Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Бочкарев, Средние Валле Пуссена рядов Фурье для квадратичного спектра и спектров степенной плотности, *УМН*, 2014, том 69, выпуск 1, 125–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9566>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 13:13:09

УДК 517.518.4+517.547.54

Средние Валле Пуссена рядов Фурье для квадратичного спектра и спектров степенной плотности

С. В. Бочкарев

В статье предложен и развит новый метод исследования комплексных или вещественных тригонометрических рядов с различными спектрами. Метод основан на новых мультипликативных неравенствах, которые дают нижнюю оценку интегральной нормы средних Валле Пуссена и базируются на результатах, устанавливающих соответствующие аналоги теоремы Литтлвуда–Пэли в пространствах ВМО, Харди и Лоренца. Для спектров степенной плотности найдено зависящее от арифметических характеристик спектра и точное в предельных случаях описание класса модулей коэффициентов, для которых комплексные или вещественные тригонометрические ряды являются рядами Фурье. При этом для квадратичного спектра обобщены и усилены некоторые теоремы Харди и Литтлвуда, относящиеся к эллиптическим θ -функциям. Установлены новые нижние оценки интегральной нормы экспоненциальных сумм для квадратичного спектра и степенных спектров с нецелыми показателями.

Библиография: 41 название.

Ключевые слова: ряды Фурье; средние Валле Пуссена; пространства ВМО, Харди и Лоренца; мультипликативные неравенства; спектры; экспоненциальные суммы; эллиптические функции и θ -ряды; диофантовы уравнения.

DOI: 10.4213/rm9566

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	126
1. Тригонометрическая характеристика пространств ВМО и Харди	127
2. Мультипликативные нижние оценки H^1 -нормы средних Валле Пуссена	129
3. Комплексные ряды Фурье со спектрами степенной плотности	133
4. Обобщенно-лакунарные спектры	139
5. Квадратичный спектр, обобщение и усиление результатов Харди и Литтлвуда о θ -рядах	142

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00417) и программ “Ведущие научные школы” (грант НШ-65-772-2010) и “Современные проблемы теоретической математики” Отделения математических наук РАН.

6. Степенные спектры с нецелыми показателями, комплексный случай...	143
7. Мультипликативные неравенства для L_1 -нормы вещественных тригонометрических рядов и полиномов.....	146
8. Вещественные тригонометрические ряды со спектрами степенной плотности.....	150
9. Квадратичный спектр и степенные спектры с нецелыми показателями, вещественный случай.....	156
Список литературы.....	159

Введение

Статья является продолжением работ автора [1]–[14], посвященных мультипликативным неравенствам для интегральной нормы и их приложениям.

Исследуемые неравенства дают мультипликативную нижнюю оценку L_1 -нормы и включают в себя мультипликатор общего вида, который может быть как возрастающим, так и убывающим. Неравенства такого типа в мартингалном варианте (система Хаара) с возрастающим мультипликатором возникли при решении проблемы Зигмунда об абсолютной сходимости рядов Фурье функций ограниченной вариации в случае произвольной ограниченной полной ортонормированной системы. В контексте общего метода усреднений в теории ортогональных рядов здесь было произведено усреднение по специально сконструированной случайной сингулярной функции (см. [1], [3], [6], [15]).

Следует отметить, что другого подхода к этой проблеме Зигмунда до сих пор не найдено и в классическом случае тригонометрической системы. В частности, такой метод позволил установить логарифмический рост средних арифметических от функций Лебега ограниченных ортонормированных систем (см. [2], [4], [5]).

В последний период времени автор установил, что мультипликативные неравенства для L_1 -нормы в тригонометрическом варианте при использовании убывающих мультипликаторов могут быть применены в гармоническом анализе для изучения комплексных и вещественных тригонометрических рядов с различными спектрами. Для доказательства таких неравенств требуются результаты, распространяющие теорию Литтлвуда–Пэли на предельные показатели $p = 1$ и $p = \infty$. Заметим, что для функции $f \in L_1(0, 2\pi)$ сама двоичная функция Литтлвуда–Пэли может обращаться в бесконечность почти всюду. Поэтому, чтобы охватить предельные случаи, берется более гладкое разбиение единицы в образе Фурье. В этой работе применяется разложение, порожденное ядрами Валле Пуссена. Полные доказательства применяемых в данной статье результатов, относящихся к теории Литтлвуда–Пэли, содержатся в работе автора [7]. Подход, основанный на рядах Валле Пуссена, представляется естественным и достаточным для приложений в классическом случае единичного круга. Основным результатом здесь является характеристизация пространства ВМО через разложение Валле Пуссена, из которой через теорему двойственности Фейффермана и неравенство Хинчина непосредственно следует характеристизация пространства Харди H^1 (см. [7]).

Предложен и развит новый метод, который одновременно учитывает плотностные, а также теоретико-числовые и комбинаторные характеристики спектра и дает, в частности, точные результаты и для спектров с предельными плотностными характеристиками, и для спектров, обладающих предельными арифметическими свойствами (см. [8]–[14]).

В настоящей работе мультипликативные неравенства указанного типа установлены в наиболее общей форме, содержащей нижнюю оценку интегральной нормы средних Валле Пуссена рядов Фурье функций из H^1 и L_1 , что позволяет как использовать их для оценки нормы в пространстве Харди, в частности для оценки L_1 -нормы экспоненциальных сумм, так и применять их в вопросах теории рядов Фурье.

Для важного класса спектров степенной плотности, включая квадратичный спектр и степенные спектры с нецелыми показателями, решен вопрос о том, является ли рядом Фурье комплексный или вещественный тригонометрический ряд с заданными модулями коэффициентов.

При этом в классическом случае рядов по квадратам натуральных чисел усилены и обобщены результаты Харди и Литтлвуда, относящиеся к эллиптическим тэта-функциям и связанным с ними тригонометрическим рядам [16], [17].

Основные результаты этой статьи анонсированы в сообщении [14].

Обозначения: символы $\ll$ и $\asymp$ означают неравенство и эквивалентность с абсолютными постоянными, $C(\cdot)$ – константы, которые зависят от указанных параметров, а также могут зависеть от абсолютных постоянных, содержащихся в условиях, определяемых символами $\ll$ и $\asymp$, $\log$ – натуральный логарифм, $|E|$ – мера множества E .

1. Тригонометрическая характеристизация пространств ВМО и Харди

Пусть функция $f(z)$ регулярна в открытом единичном круге $|z| < 1$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad (1)$$

и $f(z)$ принадлежит пространству Харди H^1 (см. [18; т. 1, гл. VII, § 7]). Тогда для почти всех $x \in [0, 2\pi)$ существует предел $\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{ix}) = f(e^{ix})$ и выполняется равенство $\|f\|_{H^1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{ix})| dx$.

Через $\delta_n(x)$ обозначим двоичные пакки степенного ряда функции $f(z)$ при $r = 1$ (см. (1)):

$$\begin{aligned} \delta_0(x) &= c_0 + c_1 e^{ix}, \\ \delta_n(x) &= \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} c_k e^{ikx}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть $V_n(x)$ – ядра Валле Пуссена (см. [18; т. 1, гл. III, § 1, 2]). Обозначим $Q_0(x) = V_1(x)$ и положим

$$Q_n(x) = V_{2^n}(x) - V_{2^{n-1}}(x), \quad n \geq 1. \quad (3)$$

Разложим $f(e^{ix})$ в сходящийся почти всюду ряд Валле Пуссена (см. [19]):

$$f(e^{ix}) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n(f, x), \quad (4)$$

где $\Delta_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{iu}) Q_n(x - u) du$.

Частные суммы ряда (4) являются средними Валле Пуссена ряда Фурье степенного типа функции $f(e^{ix})$ (см. (1), (3), (4)):

$$\sigma_{2^N}(f, x) := \sigma_{2^N, 2^N}(f, x) = \sum_{n=0}^N \Delta_n(f, x). \quad (5)$$

Пространство Харди H^1 изоморфно вещественному пространству H_{Re}^1 функций $f \in L_1(0, 2\pi)$ с нормой $\|f\|_{H_{\text{Re}}^1} = \|f\|_1 + \|\tilde{f}\|_1$, где $\tilde{f}$ – тригонометрически сопряженная функция. Как установил Ч. Фефферман [20], сопряженным пространством к H_{Re}^1 является пространство ВМО (см. [21; гл. VI, § 1–4]).

Важную тригонометрическую характеристику пространства ВМО дает следующая доказанная автором [7] теорема, которая является аналогом теоремы Литтлвуда–Пэли (см. [18; т. 2, гл. XV, § 2–4]) для показателя $p = \infty$.

ТЕОРЕМА 1. *Для любой функции $f \in L_1(0, 2\pi)$ имеет место соотношение*

$$\|f\|_{\text{ВМО}} \asymp \sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I \sum_{2^{-n} \leq |I|} \Delta_n^2(f, x) dx \right)^{1/2}, \quad (6)$$

где I – интервал.

Из теоремы 1 выводится характеристизация пространства Харди через разложение Валле Пуссена для полидиска (см. [7], [11]). Пусть функция $f(z_1, \dots, z_m)$, регулярная в открытом единичном m -мерном диске, принадлежит пространству Харди H_m^1 , и пусть $f(e^{ix_1}, \dots, e^{ix_m})$ – ее граничное значение (см. [18; т. 2, гл. XVII, § 4]).

Для $n = (n_1, \dots, n_m)$ и $x = (x_1, \dots, x_m)$ обозначим

$$\begin{aligned} \Delta_n(f, x) &= \frac{1}{\pi^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f(e^{iu_1}, \dots, e^{iu_m}) \\ &\quad \times Q_{n_1}(x_1 - u_1) \dots Q_{n_m}(x_m - u_m) du_1 \dots du_m. \end{aligned} \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 2. *Если $f \in H_m^1$, то справедливы неравенства*

$$\|f\|_{H_m^1} \asymp \left\| \left(\sum_n |\Delta_n(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_1(0, 2\pi)^m}. \quad (8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Развитие теории Литтлвуда–Пэли происходило параллельно при взаимном влиянии с вопросами построения безусловных базисов и теорией вейвлетов, дающей конструктивное описание функциональных пространств.

Так, в L_p ($1 < p < \infty$) безусловными базисами являются: система Хаара (Пэли, 1932), система Франклина (Бочкарев, 1974), ортогональные сплайны высших порядков (Чисельский, 1975). Существование безусловных базисов в H^1 установили Морей (1980), Карлесон (1980), Войташек (1982). Отметим также содержащийся в работах [22]–[24] метод построения полиномиальных, ортогональных безусловных базисов в конечномерных пространствах H^1 , где использовался дискретный вариант системы Франклина в комбинации с интерполяцией посредством сдвигов комплексного ядра Дирихле.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Характеризация (8) может быть выведена (с использованием неравенства Хинчина) из установленного в работе Койфмана и Вейса [25] утверждения типа теоремы Михлина–Хёрмандера о мультипликаторах, доказательство которого основано на атомарных и молекулярных представлениях для функции из H^1 .

Доказательства теорем 1 и 2 сохраняют силу, если разложение (4) заменить на разложение ($m = 1$)

$$f(e^{ix}) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n^*(f, x), \quad (9)$$

где

$$\Delta_n^*(f, x) = \Delta_{2n-1}(f, x) + \Delta_{2n}(f, x), \quad n \geq 1. \quad (10)$$

Далее в статье будет использоваться разложение (9), (10).

2. Мультипликативные нижние оценки H^1 -нормы средних Валле Пуссена

Следующая теорема дает мультипликативные нижние оценки средних Валле Пуссена функций из пространства Харди H^1 и включает в себя произвольный мультипликатор.

