Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Овчинников, Интерполяционные функции и интерполяционная конструкция Лионса–Петре, *УМН*, 2014, том 69, выпуск 4, 103–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9568>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 16:58:06

УДК 517.982

Интерполяционные функции и интерполяционная конструкция Лионса–Петре

В. И. Овчинников

Рассматриваемое в данном обзоре обобщение интерполяционного метода средних Лионса–Петре уступает в общности известным с 1970-х годов обобщениям этого метода. Но этот уровень обобщения достаточен для того, чтобы охватить наиболее естественные с точки зрения приложений пространства Лоренца, пространства Орлича и их аналоги. Рассматриваемые здесь пространства $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ имеют три параметра: два равноправных положительных числовых p_0, p_1 и функциональный φ . Эти пространства при $p_0 \neq p_1$ можно рассматривать в качестве аналогов пространств Орлича при вещественном методе интерполяции. Для семейства пространств $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ установлены критерии вложения, оптимальные интерполяционные теоремы, уточняющие все известные интерполяционные теоремы для операторов, действующих в парах весовых пространств L_p , и распространяющие их за пределы шкал пространств. Главной особенностью является то, что функциональный параметр φ может быть произвольным естественным функциональным параметром при интерполяции.

Библиография: 43 названия.

Ключевые слова: интерполяционные пространства, интерполяционные функторы с функциональными параметрами, интерполяционные орбиты, орбиты относительно операторов Неймана–Шаттена, оптимальные интерполяционные теоремы, теоремы вложения для пространств Орлича–Соболева.

DOI: 10.4213/rm9568

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	104
2. Интерполяционные функции.....	106
2.1. Интерполирующие функции для вещественных чисел.....	106
2.2. Определение интерполяционных функций.....	108
2.3. Спектральное разложение и спектральные последовательности интерполяционных функций.....	110

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-00378).

© В. И. Овчинников, 2014

2.4. Числовая реализация спектральной последовательности интерполяционной функции.....	113
2.5. Некоторые свойства множества интерполяционных функций ...	115
3. Обобщенный метод средних.....	118
3.1. Конструкция Кальдерона–Лозановского.....	118
3.2. Интерполяционные пространства и интерполяционные конструкции	120
3.3. K -функционал и интерполяционные функции, банаховы пары с полным спектром.....	123
3.4. Определение обобщенных пространств средних Лионса–Петре..	125
3.5. Связь с конструкцией Янсона $(X_0, X_1)_{p,p}$	136
3.6. Свойства интерполяционной конструкции $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$	137
3.7. Обобщенный метод средних для квазибанаховых решеток	142
4. Интерполяционные орбиты операторных идеалов, действующих в гильбертовых парах.....	145
4.1. Орбиты элементов относительно идеалов Неймана–Шаттена ...	145
4.2. Цепное правило для параметров метода средних.....	149
5. Описание интерполяционных орбит в парах пространств L_p	151
5.1. Теорема об орбитах элементов.....	151
5.2. Оптимальные интерполяционные теоремы в парах пространств Лебега	154
6. Теоремы вложения для пространств обобщенного метода средних при различных параметрах	157
6.1. Критерии вложений (частные случаи).....	157
6.2. Описание пространств обобщенного метода средних в гильбертовых парах с помощью коорбит идеалов Неймана–Шаттена...	158
6.3. Критерии вложений (общий случай).....	160
7. Теоремы вложения для пространств Соболева, построенных по перестановочно инвариантной метрике.....	163
Список литературы.....	165

1. Введение

Теория интерполяции линейных операторов изучает взаимосвязи между линейными пространствами различной природы. Вообще-то математиков чаще всего интересуют разные функции, описывающие реальные объекты, т. е. функции, где аргументами являются переменные, довольно близко стоящие к реальным вещам. То же относится и к значениям функций. Но по мере развития становится ясно, что разумно и плодотворно рассматривать в качестве аргументов сами функции, а поэтому рассматривать множества функций, называемые пространствами функций. Теория интерполяции пошла еще дальше по этому пути: здесь строятся “функции”, у которых аргументами являются уже те самые пространства, состоящие из тех самых функций, которые описывают

реальные объекты. Конечно, и значения этих “функций” от пространств должны быть какими-то пространствами. Это позволяет называть такие “функции” конструкциями пространств. Таким образом, теория интерполяции линейных операторов изучает так называемые интерполяционные конструкции и все, что с этим связано. Потребность в такого рода “функциях” и их конкретные примеры в изобилии появились во второй половине XX века в связи с бумом в изучении уравнений в частных производных, возникшим благодаря обобщенным функциям. Но и классические объекты теории интегральных уравнений по-прежнему оставались источником роста и областью применения теории интерполяции линейных операторов.

