M в сферу $\mathbb{S}_R^n$ радиуса R с центром в нуле, то f^i являются собственными функциями оператора Лапласа–Бельтрами Δ ,

$$\Delta f^i = \lambda f^i,$$

с одним и тем же собственным числом λ таким, что выполняется равенство (10).

Теорема Такахаси является важным и красивым утверждением, поэтому удивительно, что она малоизвестна и не входит в учебники. При этом ее доказательство несложно, и мы объясним его идею.

Во-первых, теорему Такахаси можно переформулировать в терминах подмногообразий, так что можно считать, что M лежит на сфере $\mathbb{S}_R^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. У нас M погружено в сферу $\mathbb{S}^n$, поэтому имеются соответствующая вторая квадратичная форма $B^{M \looparrowright \mathbb{S}_R^n}(\cdot, \cdot)$ и вектор нормали средней кривизны $\zeta^{M \looparrowright \mathbb{S}_R^n}$, а также M погружено в $\mathbb{R}^{n+1}$, поэтому имеются соответствующая вторая квадратичная форма $B^{M \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}}(\cdot, \cdot)$ и вектор нормали средней кривизны $\zeta^{M \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}}$.

Во-вторых, надо рассмотреть функции вида $f(x) = \langle x, a \rangle$, где $a, x \in \mathbb{R}^{n+1}$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – стандартное скалярное произведение. В частности, если в качестве a брать векторы e_i из стандартного базиса в $\mathbb{R}^{n+1}$, то $f(x) = x^i$ – координатные функции на $\mathbb{R}^{n+1}$.

В-третьих, надо доказать, что для оператора Лапласа–Бельтрами Δ на M верно равенство

$$\Delta f(x) = -\langle \zeta^{M \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}}, a \rangle,$$

из которого следует, что

$$\Delta f(x) = -\langle \zeta^{M \looparrowright \mathbb{S}_R^n}, a \rangle + \frac{\dim M}{R^2} \langle x, a \rangle = -\langle \zeta^{M \looparrowright \mathbb{S}_R^n}, a \rangle + \frac{\dim M}{R^2} f(x).$$

Из последнего равенства немедленно вытекает утверждение теоремы Такахаси, за исключением того, что M лежит на сфере. Для доказательства последнего факта надо заметить, что

$$x = -\frac{1}{\lambda} \zeta^{M \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}}$$

и

$$|\zeta^{M \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}}| = \lambda \dim M,$$

откуда

$$|x| = \sqrt{\frac{\dim M}{\lambda}},$$

т.е. M лежит на сфере радиуса $R = \sqrt{\lambda^{-1} \dim M}$.

Нам будет особо нужна следующая часть теоремы Такахаси, которая была известна задолго до Такахаси и давно вошла в учебники (см., например, книгу [51]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Пусть $M \looparrowright \mathbb{S}_R^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – минимальное (погруженное) подмногообразие. Тогда ограничения $x^1|_M, \dots, x^{n+1}|_M$ на M координатных функций в $\mathbb{R}^{n+1}$ являются собственными функциями с собственным числом $\lambda = R^{-2} \dim M$ оператора Лапласа–Бельтрами Δ на M с индуцированной погружением метрикой.

Теорема Такахаси 2.6 говорит, что если $f: M \hookrightarrow \mathbb{S}_R^n$ является минимальным изометрическим вложением риманова многообразия M в сферу $\mathbb{S}_R^n$, то в спектре M есть собственное значение $\lambda = R^{-2} \dim M$, причем с кратностью, не меньшей $n + 1$. Так как мы пишем собственные числа (3) с учетом кратности, то среди собственных чисел есть участок из по меньшей мере $n + 1$ собственных чисел, равного $R^{-2} \dim M$. Легко сообразить, что номера этих собственных чисел начинаются с $N(R^{-2} \dim M)$, где $N(\cdot)$ – функция Вейля (5). Этот номер оказывается чрезвычайно важным для нас ввиду следующей теоремы. В первоначальном варианте она возникла в работе Надирашвили [62] 1996 г., а ее современный расширенный вариант был доказан Эль Суфи и Илиасом в работе [18] 2008 г.

ТЕОРЕМА 2.8 (Надирашвили, Эль Суфи и Илиас). *Пусть $M \hookrightarrow \mathbb{S}_R^n$ – минимальное (погруженное) подмногообразие. Тогда метрика, индуцированная на M с помощью этого погружения, является экстремальной для функционала $\Lambda_{N(R^{-2} \dim M)}(M, g)$.*

Верно и обратное утверждение: если метрика экстремальна, то существует минимальное погружение в сферу $M \hookrightarrow \mathbb{S}_R^n$ с помощью собственных функций отвечающего этой метрике оператора Лапласа–Бельтрами с собственным числом $R^{-2} \dim M$.

Так как нам интересны только поверхности, т. е. случай $\dim M = 2$, а радиус сферы после масштабирования можно считать равным 1, то на самом деле нас интересует только величина $N(R^{-2} \dim M) = N(2)$.

Таким образом, исследование (гладких) экстремальных метрик может быть осуществлено по следующему сценарию:

- 1) найти минимальную поверхность в сфере;
- 2) найти $N(2)$;
- 3) тогда метрика, индуцированная на минимальной поверхности в сфере, является экстремальной для функционала $\Lambda_{N(2)}$.

Тем не менее следовать этому подходу трудно. Даже описание минимальных торков в сферах довольно сложно и неявно, а для других поверхностей вопрос описания минимальных погружений в сферы открыт. Более того, не существует никакого общего способа вычислить $N(2)$, каждый раз надо изобретать какой-либо специальный подход.

В силу описанных трудностей автор сначала рассмотрел пример давно известного классического семейства минимальных поверхностей в сферах – тауперверхностей Лоусона $\tau_{m,k}$. Соответствующая теорема 4.2 сформулирована в разделе 4, а доказательство довольно длинное, требует изложения вспомогательного материала, поэтому длится до раздела 8.

Отметим полученный Фрейзер и Шейном в работе [23] аналог теоремы 2.4 для задачи Стеклова на поверхности с краем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9 (Фрейзер, Шейн). *Пусть $M \hookrightarrow \mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ – собственное погруженное k -мерное подмногообразие с краем шара $\mathbb{B}^n$ радиуса 1. Тогда M является минимальным подмногообразием $\mathbb{B}^n$, ортогональным граничной сфере $\mathbb{S}^{n-1} = \partial \mathbb{B}^n$, тогда и только тогда, когда ограничения $x^1|_M, \dots, x^n|_M$ координатных функций на M являются собственными функциями Стеклова M с собственным числом 1.*

Фрейзер и Шейн также доказали в работах [24], [25] и аналог теоремы 2.7 Надирашвили, Эль Суфи и Илиаса для задачи Стеклова. Обозначим через $\bar{\sigma}_k(g)$ нормализованное k -е собственное число Стеклова для метрики g на поверхности.

ТЕОРЕМА 2.10 (Фрейзер, Шейн). *Пусть M – компактная поверхность с границей и g_0 – максимальная метрика для k -го собственного числа Стеклова M . Тогда существуют независимые собственные функции $u_1, \dots, u_n$, отвечающие k -му собственному числу, которые дают конформное минимальное погружение $u = (u_1, \dots, u_n): M \rightarrow \mathbb{B}^n$ такое, что образ M ортогонален граничной сфере $\mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{B}^n$, а отображение u является изометрией на ∂M с точностью до умножения метрики на константу.*

3. Кратность собственных чисел оператора Лапласа–Бельтрами

В предыдущем разделе 2 был изложен подход к изучению экстремальных метрик, основанный на теореме 2.8 Надирашвили, Эль Суфи и Илиаса, который начинается с нахождения минимальной поверхности в сфере. Заметим, что так как минимальное погружение в сферу осуществляется с помощью собственных функций оператора Лапласа–Бельтрами,

$$f = (f^1, \dots, f^{n+1}): M \rightarrow \mathbb{S}_R^n \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

то размерность $n + 1$ объемлющего пространства не может быть больше кратности соответствующего собственного числа. Поэтому если известна оценка сверху на кратность некоторого собственного числа λ_i , то не надо тратить усилия на попытки найти экстремальные метрики с помощью минимальных погружений в сферы размерности, большей чем кратность минус один.

Таким образом, изучение экстремальных метрик естественным образом приводит нас к изучению кратности собственных чисел оператора Лапласа–Бельтрами.

Пусть $m(\Sigma, g, \lambda_i)$ обозначает кратность собственного числа λ_i оператора Лапласа–Бельтрами на поверхности Σ с метрикой g . Приведем некоторые известные результаты об оценках на $m(\Sigma, g, \lambda_i)$.

ТЕОРЕМА 3.1 (Ченг [11]). *Пусть Σ – ориентированная поверхность рода γ . Тогда для любой метрики g выполняется неравенство*

$$m(\Sigma, g, \lambda_i) \leq \frac{(2\gamma + i + 1)(2\gamma + i + 2)}{2}.$$

ТЕОРЕМА 3.2 (Бессон [6]). *Пусть Σ – ориентированная поверхность рода γ . Тогда для любой метрики g выполняется неравенство*

$$m(\Sigma, g, \lambda_i) \leq 4\gamma + 2i + 1.$$

Пусть Σ – неориентированная поверхность. Тогда для любой метрики g выполняется неравенство

$$m(\Sigma, g, \lambda_i) \leq 4(1 - \chi(\Sigma)) + 4i + 3.$$

ТЕОРЕМА 3.3 (Надирашвили [61]). Для сферы $\mathbb{S}^2$, проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$, тора $\mathbb{T}^2$ и бутылки Клейна $\mathbb{KL}$ в любой метрике выполняются неравенства

$$\begin{aligned} m(\mathbb{S}^2, g, \lambda_i) &\leq 2i + 1, \\ m(\mathbb{RP}^2, g, \lambda_i) &\leq 2i + 3, \\ m(\mathbb{T}^2, g, \lambda_i) &\leq 2i + 4, \\ m(\mathbb{KL}, g, \lambda_i) &\leq 2i + 3. \end{aligned}$$

Для других поверхностей, т.е. при $\chi(\Sigma) < 0$, в любой метрике выполняется неравенство

$$m(\Sigma, g, \lambda_i) \leq 2i - 2\chi(\Sigma) + 3.$$

ТЕОРЕМА 3.4 (М. Хофман-Остенхоф, Т. Хофман-Остенхоф и Надирашвили [36]). Пусть Σ – замкнутая поверхность рода 0. Тогда для любой метрики g выполняется неравенство

$$m(\Sigma, g, \lambda_i) \leq 2i - 3$$

при $i \geq 3$.

Оценки кратностей собственных значений для задачи Стеклова на поверхностях читатель сможет найти в работах Карпухина, Кокарева и Полтеровича [49], Жамма [42], [43], Фрейзер и Шейна [24].

Вопрос об оценке кратностей собственных чисел можно, разумеется, ставить не только для поверхностей, но и для евклидовых областей. Обозначим кратность собственного числа Дирихле λ_i области Ω через $m(\Omega, \lambda_i)$. В качестве примера приведем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.5 (Хофман-Остенхоф, Михор и Надирашвили [37]). Для любой плоской области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ выполнено неравенство

$$m(\Omega, \lambda_i) \leq 2i - 3$$

при $i \geq 3$.

Надо заметить, что все упомянутые результаты о кратностях опираются на классическую теорему Куранта о нодальных областях и топологические рассуждения.

Напомним, что если u – собственная функция, то связные компоненты дополнения к множеству нулей u называются нодальными областями собственной функции u . В следующей теореме мы предполагаем, что собственные числа нумеруются начиная с λ_1 .

ТЕОРЕМА 3.6 (теорема Куранта о нодальных областях [15]). Количество нодальных областей у собственной функции, отвечающей собственному числу λ_n , не больше чем n .

4. Тау-поверхности Лоусона и формулировка теоремы об их экстремальных спектральных свойствах

В 60-е годы прошлого века о минимальных поверхностях в сферах было известно очень мало, поэтому весьма значимым результатом явилась опубликованная Лоусоном в 1970 г. работа [56], в которой строились примеры минимальных погружений поверхностей разного рода в трехмерную сферу. В числе прочего Лоусон определил и следующее двухпараметрическое семейство погруженных в трехмерную сферу поверхностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Образ дважды периодического погружения

$$\Psi_{m,k}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4,$$

заданного следующей явной формулой:

$$\Psi_{m,k}(x, y) = (\cos mx \cos y, \sin mx \cos y, \cos kx \sin y, \sin kx \sin y), \quad (11)$$

называется поверхностью Лоусона $\tau_{m,k}$.

В работе [56] Лоусон доказал, что для каждой неупорядоченной пары $\{m, k\}$ натуральных чисел таких, что $(m, k) = 1$, поверхность $\tau_{m,k}$ является отличной от других поверхностей семейства компактной минимальной поверхностью в $\mathbb{S}^3$. Наложим условие $(m, k) = 1$. Если оба числа m и k нечетные, то тогда $\tau_{m,k}$ является тором. Мы называем его лоусоновым тором. Если одно из чисел m или k четное, то тогда $\tau_{m,k}$ является бутылкой Клейна. Мы называем ее лоусоновой бутылкой Клейна. Отметим, что m и k не могут оба быть четными в силу условия $(m, k) = 1$. Легко проверить, что тор $\tau_{1,1}$ является клиффордовым тором.

Так как $\tau_{m,k} \cong \tau_{k,m}$, мы можем фиксировать удобный порядок параметров m и k . Если $\tau_{m,k}$ – лоусонов тор, т. е. m и k оба нечетные и $(m, k) = 1$, то обычно мы будем предполагать, что $m > k > 0$ за исключением специального случая клиффордова тора $\tau_{1,1}$. Если $\tau_{m,k}$ – лоусонова бутылка Клейна, т. е. одно из чисел m или k четное и $(m, k) = 1$, то обычно мы будем предполагать, что m четное, а k нечетное.

Ясно, что отображение $\Psi_{m,k}$ имеет периоды $T_1 = (2\pi, 0)$ и $T_2 = (0, 2\pi)$. Тем не менее в случае лоусонова тора $\tau_{m,k}$ минимальная решетка периодов порождается векторами $T_3 = (\pi, \pi)$ и $T_4 = (\pi, -\pi)$. Поэтому лоусонов тор $\tau_{m,k}$ изометричен тору $\mathbb{R}^2 / \{aT_3 + bT_4 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ с метрикой, индуцированной погружением $\Psi_{m,k}$. Мы будем отождествлять эти торы.

Тор $\mathbb{R}^2 / \{aT_1 + bT_2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ с метрикой, индуцированной погружением $\Psi_{m,k}$, является двулистным накрытием над лоусоновым тором $\tau_{m,k}$. Мы будем обозначать это двулистное накрытие через $\hat{\tau}_{m,k}$. Когда необходимо иметь единственным образом определенные координаты точки на $\hat{\tau}_{m,k}$, мы рассматриваем координаты $(x, y) \in [0, 2\pi) \times [-\pi, \pi)$. Функции на лоусоновом торе $\tau_{m,k}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с функциями на двулистном накрытии $\hat{\tau}_{m,k}$, инвариантными по отношению к сдвигам на T_3 .

В случае лоусоновых бутылок Клейна $\tau_{m,k}$ погружение $\Psi_{m,k}$ инвариантно относительно преобразований

$$(x, y) \mapsto (x + \pi, -y), \quad (x, y) \mapsto (x, y + 2\pi);$$

собственно, именно эта инвариантность и приводит к тому, что образ $\Psi_{m,k}$ является бутылкой Клейна. Когда необходимо иметь единственным образом определенные координаты точки на $\tau_{m,k}$, мы будем рассматривать координаты $(x, y) \in [0, \pi) \times [-\pi, \pi)$.

Экстремальные спектральные свойства тау-поверхностей Лоусона описаны в следующей теореме. Здесь $E(\cdot)$ обозначает полный эллиптический интеграл второго рода, определение которого дано в формуле (6) в конце раздела 1.

ТЕОРЕМА 4.2 [66]. Пусть $\tau_{m,k}$ – лоусонов тор. Можно без ограничения общности предполагать, что $m, k \equiv 1 \pmod{2}$, $(m, k) = 1$. Тогда индуцированная метрика на его двулистном накрытии $\widehat{\tau}_{m,k}$ является экстремальной метрикой для функционала $\Lambda_j(\mathbb{T}^2, g)$, где

$$j = 2(\lceil \sqrt{m^2 + k^2} \rceil + m + k) - 1.$$

Соответствующее значение функционала равно

$$\Lambda_j(\widehat{\tau}_{m,k}) = 16\pi m E\left(\frac{\sqrt{m^2 - k^2}}{m}\right).$$

Индуцированная метрика на $\tau_{m,k}$ является экстремальной для функционала $\Lambda_j(\mathbb{T}^2, g)$, где

$$j = 2\left\lceil \frac{\sqrt{m^2 + k^2}}{2} \right\rceil + m + k - 1.$$

Соответствующее значение функционала равно

$$\Lambda_j(\tau_{m,k}) = 8\pi m E\left(\frac{\sqrt{m^2 - k^2}}{m}\right).$$

Пусть $\tau_{m,k}$ – лоусонова бутылка Клейна. Можно без ограничения общности предполагать, что $mk \equiv 0 \pmod{2}$, $(m, k) = 1$. Тогда индуцированная метрика на $\tau_{m,k}$ является экстремальной метрикой для функционала $\Lambda_j(\mathbb{KL}, g)$, где

$$j = 2\left\lceil \frac{\sqrt{m^2 + k^2}}{2} \right\rceil + m + k - 1.$$

Соответствующее значение функционала равно

$$\Lambda_j(\tau_{m,k}) = 8\pi m E\left(\frac{\sqrt{m^2 - k^2}}{m}\right).$$

Мы исследуем случай двулистного накрытия $\widehat{\tau}_{m,k}$, так как в этом случае имеется разделение переменных в соответствующей спектральной задаче. Мы сводим случай лоусоновых торов к случаю двулистного накрытия.