Она содержит предыдущие результаты в этом направлении (см. [8]–[12]) и позволяет определить, используя плотностные и арифметические свойства заданного спектра, какое условие на модули коэффициентов является необходимым для того, чтобы комплексный тригонометрический ряд по этому спектру являлся рядом Фурье.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in H^1$, $2 < p \leq \infty$, и пусть $\{\mu_n\}$ – последовательность неотрицательных чисел. Тогда при всех $N = 1, 2, \dots$ выполняются следующие неравенства:

$$(I) \quad \|\sigma_{2^{2N}}(f)\|_1 \max_{0 \leq n \leq N} \left(\mu_n \sum_{q=0}^n \mu_q \left(\frac{\|\Delta_q^*\|_p^p}{\|\Delta_q^*\|_2^2} \right)^{2/(p-2)} \right)^{1/2} \geq C(p) \sum_{n=0}^N \mu_n \|\Delta_n^*\|_2^2; \quad (11)$$

$$(II) \quad \|\sigma_{2^{2N}}(f)\|_1 \max_{0 \leq n \leq N} \left(\mu_n \sum_{q=n}^N \mu_q \left(\frac{\|\Delta_q^*\|_p^p}{\|\Delta_q^*\|_2^2} \right)^{2/(p-2)} \right)^{1/2} \geq C(p) \sum_{n=0}^N \mu_n \|\Delta_n^*\|_2^2. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (I) Будем считать, что $2 < p < \infty$. Введем множества $E_n \subset [0, 2\pi)$, $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$E_n = \left\{ |\Delta_n^*(f, x)| \leq \alpha(p) \left(\frac{\|\Delta_n^*\|_p^p}{\|\Delta_n^*\|_2^2} \right)^{1/(p-2)} \right\}, \quad (13)$$

где $\alpha(p)$ – некоторая положительная постоянная.

Докажем, что постоянная $\alpha(p)$ может быть выбрана таким образом, что для множеств $CE_n = [0, 2\pi) \setminus E_n$ выполняется неравенство

$$\int_{CE_n} |\Delta_n^*(f, x)|^2 dx \leq \pi \|\Delta_n^*\|_2^2. \quad (14)$$

По неравенству Гёльдера

$$\int_{CE_n} |\Delta_n^*(f, x)|^2 dx \leq |CE_n|^{(p-2)/p} \left(\int_{CE_n} |\Delta_n^*(f, x)|^p dx \right)^{2/p}. \quad (15)$$

Для оценки меры множества CE_n применим неравенство Чебышёва. Имеем (см. (13))

$$\begin{aligned} |CE_n| &\leq (\alpha(p))^{-2} \left(\frac{\|\Delta_n^*\|_p^p}{\|\Delta_n^*\|_2^2} \right)^{2/(2-p)} \int_0^{2\pi} |\Delta_n^*(f, x)|^2 dx \\ &= 2\pi (\alpha(p))^{-2} \|\Delta_n^*\|_2^{2p/(p-2)} \|\Delta_n^*\|_p^{2p/(2-p)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Соединяя неравенства (15) и (16), получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} \int_{CE_n} |\Delta_n^*(f, x)|^2 dx &\leq (2\pi)^{(p-2)/p} (\alpha(p))^{2(2-p)/p} \|\Delta_n^*\|_2^2 \|\Delta_n^*\|_p^{-2} \\ &\times \left(\int_{CE_n} |\Delta_n^*(f, x)|^p dx \right)^{2/p} \leq 2\pi (\alpha(p))^{2(2-p)/p} \|\Delta_n^*\|_2^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Полагая теперь в определении (13)

$$\alpha(p) = 2^{p/(2(p-2))} \quad (18)$$

и применяя оценку (17), находим, что выполняется неравенство (14).

Таким образом (см. (14)), для любой последовательности неотрицательных чисел $\{\mu_n\}$ имеем

$$\sum_{n=0}^N \mu_n \int_{E_n} |\Delta_n^*(f, x)|^2 dx \geq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \mu_n \int_0^{2\pi} |\Delta_n^*(f, x)|^2 dx. \quad (19)$$

Определим функции $g_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$. Положим (см. (13))

$$g_n(x) = \begin{cases} |\Delta_n^*(f, x)| & \text{при } x \in E_n, \\ 0 & \text{при } x \in CE_n. \end{cases} \quad (20)$$

Ввиду (19), (20)

$$\pi \sum_{n=0}^N \mu_n \|\Delta_n^*\|_2^2 \leq \sum_{n=0}^N \mu_n \int_0^{2\pi} g_n^2(x) dx. \quad (21)$$

Для любого $x \in [0, 2\pi)$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^N \mu_n g_n^2(x) \right)^2 &\leq 2 \sum_{n=0}^N \mu_n g_n^2(x) \sum_{m=0}^n \mu_m g_m^2(x) \\ &\leq 2 \max_{0 \leq q \leq N} \left(\mu_q \sum_{m=0}^q \mu_m \|g_m\|_\infty^2 \right) \cdot \sum_{n=0}^N g_n^2(x). \end{aligned} \quad (22)$$

Применяя (22) и используя соотношения (20), (21), находим, что

$$\begin{aligned} \pi \sum_{n=0}^N \mu_n \|\Delta_n^*\|_2^2 &\leq \sqrt{2} \max_{0 \leq q \leq N} \left(\mu_q \sum_{m=0}^q \mu_m \|g_m\|_\infty^2 \right)^{1/2} \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^N |\Delta_n^*(f, x)|^2 \right)^{1/2} dx. \end{aligned} \quad (23)$$

Так как согласно (13) и (20)

$$\|g_m\|_\infty^2 \leq (\alpha(p))^2 \left(\frac{\|\Delta_m^*\|_p^p}{\|\Delta_m^*\|_2^2} \right)^{2/(p-2)},$$

то из (23) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \mu_n \|\Delta_n^*\|_2^2 &\leq \sqrt{2} (\alpha(p))^2 \max_{0 \leq q \leq N} \left(\mu_q \sum_{m=0}^q \mu_m \left(\frac{\|\Delta_m^*\|_p^p}{\|\Delta_m^*\|_2^2} \right)^{2/(p-2)} \right)^{1/2} \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^N |\Delta_n^*(f, x)|^2 \right)^{1/2} dx. \end{aligned} \quad (24)$$

Вместе с тем теорема 2, примененная к функции $\sigma_{2^{2N}}(f)$ с разложением (9), (10), дает оценку (см. (5), (8))

$$\|\sigma_{2^{2N}}(f)\|_1 \geq C \left\| \left(\sum_{n=0}^N |\Delta_n^*(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_1. \quad (25)$$

Итак, окончательно получаем в силу соотношений (24) и (25), что справедливо неравенство (см. (18))

$$\begin{aligned} \|\sigma_{2^{2N}}(f)\|_1 & \max_{0 \leq q \leq N} \left(\mu_q \sum_{m=0}^q \mu_m \left(\frac{\|\Delta_m^*\|_p^p}{\|\Delta_m^*\|_2^2} \right)^{2/(p-2)} \right)^{1/2} \\ & \geq C \cdot 2^{(3p-2)/(2(2-p))} \sum_{n=0}^N \mu_n \|\Delta_n^*\|_2^2. \end{aligned}$$

Тем самым (см. (11)) при $2 < p < \infty$ пункт (I) теоремы 3 доказан. При $p = \infty$ доказательство проводится аналогично. Подобным образом устанавливается, что справедливо неравенство (12) пункта (II).

Поскольку средние Валле Пуссена сходятся к функции $f \in H^1$ по норме пространства Харди (см. [19]), то из теоремы 3 выводится теорема, содержащая нижние оценки H^1 -нормы.

ТЕОРЕМА 4. *Для любого $2 < p \leq \infty$ и любой последовательности неотрицательных чисел μ_n выполняются следующие неравенства:*

$$(I) \quad \|f\|_{H^1} \sup_n \left(\mu_n \sum_{q=0}^n \mu_q \left(\frac{\|\Delta_q^*\|_p^p}{\|\Delta_q^*\|_2^2} \right)^{2/(p-2)} \right)^{1/2} \geq C(p) \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \|\Delta_n^*\|_2^2; \quad (26)$$

$$(II) \quad \|f\|_{H^1} \sup_n \left(\mu_n \sum_{q=n}^{\infty} \mu_q \left(\frac{\|\Delta_q^*\|_p^p}{\|\Delta_q^*\|_2^2} \right)^{2/(p-2)} \right)^{1/2} \geq C(p) \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \|\Delta_n^*\|_2^2. \quad (27)$$

Если брать четные показатели p , то неравенства (11), (12), (26), (27) дают возможность использовать арифметические свойства спектра функции $f \in H^1$. Наиболее важным для таких приложений является случай $p = 4$. А при $p = \infty$ используются только плотностные свойства спектра.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Неравенства (12), (27) применяются с возрастающим мультипликатором $\{\mu_n\}$, что соответствует обобщенному дифференцированию, а неравенства (11), (26) – с убывающим $\{\mu_n\}$, который соответствует обобщенному интегрированию.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Вещественный вариант неравенства (27) с заменой H^1 на L_1 и возрастающим мультипликатором $\{\mu_n\}$ ранее был установлен автором для системы Хаара и применен в теории общих ортогональных рядов (см. [2]–[6]). Однако часть (I) теоремы 4 с убывающим мультипликатором в вещественном случае не имеет места (см. [7], [13]) ни для системы Хаара, ни для тригонометрической системы.

3. Комплексные ряды Фурье со спектрами степенной плотности

Для последовательности натуральных чисел $1 < m_1 < m_2 < \dots < m_n < \dots$ положим

$$E_q = \{n: 2^{q-1} < m_n \leq 2^q\}, \quad q = 1, 2, \dots, \quad \lambda_q = \text{card } E_q. \quad (28)$$

Арифметические свойства спектра $\{m_n\}$ характеризуются величинами $R(q)$, обозначающими число решений следующего уравнения (см. (28)):

$$m_{n_1} + m_{n_2} = m_{n_3} + m_{n_4}, \quad n_i \in E_q, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (29)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Спектр $\{m_n\}$ имеет степенную плотность, если для некоторых постоянных

$$1 < A_1 \leq 2 \quad \text{и} \quad A_1 \leq A_2 < \infty$$

последовательность $\{\lambda_q\}$ удовлетворяет следующим соотношениям ($\lambda_1 = 1$):

$$A_1 \lambda_q \leq \lambda_{q+1} \leq A_2 \lambda_q, \quad q = 1, 2, \dots \quad (30)$$

Пусть $\omega(n)$ – монотонная последовательность положительных чисел такая, что

$$\omega(n^2) \asymp \omega(n), \quad n = 2, 3, \dots; \quad \omega(1) = \omega(2) = 1. \quad (31)$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть спектр $\{m_n\}$ имеет степенную плотность, а числа $R(q)$ удовлетворяют соотношению

$$R(q) \ll \lambda_q^\beta (\log \lambda_q)^\gamma, \quad (32)$$

где $2 \leq \beta \leq 3$, $\gamma \leq 0$ при $\beta = 3$, $\gamma \geq 0$ при $\beta = 2$, и пусть функция $f \in H^1$ представляется рядом

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{m_n}, \quad |z| < 1. \quad (33)$$

Тогда для любого $N = 2, 3, \dots$ справедливы следующие неравенства.

(I) Если

$$|c_n| \asymp n^\rho \omega(n) \quad \text{при} \quad 1 \leq n \leq N(1 + A_1)^2, \quad (34)$$

то

$$\|\sigma_{m_N}(f)\|_1 \geq \begin{cases} C(A_1, A_2, \beta, \gamma, \rho) N^{\rho+(3-\beta)/2} \omega(N) (\log N)^{-\gamma/2} \\ \quad \text{при } \beta \geq 2, \quad \rho > \frac{1}{2}(\beta - 3), \\ C(A_1, A_2, \beta, \gamma) \sum_{n=2}^N \frac{\omega(n)}{n(\log n)^{\gamma/2}} \\ \quad \text{при } \beta > 2, \quad \rho = \frac{1}{2}(\beta - 3). \end{cases} \quad (35)$$

(II) Если $\beta = 2$, $\gamma > 0$ и коэффициенты степенного ряда (33) удовлетворяют соотношению

$$|c_n| \asymp \frac{\omega(n)}{\sqrt{n}} \quad \text{при } 1 \leq n \leq N(1 + A_1)^2, \quad (36)$$

где для последовательности $\omega(n)$ выполняется условие

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{\sqrt{n}} \omega(2^n) \ll \sqrt{m} \omega(2^m), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (37)$$

то имеет место оценка

$$\|\sigma_{m_N}(f)\|_1 \gg C(A_1, A_2, \gamma) \sum_{n=2}^N \frac{\omega(n)}{n(\log n)^{(\gamma+1)/2}}. \quad (38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать теорему для случая, когда

$$m_N = 2^{2M} \quad (39)$$

при некотором $M = 1, 2, \dots$. В общем случае, если $2^{2(M-1)} < m_N < 2^{2M}$, доказательство проводится аналогично. Вместо разложения (9), (10) следует взять разложение

$$\sigma_{m_N}(f, x) = \sum_{n=0}^{M-2} \Delta_n^*(f, x) + \tilde{\Delta}_{M-1}^*(f, x), \quad (40)$$

где

$$\tilde{\Delta}_{M-1}^*(f, x) = \sigma_{m_N}(f, x) - \sum_{n=0}^{M-2} \Delta_n^*(f, x), \quad (41)$$

для которого сохраняют силу основные результаты, справедливые для разложения (9), (10).