Легко заметить, что описанная выше тенденция построения объектов высшего уровня присуща и другим областям математики. Различает их набор пространств, на которые распространяется данная идея, и их преобразования, которые считаются для этих пространств естественными. В случае теории интерполяции линейных операторов обычно рассматриваются банаховы пространства и линейные операторы в качестве преобразований. Конечно, произвольные топологические векторные пространства подвергаются изучению и используются по ходу дела, но все же основные результаты относятся к нормированным и квазинормированным пространствам и линейным (квазилинейным) преобразованиям этих пространств. И еще, если вспомнить Н. Бурбаки с его математическими структурами, то теория интерполяции предпочитает работать с порядковой структурой, поскольку основные результаты – это разного рода оценки, неравенства.

К концу XX века завершились два этапа развития теории интерполяции. Итоги первого этапа были подведены в книгах Х. Трибеля [1], С.Г. Крейна, Ю.И. Петунина и Е.М. Семенова [2], а также в замечательном учебнике Й. Берга и Й. Лёфстрема [3]. Ныне результаты, описанные в этих книгах, считаются классическими. Исходными результатами, до сих пор влияющими на развитие интерполяции, являются знаменитые интерполяционные теоремы М. Рисса, Рисса–Торина, Орлича и Марцинкевича.

Результаты второго этапа отражены в обзоре автора [4] и в книгах К. Беннета–Р. Шарпли [5] и Ю.А. Брудного–Н.Я. Кругляка [6].

В данной работе предполагается отразить результаты следующего этапа, который в значительной степени опирается на итоги предыдущего периода. Возможно, что собранные вместе они могут оказаться более понятными и приемлемыми для приложений. Характерной особенностью данного периода развития теории оказалось то, что удалось оптимизировать некоторые классические результаты, а именно найти их точные версии и расширить их за пределы шкал пространств. Например, это касается теоремы Стейна–Вейсса. Другой важной целью данной работы является единообразное представление новой техники теории интерполяции, которая может быть полезна занимающимся интерполяцией линейных операторов. Этот обзор ни в коей мере не претендует на полноту в смысле охвата всех успехов теории интерполяции за последнее время. Выбор задач и результатов целиком определяется единством подхода, который близок автору.

В 2002 г. в [7] удалось решить задачу об описании всех интерполяционных орбит в парах пространств Лебега L_p . При этом возник класс пространств, которые названы обобщенными пространствами средних Лионса–Петре. Они являются “правильным” обобщением знаменитых пространств $X_{\theta,p}$, но имеют два положительных параметра и функциональный параметр. Благодаря этому среди этих пространств находятся не только все пространства Лоренца с функциональными параметрами, но и все пространства Орлича и некоторые их модификации. Подобного рода пространства возникали и раньше (см., например, [8], [9]), но в рамках старой техники при получении содержательных результатов приходилось ограничиваться функциональными параметрами, близкими к степенным функциям. Одним из главных преимуществ нового подхода является возможность полностью избавиться от этих ограничений. Важно то, что функциональные параметры, так называемые интерполяционные функции, оказались устроены достаточно удобно для анализа, несмотря на свой, вообще говоря далекий от степенного, характер.

В качестве приложения выступает традиционное для теории интерполяции приложение к теоремам вложения пространств Соболева, построенных на основе метрик, отличных от L_p -метрики, в частности для пространств Орлича–Соболева и подобных им.

2. Интерполяционные функции

2.1. Интерполирующие функции для вещественных чисел. Понятие интерполяции восходит к деятельности средневековых монахов, которые восстанавливали утраченные по объективным причинам отдельные куски текстов в священных книгах. Суть этой деятельности состояла в том, чтобы вставить недостающие строки между сохранившимися так, чтобы они соответствовали этим сохранившимся строкам. Понятно, что монахи при этом уповали на помощь свыше.

Если же мы начинаем говорить об интерполяции в математике, то простейшая задача здесь – это вставить некоторое число между заданными числами. Рассмотрим сначала множество всех вещественных чисел. Тем самым, мы приходим к вещественной функции $\psi(u, v)$ двух вещественных переменных $u, v \in \mathbb{R}$, которая должна удовлетворять естественным условиям, заменяющим нам промысел божий. Эта функция должна быть монотонно возрастающей по каждой переменной, и результат интерполяции не должен зависеть от положения пары точек u, v на вещественной оси, вернее, эта функция ψ не должна нарушать однородности множества вещественных чисел. Иными словами, при сдвиге пары u, v значение функции $\psi(u, v)$ сдвигается тоже, т. е. для любого $a \in \mathbb{R}$

$$\psi(u + a, v + a) = \psi(u, v) + a. \quad (2.1)$$

Конечно, можно еще добавить условие нормировки

$$\psi(u, u) = u, \quad (2.2)$$

которое эквивалентно тому, что $\psi(u, v)$ лежит между u и v .