Доказательство теоремы 4.2 состоит из нескольких шагов, требует изложения вспомогательного материала, поэтому довольно длинно и продолжается до раздела 8. Первый шаг доказательства сразу же следует из теоремы Надирашвили, Эль Суфи и Илиаса 2.8.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Метрика g , индуцированная на лоусоновом торе или лоусоновой бутылке Клейна $\tau_{m,k}$ ее погружением $\tau_{m,k} \hookrightarrow \mathbb{S}^3$, является экстремальной для функционалов $\Lambda_{N(2)}(\mathbb{T}^2, g)$ или $\Lambda_{N(2)}(\mathbb{KL}, g)$ соответственно. Аналогичное утверждение верно и для двулистного накрытия $\widehat{\tau}_{m,k}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как тау-поверхности Лоусона $\tau_{m,k}$ являются минимально погруженными поверхностями в сфере $\mathbb{S}^3$ радиуса 1, утверждение немедленно следует из теоремы 2.8 Эль Суфи и Илиаса, в которой надо положить $R = 1$ и $\dim M = 2$.

Таким образом, задача сводится к подсчету количества собственных чисел оператора Δ , меньших 2, на тау-поверхностях Лоусона. Мы решаем эту задачу путем разделения переменных и сведения ее к проблеме подсчета количества собственных чисел, меньших 2, у вспомогательной периодической задачи Штурма–Лиувилля. Ключевая роль в решении этой проблемы принадлежит теории уравнения Ламе (30).

Следующий раздел 5 будет посвящен разделению переменных и получающейся вспомогательной периодической задаче Штурма–Лиувилля на примере тау-поверхностей Лоусона.

5. Собственные числа оператора Лапласа–Бельтрами на тау-поверхностях Лоусона и вспомогательная периодическая задача Штурма–Лиувилля

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Индукцированная погружением метрика на тау-поверхности Лоусона $\tau_{m,k} \looparrowright \mathbb{S}^3$ равна*

$$p^2(y) dx^2 + dy^2,$$

где

$$p(y) = \sqrt{k^2 + (m^2 - k^2) \cos^2 y}.$$

Оператор Лапласа–Бельтрами имеет вид

$$\Delta f = -\frac{1}{p^2(y)} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{p(y)} \frac{\partial}{\partial y} \left(p(y) \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Те же формулы верны и для двулистного накрытия $\hat{\tau}_{m,k}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство состоит в прямом вычислении.

Известно, что подсчет собственных чисел является сложной проблемой. К счастью, для тау-поверхностей Лоусона эта задача может быть сведена к одномерной задаче. Напомним, что функция $\varphi(y)$ называется π -антипериодической, если $\varphi(y + \pi) = -\varphi(y)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Пусть $\varphi(l, y)$ – решение периодической задачи Штурма–Лиувилля*

$$-\frac{1}{p(y)} \frac{d}{dy} \left(p(y) \frac{d\varphi(y)}{dy} \right) + \left(\frac{l^2}{p^2(y)} - \lambda \right) \varphi(y) = 0, \quad (12)$$

$$\varphi(y + 2\pi) \equiv \varphi(y). \quad (13)$$

Пусть $\hat{\tau}_{m,k}$ – двулистное накрытие лоусонова тора. Тогда функции

$$\varphi(l, y) \cos lx, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (14)$$

и

$$\varphi(l, y) \sin lx, \quad l = 1, 2, 3, \dots, \quad (15)$$

образуют базис в пространстве собственных функций оператора Лапласа–Бельтрами Δ с собственным числом λ .

Пусть $\tau_{m,k}$ – лоусонов тор. Тогда функции

$$\varphi(l, y) \cos lx, \quad l = 0, 2, 4, \dots,$$

и

$$\varphi(l, y) \sin lx, \quad l = 2, 4, 6, \dots,$$

где $\varphi(l, y)$ есть π -периодическое решение периодической задачи Штурма–Лиувилля (12), и функции

$$\varphi(l, y) \cos lx, \quad l = 1, 3, 5, \dots,$$

и

$$\varphi(l, y) \sin lx, \quad l = 1, 3, 5, \dots,$$

где $\varphi(l, y)$ есть π -антипериодическое решение периодической задачи Штурма–Лиувилля (12), образуют базис в пространстве собственных функций оператора Лапласа–Бельтрами Δ с собственным числом λ .

Пусть $\tau_{m,k}$ – лоусонова бутылка Клейна. Тогда функции

$$\varphi(l, y) \cos lx, \quad l = 0, 2, 4, \dots,$$

и

$$\varphi(l, y) \sin lx, \quad l = 2, 4, 6, \dots,$$

где $\varphi(l, y)$ – четное решение периодической задачи Штурма–Лиувилля (12), (13), и функции

$$\varphi(l, y) \cos lx, \quad l = 1, 3, 5, \dots,$$

и

$$\varphi(l, y) \sin lx, \quad l = 1, 3, 5, \dots,$$

где $\varphi(l, y)$ – нечетное решение периодической задачи Штурма–Лиувилля (12), (13), образуют базис в пространстве собственных функций оператора Лапласа–Бельтрами Δ с собственным числом λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что Δ коммутирует с $\partial/\partial x$. Из этого следует, что Δ имеет базис собственных функций вида

$$\varphi(l, y) \cos lx, \quad \varphi(l, y) \sin lx. \quad (16)$$

Подставляя эти собственные функции в формулу $\Delta f = \lambda f$, мы получаем уравнение (12). Эти решения должны быть также инвариантны относительно преобразований

$$(x, y) \mapsto (x + 2\pi, y), \quad (x, y) \mapsto (x, y + 2\pi) \quad (17)$$

в случае двулистного накрытия $\hat{\tau}_{m,k}$. В случае лоусонова тора решения должны быть инвариантны относительно преобразований (17) и еще преобразования

$$(x, y) \mapsto (x + \pi, y + \pi),$$

а в случае лоусоновой бутылки Клейна к преобразованиям (17) надо добавить преобразование

$$(x, y) \mapsto (x + \pi, -y).$$

Из этих условий вытекает условие периодичности (13) и условия на связь l с четностью и (анти)периодичностью решений φ . Предложение доказано.

Мы рассматриваем l как параметр в уравнении (12) и его решениях $\varphi(l, y)$. Например, мы предполагаем l фиксированным и рассматриваем y как независимую переменную, когда обсуждаем нули функции $\varphi(l, y)$.

Запишем уравнение (12) в стандартной форме задачи Штурма–Лиувилля:

$$(p(y)\varphi'(y))' + \left(\lambda p(y) - \frac{l^2}{p(y)} \right) \varphi(y) = 0. \quad (18)$$

Так как $p(y) > 0$, имеет место следующий классический результат (см., например, книгу [12]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3 (теорема Штурма об осцилляции решений периодической задачи Штурма–Лиувилля). *Существует бесконечное количество собственных чисел $\lambda_i(l)$ периодической задачи Штурма–Лиувилля (12), (13). Собственные числа $\lambda_i(l)$ образуют такую последовательность, что*

$$\lambda_0(l) < \lambda_1(l) \leq \lambda_2(l) < \lambda_3(l) \leq \lambda_4(l) < \lambda_5(l) \leq \lambda_6(l) < \dots \quad (19)$$

Для $\lambda = \lambda_0(l)$ существует единственная (с точностью до умножения на ненулевую константу) собственная функция $\varphi_0(l, y)$. Если $\lambda_{2i+1}(l) < \lambda_{2i+2}(l)$ для некоторого $i \geq 0$, то существует единственная (с точностью до умножения на ненулевую константу) собственная функция $\varphi_{2i+1}(l, y)$ с собственным числом $\lambda_{2i+1}(l)$ кратности один и существует единственная (с точностью до умножения на ненулевую константу) собственная функция $\varphi_{2i+2}(l, y)$ с собственным числом $\lambda_{2i+2}(l)$ кратности один. Если $\lambda_{2i+1}(l) = \lambda_{2i+2}(l)$, то существуют две независимые собственные функции $\varphi_{2i+1}(l, y)$ и $\varphi_{2i+2}(l, y)$ с собственным числом $\lambda_{2i+1}(l) = \lambda_{2i+2}(l)$ кратности два.

Собственная функция $\varphi_0(l, y)$ не имеет нулей на $[0, 2\pi)$. Собственные функции $\varphi_{2i+1}(l, y)$ и $\varphi_{2i+2}(l, y)$, $i \geq 0$, имеют каждая ровно $2i+2$ нулей на $[0, 2\pi)$.

Как всегда, мы можем переписать периодическую задачу Штурма–Лиувилля как периодическую задачу для уравнения Хилла.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. Уравнение (12) эквивалентно уравнению Хилла

$$-z''(y) + V(l, y)z(y) = \lambda z(y), \quad (20)$$

где

$$V(l, y) = \frac{l^2}{p(y)^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{p'(y)}{p(y)} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{p'(y)}{p(y)} \right)'.$$

Периодические граничные условия (13) для уравнения (12) эквивалентны периодическим граничным условиям

$$z(y + 2\pi) \equiv z(y). \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямое вычисление показывает, что замена переменной

$$z(y) = \sqrt{p(y)}\varphi(y)$$

преобразует уравнение (12) в уравнение (20). Так как функция $p(y)$ является 2π -периодической, граничные условия (13) и (21) эквивалентны. Предложение доказано.

Так как $p(y)$ является четной π -периодической функцией, имеют место следующие предложения 5.5 и 5.6.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. *Решение $\varphi_0(l, y)$ четно. Если собственное число $\lambda_i(l)$, $i > 0$, имеет кратность один, то решение $\varphi_i(l, y)$ четно или нечетно. Если $\lambda_{2i+1}(l) = \lambda_{2i+2}(l)$, то две независимые собственные функции $\varphi_{2i+1}(l, y)$ и $\varphi_{2i+2}(l, y)$ с собственным числом $\lambda_{2i+1}(l) = \lambda_{2i+2}(l)$ кратности два могут быть выбраны таким образом, что одна из них четна, а другая нечетна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя теорему 1.1 из книги [58] к уравнению (20) с периодическим граничным условием (21) и возвращаясь потом от $z(y)$ к $\varphi(y)$, мы получаем утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.6. *Решение $\varphi_0(l, y)$ является π -периодическим. Решения $\varphi_{2i+1}(l, y)$ и $\varphi_{2i+2}(l, y)$ являются π -периодическими, если i нечетно, и π -антипериодическими, если i четно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя теорему 3.1 из главы VIII книги [12] с периодами π и 2π и сравнивая результат, мы немедленно получаем утверждение.

Теперь нам легко установить связь между кратностями собственных чисел оператора Δ и собственных чисел $\lambda_i(l)$ периодической задачи Штурма–Лиувилля (12), (13). Эта связь позволяет нам выразить искомую величину $N(2)$ в терминах собственных чисел $\lambda_i(l)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.7. *В случае двулистного накрытия $\hat{\tau}_{m,k}$ лоусонова тора мы имеем*

$$N(2) = \#\{\lambda_i(0) \mid \lambda_i(0) < 2\} + 2\#\{\lambda_i(l) \mid \lambda_i(l) < 2, l > 0, l \in \mathbb{Z}\}. \quad (22)$$

В случае лоусонова тора $\tau_{m,k}$ мы имеем

$$\begin{aligned} N(2) = & 1 + 2\#\{\lambda_0(l) \mid \lambda_0(l) < 2, l > 0, l \in \mathbb{Z}, l \text{ четно}\} \\ & + \#\{\lambda_{2i+1}(0) \mid \lambda_{2i+1}(0) < 2, i \text{ нечетно}\} \\ & + \#\{\lambda_{2i+2}(0) \mid \lambda_{2i+2}(0) < 2, i \text{ нечетно}\} \\ & + 2\#\{\lambda_{2i+1}(l) \mid \lambda_{2i+1}(l) < 2, l > 0, l \in \mathbb{Z}, l \text{ четно}, i \text{ нечетно}\} \\ & + 2\#\{\lambda_{2i+2}(l) \mid \lambda_{2i+2}(l) < 2, l > 0, l \in \mathbb{Z}, l \text{ четно}, i \text{ нечетно}\} \\ & + 2\#\{\lambda_{2i+1}(l) \mid \lambda_{2i+1}(l) < 2, l > 0, l \in \mathbb{Z}, l \text{ нечетно}, i \text{ четно}\} \\ & + 2\#\{\lambda_{2i+2}(l) \mid \lambda_{2i+2}(l) < 2, l > 0, l \in \mathbb{Z}, l \text{ нечетно}, i \text{ четно}\}. \end{aligned} \quad (23)$$

В случае лоусоновой бутылки Клейна $\tau_{m,k}$ мы имеем

$$\begin{aligned} N(2) = & \#\{\lambda_i(0) \mid \lambda_i(0) < 2, \varphi_i(0, y) \text{ четно}\} \\ & + 2\#\{\lambda_i(l) \mid \lambda_i(l) < 2, l > 0, l \in \mathbb{Z}, l \text{ четно}, \varphi_i(l, y) \text{ четно}\} \\ & + 2\#\{\lambda_i(l) \mid \lambda_i(l) < 2, l > 0, l \in \mathbb{Z}, l \text{ нечетно}, \varphi_i(l, y) \text{ нечетно}\}. \end{aligned} \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\widehat{\tau}_{m,k}$ – двулистное накрытие лоусонова тора. Собственное число $\lambda_i(0)$ дает в точности одну собственную функцию

$$\varphi_i(0, y) \cos 0x = \varphi_i(0, y)$$

оператора Δ . Из этого следует, что каждое собственное число $\lambda_i(0)$ соответствует одному собственному числу $\lambda_q = \lambda_i(0)$ оператора Лапласа–Бельтрами Δ . Собственное число $\lambda_i(l)$, $l > 0$, дает ровно две собственные функции

$$\varphi_i(l, y) \cos lx \quad \text{и} \quad \varphi_i(l, y) \sin lx$$

оператора Лапласа–Бельтрами Δ . Из этого следует, что при $l > 0$ каждое собственное число $\lambda_i(l)$ соответствует двум собственным числам $\lambda_q = \lambda_{q+1} = \lambda_i(l)$ оператора Лапласа–Бельтрами Δ . Из этого вытекает формула (22).

Случаи лоусонова тора или лоусоновой бутылки Клейна аналогичны, но надо принимать во внимание четность или (анти)периодичность функций $\varphi_i(l, y)$ (см. предложения 5.2, 5.5 и 5.6). Слагаемое 1 в формуле (23) отвечает $\lambda_0(0)$. Предложение доказано.

Предложения 5.2 и 5.7 позволяют нам исследовать простейший случай лоусонова тора $\tau_{1,1}$, т. е. клиффордова тора.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.8. *Метрика, индуцированная на лоусоновом торе $\tau_{1,1}$, т. е. на клиффордовом торе, является экстремальной метрикой для функционала $\Lambda_1(\mathbb{T}^2, g)$. Соответствующее значение этого функционала равно*

$$\Lambda_1(\tau_{1,1}) = 4\pi^2 = 39.479 \dots$$

Метрика, индуцированная на двулистном накрытии $\widehat{\tau}_{1,1}$ клиффордова тора $\tau_{1,1}$, является экстремальной метрикой для функционала $\Lambda_5(\mathbb{T}^2, g)$. Соответствующее значение этого функционала равно

$$\Lambda_5(\widehat{\tau}_{1,1}) = 8\pi^2 = 78.957 \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В данном случае $m = k = 1$, поэтому $p(y) \equiv 1$. Уравнение (12) принимает вид

$$-(\varphi(y))'' + (l^2 - \lambda)\varphi(y) = 0. \quad (25)$$

Хорошо известно, что собственные числа $\lambda_i(l)$ этого уравнения с периодическими граничными условиями (13) удовлетворяют условию

$$\lambda_i(l) - l^2 = n^2, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому мы имеем следующие собственные числа периодической задачи Штурма–Лиувилля, которые меньше 2:

$$\lambda_0(0) = 0, \quad \lambda_1(0) = 1, \quad \lambda_2(0) = 1, \quad \lambda_0(1) = 1.$$

Из формулы (23) следует, что $N(2) = 1$, и индуцированная метрика является экстремальной для функционала $\Lambda_1(\mathbb{T}^2, g)$. Так как $\lambda_1 = 2$ и $\text{Area}(\tau_{1,1}) = 2\pi^2$, то значение функционала равно $\Lambda_1(\tau_{1,1}) = 4\pi^2$.

Случай двулистного накрытия $\widehat{\tau}_{1,1}$ аналогичен. Предложение доказано.