Обозначив через Λ_q число точек спектра m_n , содержащихся в первых q двоичных пачках,

$$\Lambda_q = \sum_{k=1}^q \lambda_k,$$

и используя свойства спектров степенной плотности (см. (28), (30)), получаем, что справедливы соотношения

$$A_1^{q-1} \leq \lambda_q \leq 2^q, \quad (42)$$

$$\Lambda_q \leq \lambda_q \sum_{s=0}^{q-1} A_1^{-s} \leq \frac{A_1}{A_1 - 1} \lambda_q. \quad (43)$$

Кроме того, из (39) и (40) следует, что

$$\log N \ll M \ll C(A_1) \log N. \quad (44)$$

Доказательство теоремы 5 основывается на неравенстве (11) из теоремы 3. Для того чтобы применить неравенство (11), нужно получить нижнюю оценку для $\|\Delta_n^*\|_2^2$ и верхнюю оценку для $\|\Delta_n^*\|_4^4$, а затем выбрать мультипликатор $\{\mu_n\}$.

По равенству Парсеваля, согласно соотношениям (2), (3), (9), (10), (28) и (34), имеем ($1 \leq n \leq M$)

$$\|\Delta_n^*\|_2^2 \geq \|\delta_{2n}\|_2^2 \gg \sum_{s \in E_{2n}} (\omega(s))^2 s^{2\rho}. \quad (45)$$

Вместе с тем при $s \in E_{2n}$ выполняются оценки

$$s \leq \Lambda_{2n} \leq C(A_1)\lambda_{2n}, \quad (46)$$

$$s > \Lambda_{2n-1} > \lambda_{2n-1} \geq \frac{1}{A_2}\lambda_{2n}. \quad (47)$$

Используя теперь соотношения (31), из (46) и (47) выводим, что при $s \in E_{2n}$ справедливо неравенство (см. (42))

$$C(A_1, A_2)\omega(2^{2n}) \leq \omega(s) \leq C(A_1)\omega(2^{2n}). \quad (48)$$

Соединяя оценки (45)–(48) и учитывая (28), получим

$$\|\Delta_n^*\|_2^2 \geq C(A_1, A_2, \rho)\lambda_{2n}^{2\rho+1}(\omega(2^{2n}))^2. \quad (49)$$

Для получения верхней оценки $\|\Delta_n^*\|_4^4$ применим обобщенное неравенство Минковского. Имеем (см. (2), (3), (9), (10))

$$\begin{aligned} \|\Delta_n^*\|_4^4 &\ll \|Q_{2n-1} + Q_{2n}\|_1^4 \|\delta_{2n-1} + \delta_{2n} + \delta_{2n+1}\|_4^4 \\ &\ll \|\delta_{2n-1}\|_4^4 + \|\delta_{2n}\|_4^4 + \|\delta_{2n+1}\|_4^4. \end{aligned} \quad (50)$$

Теперь оценим, например, предпоследнее слагаемое в правой части (50). Используя свойства системы экспонент e^{ikx} и учитывая соотношения (28), (29), (33), получим

$$\|\delta_{2n}\|_4^4 = \sum_{\substack{m_{\nu_1} + m_{\nu_2} = m_{\nu_3} + m_{\nu_4} \\ \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 \in E_{2n}}} c_{\nu_1} c_{\nu_2} \bar{c}_{\nu_3} \bar{c}_{\nu_4} \leq R(2n) \max_{\nu \in E_{2n}} |c_\nu|^4.$$

Отсюда (см. (50)), применяя (32), (34), а также используя (42), (46)–(48), заключаем, что при $1 \leq n \leq M$

$$\|\Delta_n^*\|_4^4 \leq C(A_1, A_2, \beta, \gamma, \rho)\lambda_{2n}^{4\rho+\beta}(\omega(2^{2n}))^4 n^\gamma. \quad (51)$$

Чтобы получить нижнюю оценку L_1 -нормы средних Валле Пуссена для спектров степенной плотности, применим неравенство (11) из теоремы 3 с показателем $p = 4$. Определим мультипликатор $\{\mu_n\}$ следующим образом:

$$\mu_n = \lambda_{2n}^{(1-\beta)/2-\rho}(\omega(2^{2n}))^{-1} n^{-\gamma/2}. \quad (52)$$

В силу неравенств (49) и (51) имеем

$$\frac{\|\Delta_n^*\|_4^4}{\|\Delta_n^*\|_2^2} \leq C(A_1, A_2, \beta, \gamma, \rho) \lambda_{2n}^{\beta+2\rho-1} (\omega(2^{2n}))^2 n^\gamma.$$

Поэтому, используя (52), получим, что второй сомножитель в левой части неравенства (11) допускает оценку

$$\begin{aligned} \max_{n \leq M} \left(\mu_n \sum_{q=1}^n \mu_q \frac{\|\Delta_q^*\|_4^4}{\|\Delta_q^*\|_2^2} \right) &\leq C(A_1, A_2, \beta, \gamma, \rho) \\ &\times \max_{n \leq M} \left(\lambda_{2n}^{(1-\beta)/2-\rho} (\omega(2^{2n}))^{-1} n^{-\gamma/2} \sum_{q=1}^n \lambda_{2q}^{(\beta-1)/2+\rho} \omega(2^{2q}) q^{\gamma/2} \right). \end{aligned} \quad (53)$$

Рассмотрим показатель степени при λ_{2q} под знаком суммы в правой части (53). Неравенство $(\beta-1)/2+\rho > 0$ выполняется как в случае, если $\beta \geq 2$, $\rho > (\beta-3)/2$, так и при $\beta > 2$, $\rho \geq (\beta-3)/2$. Таким образом, в случае пункта (I) теоремы 5 этот показатель всегда положителен и, следовательно, ввиду соотношений (30) и (31), выполняется неравенство

$$\sum_{q=1}^n \lambda_{2q}^{(\beta-1)/2+\rho} \omega(2^{2q}) q^{\gamma/2} \leq C(A_1, A_2, \beta, \gamma, \rho) \lambda_{2n}^{(\beta-1)/2+\rho} \omega(2^{2n}) n^{\gamma/2}. \quad (54)$$

Итак, имеем оценку (см. (53), (54))

$$\max_{n \leq M} \left(\mu_n \sum_{q=1}^n \mu_q \frac{\|\Delta_q^*\|_4^4}{\|\Delta_q^*\|_2^2} \right) \leq C(A_1, A_2, \beta, \gamma, \rho). \quad (55)$$

Далее, согласно (49) и (52) сумма в правой части (11) удовлетворяет неравенству

$$\sum_{n=1}^M \mu_n \|\Delta_n^*\|_2^2 \geq C(A_1, A_2, \rho) \sum_{n=1}^M \lambda_{2n}^{(3-\beta)/2+\rho} \omega(2^{2n}) n^{-\gamma/2}. \quad (56)$$

Рассмотрим случай $\rho > (\beta-3)/2$. Тогда, используя (30) и (31), получим

$$\sum_{n=1}^M \lambda_{2n}^{(3-\beta)/2+\rho} \omega(2^{2n}) n^{-\gamma/2} \leq C(A_1, A_2, \beta, \gamma, \rho) \lambda_{2M}^{(3-\beta)/2+\rho} \omega(2^{2M}) M^{-\gamma/2}.$$

Поэтому, не ухудшая оценки, сумму в правой части неравенства (56) можно заменить последним слагаемым.

Следовательно (см. (56)), принимая во внимание соотношения (39), (44), получим при $\rho > (\beta-3)/2$

$$\sum_{n=1}^M \mu_n \|\Delta_n^*\|_2^2 \geq C(A_1, A_2, \beta, \gamma, \rho) N^{\rho+(3-\beta)/2} \omega(N) (\log N)^{-\gamma/2}, \quad (57)$$

что вместе с оценкой (55) и доказывает справедливость пункта (I) теоремы 5 в этом случае (см. (11), (35), (55), (57)).

Пусть теперь $\rho = (\beta - 3)/2$. Применяя оценки (46)–(48) и учитывая (28), имеем

$$\sum_{n=1}^M \mu_n \|\Delta_n^*\|_2^2 \geq C(A_1, A_2) \sum_{n=1}^M n^{-\gamma/2} \omega(2^{2n}) \geq C(A_1, A_2, \gamma) \sum_{n=1}^{2M} n^{-\gamma/2} \sum_{s \in E_n} \frac{\omega(s)}{s}. \quad (58)$$

Но согласно (42) при $s \in E_n$

$$s \geq \lambda_{n-1} \geq A_1^{n-2},$$

и, значит (см. (28)),

$$\log s \leq n \leq C(A_1) \log s. \quad (59)$$

Соединяя (58) и (59), получим оценку

$$\sum_{n=1}^M \mu_n \|\Delta_n^*\|_2^2 \geq C(A_1, A_2, \gamma) \sum_{n=2}^N \frac{\omega(n)}{n(\log n)^{\gamma/2}}. \quad (60)$$

Таким образом (см. (35), (60)), пункт (I) теоремы 5 доказан.

(II) Пусть теперь $\beta = 2$, $\rho = -1/2$, $\gamma \geq 0$. В этом случае определим мультипликатор $\{\mu_n\}$ соотношением

$$\mu_n = (\omega(2^{2n}))^{-1} n^{-(\gamma+1)/2}. \quad (61)$$

Используя оценки (49) и (51), получим (см. (61))

$$\begin{aligned} \max_{n \leq M} \left(\mu_n \sum_{q=1}^n \mu_q \frac{\|\Delta_q^*\|_4^4}{\|\Delta_q^*\|_2^2} \right) &\leq C(A_1, A_2, \gamma) \\ &\times \max_{n \leq M} \left((\omega(2^{2n}))^{-1} n^{-(\gamma+1)/2} \sum_{q=1}^n \omega(2^{2q}) q^{(\gamma-1)/2} \right). \end{aligned} \quad (62)$$

Но ввиду (37) при всех $\gamma \geq 0$ выполняется

$$\sum_{q=1}^n \omega(2^{2q}) q^{(\gamma-1)/2} \ll \omega(2^{2n}) n^{(\gamma+1)/2}$$

и, следовательно,

$$\max_{n \leq M} \left(\mu_n \sum_{q=1}^n \mu_q \frac{\|\Delta_q^*\|_4^4}{\|\Delta_q^*\|_2^2} \right) \leq C(A_1, A_2, \gamma). \quad (63)$$

Далее, имеем (см. (49), (61))

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^M \mu_n \|\Delta_n^*\|_2^2 &\geq C(A_1, A_2) \sum_{n=1}^M n^{-(\gamma+1)/2} \omega(2^{2n}) \\ &\geq C(A_1, A_2, \gamma) \sum_{n=1}^{2M} n^{-(\gamma+1)/2} \sum_{s \in E_n} \frac{\omega(s)}{s}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, учитывая (59), что

$$\sum_{n=1}^M \mu_n \|\Delta_n^*\|_2^2 \geq C(A_1, A_2, \gamma) \sum_{n=2}^N \frac{\omega(n)}{n(\log n)^{(\gamma+1)/2}}. \quad (64)$$

Таким образом, применяя неравенство (11), заключаем (см. (62), (64)), что справедливо неравенство

$$\|\sigma_{m_N}(f)\|_1 \geq C(A_1, A_2, \gamma) \sum_{n=2}^N \frac{\omega(n)}{n(\log n)^{(\gamma+1)/2}}.$$

Тем самым (см. (35), (38), (55), (57), (60)), теорема 5 полностью доказана.