Простейшие примеры – это функции $\max(u, v)$, $\min(u, v)$ и взвешенные средние арифметические $(1 - \theta)u + \theta v$, где θ – параметр из отрезка $[0, 1]$. Если условие нормировки опустить, то добавляются еще, например, функции $\max(u + \alpha, v + \beta)$, $\min(u + \alpha, v + \beta)$ для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ясно, что число примеров можно умножить с помощью реитераций таких интерполирующих функций.

Из условия (2.1) и монотонности следует, что любая такая функция $\psi(u, v)$ однозначно задается одной своей линией уровня $\{(u, v): \psi(u, v) = 0\}$. Все остальные линии уровня этой интерполирующей функции “параллельны” данной линии, поскольку получаются ее сдвигом на вектор (a, a) , где a – это соответствующее значение функции ψ . Эта линия уровня будет непрерывной ввиду условия монотонности. Условие нормировки означает, что начало координат лежит на этой линии. Отсюда понятно, что условие нормировки, внешне важное, на самом деле можно опустить. (Восстановить нормировку не составляет труда.)

Очевидно, что линию уровня $\{(u, v): \psi(u, v) = 0\}$ можно отождествить с графиком убывающей (многозначной) функции, действующей в $\mathbb{R}$. Столь же очевидно, что описать эту линию можно, опираясь на график некоторой однозначной монотонно убывающей функции $v = f(u)$, непрерывной, например, слева.

Если нарисовать линию уровня функции ψ на экране монитора, например, в стандартной программе Paint Windows, то при увеличении мы увидим непрерывную лесенку из квадратиков, идущую из левого верхнего угла монитора в правый нижний. Сторона квадратика практически произвольна, она зависит от толщины кривой, которую мы можем задать сами в определенных пределах. Если формализовать это наблюдение, получим, что для любой $\psi(u, v)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся строго возрастающая последовательность вещественных a_j , где j пробегает интервал J_a в множестве целых чисел, и строго убывающая последовательность b_j , где j пробегает интервал J_b , причем $a_{j+1} - a_j \geq \varepsilon$ и $b_j - b_{j+1} \geq \varepsilon$ для всех $j + 1, j \in J_a \cup J_b$ и

$$\left| \psi(u, v) - \max_j \min(u - a_j, v - b_j) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.3)$$

$((a_j, b_j)$ – это координаты левых нижних вершин упомянутых квадратиков). Множества индексов J_a и J_b могут совпадать, либо отличаются от $J_a \cap J_b$ на одну точку: множество J_a может содержать дополнительную точку j^* справа, а множество J_b – точку j_* слева. В первом случае мы имеем

$$\left| \psi(u, v) - \max \left(\max_{j \in J_a \cap J_b} \min(u - a_j, v - b_j), u - a_{j^*} \right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.4)$$

вместо (2.3). Во втором

$$\left| \psi(u, v) - \max \left(v - b_{j_*}, \max_{j \in J_a \cap J_b} \min(u - a_j, v - b_j) \right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.5)$$

В случае двух дополнительных точек

$$\left| \psi(u, v) - \max \left(v - b_{j_*}, \max_{j \in J_a \cap J_b} \min(u - a_j, v - b_j), u - a_{j^*} \right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.6)$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что нулевая линия уровня интерполирующей функции

$$\max_j \min(u - a_j, v - b_j)$$

или ее модификаций, описанных выше, является ломаной, состоящей из чередующихся отрезков $[(a_j, b_j), (a_{j+1}, b_j)]$, $[(a_j, b_j), (a_j, b_{j-1})]$ или лучей, параллельных координатным осям. Неравенства (2.3)–(2.6) означают, что ломаная равномерно приближает линию уровня интерполирующей функции ψ .

Очевидно, что алгоритмов построения такой ломаной очень много. Один из них, по-видимому, применяется в программе Paint.

Например, можно использовать следующие простые соображения. Взяв произвольное $\varepsilon > 0$, рассмотрим “полосу”

$$\left\{ (u, v) : |\psi(u, v)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right\}. \quad (2.7)$$

Начав с произвольной точки (a_0, b_0) на нижней стороне полосы (2.7), соединим ее горизонтальным отрезком $[(a_j, b_j), (a_{j+1}, b_j)]$ при $j = 0$ со следующей точкой (a_{j+1}, b_j) , лежащей на верхней стороне полосы. Далее с помощью вертикального отрезка $[(a_j, b_j), (a_j, b_{j-1})]$ вернемся на нижнюю сторону полосы в точку (a_{j+1}, b_{j+1}) , и так далее. Мы получим бесконечную последовательность, если процесс построения точек на сторонах полосы не оборвется. Обрыв этого процесса будет означать, что вместо отрезка, соединяющего стороны полосы, мы получим бесконечный горизонтальный или вертикальный луч, выходящий из последней построенной точки и остающийся в пределах полосы. Эту же конструкцию следует применить и в другом направлении от $j = 0$. Кроме того, будем при построении руководствоваться “экстремальным соглашением”, а именно, если выбор следующей точки не однозначен, то выберем такую, чтобы соответствующий отрезок был наибольшим.