Конечно, этот результат был известен и ранее, но для нас пример $\tau_{1,1}$ является “игрушечным примером”, позволяющим показать, как работает разделение переменных. “Игрушечным” потому, что в этом простейшем случае уравнение во вспомогательной задаче Штурма–Лиувилля (25) является точно решаемым. Это не так для произвольных тау-поверхностей Лоусона. Тем не менее мы можем найти $N(2)$, исследуя структуру собственных чисел $\lambda_i(l)$ вспомогательной задачи Штурма–Лиувилля (12), (13).

Собственные числа $\lambda_i(l)$ вспомогательной задачи Штурма–Лиувилля нумеруются двумя индексами: i и l . Неравенство (19) из теоремы Штурма (предложение 5.3) сообщает нам, что при фиксированном l и растущих i собственные числа $\lambda_i(l)$ не убывают, причем при переходе от четного номера к нечетному всегда строго возрастают:

$$\lambda_0(l) < \lambda_1(l) \leq \lambda_2(l) < \lambda_3(l) \leq \lambda_4(l) < \lambda_5(l) \leq \lambda_6(l) < \dots$$

Нам необходимо еще понять, как ведут себя собственные числа $\lambda_i(l)$ с ростом l при фиксированном i . Оказывается, что они строго возрастают. В первоначальном доказательстве теоремы 4.2 в работе автора [66] отмечалось, что уравнение (12) является частным случаем уравнения Магнуса–Уинклера–Айнса, после чего возрастание $\lambda_i(l)$ с ростом l при фиксированном i выводилось в сложном многостраничном доказательстве из весьма интересных свойств уравнения Магнуса–Уинклера–Айнса. Но недавно Карпухин упростил этот метод, предложив, исходя из вариационного принципа, в работе [48] короткое доказательство возрастания $\lambda_i(l)$ с ростом l при фиксированном i в случае торов $M_{m,k}$. Это доказательство может быть практически дословно перенесено на случай тау-поверхностей Лоусона. Поэтому мы не станем приводить его здесь, а сошлемся на результат Карпухина.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.9. *При фиксированном i и $l \geq 0$ собственные числа $\lambda_i(l)$ вспомогательной периодической задачи Штурма–Лиувилля (12), (13) являются строго возрастающими функциями параметра l .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО полностью аналогично доказательству предложения 2.6 из работы Карпухина [48].

Для доказательства теоремы 4.2 в части, касающейся лоусоновых бутылок Клейна, нам потребуются разобраться с кратностью собственных чисел, чем мы займемся в следующем разделе 6, в котором уравнение Магнуса–Уинклера–Айнса нам все же понадобится.

6. Уравнение Магнуса–Уинклера–Айнса и собственные числа кратности 2

Оказывается, что нам важно исследовать собственные числа кратности 2 периодической задачи Штурма–Лиувилля (12), (13). Проблема существования таких собственных чисел обычно называется проблемой сосуществования, так как кратность 2 означает, что для такого собственного числа (со)существуют два независимых 2π -периодических решения.

Так как лоусонов тор $\tau_{1,1}$ уже исследован, мы будем предполагать в этом разделе, что $m \neq k$.

Заметим, что наше уравнение (12) может быть записано в виде

$$(1 + a \cos(2y))\varphi''(y) + b \sin(2y)\varphi'(y) + (c + d \cos(2y))\varphi(y) = 0, \quad (26)$$

где

$$a = \frac{m^2 - k^2}{m^2 + k^2}, \quad b = -\frac{m^2 - k^2}{m^2 + k^2}, \quad (27)$$

$$c = \lambda_i(l) - \frac{2l^2}{m^2 + k^2}, \quad d = \lambda_i(l) \frac{m^2 - k^2}{m^2 + k^2}. \quad (28)$$

Уравнение (26) называется уравнением Магнуса–Уинклера–Айнса. Теория этого уравнения интересна по многим причинам, в том числе потому, что проблема сосуществования для него интенсивно изучалась (см. книгу [58]) и была в некотором смысле полностью решена Фолькмером в 2003 г. в работе [75]. Нам нужен следующий результат [58; теорема 7.1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Если уравнение Магнуса–Уинклера–Айнса (26) имеет два линейно независимых решения с периодом 2π , то многочлен*

$$Q^*(\mu) = a(2\mu - 1)^2 - b(2\mu - 1) - d \quad (29)$$

обращается в нуль для одного из значений $\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Из этого предложения немедленно вытекает следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. *Пусть $m \neq k$. Тогда собственными числами $\lambda_i(l)$ вспомогательной периодической задачи Штурма–Лиувилля (12), (13), такими, что $\lambda_i(l) < 6$ и $\lambda_i(l)$ имеет кратность 2, могут быть только $\lambda_i(l) = 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\lambda_i(l)$ является собственным числом кратности 2, то по предложению 6.1 многочлен $Q^*(\mu)$ имеет целый корень μ_0 . Подставляя формулы (27), (28) в уравнение (29), мы получаем

$$Q^*(\mu) = \frac{m^2 - k^2}{m^2 + k^2} [(2\mu - 1)^2 + (2\mu - 1) - \lambda_i(l)].$$

Из этого следует, что условие $Q^*(\mu) = 0$ эквивалентно условию

$$\lambda_i(l) = 2\mu(2\mu - 1).$$

Тогда $\lambda_i(l) = 2\mu_0(2\mu_0 - 1)$, $\mu_0 \in \mathbb{Z}$. Собственными числами $0 \leq \lambda_i(l) < 6$ такой формы могут быть только $\lambda_i(l) = 0$ и $\lambda_i(l) = 2$. Мы знаем, что $\lambda = 0$ является собственным числом кратности 1 оператора Δ , так как на компактной поверхности нет гармонических функций кроме констант. Таким образом, $\lambda_i(l) = 0$ исключено, и остается единственная возможность $\lambda_i(l) = 2$. Предложение доказано.

Последним необходимым ингредиентом для доказательства теоремы 4.2 является теория уравнения Ламе, элементы которой мы напомним в следующем разделе 7.

7. Уравнение Ламе

В этом разделе мы напомним некоторые свойства уравнения Ламе, которое чаще всего записывается в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + (h - n(n+1)(\widehat{k} \operatorname{sn} z)^2)\varphi = 0 \quad (30)$$

(см., например, [19] или [1]). Мы обозначаем модуль эллиптического синуса $\operatorname{sn} z$ через $\widehat{k}$, так как ранее мы уже употребляли индекс k в $\tau_{m,k}$.

Уравнение Ламе может быть записано в разных формах. Мы будем чаще всего использовать тригонометрическую форму уравнения Ламе

$$[1 - (\widehat{k} \sin y)^2] \frac{d^2\varphi}{dy^2} - \widehat{k}^2 \sin y \cos y \frac{d\varphi}{dy} + [h - n(n+1)(\widehat{k} \sin y)^2]\varphi = 0. \quad (31)$$

Уравнение (31) может быть получено из уравнения (30) с помощью замены переменных

$$\operatorname{sn} z = \sin y \iff y = \operatorname{am} z, \quad (32)$$

где $\operatorname{am} z$ обозначает введенную Якоби функцию амплитуды (см., например, [19; раздел 13.9]). Эта тригонометрическая форма уравнения Ламе используется в [1]. Замена переменных $\operatorname{sn} z = \sin y$ приводит к другой тригонометрической форме (39), используемой в [19], она нам позднее тоже понадобится.

Нам интересны 2π -периодические решения уравнения Ламе (31). Обычно величины $0 < \widehat{k} < 1$ и n являются фиксированными параметрами, а h играет роль собственного значения, поэтому имеет место аналог теоремы Штурма 5.3 для уравнения Ламе.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. *При фиксированных $0 < \widehat{k} < 1$ и n существует бесконечная последовательность значений*

$$h_0 < h_1 \leq h_2 < h_3 \leq h_4 < \dots$$

параметра h таких, что если $h = h_i$, то уравнение Ламе (31) имеет 2π -периодическое решение $\varphi_i(y) \neq 0$.

При $h = h_0$ решение $\varphi_0(y)$ единственно с точностью до умножения на ненулевую константу.

Если $h_{2i+1}(l) < h_{2i+2}(l)$, то решения $\varphi_{2i+1}(y)$ и $\varphi_{2i+2}(y)$ единственны с точностью до умножения на ненулевую константу.

Если $h_{2i+1}(l) = h_{2i+2}(l)$, то существуют два независимых решения $\varphi_{2i+1}(y)$ и $\varphi_{2i+2}(y)$, соответствующих $h = h_{2i+1} = h_{2i+2}$.

Решение $\varphi_0(y)$ не имеет нулей на $[0, 2\pi)$. При $i \geq 0$ каждое из решений $\varphi_{2i+1}(y)$ и $\varphi_{2i+2}(y)$ имеет ровно $2i + 2$ нулей на $[0, 2\pi)$.

Нас интересует случай $n = 1$. В этом случае известны три замечательных классических решения уравнения (30):

$$\operatorname{Ec}_1^0(z) = \operatorname{dn} z, \quad \operatorname{Ec}_1^1(z) = \operatorname{cn} z, \quad \operatorname{Es}_1^1(z) = \operatorname{sn} z,$$

где мы используем обозначения из статьи Айнса [39]. Используя стандартные свойства якобиевых эллиптических функций и замену переменных (32), мы получаем три решения уравнения Ламе в тригонометрической форме (31):

$$\text{Ec}_1^0(y) = \sqrt{1 - \widehat{k}^2 \sin^2 y}, \quad \text{Ec}_1^1(y) = \cos y, \quad \text{Es}_1^1(y) = \sin y. \quad (33)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. Если $n = 1$, то

$$\begin{aligned} \varphi_0(y) &= \text{Ec}_1^0(y) = \sqrt{1 - \widehat{k}^2 \cos^2 y}, & h_0 &= \widehat{k}^2, \\ \varphi_1(y) &= \text{Ec}_1^1(y) = \cos y, & h_1 &= 1, \\ \varphi_2(y) &= \text{Es}_1^1(y) = \sin y, & h_2 &= 1 + \widehat{k}^2. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\text{Ec}_1^0(y) = \sqrt{1 - \widehat{k}^2 \cos^2 y}$ не имеет нулей, поэтому по предложению 7.1 является решением $\varphi_0(y)$. Прямая подстановка дает $h_0 = \widehat{k}^2$. То же рассуждение работает и для $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$.

Заметим, что в общем случае величины h_i являются корнями очень сложного трансцендентного уравнения с параметрами n и $\widehat{k}$, а потому не могут быть найдены явно.

При $\widehat{k} = 1$ уравнение Ламе (30) называется вырожденным, в этом случае $\text{sn } z = \text{th } z$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. Пусть $n = 1$ и $\widehat{k} = 1$. Тогда

$$h_0 = h_1 = 1, \quad h_2 = h_3 = 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует немедленно из формул для h_i в работе Айнса [39; раздел 9].

Можно доказать, что h_3 — убывающая функция от $\widehat{k}$, поэтому из предложения 7.3 вытекает следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.4 (см. [48; предложение 3.3]). Пусть $n = 1$. Тогда при $0 < \widehat{k} < 1$ верно неравенство

$$h_3 > 2.$$

8. Окончание доказательства теоремы 4.2 об экстремальных спектральных свойствах тау-поверхностей Лоусона

Как мы знаем из предложения 2.7, ограничения на $\tau_{m,k}$ координатных функций $x^1, \dots, x^4$ являются собственными функциями Δ с собственным числом 2. Явная формула (11) для погружения дает эти функции:

$$\cos mx \cos y, \quad \sin mx \cos y, \quad \cos kx \sin y, \quad \sin kx \sin y. \quad (34)$$

Из этого можно вывести важнейшее для нас предложение о некоторых собственных числах вспомогательной периодической задачи Штурма–Лиувилля.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. Если $m > k$, то верны равенства

$$\lambda_1(m) = 2, \quad \lambda_2(k) = 2, \quad (35)$$

$$\varphi_1(m, y) = \cos y, \quad \varphi_2(k, y) = \sin y. \quad (36)$$

Кратность собственных чисел $\lambda_1(m)$ и $\lambda_2(k)$ вспомогательной периодической задачи Штурма–Лиувилля равна 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что функции (34) не просто собственные функции, а собственные функции вида (16). Поэтому $\cos y$ является решением вспомогательной периодической задачи Штурма–Лиувилля (12), (13) с $l = m$, $\lambda = 2$, а $\sin y$ является решением вспомогательной периодической задачи Штурма–Лиувилля (12), (13) с $l = k$, $\lambda = 2$.

Так как и $\cos y$, и $\sin y$ на интервале $[0, 2\pi)$ имеют по два нуля, то по теореме Штурма 5.3 они должны отвечать собственным значениям с номерами 1 или 2.

Так как мы предполагаем, что $m > k > 0$, то в силу предложения 5.9 случаи, когда $\lambda_1(m) = \lambda_1(k) = 2$ или $\lambda_2(m) = \lambda_2(k) = 2$, невозможны. Предположим, что $\lambda_1(k) = \lambda_2(m) = 2$. Тогда в силу предложения 5.9 и теоремы Штурма 5.3 мы приходим к противоречию, так как

$$2 = \lambda_1(k) < \lambda_1(m) \leq \lambda_2(m) = 2.$$

В результате мы получаем равенства (35), (36).

Допустим, что $\lambda_1(m)$ имеет кратность 2, т. е. $\lambda_1(m) = \lambda_2(m)$. Тогда мы снова приходим к противоречию, так как в силу предложения 5.9

$$2 = \lambda_1(m) = \lambda_2(m) > \lambda_2(k) = 2.$$

Поэтому $\lambda_1(m)$ имеет кратность 1. Аналогичное рассуждение показывает, что $\lambda_2(k)$ тоже имеет кратность 1. Предложение доказано.

Легко видеть, что эти решения (36) вспомогательной периодической задачи Штурма–Лиувилля (12), (13) соответствуют периодическим решениям

$$\varphi_1(y) = \text{Ec}_1^1(y) = \cos y \quad \text{с } h_1 = 1$$

и

$$\varphi_2(y) = \text{Es}_1^1(y) = \sin y \quad \text{с } h_2 = 1 + \widehat{k}^2$$

уравнения Ламе (см. предложение 7.2).

Теперь мы готовы завершить доказательство теоремы 4.2.

ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА теоремы 4.2. Мы разобьем доказательство на три части, отвечающие случаям двулистного накрытия лоусонова тора, случаю лоусонова тора и случаю лоусоновой бутылки Клейна.

8.1. Случай двулистного накрытия $\widehat{\tau}_{m,k}$ лоусонова тора. Как легко видеть из предложения 5.8, для двулистного накрытия $\widehat{\tau}_{1,1}$ клиффордова тора утверждение теоремы 4.2 верно. Поэтому мы исключаем этот случай из дальнейших рассуждений и предполагаем, что $m > k > 1$, $m \equiv k \equiv 1 \pmod{2}$, $(m, k) = 1$.

Из предложения 5.9 следует, что $\lambda_0(l)$ является строго возрастающей функцией l , причем $\lambda_0(0) = 0$. Обозначим через l_c решение уравнения

$$\lambda_0(l) = 2.$$

Тогда

$$\#\{\lambda_0(l) \mid \lambda_0(l) < 2, l > 0, l \in \mathbb{Z}\} = [l_c] - 1,$$

где $[\cdot]$ обозначает функцию округления “вверх”, т. е.

$$[x] = \min\{a \in \mathbb{Z} \mid a \geq x\}.$$

Решающее наблюдение заключается в том, что прямое вычисление позволяет проверить, что уравнение (12) может быть записано как уравнение Ламе в тригонометрической форме (31) с

$$\hat{k} = \frac{\sqrt{m^2 - k^2}}{m}, \quad h = \lambda - \frac{l^2}{m^2}, \quad n(n+1) = \lambda. \quad (37)$$

Заметим, что $0 < \hat{k} < 1$, так как $m > k \geq 1$.