Теорема 5 позволяет получить точное в определенном смысле описание класса модулей коэффициентов $\{c_n\}$, для которых соответствующие тригонометрические ряды являются рядами Фурье. Действительно, средние Валле Пуссена $\sigma_N(f)$ ряда Фурье функции $f \in H^1$ должны сходиться к f по норме пространства H^1 (см. [19]), а неравенства (35), (38) дают возможность определить, при каких коэффициентах $\{c_n\}$ выполняется соотношение $\|\sigma_N(f)\|_1 \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$.

Таким образом, теорема 5 позволяет установить условия на модули коэффициентов комплексного тригонометрического ряда, необходимые для того, чтобы этот ряд был рядом Фурье. Вместе с тем условий на модули коэффициентов $\{c_n\}$, достаточных для того, чтобы тригонометрический ряд являлся рядом Фурье, и отличных от $\{c_n\} \in l_2$, не существует, так как если $\{c_n\} \notin l_2$, то случайная независимая расстановка знаков почти наверное дает не ряд Фурье (см. [18; гл. V, теорема 8.14]).

ТЕОРЕМА 6. Пусть коэффициенты комплексного тригонометрического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{im_n x} \quad (65)$$

при всех $n = 1, 2, \dots$ удовлетворяют соотношению (34), а арифметические свойства спектра $\{m_n\}$, имеющего степенную плотность (см. (30)), определяются соотношением (32). Тогда ряд (65) не является рядом Фурье в следующих случаях:

(I) при $\beta > 2$, $\rho > (\beta - 3)/2$ или при $\rho = (\beta - 3)/2$, если выполняется соотношение

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\omega(n)}{n(\log n)^{\gamma/2}} = \infty; \quad (66)$$

(II) при $\beta = 2$, $\gamma \geq 0$, $\rho > -1/2$ или при $\rho = -1/2$, если $\omega(n)$ удовлетворяет условию (37) и выполняется соотношение

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\omega(n)}{n(\log n)^{(\gamma+1)/2}} = \infty. \quad (67)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. При $\beta = 3$, $\gamma = 0$, $\rho = 0$ соотношение (35) из теоремы 5 переходит в оценку, которую дает обобщенное неравенство Харди (см. [26], [27]), и, соответственно, теорема 6 дает здесь точное в случае линейного спектра необходимое условие (см. (66)):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|}{n} < \infty.$$

В остальных случаях ($2 \leq \beta < 3$, $\rho \geq (\beta - 3)/2$) теоремы 5 и 6 существенно усиливают результаты, которые следуют из обобщенного неравенства Харди.

Теоремы 5 и 6 точны и в другом предельном случае, когда условие (32) выполняется при $\beta = 2$, $\gamma = 0$. Однако такие спектры, которые естественно называть обобщенно-лакунарными, целесообразно рассмотреть отдельно, так как здесь имеют место более общие утверждения.

4. Обобщенно-лакунарные спектры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Спектр $\{m_n\}$ назовем обобщенно-лакунарным, если числа $R(q)$, определяющие его арифметические свойства, удовлетворяют неравенству (см. (32))

$$R(q) \ll \lambda_q^2, \quad q = 1, 2, \dots \quad (68)$$

От других обобщений лакунарного по Адамару спектра (см. [28; т. 2, гл. 15]) это определение отличается тем, что используются только свойства спектра внутри двоичных пачек. Отметим, что вместо двоичных пачек здесь, как и в классической теории Литтлвуда–Пэли (см. [18; т. 2, гл. XV, § 2–4]), можно взять любое другое разбиение, порожденное последовательностью $\{n_k\}$ такой, что $n_{k+1}/n_k \geq \alpha > 1$ (см. [7]).

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\{m_n\}$ – обобщенно-лакунарный спектр (см. (68)), удовлетворяющий при некотором $A_3 \geq 1$ условию

$$A_3^{-1} \lambda_q \leq \lambda_{q+1} \leq A_3 \lambda_q, \quad q = 1, 2, \dots, \quad (69)$$

и пусть для коэффициентов $\{c_n\}$ при каждом $q = 2, 3, \dots$ выполняется неравенство

$$|c_{n_2}| \leq A_4 |c_{n_1}|, \quad A_4 \geq 1, \quad (70)$$

где $n_1, n_2 \in E_{q-1} \cup E_q \cup E_{q+1}$.

Тогда справедливы следующие утверждения.

(I) Если $f \in H^1$, то для любого $N = 1, 2, \dots$ справедливо неравенство

$$\|\sigma_{m_N}(f)\|_1 \geq C(A_3, A_4) \left(\sum_{n=1}^N |c_n|^2 \right)^{1/2}. \quad (71)$$

(II) Если $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \infty$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{im_n x}$$

не является рядом Фурье.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (I) Ограничимся случаем, когда $m_N = 2^{2M}$. В общей ситуации, если $2^{2(M-1)} < m_N < 2^{2M}$ при некотором $M = 2, 3, \dots$, следует вместо разложения (9), (10) взять разложение (40), (41) и далее доказательство проводится аналогично.

В силу теоремы 3, полагая в неравенстве (11) мультипликатор μ_n равным 1, $n = 1, 2, \dots$, получаем следующее неравенство ($p = 4$):

$$\|\sigma_{2^{2M}}(f)\|_1 \gg \left(\sum_{n=1}^M \frac{\|\Delta_n^*\|_4^4}{\|\Delta_n^*\|_2^2} \right)^{-1/2} \sum_{n=1}^M \|\Delta_n^*\|_2^2. \quad (72)$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского, имеем (см. (50))

$$\|\Delta_n^*\|_4^4 \ll \|\delta_{2n-1}\|_4^4 + \|\delta_{2n}\|_4^4 + \|\delta_{2n+1}\|_4^4.$$

Докажем, что для каждого $n = 1, 2, \dots$ при любом $q = 2n-1, 2n, 2n+1$ выполняется неравенство

$$\frac{\|\delta_q\|_4^4}{\|\delta_{2n}\|_2^2} \leq C(A_3, A_4) \sum_{k \in E_{2n}} |c_k|^2. \quad (73)$$

Действительно, используя соотношения (28), (29), (69), (70), получим

$$\begin{aligned} \|\delta_q\|_4^4 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu \in E_q} c_\nu e^{im_\nu x} \right|^4 dx \\ &= \sum_{\substack{m_{\nu_1} + m_{\nu_2} = m_{\nu_3} + m_{\nu_4} \\ \nu_j \in E_q, j=1,2,3,4}} c_{\nu_1} c_{\nu_2} \bar{c}_{\nu_3} \bar{c}_{\nu_4} \leq R(q) \max_{\nu \in E_q} |c_\nu|^4 \\ &\leq A_4^4 \lambda_q^2 \min_{\nu \in E_{2n}} |c_\nu|^4 \leq A_3^2 A_4^4 \lambda_{2n}^2 \min_{\nu \in E_{2n}} |c_\nu|^4 \leq A_3^2 A_4^4 \left(\sum_{\nu \in E_{2n}} |c_\nu|^2 \right)^2. \end{aligned} \quad (74)$$

А так как (см. (28)) $\|\delta_{2n}\|_2^2 = \sum_{\nu \in E_{2n}} |c_\nu|^2$, то (73) следует из (74). Теперь, используя (73) и учитывая, что (см. (10))

$$\|\Delta_n^*\|_2^2 \geq \|\delta_{2n}\|_2^2,$$

находим верхнюю оценку первого сомножителя в правой части (72):

$$\sum_{n=1}^M \frac{\|\Delta_n^*\|_4^4}{\|\Delta_n^*\|_2^2} \leq C(A_3, A_4) \sum_{n=1}^M \sum_{\nu \in E_{2n}} |c_\nu|^2 \leq C(A_3, A_4) \sum_{n=1}^N |c_n|^2. \quad (75)$$

С другой стороны, снова используя соотношения (69) и (70), имеем

$$\sum_{n=1}^M \|\Delta_n^*\|_2^2 \geq C_1(A_1, A_4) \sum_{n=1}^N |c_n|^2. \quad (76)$$

Таким образом, неравенство (71) при $m_N = 2^{2M}$ следует из (72), (75), (76).

(II) Утверждение пункта (II) выводится из оценки (71) и того факта, что для любой функции $f \in H^1$ средние Валле Пуссена $\sigma_n(f)$ сходятся к f по норме пространства Харди (см. [18]). Теорема 7 доказана.

Важным классом обобщенно-лакунарных спектров являются степенные спектры с целыми показателями $\{n^h\}$ при $h \geq 3$. В этом случае для числа решений диофантова уравнения

$$n_1^h + n_2^h = n_3^h + n_4^h, \quad (77)$$

$n_1, n_2, n_3, n_4 \leq N$, имеются асимптотические формулы К. Хооли [29]–[31], из которых следует, что выполняется условие (68).

Действительно, если $r_h(s)$ – число представлений натурального s в виде

$$s = n_1^h + n_2^h, \quad (78)$$

где n_1, n_2 – целые неотрицательные числа, то, как установлено в [31], имеет место соотношение

$$\sum_{s \leq x} r_h^2(s) = C(h)x^{2/h} + O(x^{5/(3h)+\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0. \quad (79)$$

Применяя теорему 7 и используя (79), получим следующее утверждение (см. (71)).

ТЕОРЕМА 8. Пусть спектр $\{m_n\}$ есть $\{n^h\}$, $h = 3, 4, \dots$, и пусть коэффициенты $\{c_n\}$ удовлетворяют условию (70).

(I) Если $f \in H^1$, то при всех $N = 1, 2, \dots$

$$\|\sigma_{N^h}(f)\|_1 \geq C(A_4, h) \left(\sum_{n=1}^N |c_n|^2 \right)^{1/2}.$$

(II) Если $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \infty$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in^h x}$$

не является рядом Фурье.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Возможно, что результаты теоремы 8 сохраняют силу для всех спектров $[n^\alpha]$, $\alpha > 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Уравнение (77) имеет при $h \geq 3$ меньше нетривиальных решений, чем тривиальных (см. [29], [31]). Существует предположение о том, что при $h \geq 5$ уравнение (77) не имеет нетривиальных решений. Эта старая (включающая в себя последнюю теорему Ферма) проблема диофантовых уравнений остается нерешенной (см. [32]).

5. Квадратичный спектр, обобщение и усиление результатов Харди и Литтлвуда о тэта-рядах

Число решений уравнения (77) для классического квадратичного спектра дается асимптотической формулой С. Рамануджана (см. [33]–[35]):

$$\sum_{s \leq x} r_2^2(s) = \frac{x}{4} (\log x + C) + O(x^{3/5+\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0, \quad (80)$$

где функция $r_2(s)$ определена соотношением (78). Следовательно (см. (80)), для спектра $m_n = n^2$, $n = 1, 2, \dots$, соотношение (32) выполняется с показателями $\beta = 2$, $\gamma = 1$.

В силу теорем 5 и 6 для квадратичного спектра устанавливаются следующие важные результаты (см. (32), (38), (67)).

ТЕОРЕМА 9. Если $f \in H^1$ и имеет место разложение

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n^2}, \quad |z| < 1,$$

где коэффициенты $\{c_n\}$ удовлетворяют при некотором $N = 2, 3, \dots$ условию

$$|c_n| \asymp n^\rho \omega(n), \quad 1 \leq n \leq 6N,$$

то справедливы следующие неравенства:

1) если $\rho > -1/2$, то

$$\|\sigma_{N^2}(f)\|_1 \geq C(\rho) N^{\rho+1/2} \omega(N) (\log N)^{-1/2}; \quad (81)$$

2) если $\rho = -1/2$ и для $\omega(n)$ выполняется (37), то

$$\|\sigma_{N^2}(f)\|_1 \gg \sum_{n=2}^N \frac{\omega(n)}{n \log n}. \quad (82)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. При любой расстановке знаков справедливы следующие оценки (см. (82), $N \geq 3$):

$$\begin{aligned} 1) \quad & \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=1}^N \left(\pm \frac{1}{\sqrt{n}} e^{in^2 x} \right) \right| dx \gg \log \log N, \\ 2) \quad & \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=2}^N \left(\pm \frac{1}{\sqrt{n} \log \log n} e^{in^2 x} \right) \right| dx \gg \log \log \log N. \end{aligned} \quad (83)$$

Ввиду того, что средние Валле Пуссена сходятся по норме пространства Харди, соотношения (81)–(83) дают новые необходимые условия на модули коэффициентов Фурье комплексных тригонометрических рядов по полным квадратам.