Таким образом мы получим ломаную, целиком лежащую в полосе (2.7), что и приводит к неравенствам (2.3)–(2.6). Очевидно, что интервалы J_a и J_b состоят из тех $j \in \mathbb{Z}$, которые удается построить описанным способом.

Покажем, наконец, что $a_{j+1} - a_j \geq \varepsilon$. В самом деле, $\psi(a_j, b_j) = -\varepsilon/2$, а $\psi(a_{j+1}, b_j) = \varepsilon/2$. Следовательно,

$$\psi(a_{j+1}, b_j) = \varepsilon + \psi(a_j, b_j) = \psi(a_j + \varepsilon, b_j + \varepsilon) \geq \psi(a_j + \varepsilon, b_j).$$

С учетом “экстремального соглашения” и монотонности отсюда следует $a_{j+1} \geq a_j + \varepsilon$. Аналогично получается $b_{j-1} \geq b_j + \varepsilon$.

2.2. Определение интерполяционных функций. Рассмотрим способы интерполяции на множестве строго положительных чисел. Ясно, что однородность теперь должна пониматься иначе. Пусть точка $\varphi(s, t) > 0$ вставляется между $s, t > 0$ с учетом масштаба. Таким образом, интерполяция в множестве строго положительных чисел осуществляется с помощью функции, которая

- 1) возрастает по s и t ,
- 2) однородна первой степени, т. е. $\varphi(\lambda s, \lambda t) = \lambda \varphi(s, t)$ для всех $\lambda, s, t > 0$.

Такие функции будем называть *интерполяционными* функциями и через Φ будем обозначать множество всех таких функций. Оказалось, что эти интерполяционные функции играют ключевую роль в интерполяции линейных операторов.

Нормировать интерполяционные функции, т. е. требовать, чтобы $\varphi(s, s) = s$, оказывается даже вредным. Понятно, что восстановить нормировку можно с помощью скалярного множителя, если требуется.

Перечислим простейшие примеры интерполяционных функций: $s\alpha + t\beta$, $\max(s\alpha, t\beta)$, $\min(s\alpha, t\beta)$, где $\alpha, \beta > 0$. Наиболее популярными являются степенные функции $s^{1-\theta}t^\theta$, где $0 \leq \theta \leq 1$. Число примеров легко умножить за счет скалярных множителей и реитераций интерполяционных функций. Отсюда видно, что Φ является конусом и решеткой в пространстве функций двух положительных переменных. Более того, это множество логарифмически выпукло.

Из определения интерполяционной функции, очевидно, вытекает, что

$$\min\left(\frac{s}{\alpha}, \frac{t}{\beta}\right)\varphi(\alpha, \beta) \leq \varphi(s, t) \leq \max\left(\frac{s}{\alpha}, \frac{t}{\beta}\right)\varphi(\alpha, \beta),$$

или

$$\varphi(s, t) = \max_{\alpha, \beta} \min\left(\frac{s}{\alpha}, \frac{t}{\beta}\right)\varphi(\alpha, \beta) \quad (2.8)$$

и

$$\varphi(s, t) = \min_{\alpha, \beta} \max\left(\frac{s}{\alpha}, \frac{t}{\beta}\right)\varphi(\alpha, \beta). \quad (2.9)$$

В дальнейшем интерполяционные функции нас будут интересовать с точностью до эквивалентности. Под эквивалентностью неотрицательных функций $f(\mathbf{m})$ и $g(\mathbf{m})$ на множестве $\mathfrak{M}$ мы понимаем выполнение неравенств

$$cf(\mathbf{m}) \leq g(\mathbf{m}) \leq Cf(\mathbf{m})$$

для некоторых $C, c > 0$ и всех $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}$. Это будет обозначаться $f \asymp g$ или $f(\mathbf{m}) \asymp g(\mathbf{m})$. Множество $\mathfrak{M}$ обычно ясно из контекста.