Из соотношений (37) следует, что $\lambda = 2$ соответствует $n = 1$. Тогда из предложений 5.3 и 7.1 следует, что λ_0 отвечает h_0 при $n = 1$. Поэтому из формулы (37) и предложения 7.2 следуют равенства

$$\frac{m^2 - k^2}{m^2} = \hat{k}^2 = h_0 = \lambda_0(l) - \frac{l^2}{m^2}. \quad (38)$$

Напомним, что мы обозначили решение уравнения $\lambda_0(l) = 2$ через l_c . Из формулы (38) мы получаем соотношение

$$\frac{m^2 - k^2}{m^2} = 2 - \frac{l_c^2}{m^2},$$

откуда следует, что

$$l_c = m \sqrt{2 - \frac{m^2 - k^2}{m^2}} = \sqrt{m^2 + k^2}.$$

Легко видеть, что число $\sqrt{m^2 + k^2}$ не является целым, так как m и k оба нечетные. Следовательно,

$$\#\{\lambda_0(l) \mid \lambda_0(l) < 2, l > 0, l \in \mathbb{Z}\} = [l_c] - 1 = [l_c] = [\sqrt{m^2 + k^2}].$$

Рассмотрим теперь $\lambda_1(l)$ и $\lambda_2(l)$. В силу предложения 5.9 собственные числа $\lambda_1(l)$ строго возрастают, откуда следует, что

$$\#\{\lambda_1(l) \mid \lambda_1(l) < 2, l > 0, l \in \mathbb{Z}\} = m - 1.$$

По той же причине

$$\#\{\lambda_2(l) \mid \lambda_2(l) < 2, l > 0, l \in \mathbb{Z}\} = k - 1.$$

Предположим, что $\lambda_3(0) \leq 2$. В силу теоремы Штурма 5.3 имеет место неравенство $\lambda_3(k) > \lambda_2(k) = 2$, откуда следует, что существует некоторое значение $l_3 \geq 0$ такое, что $\lambda_3(l_3) = 2$. Мы знаем, что $\lambda = 2$ соответствует $n = 1$, а λ_3 соответствует h_3 у уравнения Ламе, и мы тогда получаем из формул (37) и предложения 7.4, что

$$2 - \frac{l_3^2}{m^2} = \lambda_3 - \frac{l_3^2}{m^2} = h_3 > 2.$$

Но из этой формулы следует, что

$$\frac{l_3^2}{m^2} < 0,$$

но это невозможно. Полученное противоречие показывает, что $\lambda_3(0) > 2$. Тогда из предложения 5.9 следует, что при всех l мы имеем неравенство

$$\lambda_3(l) > 2,$$

а из теоремы Штурма 5.3 следует, что $\lambda_i(l) > 2$ при $i \geq 3$ и $l \geq 0$.

Теперь мы готовы вычислить $N(2)$. Используя формулу (22) из предложения 5.7, мы получаем

$$\begin{aligned} N(2) &= \#\{\lambda_0(0), \lambda_1(0), \lambda_2(0)\} + 2 \#\{\lambda_0(l) \mid \lambda_0(l) < 2, l > 0, l \in \mathbb{Z}\} \\ &\quad + 2 \#\{\lambda_1(l) \mid \lambda_1(l) < 2, l > 0, l \in \mathbb{Z}\} \\ &\quad + 2 \#\{\lambda_2(l) \mid \lambda_2(l) < 2, l > 0, l \in \mathbb{Z}\} \\ &= 3 + 2[\sqrt{m^2 + k^2}] + 2(m - 1) + 2(k - 1) \\ &= 2([\sqrt{m^2 + k^2}] + m + k) - 1. \end{aligned}$$

Утверждение теоремы для двулистных накрытий лоусоновых торов следует теперь из предложения 4.3 и формулы

$$\begin{aligned} \Lambda_{N(2)}(\widehat{\tau}_{m,k}) &= \lambda_{N(2)}(\widehat{\tau}_{m,k}) \text{Area}(\widehat{\tau}_{m,k}) = 2 \int_0^{2\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} p(y) dy \\ &= 2 \cdot 2\pi \cdot 4kE\left(i \frac{\sqrt{m^2 - k^2}}{k}\right) = 16\pi k \frac{m}{k} E\left(-\frac{\sqrt{m^2 - k^2}}{m}\right) \\ &= 16\pi m E\left(\frac{\sqrt{m^2 - k^2}}{m}\right). \end{aligned}$$

8.2. Случай лоусоновых торов $\tau_{m,k}$. В этом случае величина $N(2)$ получается немедленно из рассуждений для случая двулистного накрытия $\widehat{\tau}_{m,k}$ и формулы (23) из предложения 5.7. Площадь $\tau_{m,k}$ равна половине площади его двулистного накрытия $\widehat{\tau}_{m,k}$, откуда сразу же получается и значение функционала.

8.3. Случай лоусоновых бутылок Клейна $\tau_{m,k}$. Можно предполагать, что $m \equiv 0 \pmod{2}$, $k \equiv 1 \pmod{2}$, $(m, k) = 1$.

Предположим, что $m > k$. Тогда работает то же рассуждение, что и в случае двулистного накрытия $\widehat{\tau}_{m,k}$ лоусонова тора, но следует принять во внимание еще и четность решений.

Как мы знаем из предложения 5.5, решения $\varphi_0(l, y)$ являются четными. Из этого следует, что

$$\#\{\lambda_0(l) \mid \lambda_0(l) < 2, l > 0, l \in \mathbb{Z}, l \text{ четно}, \varphi_0(l, y) \text{ четно}\} = \left\lceil \frac{l_c}{2} \right\rceil - 1.$$

Так как m четно, а k нечетно, то $l_c = \sqrt{m^2 + k^2}$ не может быть четным целым, и мы получаем, что

$$\#\{\lambda_0(l) \mid \lambda_0(l) < 2, l > 0, l \in \mathbb{Z}, l \text{ четно}, \varphi_0(l, y) \text{ четно}\} = \left\lfloor \frac{\sqrt{m^2 + k^2}}{2} \right\rfloor.$$

Как мы знаем из предложения 5.5, решение $\varphi_i(l, y)$ является либо нечетным, либо четным, причем четность сохраняется на интервале $a \leq l \leq b$, на котором $\lambda_i(l)$ имеет кратность 1. Вот здесь нам и пригодится полученное нами ранее из теории уравнения Магнуса–Уинклера–Айнса предложение 6.2: согласно этому предложению, при $0 \leq \lambda < 6$ кратными собственными числами нашей периодической задачи Штурма–Лиувилля (12), (13) могут быть только $\lambda = 2$, но в предложении 8.1 мы доказали, что $\lambda_1(m) = 2$ и $\lambda_2(k) = 2$ имеют кратность 1. Поэтому решение $\varphi_1(l, y)$ при $0 \leq l \leq m$ имеет ту же четность, что и $\varphi_1(m, y) = \cos y$, т. е. является четным, а решение $\varphi_2(l, y)$ при $0 \leq l \leq k$ имеет ту же четность, что и $\varphi_2(k, y) = \sin y$, т. е. является нечетным.

Из этого следует, что

$$\begin{aligned} & \#\{\lambda_1(l) \mid \lambda_1(l) < 2, l > 0, l \in \mathbb{Z}, l \text{ четно}, \varphi_1(l, y) \text{ четно}\} \\ &= \#\{\lambda_1(2), \lambda_1(4), \dots, \lambda_1(m-2)\} = \frac{m}{2} - 1, \\ & \#\{\lambda_2(l) \mid \lambda_2(l) < 2, l > 0, l \in \mathbb{Z}, l \text{ нечетно}, \varphi_2(l, y) \text{ нечетно}\} \\ &= \#\{\lambda_1(1), \lambda_1(3), \dots, \lambda_1(k-2)\} = \frac{k-1}{2}. \end{aligned}$$

Наконец, используя формулу (24) из предложения 5.7, мы получаем

$$\begin{aligned} N(2) &= \#\{\lambda_0(0), \lambda_1(0)\} \\ &+ 2 \#\{\lambda_0(l) \mid \lambda_0(l) < 2, l > 0, l \in \mathbb{Z}, l \text{ четно}, \varphi_0(l, y) \text{ четно}\} \\ &+ 2 \#\{\lambda_1(l) \mid \lambda_1(l) < 2, l > 0, l \in \mathbb{Z}, l \text{ четно}, \varphi_1(l, y) \text{ четно}\} \\ &+ 2 \#\{\lambda_2(l) \mid \lambda_2(l) < 2, l > 0, l \in \mathbb{Z}, l \text{ нечетно}, \varphi_2(l, y) \text{ нечетно}\} \\ &= 2 + 2 \left\lfloor \frac{\sqrt{m^2 + k^2}}{2} \right\rfloor + 2 \left(\frac{m}{2} - 1 \right) + 2 \frac{k-1}{2} = 2 \left\lfloor \frac{\sqrt{m^2 + k^2}}{2} \right\rfloor + m + k - 1. \end{aligned}$$

Утверждение теоремы 4.2 для лоусоновых бутылок Клейна с $m > k > 0$ теперь следует из предложения 4.3 и формулы

$$\begin{aligned} \Lambda_{N(2)}(\tau_{m,k}) &= \lambda_{N(2)}(\tau_{m,k}) \text{Area}(\tau_{m,k}) = 2 \int_0^\pi dx \int_{-\pi}^\pi p(y) dy \\ &= 2\pi \cdot 4kE \left(i \frac{\sqrt{m^2 - k^2}}{k} \right) = 8\pi k \frac{m}{k} E \left(-\frac{\sqrt{m^2 - k^2}}{m} \right) \\ &= 8\pi m E \left(\frac{\sqrt{m^2 - k^2}}{m} \right). \end{aligned}$$

Случай $k > m > 0$ аналогичен. В этом случае нам понадобится другая тригонометрическая форма уравнения Ламе

$$[1 - (\hat{k} \cos y)^2] \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \hat{k}^2 \sin y \cos y \frac{d\varphi}{dy} + [h - n(n+1)(\hat{k} \cos y)^2] \varphi = 0, \quad (39)$$

используемая, например, в книге [19]. Уравнение (39) можно получить из уравнения (30) с помощью замены переменных

$$\operatorname{sn} z = \cos y \quad \Longleftrightarrow \quad y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{am} z.$$

Уравнение (12) можно записать в виде уравнения Ламе в тригонометрической форме (39) с

$$\hat{k} = \frac{\sqrt{k^2 - m^2}}{k}, \quad h = \lambda - \frac{l^2}{k^2}, \quad n(n+1) = \lambda.$$

Заметим, что $0 < \hat{k} < 1$, так как $k > m > 0$. Оставшаяся часть доказательства аналогична доказательству в случае $m > k > 0$, и в конечном результате получаются те же формулы. Теорема 4.2 доказана.

9. Торы Оцуки и формулировка теоремы об их экстремальных свойствах

Тау-поверхности Лоусона являются простейшим примером минимальных поверхностей в сферах, так как они задаются весьма несложной явной параметризацией (11). Поэтому после того как завершено исследование их экстремальных спектральных свойств, естественно желание посмотреть, может ли развитый на примере тау-поверхностей Лоусона метод быть применен в случае неявно заданных минимальных поверхностей в сферах. В общем случае этот вопрос в настоящее время неразрешим, но есть по крайней мере один пример, в котором предлагаемый метод успешно работает, – торы Оцуки.

В 1970 г. в работе [64] Томиносуке Оцуки сконструировал семейство минимальных гиперповерхностей в сферах. Мы интересуемся случаем $\mathbb{S}^3$. В этом частном случае эти гиперповерхности являются двумерными торами, и мы называем их торами Оцуки.

Определение торов Оцуки довольно сложно, так как дается не через явную параметризацию, а через некоторую конструкцию, поэтому мы отложим формальное определение до раздела 11. В настоящий момент достаточно знать, что для каждого рационального числа p/q такого, что $p, q > 0$, $(p, q) = 1$ и $1/2 < p/q < \sqrt{2}/2$, существует двумерный тор, минимально погруженный в $\mathbb{S}^3$, называемый тором Оцуки, который мы будем обозначать через $O_{p/q}$.

Как мы уже упомянули, торы Оцуки определяются неявным образом через некоторую конструкцию, которую мы изложим ниже, и в случае торов Оцуки мы не можем даже записать явно оператор Лапласа–Бельтрами. Тем не менее с помощью описываемого в данном обзоре подхода мы можем доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 9.1 [67]. *Метрика на торе Оцуки $O_{p/q} \looparrowright \mathbb{S}^3$ является экстремальной для функционала $\Lambda_{2p-1}(\mathbb{T}^2, g)$.*

Первоначальное определение Оцуки довольно сложно, и мы предпочитаем определить торы Оцуки как частный случай общей конструкции Сяна и Лоусона минимальных подмногообразий малой кооднородности, предложенной в работе [38]. Изложению этой конструкции и посвящен следующий раздел 10.

10. Теорема Сяна–Лоусона о редукции минимальных подмногообразий по действию группы

Пусть M – риманово многообразие с метрикой g' , а $I(M)$ – полная группа его изометрий. Пусть $G \subset I(M)$ – группа изометрий. Пространство орбит M/G имеет естественную структуру дифференцируемого стратифицированного множества. Обозначим через π естественную проекцию $\pi: M \rightarrow M/G$.

Множество M^* всех орбит главного типа является открытым плотным подмногообразием M . Подмножество M^*/G фактора M/G является многообразием с естественной римановой метрикой g , определенной формулой $g(X, Y) = g'(X', Y')$, где X, Y – касательные векторы в точке $x \in M^*/G$, а X', Y' – касательные векторы в точке $x' \in \pi^{-1}(x) \subset M^*$ такие, что $d_{x'}\pi(X') = X$, $d_{x'}\pi(Y') = Y$ и X', Y' ортогональны к орбите $\pi^{-1}(x)$.

Определим функцию объема $V: M/G \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом. Если $x \in M^*/G$, то $V(x) = \text{Vol}(\pi^{-1}(x))$, а в других точках определим функцию V , продолжив ее по непрерывности. В результате мы получаем функцию V , дифференцируемую на M^*/G и непрерывную на M/G .

Пусть $f: N \rightarrow M$ является G -инвариантным подмногообразием, т. е. G действует на N , и f коммутирует с действием G на N и M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1 (см. [38]). Кооднородностью G -инвариантного подмногообразия $f: N \rightarrow M$ в M называется целое число $\dim N - \nu$, где $\dim N$ – размерность N , а ν – размерность орбит главного типа.

Определение корректно, так как размерность орбит главного типа одинакова.

Определим для каждого целого $k \geq 1$ метрику

$$g_k = V^{2/k} g. \quad (40)$$

Следующая теорема о редукции является важным инструментом для конструирования минимальных подмногообразий.

ТЕОРЕМА 10.2 (теорема Сяна–Лоусона о редукции минимального подмногообразия по действию группы [38; теорема 2]). *Пусть $f: N \rightarrow M$ является G -инвариантным подмногообразием кооднородности k , и пусть M^*/G снабжено метрикой g_k , определенной формулой (40). В этом случае $f: N \rightarrow M$ минимально тогда и только тогда, когда $\bar{f}: N^*/G \rightarrow M^*/G$ минимально.*

11. Торы Оцуки как пример минимального $\mathrm{SO}(2)$ -инвариантного подмногообразия координатности 1 в $\mathbb{S}^3$

Применим сейчас теорему 10.2 Сяна–Лоусона в частном случае многообразия $M = \mathbb{S}^3$, группы $G = \mathrm{SO}(2)$ и следующего действия. Пусть x, y, z, t – координаты в $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{S}^3$ определено уравнением $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$. Действие $\mathrm{SO}(2)$ зададим формулой

$$\alpha \cdot (x, y, z, t) = (\cos \alpha x + \sin \alpha y, -\sin \alpha x + \cos \alpha y, z, t), \quad (41)$$

где $\alpha \in [0, 2\pi)$ – координата на $\mathrm{SO}(2)$. Орбиты главного типа являются окружностями радиуса $q = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$, исключительные орбиты являются точками. Пространство орбит $\mathbb{S}^3/\mathrm{SO}(2)$ является замкнутой полусферой $\mathbb{S}^2_+$, заданной формулами

$$q^2 + z^2 + t^2 = 1, \quad q \geq 0,$$

где точка $(q, z, t) \in \mathbb{S}^2_+$ соответствует орбите $(q \cos \alpha, q \sin \alpha, z, t) \in \mathbb{S}^3$. Легко видеть, что $(\mathbb{S}^3)^*$ является открытым подмногообразием $\mathbb{S}^3$, заданным неравенством $x^2 + y^2 > 0$, а его образ $(\mathbb{S}^3)^*/\mathrm{SO}(2)$ в пространстве орбит – открытой полусферой $\mathbb{S}^2_{>0}$, заданной формулами

$$q^2 + z^2 + t^2 = 1, \quad q > 0.$$

Функция объема задается формулой $V(q, z, t) = 2\pi q$, так как это длина окружности радиуса q .

Введем сферические координаты $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, $0 \leq \theta < 2\pi$ в пространстве орбит $\mathbb{S}^3/\mathrm{SO}(2) = \mathbb{S}^2_+$:

$$\begin{cases} q = \sin \varphi, \\ z = \cos \varphi \cos \theta, \\ t = \cos \varphi \sin \theta. \end{cases}$$

В этих координатах функция объема задается формулой $V(\varphi, \theta) = 2\pi \sin \varphi$.

Добавляя координату $\alpha \in [0, 2\pi)$ вдоль орбит, мы получаем координаты на $\mathbb{S}^3$, удобные с точки зрения действия группы:

$$\begin{cases} x = \cos \alpha \sin \varphi, \\ y = \sin \alpha \sin \varphi, \\ z = \cos \varphi \cos \theta, \\ t = \cos \varphi \sin \theta. \end{cases} \quad (42)$$

Тогда легко получить метрику на $\mathbb{S}^3$:

$$g' = \sin^2 \varphi d\alpha^2 + d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\theta^2, \quad (43)$$

и индуцированную метрику на пространстве орбит $\mathbb{S}^3/\mathrm{SO}(2) = \mathbb{S}^2_+$:

$$g = d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\theta^2.$$

Займемся теперь поиском минимальных $\mathrm{SO}(2)$ -инвариантных подмногообразий $f: N \rightarrow \mathbb{S}^3$ координатности 1. Так как главные орбиты являются окружностями, по теореме Сяна–Лоусона 10.2 эти подмногообразия соответствуют

одномерным минимальным подмногообразиям $N^*/\mathrm{SO}(2)$ в многообразии $(\mathbb{S}^3)^*/\mathrm{SO}(2)$, снабженном метрикой

$$g_1 = V^2 g = 4\pi^2 \sin^2 \varphi (d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\theta^2). \quad (44)$$

Но одномерные минимальные подмногообразия являются просто замкнутыми геодезическими. Таким образом, мы получаем следующую процедуру получения минимальных двумерных подмногообразий в $\mathbb{S}^3$:

1) найти замкнутые геодезические γ на многообразии $(\mathbb{S}^3)^*/\mathrm{SO}(2) = \mathbb{S}_{>0}^2$, снабженном метрикой (44);

2) найти их прообразы $N = \pi^{-1}(\gamma)$ в $\mathbb{S}^3$.