ТЕОРЕМА 10. Пусть коэффициенты $\{c_n\}$ удовлетворяют соотношению

$$|c_n| \asymp n^\rho \omega(n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (84)$$

Тогда ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in^2 x}$$

не являются рядами Фурье, если:

- 1) $\rho > -1/2$,
- 2) $\rho = -1/2$, $\omega(n)$ удовлетворяет условию (37) и

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\omega(n)}{n \log n} = \infty. \quad (85)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. При любой расстановке знаков ряды

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{n} \log \log n} e^{in^2 x} \right) \quad (86)$$

не являются рядами Фурье.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Следствие 2 усиливает и обобщает (см. (84)–(86)) результаты Г. Харди и Дж. Литтлвуда (см. [16], [17], [19]), которые в исследованиях по эллиптическим тэта-функциям и связанным с ними тригонометрическим рядам установили, что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{in^2 x} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} e^{in^2 x}$$

не суммируются почти всюду методом средних арифметических и, следовательно, не являются рядами Фурье.

6. Степенные спектры с нецелыми показателями, комплексный случай

Рассмотрим теперь ряды со спектрами $[n^\alpha]$, $1 \leq \alpha \leq 3/2$. Если $m_n = [n^\alpha]$, то при $1 < \alpha < 3/2$ И.И. Пятецкий-Шапиро и при $1 < \alpha \leq 3/2$ М.З. Гараев (см. [36]) доказали, что число решений $Q(N)$ диофантова уравнения

$$[n_1^\alpha] + [n_2^\alpha] = [n_3^\alpha] + [n_4^\alpha], \quad 0 \leq n_1, n_2, n_3, n_4 \leq N, \quad (87)$$

удовлетворяет неравенству

$$Q(N) \ll N^{4-\alpha}. \quad (88)$$

Возможно, что оценка (88) справедлива и при $3/2 < \alpha < 2$, но в настоящее время это неизвестно. М. З. Гараев использовал для оценки числа решений уравнения (87) тригонометрические суммы. Одновременно автор [11], [13] разработал новый комбинаторный подход к уравнениям (29), (87), не использующий их диофантовость. Представляется вероятным, что комбинаторными методами можно получить и верхнюю оценку С. Рамануджана (см. (80)) в случае произвольного выпуклого спектра.

В работах [11], [13] доказана комбинаторная теорема о разбиении отрезка, которая дает, в частности, оценку (88) без предположения о диофантовости уравнения (87).

Пусть произвольный отрезок множества вещественных чисел $[a, b]$ разбит на N частей точками $\{t_i\}_{i=0}^N$:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b.$$

Обозначим через Δ_{ij} отрезки, порожденные этим разбиением:

$$\Delta_{ij} = [t_i, t_j], \quad 0 \leq i < j \leq N.$$

Пусть $Q(N)$ – число различных пар, состоящих из отрезков, имеющих одинаковую длину, т. е.

$$Q(N) = \text{card}\{(\Delta_{ij}, \Delta_{qr}) : |\Delta_{ij}| = |\Delta_{qr}|\}.$$

Обозначим через $R(i, j)$ число правых сдвигов отрезка Δ_{ij} , т. е.

$$R(i, j) = \text{card}\{(q, r) : q \geq i, |\Delta_{qr}| = |\Delta_{ij}|\}.$$

В работах [11], [13] установлено, что справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 11. Пусть для некоторого $0 < \alpha < \infty$ число правых сдвигов каждого отрезка Δ_{ij} удовлетворяет условию

$$R(i, j) \ll (j - i)^\alpha. \quad (89)$$

Тогда выполняется неравенство

$$Q(N) \ll N^{2+\alpha/(\alpha+1)}. \quad (90)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Неравенство (90) является точным в предельных случаях, когда $\alpha = 0$ и $\alpha = \infty$. При $\alpha = 1$ из теоремы 11 следует (см. (89)–(91)) установленная С. В. Конягиным [37] оценка:

$$Q(N) \ll N^{5/2}, \quad (91)$$

если последовательность $\{t_i\}$ строго выпукла.

Из (87), (88) следует, что условие (32) выполняется для спектра $[n^\alpha]$, $1 \leq \alpha \leq 3/2$, с показателями $\beta = 4 - \alpha$, $\gamma = 0$. Поэтому теоремы 5 и 6 дают в этом случае следующие результаты (см. (32), (35), (66)).

ТЕОРЕМА 12. Пусть $f \in H^1$, $1 \leq \alpha \leq 3/2$. Предположим, что коэффициенты $\{c_n\}$ разложения

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{[n^\alpha]}, \quad |z| < 1,$$

удовлетворяют при некотором N соотношению

$$|c_n| \asymp n^\rho \omega(n), \quad 1 \leq n \leq 9N.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\|\sigma_{[N^\alpha]}(f)\|_1 \geq \begin{cases} C(\rho) N^{\rho + (\alpha-1)/2} \omega(N) & \text{при } \rho > \frac{1}{2}(1-\alpha), \\ C \sum_{n=1}^N \frac{\omega(n)}{n} & \text{при } \rho = \frac{1}{2}(1-\alpha). \end{cases} \quad (92)$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Для всех $1 \leq \alpha \leq 3/2$ при любой расстановке знаков имеют место неравенства

$$1) \quad \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=1}^N (\pm n^{(1-\alpha)/2} e^{i[n^\alpha]x}) \right| dx \gg \log N, \quad (93)$$

$$2) \quad \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=2}^N (\pm n^{(1-\alpha)/2} (\log n)^{-1} e^{i[n^\alpha]x}) \right| dx \gg \log \log N. \quad (94)$$

ТЕОРЕМА 13. Если последовательность коэффициентов $\{c_n\}$ определяется соотношением

$$|c_n| \asymp n^\rho \omega(n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

то при любом $1 \leq \alpha \leq 3/2$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i[n^\alpha]x}$$

не является рядом Фурье при $\rho > (1-\alpha)/2$ или если $\rho = (1-\alpha)/2$ и расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega(n)}{n} = \infty. \quad (95)$$

СЛЕДСТВИЕ 4. При всех $1 \leq \alpha \leq 3/2$ ряды

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\pm n^{(1-\alpha)/2} (\log n)^{-1} e^{i[n^\alpha]x}) \quad (96)$$

не являются рядами Фурье ни при какой расстановке знаков.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. В случае линейного спектра, когда $\alpha = 1$, теоремы 12 и 13 являются точными и дают те же результаты, что и неравенство Харди (см. (92)–(96)).

7. Мультипликативные неравенства для L_1 -нормы вещественных тригонометрических рядов и полиномов

В вещественном случае вместо характеристики пространства H^1 , определенной соотношением (8), аналогом теоремы Литтлвуда–Пэли является ограниченность функции Литтлвуда–Пэли для ряда Валле Пуссена как оператора из L_1 в пространство Лоренца $L_{1,\infty}$. Полное и детальное доказательство этой теоремы можно найти в работе автора [7].

ТЕОРЕМА 14. Для любой $f \in L_1(0, 2\pi)$ выполняется неравенство

$$\text{mes} \left\{ \left(\sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n^2(f, x) \right)^{1/2} > y \right\} \ll \frac{1}{y} \|f\|_1, \quad (97)$$

где (см. (3))

$$\Delta_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(u) Q_n(x - u) du. \quad (98)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Отметим, что классическая функция Литтлвуда–Пэли для $f \in L_1$ может обращаться в бесконечность почти всюду. Действительно, с помощью соответствующей модификации конструкции А. Н. Колмогорова [38] можно построить такую функцию $f \in L_1$, для которой почти всюду

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (S_{2^{n+1}}(f, x) - S_{2^n}(f, x)) = \infty. \quad (99)$$

Однако в комплексном случае соотношение (99) не может иметь места, так как для любой $f \in H^1$ подпоследовательность частичных сумм ряда Фурье $S_{2^n}(f, x)$ сходится почти всюду (см. [18; т. 2, гл. XV, теорема 5.11]).

Теорема 14, а также характеристика пространства ВМО (см. (6)) являются основой для получения мультипликативных оценок L_1 -нормы вещественных тригонометрических рядов. Однако – в отличие от пространства Харди, где мультипликативные неравенства включают в себя мультипликатор $\{\mu_n\}$, в качестве которого может быть взята любая последовательность неотрицательных чисел, – для пространства L_1 неравенства с убывающим мультипликатором $\{\mu_n\}$ не могут иметь места (см. [13]). А поскольку в исследовании свойств рядов с различными спектрами применялись именно убывающие мультипликаторы (см. теоремы 5 и 6), то мультипликативные неравенства в вещественном случае доказываются без дополнительного мультипликатора $\{\mu_n\}$.

Как и в комплексной ситуации (см. (9), (10)), будем применять разложение функции $f \in L_1(0, 2\pi)$ (которое сходится почти всюду)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n^*(f, x), \quad (100)$$

использующее операторы

$$\Delta_n^*(f, x) = \Delta_{2n-1}(f, x) + \Delta_{2n}(f, x), \quad (101)$$

где $\Delta_n(f, x)$ определяется соотношением (98).

Установим, что имеет место следующее мультипликативное неравенство, дающее нижнюю оценку L_1 -нормы средних Валле Пуссена вещественных тригонометрических рядов Фурье.

ТЕОРЕМА 15. Пусть $f \in L_1(0, 2\pi)$. Тогда для каждого $2 < p \leq \infty$ при всех $N = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство

$$\|\sigma_{2^{2N}}(f)\|_1 \left(\sum_{n=0}^N \left(\frac{\|\Delta_n^*\|_p^p}{\|\Delta_n^*\|_2^2} \right)^{2/(p-2)} \right)^{1/2} \geq C(p) \sum_{n=0}^N \|\Delta_n^*\|_2^2. \quad (102)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $2 < p < \infty$. Положим (см. (98), (101))

$$E_n = \left\{ |\Delta_n^*(f, x)| \leq 2^{p/(2(p-2))} \left(\frac{\|\Delta_n^*\|_p^p}{\|\Delta_n^*\|_2^2} \right)^{1/(p-2)} \right\}. \quad (103)$$

Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\int_{CE_n} (\Delta_n^*(f, x))^2 dx \leq \pi \|\Delta_n^*\|_2^2, \quad (104)$$

где $CE_n = [0, 2\pi] \setminus E_n$.

Доказательство неравенства (104) аналогично доказательству соответствующего утверждения в комплексном случае (см. доказательство теоремы 3, а именно соотношения (13)–(18)).

Введем функции $g_n(x)$, $n = 0, 1, \dots, N$: положим (см. (103))

$$g_n(x) = \begin{cases} |\Delta_n^*(f, x)| & \text{при } x \in E_n, \\ 0 & \text{при } x \in CE_n. \end{cases} \quad (105)$$

В силу неравенства (104) имеем

$$\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^N g_n^2(x) dx \geq \pi \sum_{n=0}^N \|\Delta_n^*\|_2^2. \quad (106)$$

Оценим теперь левую часть этого неравенства сверху, используя теорему 14. Введем множества G_y , $0 < y < \infty$:

$$G_y = \left\{ \sum_{n=0}^N g_n^2(x) > y \right\}. \quad (107)$$

Имеем (см. (107))

$$\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^N g_n^2(x) dx = \int_0^{\sum_{n=0}^N \|\Delta_n^*\|_2^2} \text{mes } G_y dy. \quad (108)$$

Далее, из (105) и (107) следует, что

$$\text{mes } G_y \leq \text{mes } F_y, \quad (109)$$

где множество F_y определяется соотношением

$$F_y = \left\{ \sum_{n=0}^N (\Delta_n^*(f, x))^2 > y \right\}. \quad (110)$$

Применяя неравенство (97) из теоремы 14 и учитывая при этом, что (см. (98), (101))

$$\sum_{n=0}^N \Delta_n^*(f, x) = \sigma_{2^{2N}}(f, x),$$

а также опять используя (101), получим (см. (108)–(110))

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^N g_n^2(x) dx &\leq \int_{n=0}^{\sum_{n=0}^N \|g_n\|_\infty^2} \text{mes } F_y dy \\ &\ll \|\sigma_{2^{2N}}(f)\|_1 \int_0^{\sum_{n=0}^N \|g_n\|_\infty^2} \frac{dy}{\sqrt{y}} \\ &\ll \|\sigma_{2^{2N}}(f)\|_1 \left(\sum_{n=0}^N \|g_n\|_\infty^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (111)$$

Но согласно соотношениям (103) и (105), определяющим множества E_n и функции $g_n(x)$, имеем

$$\sum_{n=0}^N \|g_n\|_\infty^2 \leq 2^{p/(p-2)} \sum_{n=0}^N \left(\frac{\|\Delta_n^*\|_p^p}{\|\Delta_n^*\|_2^2} \right)^{2/(p-2)}. \quad (112)$$

Соединяя теперь неравенства (106), (111) и (112), получим

$$\|\sigma_{2^{2N}}(f)\|_1 \left(\sum_{n=0}^N \left(\frac{\|\Delta_n^*\|_p^p}{\|\Delta_n^*\|_2^2} \right)^{2/(p-2)} \right)^{1/2} \gg 2^{p/(2(2-p))} \sum_{n=0}^N \|\Delta_n^*\|_2^2. \quad (113)$$

Тем самым (см. (102), (113)) теорема 15 при $2 < p < \infty$ доказана.