Очевидно, что все функции вида $s\alpha + t\beta$, $\max(s\alpha, t\beta)$, где $\alpha, \beta > 0$, эквивалентны функции $s + t$. В частности,

$$\max(s, t) \leq s + t \leq 2\max(s, t).$$

Заменив в (2.9) максимум на сумму, приходим к

$$0.5 \inf_{\alpha, \beta} \varphi(\alpha, \beta) \left(\frac{s}{\alpha} + \frac{t}{\beta}\right) \leq \varphi(s, t) \leq \inf_{\alpha, \beta} \left(\frac{s}{\alpha} + \frac{t}{\beta}\right) \varphi(\alpha, \beta),$$

т. е. произвольная интерполяционная функция эквивалентна вогнутой интерполяционной функции двух переменных

$$\inf_{\alpha, \beta} \left(\frac{s}{\alpha} + \frac{t}{\beta} \right) \varphi(\alpha, \beta).$$

(Последняя функция вогнута, поскольку является точной нижней гранью линейных функций.)

Любая интерполяционная функция непрерывна при $s, t > 0$ в силу монотонности. Более того, любая $\varphi \in \Phi$ продолжается по непрерывности на $[0, \infty) \times [0, \infty)$. (Продолжение будет обозначаться той же буквой φ .) Множество интерполяционных функций, для которых $\varphi(s, 0) = 0$ и $\varphi(0, t) = 0$ при всех $s, t > 0$, будем обозначать через Φ_0 .

Если положить $a = \varphi(1, 0)$, $b = \varphi(0, 1)$, то $\varphi(s, t) \geq \max(as, bt)$ для любой $\varphi \in \Phi$. Если φ вогнута, то

$$\varphi(s, t) \geq \frac{s}{s+t} \varphi(s+t, 0) + \frac{t}{s+t} \varphi(0, s+t) = s\varphi(1, 0) + t\varphi(0, 1).$$

Поэтому $\varphi(s, t) \geq as + bt$. Тогда функция $\tilde{\varphi}(s, t) = \varphi(s, t) - as - bt$ оказывается вогнутой интерполяционной функцией, причем $\tilde{\varphi} \in \Phi_0$. Следовательно,

$$\varphi(s, t) = as + bt + \tilde{\varphi}(s, t).$$

Это свидетельствует о том, что с точностью до эквивалентности множество Φ_0 не существенно меньше множества всех интерполяционных функций. (“Коразмерность” Φ_0 в Φ равна 2.)

Отметим также, что если $\varphi \in \Phi_0$, то любая эквивалентная ей интерполяционная функция тоже из Φ_0 .

2.3. Спектральное разложение и спектральные последовательности интерполяционных функций. Связь между интерполяционными функциями и интерполирующими функциями на вещественной оси очевидна: если по-прежнему обозначать через ψ интерполирующую функцию, то

$$\psi(u, v) = \log \varphi(\exp u, \exp v), \quad \varphi(s, t) = \exp \psi(\log s, \log t).$$

Аппроксимационное соотношение типа (2.3)–(2.6) для произвольной интерполяционной функции из Φ_0 принимает вид

$$\exp \left(-\frac{\varepsilon}{2} \right) \varphi(s, t) \leq \exp \left(\max_{j \in J} \min(\log s - a_j, \log t - b_j) \right) \leq \exp \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \varphi(s, t),$$

где $J = J_a = J_b$, или аппроксимирующая интерполяционная функция имеет вид

$$\max_{j \in J} \min \left(\frac{s}{A_j}, \frac{t}{B_j} \right), \quad (2.10)$$

где $A_j = \exp(a_j)$ и $B_j = \exp(b_j)$.

Если бы аппроксимирующая функция имела вид

$$\max_j \left(\frac{t}{B_{j*}}, \min \left(\frac{s}{A_j}, \frac{t}{B_j} \right) \right),$$

то ее предел при $s \rightarrow 0$ и любом $t > 0$ был бы равен $t/B_{j*} \neq 0$, т. е. φ не принадлежала бы Φ_0 . Аналогично в оставшихся случаях, соответствующих (2.4)–(2.6).

Таким образом, любая интерполяционная функция $\varphi \in \Phi_0$ эквивалентна функции $\max_{j \in J} \min(s/A_j, t/B_j)$, точнее,

$$\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) \varphi(s, t) \leq \max_{j \in J} \min\left(\frac{s}{A_j}, \frac{t}{B_j}\right) \leq \exp\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \varphi(s, t). \quad (2.11)$$

При этом

$$\frac{A_{j+1}}{A_j} = \exp(a_{j+1} - a_j) \geq e^\varepsilon > 1, \quad \frac{B_{j-1}}{B_j} = \exp(b_{j-1} - b_j) \geq e^\varepsilon > 1. \quad (2.12)$$

Линия уровня интерполяционной функции (2.10), например,

$$\max_{j \in J} \min\left(\frac{s}{A_j}, \frac{t}{B_j}\right) = 1,$$

является ломаной, состоящей из отрезков

$$[(A_j, B_j), (A_{j+1}, B_j)], \quad [(A_{j+1}, B_j), (A_{j+1}, B_{j+1})],$$

где $j, j+1 \in J$. Если через концы этих отрезков провести лучи, исходящие из начала координат, то первый квадрант разобьется на сектора, на каждом из которых функция (2.10) пропорциональна либо s , либо t .