Заметим, что, безусловно, эта процедура дает не все минимальные двумерные подмногообразия, а только те, которые инвариантны относительно действия (41).

Заметим также, что надо быть осторожным с термином “замкнутые геодезические”, так как существуют геодезические на $(\mathbb{S}^3)^*/\mathrm{SO}(2) = \mathbb{S}_{>0}^2$ с концами в дополнении к $(\mathbb{S}^3)^*/\mathrm{SO}(2)$ в $\mathbb{S}^3/\mathrm{SO}(2)$, т. е. на экваторе $q = 0$. Такие геодезические тоже “замкнуты” в некотором смысле, но нам они не интересны, и мы отсылаем к работе Сяна и Лоусона [38] за дальнейшими деталями. Мы рассматриваем только геодезические в $(\mathbb{S}^3)^*/\mathrm{SO}(2) = \mathbb{S}_{>0}^2$, замкнутые в обычном смысле.

Так как замкнутая геодезическая γ гомеоморфна окружности $\mathbb{S}^1$ и группа $\mathrm{SO}(2)$ также гомеоморфна окружности $\mathbb{S}^1$, то полученная минимальная поверхность $N = \pi^{-1}(\gamma)$ является погруженным $\mathrm{SO}(2)$ -инвариантным минимальным двумерным тором в $\mathbb{S}^3$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.1. Погруженный минимальный двумерный тор в $\mathbb{S}^3$, инвариантный относительно заданного формулой (41) действия группы $\mathrm{SO}(2)$ и такой, что его образ при проекции $\pi: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3/\mathrm{SO}(2)$ является замкнутой геодезической в многообразии $(\mathbb{S}^3)^*/\mathrm{SO}(2)$, снабженном метрикой (44), называется тором Оцуки.

Безусловно, это определение не является конструктивным. К сожалению, в настоящее время неизвестно, возможно ли задать торы Оцуки уравнением или явной параметризацией. Тем не менее торы Оцуки могут быть описаны в некоторых терминах.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.2 (см. работы [38], [64]). *За исключением одного частного случая, заданного уравнением $\varphi = \pi/4$ (это клиффордов тор), торы Оцуки находятся во взаимно однозначном соответствии с рациональными числами p/q такими, что*

$$\frac{1}{2} < \frac{p}{q} < \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad p, q > 0, \quad (p, q) = 1.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.3. Обозначим через $O_{p/q}$ тор Оцуки, соответствующий дроби p/q . Нам удобно изменить первоначальное определение 11.1 и использовать термин “торы Оцуки” только для торов $O_{p/q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения 11.2. Доказательство, на самом деле, может быть найдено в работе [64]. Мы пишем “на самом деле”, так как утверждение и доказательство раздроблены в работе [64] на несколько кусков, разбросанных на протяжении длинного текста. Поэтому мы излагаем здесь доказательство в более организованном виде.

Чтобы доказать предложение 11.2, надо исследовать замкнутые геодезические на многообразии $(\mathbb{S}^3)^*/\mathrm{SO}(2)$, снабженном метрикой (44). Используем стандартные обозначения

$$E = 4\pi^2 \sin^2 \varphi, \quad G = 4\pi^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$$

для коэффициентов метрики g_1 .

Уравнение геодезических для $\ddot{\theta}$ выглядит следующим образом:

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \dot{\theta} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(G\dot{\theta}) = 0.$$

Поэтому $c = G\dot{\theta}$ является интегралом движения и

$$\dot{\theta} = \frac{c}{G}. \quad (45)$$

Как известно, вектор скорости геодезической имеет постоянную длину. Положим эту длину равной 1, выбрав на геодезической натуральный параметр. Тогда

$$E\dot{\varphi}^2 + G\dot{\theta}^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{G - c^2}{EG}. \quad (46)$$

Из этого следует, что $G - c^2 \geq 0$, и $G = c^2$ тогда и только тогда, когда $\dot{\varphi} = 0$. Заметим, что на интервале $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ функция $G = 4\pi^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$ является строго возрастающей на $0 < \varphi < \pi/4$, строго убывающей на $\pi/4 < \varphi < \pi/2$ и инвариантной по отношению к преобразованию $\varphi \mapsto \pi/2 - \varphi$.

Заметим также, что точка $\varphi = 0$ не принадлежит $(\mathbb{S}^3)^*/\mathrm{SO}(2)$. Поэтому замкнутые геодезические не проходят через эту точку, и существует минимальное значение a координаты φ на каждой замкнутой геодезической. Из этого следует, что $c = \sqrt{G}|_{\varphi=a} = \pm 2\pi \sin a \cos a$ и геодезическая расположена в кольце $a \leq \varphi \leq \pi/2 - a$. Выберем параметр t таким образом, что $\varphi(0) = a$ и поэтому $\dot{\varphi}(0) = 0$. Мы можем предположить без потери общности, что $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) > 0$.

Надо заметить, что имеется частный случай $a = \pi/4$. В этом случае $\pi/2 - a = a$, откуда следует, что $\varphi(t) \equiv a = \pi/4$. Это исключительный случай, упомянутый в утверждении предложения 11.2. Легко видеть, что это клиффордов тор в $\mathbb{S}^3$ с хорошо известной параметризацией

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha, \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta, \\ t = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta. \end{cases}$$

Нам не интересен этот случай, поэтому мы будем предполагать, что $a \neq \pi/4$.

Из уравнений (45), (46) следует, что

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \pm \frac{\sqrt{G}\sqrt{G-c^2}}{c\sqrt{E}} = \pm \cos \varphi \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\sin^2 a \cos^2 a} - 1}.$$

Правая часть этого уравнения обращается в нуль только при $\varphi = a$ и $\varphi = \pi/2 - a$, и ясно, что φ растет от a до $\pi/2 - a$, затем убывает от $\pi/2 - a$ до a , после чего это поведение повторяется.

Решающим вопросом является вопрос о разности $\Omega(a)$ между значением θ , соответствующим $\varphi = a$, и ближайшим значением θ , соответствующим $\varphi = \pi/2 - a$. Мы имеем

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \pm \frac{1}{\cos \varphi \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\sin^2 a \cos^2 a} - 1}}$$

и

$$\Omega(a) = \int_a^{\pi/2-a} \frac{d\varphi}{\cos \varphi \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\sin^2 a \cos^2 a} - 1}}.$$

Ясно, что геодезическая замкнута тогда и только тогда, когда $\Omega(a) = (p/q)\pi$, где p/q – некоторое рациональное число. Поэтому замкнутые геодезические находятся во взаимно однозначном соответствии с рациональными числами p/q такими, что существует $a \in (0, \pi/4)$ такое, что $\Omega(a) = (p/q)\pi$.

Функция $\Omega(a)$ является сложной трансцендентной функцией, которая может быть выражена в терминах полных эллиптических интегралов первого и третьего рода (см. работу [38]). Тем не менее можно доказать (см. подробное доказательство в работе [64]), что $\Omega(a)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $\Omega(a)$ непрерывна на $(0, \pi/4]$ и строго возрастает;
- 2) $\lim_{a \rightarrow 0+} \Omega(a) = \pi/2$;
- 3) $\Omega(\pi/4) = (\sqrt{2}/2)\pi$.

Из этого следует, что торы Оцуки находятся во взаимно однозначном соответствии с рациональными числами p/q такими, что $p, q > 0$, $(p, q) = 1$ и $\pi/2 < (p/q)\pi < (\sqrt{2}/2)\pi$, откуда вытекает предложение 11.2.

Рассмотрим в качестве примера тор Оцуки $O_{2/3}$. Соответствующее значение a такое, что $\Omega(a) = 2\pi/3$, может быть найдено численно: $a = 0.33787\dots$. Соответствующая замкнутая геодезическая $\pi(O_{2/3})$ изображена на рис. 1.

Для доказательства теоремы 9.1 нам понадобится еще одно свойство торов Оцуки.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.4. *Функции $\cos \theta$ и $\sin \theta$ имеют каждая ровно по $2p$ нуля на геодезической $\pi(O_{p/q})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $\Omega(a) = (p/q)\pi$ является разностью между значениями θ в последовательных минимуме и максимуме функции φ (см. рис. 1 для примера). Следовательно, разность между значениями θ в двух последовательных минимумах функции φ равна $2\Omega(a) = 2\pi p/q$. Так как геодезическая замкнута, существуют наименьшие целые числа $m > 0$ и $n > 0$ такие, что $2\pi(p/q)n = 2\pi m$, т. е. $(p/q)n = m$. Так как $(p, q) = 1$, мы получаем, что $n = q$ и $m = p$.

Рис. 1. Геодезическая $\pi(O_{2/3})$ в пространстве орбит. Мы используем φ и θ как полярные координаты на плоскости. Окружности $\varphi = a$ и $\varphi = \pi/2 - a$ также нарисованы. Угол между направлениями на последовательные минимум и максимум φ равен $\Omega(a) = 2\pi/3$.

Из этого следует, что естественная проекция $\pi(O_{p/q}) \xrightarrow{\theta} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R}$ является p -листным накрытием. Так как $\cos \theta$ и $\sin \theta$ имеют ровно 2 нуля на $[0, 2\pi)$, мы получаем утверждение предложения.

Теперь мы готовы в следующем разделе 12 доказать теорему 9.1 об экстремальных спектральных свойствах торов Оцуки.

12. Доказательство теоремы 9.1 об экстремальных спектральных свойствах торов Оцуки

В основных чертах доказательство сходно с доказательством теоремы 4.2 об экстремальных спектральных свойствах тау-поверхностей Лоусона: точно так же используются теорема Надирашвили, Эль Суфи и Илиаса 2.8 и разделение переменных для сведения задачи подсчета $N(2)$ к аналогичной задаче для вспомогательной периодической задачи Штурма–Лиувилля. В то же время детальный анализ собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля совсем другой, вместо свойств уравнений Магнуса–Уинклера–Айнса и Ламе используется специфика расположения собственных чисел, равных 2. Как и при доказательстве теоремы 4.2, для простоты разобьем его на несколько утверждений.

Из теоремы Надирашвили, Эль Суфи и Илиаса 2.8 вытекает следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.1. *Метрика, индуцированная на торе Оцуки $O_{p/q}$ его погружением $O_{p/q} \hookrightarrow \mathbb{S}^3$, экстремальна для функционала $\Lambda_{N(2)}(\mathbb{T}^2, g)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как тор Оцуки является минимальной поверхностью в сфере $\mathbb{S}^3$ радиуса 1, утверждение немедленно следует из предложения 2.8, в котором надо положить $R = 1$ и $\dim M = 2$.

Сведем теперь проблему подсчета количества $N(2)$ собственных чисел оператора Лапласа–Бельтрами на торе Оцуки, меньших чем 2, к подобной проблеме для вспомогательной периодической задачи Штурма–Лиувилля.

Рассмотрим тор Оцуки $O_{p/q}$. В качестве координат возьмем параметр $\alpha \in [0, 2\pi)$ на $SO(2)$ и натуральный параметр t на геодезической $\pi(O_{p/q})$ такой, что t принимает значения в интервале $[0, t_0)$, где t_0 – длина замкнутой геодезической $\pi(O_{p/q})$ по отношению к метрике g_1 , заданной формулой (44). Пусть $\varphi(t)$ и $\theta(t)$ являются параметризацией геодезической $\pi(O_{p/q})$ через t . Подчеркнем, что невозможно найти $\varphi(t)$ и $\theta(t)$ явно, но оказывается, что это неважно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.2. Пусть $O_{p/q}$ – тор Оцуки, параметризованный через α и t , как описано выше. Тогда метрика, индуцированная погружением $O_{p/q} \hookrightarrow \mathbb{S}^3$, имеет вид

$$\sin^2 \varphi(t) d\alpha^2 + \frac{1}{4\pi^2 \sin^2 \varphi(t)} dt^2, \quad (47)$$

и оператор Лапласа–Бельтрами задается следующей формулой:

$$\Delta f = -\frac{1}{\sin^2 \varphi(t)} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left(4\pi^2 \sin^2 \varphi(t) \frac{\partial f}{\partial t} \right). \quad (48)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Метрика g' на сфере $\mathbb{S}^3$ задана формулой (43). Поэтому метрика на торе Оцуки $O_{p/q}$ задана формулой

$$\sin^2 \varphi(t) d\alpha^2 + (\dot{\varphi}^2(t) + \cos^2 \varphi(t) \dot{\theta}^2(t)) dt^2.$$

Но из уравнения (46) следует, что

$$\dot{\varphi}^2(t) + \cos^2 \varphi(t) \dot{\theta}^2(t) = \frac{1}{4\pi^2 \sin^2 \varphi(t)},$$

откуда вытекает формула (47). Формула (48) получается прямым вычислением. Предложение доказано.

Теперь мы готовы к разделению переменных. Рассмотрим вспомогательную периодическую задачу Штурма–Лиувилля с дополнительным параметром l :

$$\frac{d}{dt} \left(4\pi^2 \sin^2 \varphi(t) \frac{dh(t)}{dt} \right) + \left(\lambda - \frac{l^2}{\sin^2 \varphi(t)} \right) h(t) = 0, \quad (49)$$

$$h(t + t_0) \equiv h(t). \quad (50)$$

Пусть $h(l, t)$ обозначает решение задачи (49), (50). Как и ранее, мы рассматриваем l как параметр в уравнении (49) и его решении $h(l, t)$. Например, мы считаем l фиксированным и рассматриваем t как независимую переменную, когда обсуждаем нули функции $h(l, t)$.

Уравнение (49) записано в стандартной форме задачи Штурма–Лиувилля, поэтому верна следующая теорема (см., например, книгу [12]).

ТЕОРЕМА 12.3 (теорема Штурма об осцилляции решений периодической задачи Штурма–Лиувилля). Существует бесконечное количество собственных чисел $\lambda_i(l)$ периодической задачи Штурма–Лиувилля (49), (50). При фиксированном l собственные числа $\lambda_i(l)$ образуют такую последовательность, что верны неравенства

$$\lambda_0(l) < \lambda_1(l) \leq \lambda_2(l) < \lambda_3(l) \leq \lambda_4(l) < \lambda_5(l) \leq \lambda_6(l) < \dots \quad (51)$$

При $\lambda = \lambda_0(l)$ существует единственная (с точностью до умножения на ненулевую константу) собственная функция $h_0(l, t)$. Если $\lambda_{2i+1}(l) < \lambda_{2i+2}(l)$ для некоторого $i \geq 0$, то существует единственная (с точностью до умножения на ненулевую константу) собственная функция $h_{2i+1}(l, t)$ с собственным числом $\lambda_{2i+1}(l)$ кратности 1, а также единственная (с точностью до умножения на ненулевую константу) собственная функция $h_{2i+2}(l, t)$ с собственным числом $\lambda_{2i+2}(l)$ кратности 1. Если $\lambda_{2i+1}(l) = \lambda_{2i+2}(l)$, то существуют две независимые собственные функции $h_{2i+1}(l, t)$ и $h_{2i+2}(l, t)$ с собственным числом $\lambda_{2i+1}(l) = \lambda_{2i+2}(l)$ кратности 2.

Собственные функции $h_0(l, t)$ не имеют нулей на $[0, t_0)$. Собственные функции $h_{2i+1}(l, t)$ и $h_{2i+2}(l, t)$, $i \geq 0$, имеют каждая ровно $2i + 2$ нуля на $[0, t_0)$.

Как и в случае тау-поверхностей Лоусона, существует связь между периодической задачей Штурма–Лиувилля (49), (50) и спектральной задачей для оператора Штурма–Лиувилля Δ на торе Оцуки $O_{p/q}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.4. Число λ является собственным значением оператора Δ тогда и только тогда, когда существуют неотрицательное целое число l и собственное число $\lambda_i(l)$ периодической задачи Штурма–Лиувилля (49), (50) с параметром l такие, что $\lambda_i(l) = \lambda$.

Пространство собственных функций оператора Лапласа–Бельтрами Δ с собственным числом λ имеет базис, состоящий из функций вида

$$h_i(l, t) \cos l\alpha, \quad (52)$$

где l может принимать значения $0, 1, 2, \dots$ и существует такое i , что $\lambda_i(l) = \lambda$, и

$$h_i(l, t) \sin l\alpha, \quad (53)$$

где l может принимать значения $1, 2, \dots$ и существует такое i , что $\lambda_i(l) = \lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что Δ коммутирует с $\partial/\partial\alpha$. Из этого следует, что Δ имеет базис собственных функций вида $h(l, t) \cos l\alpha$ и $h(l, t) \sin l\alpha$. Подставляя эти собственные функции в уравнение $\Delta f = \lambda f$, мы получаем уравнение (49). Кроме того, эти решения должны быть инвариантными относительно преобразований

$$(\alpha, t) \mapsto (\alpha + 2\pi, t), \quad (\alpha, t) \mapsto (\alpha, t + t_0).$$

Из этих условий вытекают условия $l \in \mathbb{Z}$ и периодические граничные условия (50). Остается только применить теорему 12.3. Предложение доказано.