Установим, что при $p = \infty$ имеет место более сильное утверждение (использующее характеристику пространства ВМО через разложение Валле Пуссена), из которого, в частности, выводится теорема 15. Для этого понадобится следующее мультипликативное неравенство (см., например, [39]), которое может быть полезно и в других случаях.

Пусть Q^m – единичный куб вещественного m -мерного пространства $\mathbb{R}^m$, $I \subseteq Q^m$ – некоторый m -мерный куб и $x = (x_1, \dots, x_m)$.

Норма функции $f \in L_1(Q^m)$ в пространстве ВМО(Q^m) определяется следующим образом:

$$\|f\|_{\text{ВМО}} = \left| \int_{Q^m} f(x) dx \right| + \sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - f_I| dx,$$

где $f_I = \frac{1}{|I|} \int_I f(x) dx$.

ТЕОРЕМА 16. Пусть $1 \leq q < r < \infty$. Если $f \in \text{ВМО}(Q^m)$, то

$$\|f\|_r^r \leq C(r, m) \|f\|_{\text{ВМО}}^{r-q} \|f\|_q^q. \quad (114)$$

Применяя неравенство (114) в периодическом варианте (при $m = 1$, $r = 2$) и используя тригонометрическую характеристику пространства ВМО с разложением (9), (10) (см. замечание 2), находим, что имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 17. Пусть $f \in \text{ВМО}$. Тогда

$$\|f\|_2^2 \ll \|f\|_1 \sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I \sum_{2^{-n} \leq |I|} (\Delta_n^*(f, x))^2 dx \right)^{1/2}. \quad (115)$$

Поскольку выполняется неравенство

$$\sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I \sum_{2^{-n} \leq |I|} (\Delta_n^*(f, x))^2 dx \right)^{1/2} \ll \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|\Delta_n^*\|_{\infty}^2 \right)^{1/2},$$

то, применяя (115) к $\sigma_{2^{2n}}(f, x)$, получим теорему 15 для показателя $p = \infty$.

В работе [12] доказан также вариант теоремы 15, использующий двоичные пакки Литтлвуда–Пэли (см. (2)).

ТЕОРЕМА 18. Пусть $f \in L_1(0, 2\pi)$, $2 < p \leq \infty$, и пусть

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\|\delta_n\|_p^p}{\|\delta_n\|_2^2} \right)^{2/(p-2)} < \infty.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\|f\|_1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\|\delta_n\|_p^p}{\|\delta_n\|_2^2} \right)^{2/(p-2)} \right)^{1/2} \geq C(p) \|f\|_2^2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 12. В связи с классами функций, которые возникают в исследуемых в этой работе неравенствах, заметим, что, например, функционал ($p > r > 0$)

$$\left(\frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_r^r} \right)^{1/(p-r)} \quad (116)$$

является “квазинормой” на конусе положительных функций, т. е. для него выполняется неравенство треугольника с константой, зависящей от p и r , но, вообще говоря, (116) квазинормой не является. Отметим, что Беккенбах и Дрешер установили, что функционал (116) удовлетворяет неравенству треугольника при $p \geq 1 \geq r > 0$, $f \geq 0$ (см. [40; гл. I, § 23, 24]).

8. Вещественные тригонометрические ряды со спектрами степенной плотности

Ввиду того, что неравенство (11) из теоремы 3 с убывающим мультипликатором теряет силу для вещественных тригонометрических рядов, соответствующие результаты здесь отличаются от тех, которые были установлены для пространства Харди. Вместе с тем для каждого из результатов, полученных для спектров степенной плотности в комплексном случае, имеется определенный вещественный аналог. Для $f \in L_1$ обозначим

$$r_n = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2}, \quad n \geq 1, \quad (117)$$

где a_n, b_n – коэффициенты Фурье функции f .

ТЕОРЕМА 19. Пусть спектр $\{t_n\}$ имеет степенную плотность (см. (30)), а числа $R(q)$ (см. (29)) удовлетворяют соотношению (32), т. е. выполняется неравенство

$$R(q) \ll \lambda_q^\beta (\log \lambda_q)^\gamma,$$

где $2 \leq \beta \leq 3$, $\gamma \leq 0$ при $\beta = 3$, $\gamma \geq 0$ при $\beta = 2$, и пусть функция $f \in L_1(0, 2\pi)$ имеет ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos(m_n x + \alpha_n). \quad (118)$$

(I) Если для некоторого $N = 1, 2, \dots$

$$r_n \asymp n^\rho \omega(n) \quad \text{при } 1 \leq n \leq N(1 + A_1)^2, \quad (119)$$

то средние Валле Пуссена ряда (118) удовлетворяют неравенству

$$\|\sigma_{m_N}(f)\|_1 \geq \begin{cases} C(A_1, A_2, \beta, \gamma, \rho) N^{\rho+(3-\beta)/2} \omega(N) (\log N)^{-\gamma/2} & \text{при } \beta \geq 2, \rho > \frac{1}{2}(\beta - 3); \\ C(A_1, A_2, \beta, \gamma) \omega(N) (\log N)^{-\gamma/2} & \text{при } \beta > 2, \rho = \frac{1}{2}(\beta - 3). \end{cases} \quad (120)$$

(II) Если $\beta = 2$, $\gamma \geq 0$ и

$$r_n \asymp \frac{\omega(n)}{\sqrt{n}} \quad \text{при } 1 \leq n \leq N(1 + A_1)^2,$$

где $\omega(n)$ удовлетворяет соотношению

$$\sum_{n=1}^m (\omega(2^n))^2 \ll m(\omega(2^m))^2, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (121)$$

то выполняется неравенство

$$\|\sigma_{m_N}(f)\|_1 \geq C(A_1, A_2, \gamma) \omega(N) (\log N)^{(1-\gamma)/2}. \quad (122)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно считать, что (см. (39))

$$m_N = 2^{2M}$$

при некотором $M = 1, 2, \dots$. Если

$$2^{2(M-1)} < m_N < 2^{2M},$$

то, как и при доказательстве теоремы 5, вместо разложения (100), (101) следует использовать вещественный вариант разложения (40), (41).

Оценим $\|\Delta_n^*\|_4^4$ сверху. Согласно обобщенному неравенству Минковского для этого достаточно оценить $\|\delta_{2n-1}\|_4^4$, $\|\delta_{2n}\|_4^4$, $\|\delta_{2n+1}\|_4^4$ (см. (50), (98), (100), (101)). Оценивая, например, $\|\delta_{2n}\|_4^4$ и используя ортогональность тригонометрической системы $\{\cos(nx + \alpha_n)\}$, имеем (см. (118))

$$\|\delta_{2n}\|_4^4 = \frac{1}{8} \sum_{\substack{m_{\nu_1} \pm m_{\nu_2} \pm m_{\nu_3} \pm m_{\nu_4} = 0 \\ \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 \in E_{2n}}} r_{\nu_1} r_{\nu_2} r_{\nu_3} r_{\nu_4}. \quad (123)$$

Обозначим через $Q(2n)$ полное число решений уравнений

$$m_{\nu_1} \pm m_{\nu_2} \pm m_{\nu_3} \pm m_{\nu_4} = 0, \quad \nu_j \in E_{2n}, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (124)$$

при всех расстановках знаков.

Учитывая (124), в силу соотношения (123) получаем

$$\|\delta_{2n}\|_4^4 \leq \frac{1}{8} Q(2n) \max_{\nu \in E_{2n}} r_{\nu}^4. \quad (125)$$

Пусть $R_1(2n)$ – число решений уравнения

$$m_{\nu_1} - m_{\nu_2} = m_{\nu_3} + m_{\nu_4}, \quad (126)$$

где $\nu_j \in E_{2n}$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Докажем, что (см. (29))

$$R_1(2n) \leq R(2n). \quad (127)$$

Действительно, пусть $k(s)$ обозначает число представлений натурального s в виде

$$m_{\nu_1} + m_{\nu_2} = s, \quad \nu_1, \nu_2 \in E_{2n},$$

и пусть $k_1(s)$ – число представлений s в виде

$$m_{\nu_1} - m_{\nu_2} = s, \quad \nu_1, \nu_2 \in E_{2n}.$$

Тогда, применяя неравенство Коши, имеем (см. (126))

$$R_1(2n) = \sum_{s=1}^{\infty} k(s)k_1(s) \leq \left(\sum_{s=1}^{\infty} k^2(s) \right)^{1/2} \left(\sum_{s=1}^{\infty} k_1^2(s) \right)^{1/2}.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\sum_{s=1}^{\infty} k_1^2(s) \leq \sum_{s=1}^{\infty} k^2(s),$$

получим неравенство (127). А так как (см. (29), (124), (126))

$$Q(2n) = 4(R(2n) + R_1(2n)),$$

то из (125) и (127) следует, что

$$\|\delta_{2n}\|_4^4 \leq R(2n) \max_{\nu \in E_{2n}} r_{\nu}^4. \quad (128)$$

Теперь, используя (32), (119), получим (см. (128))

$$\|\Delta_n^*\|_4^4 \ll \lambda_{2n}^{\beta} (\log \lambda_{2n})^{\gamma} \max_{\nu \in E_{2n}} (\omega(\nu))^4 \nu^{4\rho}. \quad (129)$$

Далее, согласно (31), (42), (43), (46)–(48) при $\nu \in E_{2n}$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \nu &\asymp C(A_1, A_2) \lambda_{2n}, \\ \omega(\nu) &\asymp C(A_1, A_2) \omega(2^{2n}). \end{aligned}$$

Поэтому, учитывая также, что (см. (59))

$$\log \lambda_{2n} \asymp C(A_1, A_2) n,$$

получаем оценку (см. (129))

$$\|\Delta_n^*\|_4^4 \leq C(A_1, A_2, \beta, \gamma, \rho) \lambda_{2n}^{4\rho+\beta} n^{\gamma} (\omega(2^{2n}))^4. \quad (130)$$

С другой стороны, ввиду (98), (100), (101), применяя равенство Парсеваля и снова используя соотношения (46)–(48), имеем

$$\|\Delta_n^*\|_2^2 \geq \sum_{\nu \in E_{2n}} (\omega(\nu))^2 \nu^{2\rho} \geq C(A_1, A_2, \rho) \lambda_{2n}^{2\rho+1} (\omega(2^{2n}))^2. \quad (131)$$

Применяя теорему 15 и учитывая, что $m_N = 2^{2M}$, получим в силу соотношений (101), (130), (131) следующее неравенство:

$$\|\sigma_{2^{2M}}(f)\|_1 \left(\sum_{n=1}^M \lambda_{2^n}^{2\rho+\beta-1} (\omega(2^{2n}))^2 n^\gamma \right)^{1/2} \geq C(A_1, A_2, \beta, \gamma, \rho) \sum_{n=1}^M \lambda_{2^n}^{2\rho+1} (\omega(2^{2n}))^2. \quad (132)$$

Докажем пункт (I) теоремы 19. Поскольку и при $\beta \geq 2$, $\rho > (\beta - 3)/2$, и при $\beta > 2$, $\rho = (\beta - 3)/2$ выполняются соотношения (см. (120))

$$2\rho + 1 > 0, \quad 2\rho + \beta > 1, \quad (133)$$

то из (31) и (42) выводятся оценки (см. (133), (44), (48))

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^M \lambda_{2^n}^{2\rho+\beta-1} (\omega(2^{2n}))^2 n^\gamma &\leq C(A_1, A_2, \beta, \gamma, \rho) \\ &\times N^{2\rho+\beta-1} (\omega(N))^2 (\log N)^\gamma, \end{aligned} \quad (134)$$

$$\sum_{n=1}^M \lambda_{2^n}^{2\rho+1} (\omega(2^{2n}))^2 \asymp C(A_1, A_2, \rho) N^{2\rho+1} (\omega(N))^2. \quad (135)$$

Таким образом, неравенство (120) следует из неравенств (132), (134), (135), и пункт (I) доказан.