Сектор, порожденный двумя соседними отрезками, соединенными точкой (A_k, B_k) , обозначим D_k . Нетрудно видеть, что на секторе D_k выполнено неравенство $\min(s/A_k, t/B_k) \geq \min(s/A_j, t/B_j)$ при $j \neq k$. Значит, на секторе D_k

$$\max_{j \in J} \min\left(\frac{s}{A_j}, \frac{t}{B_j}\right) = \min\left(\frac{s}{A_k}, \frac{t}{B_k}\right).$$

Более того, ввиду (2.12), на секторе D_k

$$\min\left(\frac{s}{A_k}, \frac{t}{B_k}\right) \geq e^{\varepsilon(|k-j|-1)} \min\left(\frac{s}{A_j}, \frac{t}{B_j}\right) \quad (2.13)$$

для всех $j \in J$.

Следовательно, на D_k

$$\sum_{j \in J} \min\left(\frac{s}{A_j}, \frac{t}{B_j}\right) \leq \min\left(\frac{s}{A_k}, \frac{t}{B_k}\right) + 2 \min\left(\frac{s}{A_k}, \frac{t}{B_k}\right) \sum_{m=0}^{|J|} e^{-m\varepsilon}.$$

(Мы суммируем с запасом оценки (2.13) справа и слева от k .)

Таким образом,

$$\sum_{j \in J} \min\left(\frac{s}{A_j}, \frac{t}{B_j}\right) \leq \frac{3}{1 - e^{-\varepsilon}} \min\left(\frac{s}{A_k}, \frac{t}{B_k}\right) \quad (2.14)$$

на D_k . Отсюда непосредственно следует, что

$$\max_{j \in J} \min\left(\frac{s}{A_j}, \frac{t}{B_j}\right) \leq \sum_{j \in J} \min\left(\frac{s}{A_j}, \frac{t}{B_j}\right) \leq \frac{3}{1 - e^{-\varepsilon}} \max_{j \in J} \min\left(\frac{s}{A_j}, \frac{t}{B_j}\right)$$

на любом секторе D_k , т. е. при всех $s, t > 0$.

Следовательно, для любой интерполяционной функции $\varphi \in \Phi_0$ существуют последовательности $\{A_j\}_{j \in J}$ и $\{B_j\}_{j \in J}$, где J – некоторый интервал в $\mathbb{Z}$, такие, что выполнены неравенства (2.12) и

$$\varphi(s, t) \asymp \max_{j \in J} \min\left(\frac{s}{A_j}, \frac{t}{B_j}\right) \asymp \sum_{j \in J} \min\left(\frac{s}{A_j}, \frac{t}{B_j}\right). \quad (2.15)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Любое представление вида (2.15) с условием (2.12) будем называть спектральным разложением интерполяционной функции $\varphi \in \Phi_0$, а последовательность $\{(A_j, B_j)\}_{j \in J}$ в одномерном вещественном проективном пространстве $\mathbb{RP}^1$ будем называть спектральной последовательностью интерполяционной функции $\varphi \in \Phi_0$.

Из определения видно, что спектральная последовательность интерполяционной функции определяется не однозначно. Она отражает поведение интерполяционной функции при больших и малых s и t . Далее, рассмотрев точки в $\mathbb{RP}^1$, мы для начала убрали несущественную при рассмотрении зависимость от скалярных множителей.

Рассмотрим два важных примера.

1) Функция $\min(s/A, t/B)$ имеет спектральную последовательность, порожденную единственной точкой (A, B) на плоскости. Впрочем, любая другая точка порождает спектральную последовательность, поскольку все функции вида $\min(s/A, t/B)$ эквивалентны друг другу. Более того, любая интерполяционная функция, не превосходящая какой-то $\min(s/A, t/B)$, имеет спектральную последовательность, порожденную единственной точкой (A, B) .