Теперь мы можем выразить искомую нами величину $N(2)$ в терминах собственных чисел $\lambda_i(l)$ вспомогательной задачи Штурма–Лиувилля.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.5. Пусть $O_{p/q}$ – тор Оцуки. Тогда

$$N(2) = \#\{\lambda_i(0) \mid \lambda_i(0) < 2\} + 2 \#\{\lambda_i(l) \mid \lambda_i(l) < 2, l > 0, l \in \mathbb{Z}\}. \quad (54)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Собственное число $\lambda_i(0)$ дает ровно одну базисную собственную функцию

$$h_i(0, t) \cos(0\alpha) = h_i(0, t)$$

оператора Δ . Из этого следует, что каждое собственное число $\lambda_i(0)$ вспомогательной задачи Штурма–Лиувилля соответствует одному собственному числу $\lambda_q = \lambda_i(0)$ оператора Лапласа–Бельтрами Δ . Каждое собственное число $\lambda_i(l)$, $l > 0$, дает ровно две базисные собственные функции

$$h_i(l, t) \cos l\alpha \quad \text{и} \quad h_i(l, t) \sin l\alpha$$

оператора Лапласа–Бельтрами Δ . Из этого следует, что для любого $l > 0$ каждое собственное число $\lambda_i(l)$ соответствует двум собственным числам $\lambda_q = \lambda_{q+1} = \lambda_i(l)$ оператора Лапласа–Бельтрами Δ . Из этого вытекает формула (54). Предложение доказано.

Как мы уже отмечали при доказательстве теоремы 4.2, собственные числа $\lambda_i(l)$ вспомогательной задачи Штурма–Лиувилля нумеруются двумя индексами, i и l , и нам надо выяснить, как ведут себя эти собственные числа при фиксированном i или l .

Неравенство (51) из теоремы Штурма 12.3 сообщает нам, что при фиксированном l с ростом i собственные числа $\lambda_i(l)$ не убывают, причем при переходе от четного номера к нечетному всегда строго возрастают:

$$\lambda_0(l) < \lambda_1(l) \leq \lambda_2(l) < \lambda_3(l) \leq \lambda_4(l) < \lambda_5(l) \leq \lambda_6(l) < \dots$$

Как и в случае тау-поверхностей Лоусона, $\lambda_i(l)$ при фиксированном i возрастают с ростом l – доказательство имеется в [48].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.6. *При фиксированном i и $l \geq 0$ собственные числа $\lambda_i(l)$ вспомогательной периодической задачи Штурма–Лиувилля (49), (50) являются строго возрастающими функциями параметра l .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство полностью аналогично доказательству предложения 2.6 из работы Карпухина [48].

Теперь, изложив весь необходимый материал и доказав все вспомогательные утверждения, мы готовы завершить доказательство теоремы 9.1 об экстремальных спектральных свойствах торев Оцуки.

ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 9.1. Из формулы (42) следует, что координатные функции x , y , z и t при ограничении на тор Оцуки $O_{p/q}$ задаются формулами

$$\begin{cases} x|_{O_{p/q}} = \cos \alpha \sin \varphi(t), \\ y|_{O_{p/q}} = \sin \alpha \sin \varphi(t), \\ z|_{O_{p/q}} = \cos \varphi(t) \cos \theta(t), \\ t|_{O_{p/q}} = \cos \varphi(t) \sin \theta(t). \end{cases}$$

По предложению 2.7 эти ограничения являются собственными функциями с собственным числом, равным 2, оператора Лапласа–Бельтрами Δ на торе Оцуки $O_{p/q}$.

Функция $x|_{O_{p/q}}$ имеет вид (52) с $l = 1$, функция $y|_{O_{p/q}}$ имеет вид (53) с $l = 1$, функции $z|_{O_{p/q}}$ и $t|_{O_{p/q}}$ имеют вид (52) с $l = 0$.

Из этого следует, что $\sin \varphi(t)$ должна быть собственной функцией периодической задачи Штурма–Лиувилля (49), (50) с $l = 1$ и собственным числом $\lambda = 2$. По той же причине $\cos \varphi(t) \cos \theta(t)$ и $\cos \varphi(t) \sin \theta(t)$ должны быть собственными функциями периодической задачи Штурма–Лиувилля (49), (50) с $l = 0$ и $\lambda = 2$. Отметим, что при желании это можно проверить и прямым, но очень длинным вычислением.

Вспомним теперь, что на торе Оцуки $O_{p/q}$ выполнено неравенство

$$0 < a \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - a < \frac{\pi}{2}.$$

Из этого вытекает, что у $\sin \varphi(t)$ нет нулей. Поэтому по теореме Штурма 12.3

$$h_0(1, t) = \sin \varphi(t) \quad \text{и} \quad \lambda_0(1) = 2.$$

По предложению 11.4 функции $\cos \varphi(t) \cos \theta(t)$ и $\cos \varphi(t) \sin \theta(t)$ имеют каждая ровно $2p$ нулей. Поэтому по теореме Штурма 12.3

$$\begin{aligned} h_{2p-1}(1, t) &= \cos \varphi(t) \cos \theta(t), & h_{2p}(1, t) &= \cos \varphi(t) \sin \theta(t), \\ \lambda_{2p-1}(0) &= \lambda_{2p}(0) = 2. \end{aligned}$$

Докажем теперь, что $\lambda_0(0), \dots, \lambda_{2p-2}(0)$ являются в точности такими собственными числами $\lambda_i(l)$, что $\lambda_i(l) < 2$.

По теореме Штурма 12.3 верны неравенства

$$\begin{aligned} \lambda_0(0) &< \lambda_1(0) \leq \lambda_2(0) < \lambda_3(0) \leq \lambda_4(0) < \dots \\ &< \lambda_{2p-3}(0) \leq \lambda_{2p-2}(0) < \lambda_{2p-1}(0) = 2, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\lambda_0(0), \dots, \lambda_{2p-2}(0) < 2$.

Используя теорему Штурма 12.3 еще раз, видим, что

$$2 = \lambda_{2p-1}(0) = \lambda_{2p}(0) < \lambda_{2p+1}(0) \leq \lambda_{2p+2}(0) < \dots.$$

Отсюда следует, что $\lambda_i(0) \geq 2$, если $i > 2p - 2$.

Мы знаем, что $\lambda_0(1) = 2$. По теореме Штурма 12.3

$$2 = \lambda_0(1) < \lambda_1(1) \leq \lambda_2(1) < \lambda_3(1) \leq \lambda_4(1) < \dots,$$

откуда следует, что $\lambda_i(1) \geq 2$ для любого i .

По предложению 12.6 $\lambda_0(l) > \lambda_0(1) = 2$ для всех $l > 1$. Тогда по теореме Штурма 12.3 для всех $l > 1$ имеем

$$2 < \lambda_0(l) < \dots < \lambda_{2i+1}(l) \leq \lambda_{2i+2}(l) < \dots.$$

Поэтому $\lambda_i(l) > 2$ для любого i и для любого $l > 1$.

По предложению 12.5,

$$\begin{aligned} N(2) &= \#\{\lambda_i(0) \mid \lambda_i(0) < 2\} + 2 \#\{\lambda_i(l) \mid \lambda_i(l) < 2, l > 0, l \in \mathbb{Z}\} \\ &= \#\{\lambda_0(0), \dots, \lambda_{2p-2}(0)\} = 2p - 1. \end{aligned}$$

Утверждение теоремы теперь немедленно следует из предложения 12.1. Теорема 9.1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 12.7. Среди метрик на торах Оцуки есть экстремальные метрики для функционалов Λ_j при любом нечетном $j \geq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство немедленно следует из существования рационального числа p/q такого, что $p, q > 0$, $(p, q) = 1$, $2p - 1 = j \geq 3$ и

$$\frac{1}{2} < \frac{p}{q} < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

После завершения исследования уже известных ранее тау-поверхностей Лоусона и торов Оцуки становится интересно сконструировать новые, до сих пор неизвестные минимальные торы в сферах и опробовать на них описываемый в данном обзоре подход к нахождению экстремальных метрик. Чтобы разобратся в конструировании минимальных торов, надо присмотреться к уже существующим методам, что мы и делаем в следующем разделе 13.

13. Различные конструкции торов, минимальных в сферах

Как уже было сказано в разделе 4, в 1970 г. в работе [56] Лоусон определил несколько семейств минимальных поверхностей в S^3 , включая семейство торов и бутылок Клейна $\tau_{m,n}$ (см. определение 4.1).

Со времен работы Лоусона [56] были предложены различные методы конструирования или описания минимальных торов в сферах. Сколь-нибудь исчерпывающий обзор этих методов потребовал бы написания толстой книги, поэтому мы упомянем тут только некоторые из них.

Уже в работе Лоусона [56] исследуются биполярные поверхности к минимальным поверхностям в S^3 . Определение биполярных поверхностей довольно просто. Пусть $f: M \looparrowright S^3 \subset \mathbb{R}^4$ – погружение двумерного многообразия M в трехмерную сферу. Пусть $f^*: M \looparrowright S^3 \subset \mathbb{R}^4$ – отображение Гаусса отображения f , которое точке $x \in M$ ставит в соответствие конец вектора единичной нормали к $T_x M$ в $T_x S^3$, для определения этой нормали нужно выбрать ориентацию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.1. Образ $f \wedge f^*(M)$ погружения

$$f \wedge f^*: M \looparrowright \mathbb{R}^4 \wedge \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^6$$

называется поверхностью, биполярной к $f(M)$. Обычно поверхность, биполярная к поверхности N , обозначается $\tilde{N}$.

Несложно доказать, что если $f: M \looparrowright S^3 \subset \mathbb{R}^4$ было минимальным погружением в сферу, то образ $f \wedge f^*(M)$ лежит на самом деле на сфере $S^5 \subset \mathbb{R}^6$ и минимален в ней (см. [50], [56]). Иногда, как в случае биполярных тау-поверхностей Лоусона $\tilde{\tau}_{m,k}$ или биполярных торов Оцуки $\tilde{O}_{p/q}$, биполярные поверхности оказываются лежащими в некотором сечении S^5 плоскостью, проходящей через центр сферы, поэтому их можно рассматривать как минимальные подмногообразия в S^4 . Таким образом, построение биполярных поверхностей к минимальным поверхностям в S^3 является методом построения минимальных поверхностей в S^5 или S^4 .

Далее следует упомянуть, конечно же, развитый в работе [38] Сяном и Лоусоном метод построения минимальных подмногообразий с помощью теоремы о редукции минимальных подмногообразий по действию группы, который мы описали в разделе 10.

С помощью этого метода в разделе 11 были построены торы Оцуки $O_{p/q}$, но это, конечно, не единственный пример его применения. Сами Сян и Лоусон кратко упоминают торы Оцуки, но описывают также и другие примеры $\mathbb{S}^1$ -инвариантных минимальных торов в $\mathbb{S}^3$. Еще один пример можно найти в работе [21] Феруса и Педита, где подход Сяна–Лоусона применяется в случае $\mathbb{S}^1$ -инвариантных минимальных торов в $\mathbb{S}^4$.

К сожалению, метод работы [38] дает описание семейств минимальных торов, но не дает явных формул для этих торов. Например, как мы видели в случае торов Оцуки $O_{p/q}$, они находятся во взаимно однозначном соответствии с рациональными числами p/q такими, что

$$\frac{1}{2} < \frac{p}{q} < \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad p, q > 0, \quad (p, q) = 1,$$

но мы не знаем явных формул для торов Оцуки, так как построение тора $O_{p/q}$ по дроби p/q требует решения трансцендентного уравнения и системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Другой подход основан на методах интегрируемых систем и описывает минимальные торы в сферах через алгебраическую геометрию. Этот подход был развит разными авторами, начиная с работы Хитчина [35], где рассматривался случай $\mathbb{S}^3$, и заканчивая работой Берстолла [8], в которой был рассмотрен общий случай $\mathbb{S}^n$. На самом деле, данный метод исследования минимальных торов в сферах был частью значительно более широкого исследования многими авторами гармонических отображений из торов в симметрические пространства. Так как нас интересуют минимальные торы в сферах, упомянем здесь работу Феруса, Педита, Пинкаля и Стерлинга [22], в которой рассматривался случай $\mathbb{S}^4$. Мы отсылаем заинтересованного читателя к недавней работе Карберри [10], содержащей обзор текущей ситуации в данном подходе с весьма обширной библиографией.

Этот подход описывает минимальные торы в $\mathbb{S}^n$ через так называемые алгебро-геометрические спектральные данные, включающие алгебраическую кривую рода γ , дивизор $\mathcal{D} = P_1 + \dots + P_\gamma$, состоящий из γ точек, и некоторые дополнительные данные, удовлетворяющие так называемым *условиям периодичности*. Хорошая новость заключается в том, что минимальные торы могут быть реконструированы из этих алгебро-геометрических спектральных данных через сложные, но, в принципе, явные формулы, включающие тета-функции рода γ . Плохая новость заключается в том, что не существует конструктивного описания алгебро-геометрических спектральных данных, удовлетворяющих условиям периодичности.

В работах [9], [10] Карберри интенсивно изучала эти условия периодичности, но в результате удалось получить только результаты существования. Мы процитируем один из таких результатов, представляющий интерес для наших целей.

ТЕОРЕМА 13.2 (Карберри [9]). *Для любого целого числа $n \geq 0$ существует счетное число вещественных n -параметрических семейств минимальных погружений тора с прямоугольной решеткой в $\mathbb{S}^3$. Каждое семейство состоит из отображений из фиксированного тора.*

Упомянем также еще один метод, приводящий к некоторым интересным примерам минимальных поверхностей в сферах. Это предложенный Мироновым подход для конструирования гамильтоново-минимальных и минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{CP}^n$, основанный на пересечении вещественных квадратиков специального вида (см. работу Миронова [59]). Одним из побочных продуктов данной конструкции являются минимальные поверхности в сферах (см. больше деталей в работе Карпухина [48]).

Нам этот подход интересен тем, что он приводит к построению двухпараметрического семейства $M_{m,k}$ торов, минимально погруженных в $\mathbb{S}^5$. Мы не будем здесь давать явную параметризацию этого семейства, так как оно является подсемейством нашего трехпараметрического семейства $T_{a,b,c}$ из теоремы 15.1: $M_{m,k} \cong T_{m,k,m+k}$. Семейство $M_{m,k}$ было впервые описано в конформных координатах Джойсом в работе [44] и Хаскинсом в работе [30], но в параметризации как у $T_{m,k,m+k}$ оно впервые появилось в работе Миронова [60]. Детальное исследование семейства $M_{m,k}$, в том числе и экстремальных спектральных свойств, можно найти в работе Карпухина [46].

Таким образом, минимальные торы в сферах описаны, но в неявном виде, и только несколько минимальных торов с явно заданными параметризациями известны. В то же время недавний прогресс в изучении экстремальных метрик вернул минимальные поверхности в сферах в центр нашего внимания, что побуждает нас искать новые способы нахождения минимальных поверхностей в сферах. В следующем разделе 14 излагается предложенный в работе [68] метод расширения известных семейств минимальных торов в сферах, применение которого продемонстрировано затем в разделе 15 на примере тау-поверхностей Лоусона.

14. Расширение семейств минимальных торов в сферах с помощью теоремы Такахаси

Теорема Такахаси 2.6 описывает минимальные погружения в терминах собственных функций оператора Лапласа–Бельтрами. Это система уравнений с частными производными, эквивалентная стандартной системе уравнений с частными производными, описывающей минимальные погружения в терминах нормального вектора средней кривизны. Описание через теорему Такахаси 2.6 является более естественным с точки зрения спектральной геометрии, поэтому было бы разумно искать минимальные поверхности в сферах с ее помощью.

Как ни удивительно, этот подход до недавних пор не вызывал интереса. Насколько известно автору, единственным примером успешного применения этого подхода к конструированию минимальных поверхностей в сферах является упомянутая во введении работа 2006 г. Якобсона, Надирашвили и Полтеровича [41]. В этой работе с помощью теоремы Такахаси и свойств собственных функций было сконструировано минимальное изометрическое вложение

бутылки Клейна в $\mathbb{S}^4$ такое, что индуцированная метрика оказалась экстремальной (а как потом доказали Эль Суфи, Джакомини и Жазар в работе [16], и единственной экстремальной) метрикой для первого собственного числа на бутылке Клейна. Эта метрика оказалась метрикой на биполярной поверхности Лоусона $\tilde{\tau}_{3,1}$.

В настоящее время представляется невозможным описать явным образом даже все минимальные торы в сферах, не говоря уже о поверхностях высших родов. Возможно ли с помощью теоремы Такахаси найти хотя бы новые частные примеры *явно* заданных минимальных поверхностей в сферах?