(II) Осталось рассмотреть важный случай (см. (120)), когда $\beta = 2$, $\rho = (\beta - 3)/2 = -1/2$, $\gamma \geq 0$. Соотношения (130) и (131) дают здесь оценку

$$\sum_{n=1}^M \frac{\|\Delta_n^*\|_4^4}{\|\Delta_n^*\|_2^2} \leq C(A_1, A_2, \gamma) \sum_{n=1}^M n^\gamma (\omega(2^{2n}))^2,$$

откуда, используя (31) и применяя (121), получим

$$\sum_{n=1}^M \frac{\|\Delta_n^*\|_4^4}{\|\Delta_n^*\|_2^2} \leq C(A_1, A_2, \gamma) M^{1+\gamma} (\omega(2^{2M}))^2. \quad (136)$$

С другой стороны, (31) и (131) дают в рассматриваемом случае следующую оценку:

$$\sum_{n=1}^M \|\Delta_n^*\|_2^2 \geq \sum_{M/2 \leq n \leq M} (\omega(2^{2n}))^2 \geq C(A_1, A_2, \gamma) M (\omega(2^{2M}))^2. \quad (137)$$

Теперь, в силу неравенства (102), из теоремы 15 следует ввиду (136), (137), что

$$\|\sigma_{2^{2M}}(f)\|_1 \geq C(A_1, A_2, \gamma) M^{(1-\gamma)/2} \omega(2^{2M}),$$

и, таким образом, учитывая соотношения (39), (44), (46)–(48), имеем

$$\|\sigma_{m_N}(f)\|_1 \geq C(A_1, A_2, \gamma) \omega(N) (\log N)^{(1-\gamma)/2}.$$

Тем самым (см. (122)) теорема 19 полностью доказана.

Установим на основе теоремы 19 необходимые условия на модули коэффициентов Фурье рядов со спектрами степенной плотности в вещественном случае.

ТЕОРЕМА 20. Пусть арифметические свойства спектра степенной плотности $\{m_n\}$ определяются соотношением (32):

$$R(q) \leq \lambda_q^\beta (\log \lambda_q)^\gamma, \quad q = 1, 2, \dots,$$

а коэффициенты тригонометрического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos(m_n x + \alpha_n) \tag{138}$$

удовлетворяют условию

$$r_n \asymp n^\rho \omega(n), \quad n = 1, 2, \dots \tag{139}$$

Тогда ряд (138) не является рядом Фурье в следующих случаях:

$$1) \quad \rho > (\beta - 3)/2, \quad 2 \leq \beta \leq 3;$$

$$2) \quad \rho = (\beta - 3)/2, \quad 2 < \beta \leq 3, \quad \omega(n) \gg (\log n)^{\gamma/2}, \quad n = 1, 2, \dots; \tag{140}$$

$$3) \quad \beta = 2, \quad \rho = -1/2, \quad \gamma \geq 0, \quad \omega(n) \gg (\log n)^{(\gamma-1)/2}, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{141}$$

где для $\omega(n)$ выполняется (121).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\rho > (\beta - 3)/2$, то из теоремы 19 следует, ввиду соотношений (31), (120), что для ряда (138)

$$\|\sigma_{m_N}\|_1 \rightarrow \infty \quad \text{при } N \rightarrow \infty,$$

и, таким образом (см. [18]), ряд (138) не является рядом Фурье.

Рассмотрим теперь случаи, когда $2 \leq \beta \leq 3$, $\rho = (\beta - 3)/2$ (см. (140), (141)). Здесь нужно использовать теорему Р. Салема о преобразовании рядов Фурье (см. [41], а также [17; т. 1, гл. IV, § 11, примечания]).

Пусть, например, $\beta = 2$, $\rho = (\beta - 3)/2 = -1/2$, $\gamma \geq 0$, и выполняется (141). Предположим, что ряд (138) является рядом Фурье. Тогда согласно теореме Салема существует такая вогнутая последовательность $\Omega(n) \uparrow \infty$, для которой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n \Omega(m_n) \cos(m_n x + \alpha_n) \quad (142)$$

также есть ряд Фурье некоторой функции $f \in L_1$.

Поскольку последовательность $\{1/\Omega(n)\}$ выпукла и стремится к нулю, то найдется настолько медленно возрастающая последовательность $\mu(n) \rightarrow \infty$, что

$$\frac{\mu(n)}{\Omega(n)} \rightarrow 0, \quad (143)$$

последовательность $\mu(n)/\Omega(n)$ выпукла и, кроме того, для подпоследовательности $\mu(m_n)$ выполняется условие (31), т. е.

$$\mu(m_{n^2}) \ll \mu(m_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Из (143) следует (см. [17; т. 1, гл. V, теорема 1.5]), что существует функция $g \in L_1$, рядом Фурье которой является ряд

$$g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\Omega(n)} \cos nx. \quad (144)$$

Пусть $h = f * g$ – свертка функций f и g :

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t) dt. \quad (145)$$

Тогда функция $h(x)$ принадлежит $L_1(0, 2\pi)$ и ее ряд Фурье имеет следующий вид (см. (142)–(145)):

$$h(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} r_n \mu(m_n) \cos(m_n x + \alpha_n). \quad (146)$$

Заметим, что поскольку $\mu(n) \uparrow \infty$, то условие (121) для последовательности $\{\mu(m_n)\omega(n)\}$ тоже выполняется. Применяя к ряду (146) теорему 19 (теорема остается справедливой, если $\{\omega(n)\}$ заменить на последовательность $\{\mu(m_n)\omega(n)\}$, которая является произведением двух монотонных последовательностей, удовлетворяющих условию (31)), получим в силу неравенства (122), что для средних Валле Пуссена этого ряда, ввиду (141), справедлива оценка

$$\|\sigma_{m_N}(h)\|_1 \gg \mu(m_N)\omega(N)(\log N)^{(1-\gamma)/2} \gg \mu(m_N). \quad (147)$$

Полученное противоречие (см. (146), (147)) доказывает теорему 20 в рассматриваемом случае. Если $2 < \beta \leq 3$, $\rho = (\beta - 3)/2$, то доказательство проводится аналогично. Теорема 20 доказана.

9. Квадратичный спектр и степенные спектры с нецелыми показателями, вещественный случай

Рассмотрим сначала вещественные тригонометрические ряды со спектрами $\{n^h\}$, $h = 3, 4, \dots$. Отметим, что теорема 7 об обобщенно-лакунарных спектрах остается справедливой в вещественном случае, поскольку она основывается на неравенстве (72), не содержащем убывающего мультипликатора и имеющем вещественный аналог (см. (102)). Поэтому, применяя результаты К. Хооли [29]–[31] и используя оценки (125) и (127), получим, что имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 21. Пусть $h = 3, 4, \dots$, и пусть коэффициенты тригонометрического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos(n^h x + \alpha_n) \quad (148)$$

для каждого $q = 2, 3, \dots$ удовлетворяют условию

$$r_{n_1} \ll r_{n_2}$$

при $n_1, n_2 \in E_{q-1} \cup E_q \cup E_{q+1}$.

(I) Если ряд (148) есть ряд Фурье функции $f \in L_1$, то для любого $N = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство

$$\|\sigma_{N^h}(f)\|_1 \geq C(h) \left(\sum_{n=1}^N r_n^2 \right)^{1/2}. \quad (149)$$

(II) Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 = \infty, \quad (150)$$

то ряд (148) не является рядом Фурье.

Как и в случае тригонометрических рядов степенного типа, представляется вероятным, что теорема 21 сохраняет силу и для спектров $[n^\alpha]$ с нецелыми показателями $2 < \alpha < \infty$ (см. (149), (150)). Однако для показателей $1 \leq \alpha \leq 2$ свойства вещественных и комплексных тригонометрических рядов со спектрами $[n^\alpha]$ уже существенно отличаются.

Обратимся к классическому спектру, образованному полными квадратами. Поскольку совокупное число решений системы уравнений (124) допускает оценку

$$Q(n) \leq 8R(n),$$

где $R(n)$ – число решений уравнения (29), а $R(n)$ в свою очередь в случае спектра $\{m_n\} = \{n^2\}$ оцениваются на основе асимптотической формулы С. Рамануджана (см. (80)), то теорема 19 дает в этом случае следующий результат ($\beta = 2$, $\gamma = 1$).

ТЕОРЕМА 22. Пусть функция $f \in L_1$ раскладывается в ряд Фурье по квадратичным гармоникам:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos(n^2 x + \alpha_n),$$

где числа $r_n \geq 0$ удовлетворяют при некотором N соотношению

$$r_n \asymp n^\rho \omega(n), \quad 1 \leq n \leq 6N.$$

Тогда справедливы следующие оценки.

1. Если $\rho > -1/2$, то

$$\|\sigma_{N^2}(f)\|_1 \geq C(\rho) N^{\rho+1/2} \omega(N) (\log N)^{-1/2}.$$

2. Если $\rho = -1/2$, $\omega(n)$ не убывает и выполняется (121), то

$$\|\sigma_{N^2}(f)\|_1 \gg \omega(N).$$

Теорема 20 устанавливает, в частности, важное условие на коэффициенты вещественного ряда с квадратичным спектром, необходимое для того, чтобы этот ряд являлся рядом Фурье.

ТЕОРЕМА 23. Если коэффициенты тригонометрического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n^2 x + b_n \sin n^2 x) \quad (151)$$

удовлетворяют соотношению ($n = 1, 2, \dots$)

$$(a_n^2 + b_n^2)^{1/2} \asymp n^\rho, \quad \rho \geq -\frac{1}{2}, \quad (152)$$

то ряд (151) не является рядом Фурье.

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Теорема 23 обобщает (см. (151), (152)) результат Г. Харди и Дж. Литтлвуда (см. [15], [16]), установивших, что два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\rho \cos n^2 x \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^\rho \sin n^2 x$$

не являются рядами Фурье, если $\rho \geq -1/2$.

Рассмотрим теперь вещественные тригонометрические ряды со спектрами $[n^\alpha]$, $1 \leq \alpha \leq 3/2$. Из оценки (88) следует, что числа $R(q)$ (см. (29)) удовлетворяют соотношению (32) с показателями $\beta = 4 - \alpha$, $\gamma = 0$. Поэтому теорема 19 приводит в этом случае к следующим оценкам интегральной нормы средних Валле Пуссена.

ТЕОРЕМА 24. Пусть функция f принадлежит L_1 и имеет при $1 \leq \alpha \leq 3/2$ следующий ряд Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos [n^\alpha]x + b_n \sin [n^\alpha]x),$$

где коэффициенты a_n, b_n при некотором N удовлетворяют соотношению

$$(a_n^2 + b_n^2)^{1/2} \asymp n^\rho \omega(n), \quad 1 \leq n \leq 9N.$$

Тогда справедливы следующие неравенства.

1. Если $\rho > (1 - \alpha)/2$, то

$$\|\sigma_{[N^\alpha]}(f)\|_1 \geq C(\rho) N^{\rho + (\alpha - 1)/2} \omega(N).$$

2. Если $\rho = (1 - \alpha)/2$ и $\omega(n)$ не убывает, то

$$\|\sigma_{[N^\alpha]}(f)\|_1 \geq \omega(N).$$

Применяя теорему 20 к спектру $[n^\alpha]$, $1 \leq \alpha \leq 3/2$, получим следующее необходимое условие на модули коэффициентов Фурье вещественных тригонометрических рядов с этим спектром.