2) Положим в (2.15) $A_j = a^j$, где $a > 1$, и $B_j = b^j$, где $b < 1$, и рассмотрим соответствующую интерполяционную функцию

$$\begin{aligned} \varphi_{a,b}(s, t) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \min\left(\frac{s}{A_j}, \frac{t}{B_j}\right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \min(sa^{-j}, tb^{-j}) \\ &\asymp \max_{j \in \mathbb{Z}} \min(sa^{-j}, tb^{-j}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

На секторе D_k , в данном случае равном

$$\left\{ s, t > 0: b\left(\frac{a}{b}\right)^k \leq \frac{s}{t} \leq \left(\frac{a}{b}\right)^k a \right\},$$

функция в правой части (2.16) совпадает с $\min(sa^{-k}, tb^{-k})$ и, значит, равна единице в точке (a^k, b^k) . Подберем показатель $0 < \theta < 1$ так, чтобы степенная функция $s^{1-\theta}t^\theta$ тоже была равна 1 в точке (a^k, b^k) , т. е. $(a^k)^{1-\theta}(b^k)^\theta = 1$. Очевидно, что θ не зависит от k и поэтому удовлетворяет уравнению $a^{1-\theta}b^\theta = 1$. Тогда на секторе D_k функции $\min(sa^{-k}, tb^{-k})$ и $s^{1-\theta}t^\theta$ эквивалентны, причем

$$\min(sa^{-k}, tb^{-k}) \leq s^{1-\theta}t^\theta \leq \frac{a}{b} \min(sa^{-k}, tb^{-k}),$$

т. е. они эквивалентны равномерно по k . Значит, $s^{1-\theta}t^\theta$ и $\varphi_{a,b}(s, t)$ эквивалентны при $s > 0, t > 0$.

Таким образом, мы пришли к спектральному разложению степенной функции $s^{1-\theta}t^\theta$:

$$s^{1-\theta}t^\theta \asymp \sum_{j=-\infty}^{\infty} \min(sa^{-j}, tb^{-j}) \asymp \max_{j \in \mathbb{Z}} \min(sa^{-j}, tb^{-j}),$$

и спектральная последовательность функции $s^{1-\theta}t^\theta$ порождена парой двусторонних геометрических прогрессий – возрастающей a^j и убывающей b^j . Знаменатели прогрессий и показатель θ связаны соотношением

$$\theta = \frac{\log a}{\log a - \log b}.$$

Отсюда видно, что θ может быть любым в интервале $(0, 1)$. Тем самым, мы нашли спектральное разложение и спектральную последовательность любой степенной интерполяционной функции, кроме линейных функций s и t , которые не входят в Φ_0 .

Заметим, что для всех степенных функций можно, подобрав a и b , построить спектральные разложения с одной и той же спектральной последовательностью, совпадающей с любой наперед заданной геометрической прогрессией.

2.4. Числовая реализация спектральной последовательности интерполяционной функции. Благодаря условию однородности первой степени, любая интерполяционная функция $\varphi(s, t)$ задается с помощью функции одной переменной $\varphi(1, t)$:

$$\varphi(s, t) = s\varphi\left(1, \frac{t}{s}\right).$$

Для краткости будем обозначать $\rho(t) = \varphi(1, t)$. Условие монотонности превращается в условие, что $\rho(t)$ возрастает, а $\rho(t)/t$ убывает при $t > 0$. Такие положительные функции на полуоси $(0, \infty)$ называются *квазивогнутыми*. Понятно, что любая квазивогнутая функция эквивалентна возрастающей вогнутой на $(0, \infty)$ функции, поскольку этим свойством обладают интерполяционные функции. Условие $\varphi \in \Phi_0$ означает, что $\rho(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ и $\rho(t)/t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Спектральное представление (2.15) для $\varphi \in \Phi_0$ превращается в

$$\rho(t) \asymp \max_{j \in J} \frac{1}{A_j} \min\left(1, \frac{tA_j}{B_j}\right) \asymp \sum_{j \in J} \frac{1}{A_j} \min\left(1, \frac{tA_j}{B_j}\right).$$

Следовательно, $\rho(B_k/A_k) \asymp 1/A_k$ или, точнее,

$$e^{-\varepsilon/2} \rho\left(\frac{B_k}{A_k}\right) \leq \frac{1}{A_k} \leq e^{\varepsilon/2} \rho\left(\frac{B_k}{A_k}\right). \quad (2.17)$$

Обозначим $t_j = B_j/A_j$, тогда t_j представляет собой одну из одномерных реализаций спектральной последовательности (A_j, B_j) в $\mathbb{RP}^1$, т. е. $(A_j, B_j) = (1, t_j) \in \mathbb{RP}^1$. Точки $(A_j, B_j) = (1, t_j) \in \mathbb{RP}^1$ и $t_j \in (0, \infty)$ мы будем отождествлять.