В данном разделе мы описываем предложенный в работе [68] подход, позволяющий расширять уже известные семейства минимальных торов в сферах, сводя эту задачу к решению системы алгебраических уравнений. С помощью этого метода мы получим в следующем разделе теорему 15.1, в которой двухпараметрическое семейство тау-поверхностей Лоусона будет расширено до трехпараметрического семейства минимальных поверхностей в сфере, включающего в себя торы и бутылки Клейна.

Начнем с очень наивной идеи. Пусть x, y – координаты в плоскости $\mathbb{R}^2$. Выберем наугад эллиптический дифференциальный оператор второго порядка L на плоскости, инвариантный относительно сдвигов $(x, y) \mapsto (x + 2\pi, y)$, $(x, y) \mapsto (x, y + 2\pi)$. Рассмотрим спектральную задачу для L с периодическими граничными условиями

$$\begin{cases} L\psi = \lambda\psi, \\ \psi(x, y) = \psi(x + 2\pi, y) = \psi(x, y + 2\pi). \end{cases}$$

Пусть $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ – спектр этой спектральной задачи. Выберем собственное число λ_j и несколько соответствующих ему линейно независимых собственных функций $f_1, \dots, f_{n+1}$. Рассмотрим отображение

$$f: \mathbb{R}^2/\mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$

где $f = (f_1, \dots, f_{n+1})$.

Пусть метрика g на торе $\mathbb{R}^2/\mathcal{L}$ является образом f^*g_0 стандартной евклидовой метрики g_0 на $\mathbb{R}^{n+1}$ при отображении f . Может оказаться, что метрика g не является положительно определенной.

Из теоремы Такахаси 2.6 следует, что если

- 1) g – риманова метрика (т.е. она положительно определена) и
- 2) оператор Лапласа–Бельтрами для g совпадает с начальным дифференциальным оператором L ,

то f является минимальным изометрическим погружением тора $(\mathbb{R}^2/\mathcal{L}, g)$ в сферу $\mathbb{S}_R^n$ радиуса R такого, что $\lambda_j = 2/R^2$.

Эта идея наивна, так как на практике нет никаких шансов, что, начав со случайного оператора L , удастся удовлетворить условиям 1) и 2). Поэтому нам нужно найти способ “умно выбрать” начальный оператор L .

Теперь самое время вспомнить теорему Карберри 13.2. Эта теорема доказана для случая $\mathbb{S}^3$, но можно надеяться, что в общем случае минимальные торы в сферах тоже “любят жить семьями”. Поэтому ключевая идея следующая: *начинать с оператора L , который уже встречался как оператор Лапласа–Бельтрами на минимальных торах в сфере.*

Вспомним теперь, что известные примеры экстремальных метрик являются метриками на торах вращения или на факторах торов вращения: тау-поверхности Лоусона [66], торы Оцуки [67], биполярные тау-поверхности Лоусона [55], биполярные торы Оцуки [45] и семейство торов $M_{m,k}$, изученное в [46]. Поэтому мы ограничимся сейчас метриками вращения.

Так как с помощью масштабирования всегда можно перейти к случаю сферы радиуса 1, отвечающей по формуле (10) собственному числу $\lambda = 2$, мы интересуемся уравнением

$$L\psi = 2\psi \quad (55)$$

и его решениями вида

$$\psi(x, y) = \varphi(y) \sin mx \quad \text{или} \quad \psi(x, y) = \varphi(y) \cos mx.$$

После разделения переменных в уравнении с частными производными (55) получаем линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\varphi''(y) + a(m, y)\varphi'(y) + b(m, y)\varphi(y) = 0 \quad (56)$$

с периодическими граничными условиями

$$\varphi(y + 2\pi) = \varphi(y). \quad (57)$$

Поэтому мы предлагаем следующий метод построения минимальных торов вращения в сферах.

- Рассмотрим уравнение

$$\varphi''(y) + A(\nu, y)\varphi'(y) + B(\nu, \mu, y)\varphi(y) = 0 \quad (58)$$

со спектральным параметром μ и (возможно) дополнительным параметром ν (который может быть и векторнозначным), такое, что оно уже возникало после разделения переменных в спектральной задаче (55) для оператора Лапласа–Бельтрами на минимальном торе в сфере единичного радиуса.

• Возьмем решения $\varphi_1(y), \dots, \varphi_l(y)$ уравнения (58) с периодическими граничными условиями (57), соответствующие $\mu = \mu_1, \dots, \mu = \mu_l$ соответственно. Эти решения зависят от параметра ν .

- Рассмотрим отображение $f: \mathbb{R}^2/\mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}^{2l}$, заданное формулой

$$f(x, y) = (c_1\varphi_1(y) \cos m_1x, c_1\varphi_1(y) \sin m_1x, \dots, \\ c_l\varphi_l(y) \cos m_lx, c_l\varphi_l(y) \sin m_lx),$$

где $c_1, \dots, c_l$ — неизвестные константы.

• Положим $g = f^*g_0$, где g_0 — стандартная евклидова метрика на $\mathbb{R}^{2l}$.
 • Найдем оператор Лапласа–Бельтрами L для метрики g . Заметим, что L зависит от $\nu, c_1, \dots, c_l, m_1, \dots, m_l$.

- Разделим переменные в уравнении $L\psi(x, y) = 2\psi(x, y)$ и получим уравнение

$$\varphi''(y) + a_T(\nu, c_1, \dots, c_l, m_1, \dots, m_l; m, y)\varphi'(y) \\ + b_T(\nu, c_1, \dots, c_l, m_1, \dots, m_l; m, y)\varphi(y) = 0. \quad (59)$$

Рассмотрим функции

$$\tilde{\varphi}_1(y) = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2(c^2 - a^2)}} \sin y, \quad \tilde{\varphi}_2(y) = \sqrt{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2(c^2 - b^2)}} \cos y, \quad (63)$$

$$\tilde{\varphi}_3(y) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2(b^2 - c^2)}} \sqrt{1 - \frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2} \sin^2 y}, \quad (64)$$

зависящие от параметров a , b и c . Эти функции являются в точности домноженными на некоторые константы тремя решениями (62) уравнения Ламе в тригонометрической форме (31) с $n = 1$ и $k = \sqrt{(b^2 - a^2)/(c^2 - a^2)}$.

ТЕОРЕМА 15.1 [68]. Пусть $F_{a,b,c}: \mathbb{R}^2 \hookrightarrow S^5 \subset \mathbb{R}^6$ – трехпараметрическое дважды периодическое погружение плоскости в пятимерную сферу радиуса 1, заданное формулой

$$F_{a,b,c}(x, y) = (\sin ax \tilde{\varphi}_1(y), \cos ax \tilde{\varphi}_1(y), \sin bx \tilde{\varphi}_2(y), \cos bx \tilde{\varphi}_2(y), \sin cx \tilde{\varphi}_3(y), \cos cx \tilde{\varphi}_3(y)), \quad (65)$$

где параметры a , b , c удовлетворяют одному из следующих условий:

- а) a, b, c целые и $|c| > \sqrt{a^2 + b^2}$,
- б) a, b ненулевые целые и $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Пусть $\mathcal{L} = \{(2\pi n, 2\pi m) \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$, а $\tilde{F}_{a,b,c}: \mathbb{R}^2/\mathcal{L} \rightarrow S^5 \subset \mathbb{R}^6$ – отображение, естественным образом индуцированное $F_{a,b,c}$.

Пусть

$$S(a, b, c) = \frac{4\pi}{\sqrt{c^2 - a^2}} \left(2(c^2 - a^2) E \left(\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}} \right) - (c^2 - a^2 - b^2) K \left(\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}} \right) \right).$$

Тогда верны следующие утверждения.

1) Образ $T_{a,b,c} = F_{a,b,c}(\mathbb{R}^2)$ является минимальной компактной поверхностью в пятимерной сфере S^5 .

2) Случай б) соответствует тау-поверхности Лоусона $\tau_{a,b} \cong T_{a,b,\sqrt{a^2+b^2}}$. Различные тау-поверхности Лоусона соответствуют неупорядоченным парам $a, b \geq 1$ таким, что $(a, b) = 1$. Поверхность $T_{a,b,\sqrt{a^2+b^2}}$ является лоусоновым тором $\tau_{a,b}$, если a и b нечетные, и лоусоновой бутылкой Клейна $\tau_{a,b}$, если или a , или b четное.

3) В случае б) метрика, индуцированная на $\tau_{a,b} \cong T_{a,b,\sqrt{a^2+b^2}}$, является экстремальной для функционала $\Lambda_j(\mathbb{T}^2, g)$, если $\tau_{a,b}$ – лоусонов тор, или для функционала $\Lambda_j(\mathbb{KL}, g)$, если $\tau_{a,b}$ – лоусонова бутылка Клейна, где $j = 2[\sqrt{a^2 + b^2}/2] + a + b - 1$ и $[\cdot]$ обозначает целую часть. Соответствующее значение функционала равно $\Lambda_j(\tau_{a,b}) = 8\pi a E(\sqrt{a^2 - b^2}/a)$.

4) В случае а) при целом $l \geq 1$ мы имеем $T_{a,b,c} = T_{la,lb,lc}$. Более того, $T_{-a,b,c}$, $T_{a,-b,c}$, $T_{a,b,-c}$ и $T_{b,a,c}$ изометричны $T_{a,b,c}$. Поэтому достаточно рассматривать неотрицательные целые a, b, c , удовлетворяющие условиям а), такие, что $(a, b, c) = 1$, и учитывать, что (a, b, c) и (b, a, c) эквивалентны.

5) В случае а) в зависимости от четности a, b и c мы имеем следующие три подслучая.

- I) Если a и b имеют разную четность и c четно, то поверхность $T_{a,b,c}$ является бутылкой Клейна и $\tilde{F}_{a,b,c}: \mathbb{R}^2/\mathcal{L} \rightarrow T_{a,b,c}$ является двулистным накрытием. Площадь $T_{a,b,c}$ равна $S(a,b,c)/2$.
- II) Если a и b нечетны и c четно, то поверхность $T_{a,b,c}$ является тором и $\tilde{F}_{a,b,c}: \mathbb{R}^2/\mathcal{L} \rightarrow T_{a,b,c}$ является двулистным накрытием. Площадь $T_{a,b,c}$ равна $S(a,b,c)/2$.
- III) В противном случае поверхность $T_{a,b,c}$ является тором и отображение $\tilde{F}_{a,b,c}: \mathbb{R}^2/\mathcal{L} \rightarrow T_{a,b,c}$ взаимно однозначно. Площадь $T_{a,b,c}$ равна $S(a,b,c)$.

6) В случае а) метрика, индуцированная на торе или бутылке Клейна $T_{a,b,c}$, является экстремальной для функционала $\Lambda_j(\mathbb{T}^2, g)$ или $\Lambda_j(\mathbb{KL}, g)$ соответственно, где

- I) если a и b имеют разную четность и c четно, то $j = a + b + c - 3$, за исключением случая $T_{a,0,c}$, в котором $j = a + c - 2$,
- II) если a и b нечетны и c четно, то $j = a + b + c - 3$,
- III) в противном случае $j = 2(a + b + c) - 3$, за исключением случая $T_{a,0,c}$, в котором $j = 2(a + c) - 2$, и случая $T_{0,0,1}$, в котором $j = 1$.

Соответствующее значение функционала $\Lambda_j(T_{a,b,c})$ равно $S(a,b,c)$ в подслучаях I) и II) и $2S(a,b,c)$ в подслучае III).

ЗАМЕЧАНИЕ 15.2. В случае а) параметры a и b могут равняться нулю. В частности, $T_{0,0,1}$ является клиффордовым тором, но с метрикой, умноженной на $1/2$. Поэтому нет ничего удивительного в том, что метрика на $T_{0,0,1}$ является экстремальной для $\Lambda_1(\mathbb{T}^2, g)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 15.3. Мы также объясним в разделе 16, что $T_{1,0,2}$ изометрична биполярной лоусоновой бутылке Клейна $\tilde{\tau}_{3,1}$, несущей на себе единственную метрику, экстремальную для $\Lambda_1(\mathbb{KL}, g)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 15.4. Метрики на поверхностях $T_{a,b,c}$ из теоремы 15.1 включают в себя обе метрики, экстремальные для первого собственного значения на торе, т.е. метрику на клиффордовом торе $\tau_{1,1} \cong T_{1,1,\sqrt{2}}$ и метрику на равностороннем торе $M_{1,1} \cong T_{1,1,2}$. Так как эти метрики включают в себя и метрику на поверхности $T_{1,0,2} \cong \tilde{\tau}_{3,1}$, экстремальную для $\Lambda_1(\mathbb{KL}, g)$, то семейство $T_{a,b,c}$ включает в себя все поверхности, несущие на себе метрики, экстремальные для первого собственного числа на торе и бутылке Клейна.

В то же время мы до сих пор не знаем ни одной метрики, экстремальной для $\Lambda_2(\mathbb{T}^2, g)$. Среди метрик на поверхностях $T_{a,b,c}$ экстремальных для $\Lambda_2(\mathbb{T}^2, g)$ нет. Построение примера метрики, экстремальной для $\Lambda_2(\mathbb{T}^2, g)$, по-прежнему остается интересным открытым вопросом.

Доказательство теоремы 15.1 в работе [68] довольно длинно, поэтому опишем только главные идеи.

Сначала применяется алгоритм из раздела 14, рассматривая уравнение Ламе в тригонометрической форме (31) в качестве уравнения (58) и его классические решения (62) как решения $\varphi_i(y)$, т.е. $l = 3$ и

$$\varphi_1(y) = \sin y, \quad \varphi_2(y) = \cos y, \quad \varphi_3(y) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 y},$$

где k – модуль из уравнения Ламе. Здесь k играет роль дополнительного параметра ν в уравнении (58), который мы тоже должны найти из системы (60). Параметр h в уравнении Ламе играет роль спектрального параметра μ в уравнении (58), и в качестве значений μ_i мы берем значения h_0 , h_1 и h_2 из предложения 7.2. Тогда

$$f(x, y) = \left(c_1 \sin y \cos m_1 x, c_1 \sin y \sin m_1 x, c_2 \cos y \cos m_2 x, c_2 \cos y \sin m_2 x, \right. \\ \left. c_3 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 y} \cos m_3 x, c_3 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 y} \sin m_3 x \right).$$

Далее находится система (61), которая решается, и получаются формулы

$$c_1^2 = \frac{-m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}{2(-m_1^2 + m_3^2)}, \quad c_2^2 = \frac{m_1^2 - m_2^2 + m_3^2}{2(-m_2^2 + m_3^2)}, \\ c_3^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2 - m_3^2}{2(m_2^2 - m_3^2)}, \quad k^2 = \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2 - m_3^2}.$$

Определим теперь $\tilde{\varphi}_i = m_i \varphi_i$ и введем обозначения $a = m_1$, $b = m_2$, $c = m_3$ для упрощения формул. Извлекая квадратные корни, мы получаем формулы (63), (64) и (65).

Теперь нам надо удовлетворить условия периодичности, а также выбрать такие a , b , c , для которых $F_{a,b,c}$ – вещественное отображение. Доказывается, что решение этой совокупности условий в точности написано во фразах а) и б) в утверждении теоремы 15.1. Прямая проверка затем показывает, что и в самом деле величины a , b и c , удовлетворяющие этим условиям, дают минимальное погружение $\mathbb{R}^2/\mathcal{L}$ в сферу S^5 , и спектральная проблема после разделения переменных превращается в уравнение Ламе, откуда следует утверждение 1) теоремы 15.1.

В случае б) поверхности $T_{a,b,c}$ являются тау-поверхностями Лоусона, что видно из прямого вычисления. Если $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, то $\varphi_1(y) = \sin y$, $\varphi_2(y) = \cos y$ и $\varphi_3(y) = 0$. Теперь достаточно заметить, что i) четыре первых компоненты вектора $F_{a,b,\sqrt{a^2+b^2}}$ совпадают с $\Psi_{b,a}$ из (11), а оставшиеся две компоненты нулевые, и ii) $\tau_{a,b} \cong \tau_{b,a}$. Тогда утверждения 2) и 3) теоремы 15.1 следуют из теоремы 4.2.

Это завершает исследование случая б), и остается рассмотреть только случай а).

Образ $T_{a,b,c} = F_{a,b,c}(\mathbb{R}^2)$ может быть изометричным для различных троек (a, b, c) . Исследование этих изометрий несложно и приводит к утверждению 4) теоремы 15.1.

Заметим теперь, что $\tilde{F}_{a,b,c}$ не обязательно является взаимно однозначным отображением $\mathbb{R}^2/\mathcal{L}$ на $T_{a,b,c}$, так как может существовать нетривиальное (т. е. отличное от сдвигов на 2π) преобразование $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ такое, что

$$F_{a,b,c} \circ \Phi = F_{a,b,c}. \quad (66)$$

Из анализа возможных преобразований Φ вытекает утверждение 5) теоремы 15.1.

Доказательство утверждения 6) теоремы 15.1 аналогично доказательству теоремы 4.2.