ТЕОРЕМА 25. Ряды $(1 \leq \alpha \leq 3/2)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos [n^\alpha]x + b_n \sin [n^\alpha]x),$$

коэффициенты которых удовлетворяют соотношению $(n = 1, 2, \dots)$

$$(a_n^2 + b_n^2)^{1/2} \asymp n^\rho \quad \text{при } \rho \geq \frac{1}{2}(1 - \alpha),$$

не являются рядами Фурье.

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Как и соответствующие результаты в комплексном случае (см. теорему 13), теорема 25 точна при $\alpha = 1$ (см. [17; гл. V, теорема 1.5]). При $\alpha = 2$ теорема 25 переходит в теорему 23. Представляется вероятным, что этот результат сохраняет силу при $3/2 < \alpha < 2$.

Список литературы

- [1] С. В. Бочкарев, “О проблеме Зигмунда”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **37**:3 (1973), 630–638; англ. пер.: S. V. Bochkarev, “On a problem of Zygmund”, *Math. USSR-Izv.*, **7**:3 (1973), 629–637.
- [2] С. В. Бочкарев, “Об абсолютной сходимости рядов Фурье по ограниченным системам”, *Матем. заметки*, **15**:3 (1974), 363–370; англ. пер.: S. V. Bochkarev, “Absolute convergence of Fourier series with respect to bounded systems”, *Math. Notes*, **15**:3 (1974), 207–211.
- [3] С. В. Бочкарев, “Об абсолютной сходимости рядов Фурье по ограниченным полным ортонормированным системам функций”, *Матем. сб.*, **93(135)**:2 (1974), 203–217; англ. пер.: S. V. Bochkarev, “On the absolute convergence of Fourier series in bounded complete orthonormal systems of functions”, *Math. USSR-Sb.*, **22**:1 (1974), 201–216.
- [4] С. В. Бочкарев, “Расходящийся на множестве положительной меры ряд Фурье для произвольной ограниченной ортонормированной системы”, *Матем. сб.*, **98(140)**:3(11) (1975), 436–449; англ. пер.: S. V. Bochkarev, “A Fourier series in an arbitrary bounded orthonormal system that diverges on a set of positive measure”, *Math. USSR-Sb.*, **27**:3 (1975), 393–405.
- [5] С. В. Бочкарев, “Логарифмический рост средних арифметических от функций Лебега ограниченных ортонормированных систем”, *Докл. АН СССР*, **223**:1 (1975), 16–19; англ. пер.: S. V. Bochkarev, “Logarithmic growth of the arithmetic means of the Lebesgue functions of bounded orthonormal systems”, *Soviet Math. Dokl.*, **16**:4 (1975), 799–802.
- [6] С. В. Бочкарев, “Метод усреднений в теории ортогональных рядов и некоторые вопросы теории базисов”, Тр. МИАН СССР, **146**, Наука, М., 1978, 3–87; англ. пер.: S. V. Bochkarev, “A method of averaging in the theory of orthogonal series and some problems in the theory of bases”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **146**:3 (1980), 1–92.
- [7] С. В. Бочкарев, “Ряды Валле-Пуссена в пространствах ВМО, L_1 и $H^1(D)$ и мультипликативные неравенства”, Тр. МИАН, **210** (1995), 41–64; англ. пер.: S. V. Bochkarev, “Vallée-Poussin series in the spaces ВМО, L_1 , and $H^1(D)$, and multiplier inequalities”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **210** (1995), 30–46.
- [8] С. В. Бочкарев, “Метод оценки L_1 -нормы экспоненциальной суммы на основе арифметических свойств спектра”, *Функциональные пространства, гармонический анализ, дифференциальные уравнения*, Сборник статей. К 95-летию со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского, Тр. МИАН, **232**, Наука, М., 2001, 94–101; англ. пер.: S. V. Bochkarev, “A method for estimating the L_1 norm of an exponential sum based on arithmetic properties of the spectrum”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **232**:1 (2001), 88–95.
- [9] С. В. Бочкарев, “Новый метод оценки интегральной нормы экспоненциальных сумм. Приложение к квадратичным суммам”, *Докл. РАН*, **386**:4 (2002), 443–445; англ. пер.: S. V. Bochkarev, “A new method for estimating the integral norm of exponential sums: application to quadratic sums”, *Dokl. Math.*, **66**:2 (2002), 210–212.
- [10] С. В. Бочкарев, “Мультипликативные неравенства для функций из пространства Харди H^1 и их применение к оценке экспоненциальных сумм”, *Функциональные пространства, приближения, дифференциальные уравнения*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Олега Владимировича Бесова, Тр. МИАН, **243**, Наука, М., 2003, 96–103; англ. пер.: S. V. Bochkarev, “Multiplicative inequalities for functions from the Hardy space H^1

- and their application to the estimation of exponential sums”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **243**:4 (2003), 89–97.
- [11] С. В. Бочкарев, “Новые мультипликативные неравенства и оценки L_1 -нормы тригонометрических рядов и полиномов”, *Докл. РАН*, **404**:6 (2005), 727–730; англ. пер.: S. V. Bochkarev, “New multiplicative inequalities and estimates for the L_1 -norm of trigonometric series and polynomials”, *Dokl. Math.*, **72**:2 (2005), 762–765.
- [12] С. В. Бочкарев, “Новые неравенства в теории Литтлвуда–Пэли и оценки L_1 -нормы тригонометрических рядов и полиномов”, *Исследования по теории функций и дифференциальным уравнениям*, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского, Тр. МИАН, **248**, Наука, М., 2005, 64–73; англ. пер.: S. V. Bochkarev, “New inequalities in the Littlewood–Paley theory and estimates of the L_1 norm of trigonometric series and polynomials”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **248** (2005), 59–68.
- [13] С. В. Бочкарев, “Мультипликативные неравенства для L_1 -нормы, применения в анализе и теории чисел”, *Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ*, Сборник статей, Тр. МИАН, **255**, Наука, М., 2006, 55–70; англ. пер.: S. V. Bochkarev, “Multiplicative inequalities for the L_1 norm: Applications in analysis and number theory”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **255** (2006), 49–64.
- [14] С. В. Бочкарев, “Средние Валле Пуассона рядов Фурье для квадратичного спектра и спектров степенной плотности”, *Докл. РАН*, **439**:3 (2011), 298–303; англ. пер.: S. V. Bochkarev, “De la Vallée-Poussin means of Fourier series for a quadratic spectrum and power density spectra”, *Dokl. Math.*, **84**:1 (2011), 485–490.
- [15] С. В. Бочкарев, “Метод усреднений в теории ортогональных рядов”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, v. 2 (Helsinki, 1978), Acad. Sci. Fennica, Helsinki, 1980, 599–604.
- [16] G. Hardy, J. Littlewood, “Some problems of Diophantine approximation”, *Proceedings of the 5th International Congress of Mathematicians*, Cambridge, 1912, 223–229.
- [17] G. Hardy, J. Littlewood, “Some problems of Diophantine approximation. II. The trigonometrical series associated with the elliptic θ -functions”, *Acta Math.*, **37**:1 (1914), 193–238.
- [18] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, 2, Мир, М., 1965, 615 с., 537 с.; пер. с англ.: A. Zygmund, *Trigonometric series*, v. I, II, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, New York, 1959, xii+383 pp., vii+354 pp.
- [19] G. Hardy, J. Littlewood, “Theorems concerning Cesàro means of power series”, *Proc. London Math. Soc.* (2), **36**:1 (1934), 516–531.
- [20] Ch. Fefferman, “Characterizations of bounded mean oscillation”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **77**:4 (1971), 587–588.
- [21] Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984, 470 с.; пер. с англ.: J. B. Garnett, *Bounded analytic functions*, Pure Appl. Math., **96**, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York–London, 1981, xvi+467 pp.
- [22] С. В. Бочкарев, “Построение базисов в конечномерных пространствах аналитических в круге функций”, *Докл. АН СССР*, **264**:6 (1982), 1295–1297; англ. пер.: S. V. Bochkarev, “Construction of basis in finite-dimensional spaces of analytic functions in the disk”, *Soviet Math. Dokl.*, **25** (1982), 859–860.

- [23] С. В. Бочкарев, “Построение полиномиальных базисов в конечномерных пространствах аналитических в круге функций”, *Recent trends in mathematics* (Reinhardtshaus, October 11–13, 1982), Teubner-Texte Math., **50**, BSB B. G Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1982, 38–46.
- [24] С. В. Бочкарев, “Построение полиномиальных базисов в конечномерных пространствах аналитических в круге функций”, *Ортогональные ряды и приближение функций*, Сборник статей. Посвящается 100-летию со дня рождения академика Н. Н. Лузина, Тр. МИАН СССР, **164**, 1983, 49–74; англ. пер.: S. V. Bochkarev, “Construction of polynomial bases in finite-dimensional spaces of functions analytic in the disk”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **164** (1985), 55–81.
- [25] R. R. Coifman, G. Weiss, “Extensions of Hardy spaces and their use in analysis”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **83**:4 (1977), 569–645.
- [26] С. В. Конягин, “О проблеме Литтлвуда”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **45**:2 (1981), 243–265; англ. пер.: S. V. Konyagin, “On a problem of Littlewood”, *Math. USSR-Izv.*, **18**:2 (1982), 205–225.
- [27] O. C. McGehee, L. Pigno, B. Smith, “Hardy’s inequality and the L^1 norm of exponential sums”, *Ann. of Math.* (2), **113**:3 (1981), 613–618.
- [28] Р. Эдвардс, *Ряды Фурье в современном изложении*, т. 2, Мир, М., 1985, 400 с.; пер. с англ.: R. E. Edwards, *Fourier series. A modern introduction*, v. 2, 2nd ed., Grad. Texts in Math., **85**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1982, xi+369 pp.
- [29] C. Hooley, “On the representations of a number as the sum of two cubes”, *Math. Z.*, **82**:3 (1963), 259–266.
- [30] C. Hooley, “On the representation of a number as the sum of two h -th powers”, *Math. Z.*, **84**:2 (1964), 126–136.
- [31] C. Hooley, “On another sieve method and the numbers that are a sum of two h -th powers”, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), **43**:1 (1981), 73–109.
- [32] C. Hooley, “Some recent advances in analytical number theory”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, v. 1 (Warsaw, 1983), PWN, Warsaw, 1984, 85–97.
- [33] S. Ramanujan, “Some formulae in the analytic theory of numbers”, *Messenger Math.*, **45** (1916), 81–84.
- [34] S. Ramanujan, *Collected papers*, 2nd ed., Chelsea, New York, 1962.
- [35] B. M. Wilson, “Proofs of some formulae enunciated by Ramanujan”, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), **21**:1 (1923), 235–255.
- [36] M. Z. Garaev, “Upper bounds for the number of solutions of a Diophantine equation”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **357**:6 (2005), 2527–2534.
- [37] С. В. Конягин, “Об оценке L_1 -нормы одной экспоненциальной суммы”, *Теория приближений функций и операторов*, Тез. докл. международ. конф., Екатеринбург, 2000, 88–89.
- [38] А. Н. Колмогоров, “Ряд Фурье–Лебега, расходящийся почти всюду”, *Избр. труды. Математика. Механика*, ред. С. М. Никольский, Наука, М., 1985, 8–11; пер. с фр.: A. N. Kolmogoroff, “Une série de Fourier–Lebesgue divergente presque partout”, *Fund. Math.*, **4** (1923), 324–328.
- [39] С. В. Бочкарев, “Теорема Хаусдорфа–Юнга–Рисса в пространствах Лоренца и мультипликативные неравенства”, *Теория приближений. Гармонический анализ*, Сборник статей, посвященный памяти профессора Сергея Борисовича Стечкина, Тр. МИАН, **219**, Наука, М., 1997, 103–114; англ. пер.: S. V. Bochkarev,

- “Hausdorff–Young–Riesz theorem in Lorentz spaces and multiplicative inequalities”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **219**:4 (1997), 96–107.
- [40] Э. Беккенбах, Р. Беллман, *Неравенства*, Мир, М., 1965, 276 с.; пер. с англ.: E. F. Beckenbach, R. Bellman, *Inequalities*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (N.F.), **30**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1961, xii+198 pp.
- [41] R. Salem, “Sur les transformations des séries de Fourier”, *Fund. Math.*, **33** (1945), 108–114.

Сергей Викторович Бочкарев
(Sergei V. Bochkarev)

Поступила в редакцию
24.01.2013

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: bochkarev@mi.ras.ru