16. Бутылка Клейна $T_{1,0,2}$

Из теоремы 15.1 следует, что поверхность $T_{1,0,2}$ является бутылкой Клейна и метрика на ней экстремальна для $\Lambda_1(\mathbb{KL}, g)$. В то же время по теореме 1.16 Эль Суфи, Джакомини и Жазара метрика на биполярной поверхности Лоусона $\tilde{\tau}_{3,1}$ является единственной (естественно, с точностью до умножения на константу) экстремальной метрикой для $\Lambda_1(\mathbb{KL}, g)$.

Интересно сравнить величины $\Lambda_1(T_{1,0,2})$ и $\Lambda_1(\tilde{\tau}_{3,1})$. Мы имеем

$$\Lambda_1(T_{1,0,2}) = S(1, 0, 2) = S(0, 1, 2) = 2\pi \left(8E\left(\frac{1}{2}\right) - 3K\left(\frac{1}{2}\right) \right),$$

где $S(a, b, c) = S(b, a, c)$, так как $T_{a,b,c} \cong T_{b,a,c}$, и

$$\Lambda_1(\tilde{\tau}_{3,1}) = 12\pi E\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right).$$

Эти величины равны в силу тождества (см. книгу [19])

$$E\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) = \frac{2E(k) - (k')^2 K(k)}{1+k},$$

где $k' = \sqrt{1-k^2}$.

Так как в обоих случаях $\lambda_1 = 2$, то из равенства величин Λ_1 вытекает равенство площадей, что приводит к следующему предложению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16.1 [68]. *Метрика на бутылке Клейна $T_{1,0,2}$ является единственной (с точностью до пропорциональности) экстремальной метрикой для $\Lambda_1(\mathbb{KL}, g)$. Бутылка Клейна $T_{1,0,2}$ изометрична биполярной лоусоновой бутылке Клейна $\tilde{\tau}_{3,1}$.*

Явная параметризация $T_{1,0,2} \looparrowright \mathbb{S}^4$ дается формулой

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \sin y, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \sin y, \sqrt{\frac{5}{8}} \cos y, \right. \\ \left. \sqrt{\frac{3}{8}} \sin 2x \sqrt{1 + \frac{1}{3} \sin^2 y}, \sqrt{\frac{3}{8}} \cos 2x \sqrt{1 + \frac{1}{3} \sin^2 y} \right),$$

где мы опустили одну из компонент, тождественно равную нулю. Изометрия $\tilde{\tau}_{3,1} \cong T_{1,0,2}$ установлена в предложении 16.1 косвенными методами, и было бы интересно описать эту изометрию явно.

Вопрос о том, есть ли другие биполярные поверхности Лоусона $\tilde{\tau}_{m,k}$ среди поверхностей $T_{a,b,c}$, в настоящее время является открытым.

Автор признателен В.М. Бухштаберу, без инициативы и поддержки которого этот обзор не был бы написан, и очень благодарен И.В. Полтеровичу за многочисленные полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] F. M. Arscott, *Periodic differential equations. An introduction to Mathieu, Lamé, and allied functions*, International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, **66**, Pergamon Press, New York, 1964, x+284 pp.
- [2] M. S. Ashbaugh, R. D. Benguria, “Optimal bounds for ratios of eigenvalues of one-dimensional Schrödinger operators with Dirichlet boundary conditions and positive potentials”, *Comm. Math. Phys.*, **124**:3 (1989), 403–415.
- [3] M. S. Ashbaugh, R. D. Benguria, “A sharp bound for the ratio of the first two eigenvalues of Dirichlet Laplacians and extensions”, *Ann. of Math.* (2), **135**:3 (1992), 601–628.
- [4] S. Bando, H. Urakawa, “Generic properties of the eigenvalue of the Laplacian for compact Riemannian manifolds”, *Tôhoku Math. J.* (2), **35**:2 (1983), 155–172.
- [5] M. Berger, “Sur les premières valeurs propres des variétés riemanniennes”, *Compositio Math.*, **26** (1973), 129–149.
- [6] G. Besson, “Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **30**:1 (1980), 109–128.
- [7] F. Brock, “An isoperimetric inequality for eigenvalues of the Stekloff problem”, *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, **81**:1 (2001), 69–71.
- [8] F. E. Burstall, “Harmonic tori in spheres and complex projective spaces”, *J. Reine Angew. Math.*, **469** (1995), 149–177.
- [9] E. Carberry, “Minimal tori in S^3 ”, *Pacific J. Math.*, **233**:1 (2007), 41–69; arXiv: math/0407304.
- [10] E. Carberry, *Harmonic maps and integrable systems*, arXiv:1211.3101.
- [11] Shiu-Yuen Cheng, “Eigenfunctions and nodal sets”, *Comment. Math. Helv.*, **51**:1 (1976), 43–55.
- [12] E. A. Coddington, N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York–Toronto–London, 1955, xii+429 pp.
- [13] B. Colbois, J. Dodziuk, “Riemannian metrics with large λ_1 ”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **122**:3 (1994), 905–906.
- [14] B. Colbois, A. El Soufi, A. Girouard, “Isoperimetric control of the Steklov spectrum”, *J. Funct. Anal.*, **261**:5 (2011), 1384–1399; arXiv:1103.2863.
- [15] Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики*, т. 1, 2, ГТТИ, М., Л., 1933, 1945, 538 pp., 620 с.; пер. с нем.: R. Courant, D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik*, v. I, II, Grundlehren Math. Wiss., **12**, Springer, Berlin, 1931, 1937, xiv+469 pp., xiv+549 pp.
- [16] A. El Soufi, H. Giacomini, M. Jazar, “A unique extremal metric for the least eigenvalue of the Laplacian on the Klein bottle”, *Duke Math. J.*, **135**:1 (2006), 181–202; arXiv: math/0701773.
- [17] A. El Soufi, S. Ilias, “Riemannian manifolds admitting isometric immersions by their first eigenfunctions”, *Pacific J. Math.*, **195**:1 (2000), 91–99.
- [18] A. El Soufi, S. Ilias, “Laplacian eigenvalue functionals and metric deformations on compact manifolds”, *J. Geom. Phys.*, **58**:1 (2008), 89–104; arXiv: math/0701777.
- [19] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, v. III, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York–Toronto–London, 1955, xvii+292 pp.
- [20] G. Faber, “Beweis, daß unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt”, *Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. München, Math.-Phys. Kl.*, 1923, 169–172.
- [21] D. Ferus, F. Pedit, “ S^1 -equivariant minimal tori in S^4 and S^1 -equivariant Willmore tori in S^3 ”, *Math. Z.*, **204**:2 (1990), 269–282.

- [22] D. Ferus, F. Pedit, U. Pinkall, I. Sterling, “Minimal tori in S^4 ”, *J. Reine Angew. Math.*, **429** (1992), 1–47.
- [23] A. Fraser, R. Schoen, “The first Steklov eigenvalue, conformal geometry, and minimal surfaces”, *Adv. Math.*, **226**:5 (2011), 4011–4030; arXiv:0912.5392.
- [24] A. Fraser, R. Schoen, *Sharp eigenvalue bounds and minimal surfaces in the ball*, arXiv:1209.3789.
- [25] A. Fraser, R. Schoen, *Minimal surfaces and eigenvalue problems*, arXiv:1304.0851.
- [26] A. Girouard, N. Nadirashvili, I. Polterovich, “Maximization of the second positive Neumann eigenvalue for planar domains”, *J. Differential Geom.*, **83**:3 (2009), 637–661; arXiv:0801.2142.
- [27] A. Girouard, I. Polterovich, “Shape optimization for low Neumann and Steklov eigenvalues”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **33**:4 (2010), 501–516; arXiv:0811.2617.
- [28] А. Жируар, И. В. Полтерович, “Об оценках Херша–Пэйна–Шиффера для собственных значений задачи Стеклова”, *Функц. анализ и его прил.*, **44**:2 (2010), 33–47; англ. пер.: A. Girouard, I. V. Polterovich, “On the Hersch–Payne–Schiffer inequalities for Steklov eigenvalues”, *Funct. Anal. Appl.*, **44**:2 (2010), 106–117; arXiv:0808.2968.
- [29] A. Girouard, I. Polterovich, “Upper bounds for Steklov eigenvalues on surfaces”, *Electron. Res. Announc. Math. Sci.*, **19** (2012), 77–85; arXiv:1202.5108.
- [30] M. Haskins, “Special Lagrangian cones”, *Amer. J. Math.*, **126**:4 (2004), 845–871; arXiv:math/0005164.
- [31] A. Henrot, *Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators*, Front. Math., Birkhäuser, Basel, 2006, x+202 pp.
- [32] J. Hersch, “Quatre propriétés isopérimétriques de membranes sphériques homogènes”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **270** (1970), A1645–A1648.
- [33] J. Hersch, L. E. Payne, “Extremal principles and isoperimetric inequalities for some mixed problems of Stekloff’s type”, *Z. Angew. Math. Phys.*, **19**:5 (1968), 802–817.
- [34] J. Hersch, L. E. Payne, M. M. Schiffer, “Some inequalities for Stekloff eigenvalues”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **57**:2 (1974), 99–114.
- [35] N. J. Hitchin, “Harmonic maps from a 2-torus to the 3-sphere”, *J. Differential Geom.*, **31**:3 (1990), 627–710.
- [36] M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof, N. Nadirashvili, “On the multiplicity of eigenvalues of the Laplacian on surfaces”, *Ann. Global Anal. Geom.*, **17**:1 (1999), 43–48.
- [37] T. Hoffmann-Ostenhof, P. W. Michor, N. Nadirashvili, “Bounds on the multiplicity of eigenvalues for fixed membranes”, *Geom. Funct. Anal.*, **9**:6 (1999), 1169–1188.
- [38] Wu-Yi Hsiang, H. B. Lawson, Jr., “Minimal submanifolds of low cohomogeneity”, *J. Differential Geometry*, **5**:1-2 (1971), 1–38.
- [39] E. L. Ince, “The periodic Lamé functions”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **60** (1940), 47–63.
- [40] D. Jakobson, M. Levitin, N. Nadirashvili, N. Nigam, I. Polterovich, “How large can the first eigenvalue be on a surface of genus two?”, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2005, № 63, 3967–3985; arXiv:math/0509398.
- [41] D. Jakobson, N. Nadirashvili, I. Polterovich, “Extremal metric for the first eigenvalue on a Klein bottle”, *Canad. J. Math.*, **58**:2 (2006), 381–400, arXiv:math/0311484.
- [42] P. Jammes, *Prescription du spectre de Steklov dans une classe conforme*, arXiv:1209.4571.
- [43] P. Jammes, *Multiplicité du spectre de Steklov sur les surfaces et nombre chromatique*, arXiv:1304.4559.
- [44] D. Joyce, “Special Lagrangian m -folds in $\mathbb{C}^m$ with symmetries”, *Duke Math. J.*, **115**:1 (2002), 1–51; arXiv:math/0008021.

- [45] M. A. Karpukhin, “Spectral properties of bipolar surfaces to Otsuki tori”, *J. Spectr. Theory* (to appear); [arXiv: 1205.6316](#).
- [46] М. А. Карпукхин, “Немаксимальность экстремальных метрик на торе и бутылке Клейна”, *Матем. сб.* (в печати); M. A. Karpukhin, *On maximality of known extremal metrics on torus and Klein bottle*, [arXiv: 1210.8122](#).
- [47] M. A. Karpukhin, *Maximization of the first nontrivial eigenvalue on the surface of genus two*, [arXiv: 1309.5057](#).
- [48] M. Karpukhin, “Spectral properties of a family of minimal tori of revolution in five-dimensional sphere”, *Canad. Math. Bull.* (to appear); [arXiv: 1301.2483](#).
- [49] M. Karpukhin, G. Kokarev, I. Polterovich, “Multiplicity bounds for Steklov eigenvalues on Riemannian surfaces”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* (to appear); [arXiv: 1209.4869](#).
- [50] K. Kenmotsu, “A characterization of bipolar minimal surfaces in S^4 ”, *Tôhoku Math. J.* (2), **26**:4 (1974), 587–598.
- [51] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, v. II, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, **15**, Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York–London–Sydney, 1969, xv+470 pp.
- [52] N. Korevaar, “Upper bounds for eigenvalues of conformal metrics”, *J. Differential Geom.*, **37**:1 (1993), 73–93.
- [53] E. Krahn, “Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises”, *Math. Ann.*, **94**:1 (1925), 97–100.
- [54] E. Krahn, “Über Minimaleigenschaften der Kugel in drei und mehr Dimensionen”, *Acta Comment. Univ. Dorpat. A*, **9** (1926), 1–44.
- [55] H. Lapointe, “Spectral properties of bipolar minimal surfaces in S^4 ”, *Differential Geom. Appl.*, **26**:1 (2008), 9–22; [arXiv: math/0511443](#).
- [56] H. B. Lawson, Jr., “Complete minimal surfaces in S^3 ”, *Ann. of Math.* (2), **92**:3 (1970), 335–374.
- [57] P. Li, Shing Tung Yau, “A new conformal invariant and its applications to the Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces”, *Invent. Math.*, **69**:2 (1982), 269–291.
- [58] W. Magnus, S. Winkler, *Hill’s equation*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, **20**, Interscience Publishers John Wiley & Sons, New York–London–Sydney, 1966, viii+127 pp.
- [59] А. Е. Миронов, “О новых примерах гамильтоново-минимальных и минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{CP}^n$ ”, *Матем. сб.*, **195**:1 (2004), 89–102; англ. пер.: A. E. Mironov, “New examples of Hamilton-minimal and minimal Lagrangian manifolds in $\mathbb{C}^n$ and $\mathbb{CP}^n$ ”, *Sb. Math.*, **195**:1 (2004), 85–96.
- [60] A. E. Mironov, “Finite-gap minimal Lagrangian surfaces in $\mathbb{CP}^2$ ”, *Riemann surfaces, harmonic maps and visualization*, OCAMI Stud., **3**, Osaka Munic. Univ. Press, Osaka, 2010, 185–196; [arXiv: 1005.3402](#).
- [61] Н. С. Надирашвили, “Кратные собственные значения оператора Лапласа”, *Матем. сб.*, **133(175)**:2(6) (1987), 223–237; англ. пер.: N. S. Nadirashvili, “Multiple eigenvalues of the Laplace operator”, *Math. USSR-Sb.*, **61**:1 (1988), 225–238.
- [62] N. Nadirashvili, “Berger’s isometric problem and minimal immersions of surfaces”, *Geom. Funct. Anal.*, **6**:5 (1996), 877–897.
- [63] N. Nadirashvili, “Isoperimetric inequality for the second eigenvalue of a sphere”, *J. Differential Geom.*, **61**:2 (2002), 335–340.
- [64] T. Ôtsuki, “Minimal hypersurfaces in a Riemannian manifolds of constant curvature”, *Amer. J. Math.*, **92**:1 (1970), 145–173.
- [65] L. E. Payne, G. Pólya, H. F. Weinberger, “On the ratio of consecutive eigenvalues”, *J. Math. and Phys.*, **35** (1956), 289–298.

- [66] A. V. Penskoi, “Extremal spectral properties of Lawson tau-surfaces and the Lamé equation”, *Mosc. Math. J.*, **12**:1 (2012), 173–192; arXiv:1009.0285.
- [67] A. V. Penskoi, “Extremal spectral properties of Otsuki tori”, *Math. Nachr.*, **286**:4 (2013), 379–391, arXiv:1108.5160.
- [68] A. V. Penskoi, “Generalized Lawson tori and Klein bottles”, *J. Geom. Anal.* (to appear); arXiv:1308.1628.
- [69] R. Petrides, *Maximization of the second conformal eigenvalue of spheres*, arXiv:1206.0229.
- [70] R. Petrides, *Existence and regularity of maximal metrics for the first Laplace eigenvalue on surfaces*, arXiv:1310.4697.
- [71] G. Pólya, “On the characteristic frequencies of a symmetric membrane”, *Math. Z.*, **63**:1 (1955), 331–337.
- [72] Дж. В. Стрэтт, лорд Рэлей, *Теория звука*, т. 1, 2, ГИТТЛ, М., 1955, 503 с., 474 с.; пер. с англ.: J. W. Strutt baron Rayleigh, *The theory of sound*, v. I, II, Macmillan, London, 1877, 1878.
- [73] G. Szegő, “Inequalities for certain eigenvalues of a membrane of given area”, *J. Ration. Mech. Anal.*, **3** (1954), 343–356.
- [74] T. Takahashi, “Minimal immersions of Riemannian manifolds”, *J. Math. Soc. Japan*, **18**:4 (1966), 380–385.
- [75] H. Volkmer, “Coexistence of periodic solutions of Ince’s equation”, *Analysis (Munich)*, **23**:1 (2003), 97–105.
- [76] H. F. Weinberger, “An isoperimetric inequality for the N -dimensional free membrane problem”, *J. Ration. Mech. Anal.*, **5** (1956), 633–636.
- [77] R. Weinstock, “Inequalities for a classical eigenvalue problem”, *J. Ration. Mech. Anal.*, **3** (1954), 745–753.
- [78] P. C. Yang, Shing Tung Yau, “Eigenvalues of the Laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, **7**:1 (1980), 55–63.

Алексей Викторович Пенской
(Alexei V. Penskoi)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова;
Независимый московский университет;
НИУ “Высшая школа экономики”
E-mail: penskoi@mccme.ru

Поступила в редакцию
24.10.2013