Таким образом, по последовательности t_j и значениям функции ρ в точках t_j можно восстановить с точностью до эквивалентности ρ и φ :

$$\rho(t) \asymp \max_{j \in J} \rho(t_j) \min\left(1, \frac{t}{t_j}\right) \asymp \sum_{j \in J} \rho(t_j) \min\left(1, \frac{t}{t_j}\right), \quad (2.18)$$

$$\varphi(s, t) \asymp \max_{j \in J} \rho(t_j) \min\left(s, \frac{t}{t_j}\right) \asymp \sum_{j \in J} \rho(t_j) \min\left(s, \frac{t}{t_j}\right). \quad (2.19)$$

Представление (2.18) будем называть спектральным разложением квазивогнутой функции ρ , а убывающую последовательность $t_j = B_j/A_j$ мы будем называть спектральной последовательностью квазивогнутой функции ρ .

Условие разреженности (2.12) точек A_j и B_j ввиду (2.17) приводит к неравенствам

$$\frac{\rho(t_j)}{\rho(t_{j+m})} \geq \frac{A_{j+m}}{qA_j} \geq q^{m-1} > 1, \quad \frac{t_{j-m}\rho(t_j)}{\rho(t_{j-m})t_j} \geq \frac{B_{j-m}}{qB_j} \geq q^{m-1} > 1, \quad (2.20)$$

где $q = e^\varepsilon$ и $m \geq 1$.

К. И. Осолоков (1976) [10] и С. Янсон (1980) [11] при построения аналога спектральной последовательности для квазивогнутой функции ρ использовали индуктивный процесс на основе равенства

$$\min\left(\frac{\rho(\tilde{t}_j)}{\rho(\tilde{t}_{j+1})}, \frac{\tilde{t}_j \rho(\tilde{t}_{j+1})}{\rho(\tilde{t}_j) \tilde{t}_{j+1}}\right) = q > 1. \quad (2.21)$$

Если в данном случае для тех же j , для которых удается построить последовательность $\tilde{t}_j$, положить $A_j = 1/\rho(\tilde{t}_j)$ и $B_j = \tilde{t}_j/\rho(\tilde{t}_j)$, то, как следует из [11],

$$\varphi(s, t) = s\rho\left(\frac{s}{t}\right) \asymp \max \min\left(s\rho(\tilde{t}_j), \frac{t\rho(\tilde{t}_j)}{\tilde{t}_j}\right) \asymp \sum_{j \in J} \min\left(s\rho(\tilde{t}_j), \frac{t\rho(\tilde{t}_j)}{\tilde{t}_j}\right), \quad (2.22)$$

и $A_{j+1}/A_j \geq q > 1$, $B_j/B_{j+1} \geq q > 1$. Таким образом, получаем спектральное разложение и для φ , и для ρ , причем $B_j/A_j = \tilde{t}_j$.

Ю. А. Брудный и Н. Я. Кругляк в [6] при построении аналога спектральной последовательности t_j неявно использовали те же соображения перехода с одной стороны полосы на другую. Правда, последовательность у них занумерована в возрастающем порядке.

Заметим, наконец, что любая спектральная последовательность t_j убывает быстрее геометрической прогрессии, поэтому она эквивалентна некоторой подпоследовательности любой убывающей геометрической прогрессии a^k , т. е. $t_j \asymp a^{k_j}$. Отсюда, очевидно, следует $\rho(t_j) \asymp \rho(a^{k_j})$.

Итак, мы получили еще одно спектральное разложение для $\rho(t) = \varphi(1, t)$:

$$\rho(t) \asymp \max_{j \in J} \rho(a^{k_j}) \min(s, ta^{-k_j}) \asymp \sum_{j \in J} \rho(a^{k_j}) \min(s, ta^{-k_j}) \quad (2.23)$$

со спектральной последовательностью a^{k_j} .

2.5. Некоторые свойства множества интерполяционных функций.

Для того чтобы сформулировать некоторые свойства интерполяционных функций, нам понадобится еще одно описание интерполяционных функций, в котором участвуют спектральные последовательности.

Мы проверили, что знания последовательностей A_j, B_j достаточно для того, чтобы восстановить интерполяционную функцию с точностью до эквивалентности. Если перейти к соответствующей последовательности на проективном пространстве $\mathbb{RP}^1$, то часть информации теряется. Покажем, что если к точкам (A_j, B_j) в $\mathbb{RP}^1$ добавить последовательность $(A_{j+1}, B_j) \in \mathbb{RP}^1$, то с точностью до эквивалентности интерполяционную функцию уже можно восстановить.

Дело в том, что если через все точки (A_j, B_j) и (A_{j+1}, B_j) на плоскости провести лучи, исходящие из начала координат, то первая четверть разобьется на замкнутые секторы, на каждом из которых интерполяционная функция

$$\max_{j \in J} \min\left(\frac{s}{A_j}, \frac{t}{B_j}\right) \quad (2.24)$$

пропорциональна либо s , либо t , причем s и t чередуются. Если зафиксировать любое “начальное” значение в произвольной точке (S_0, T_0) , то можно восстановить функцию (2.24) на секторе, где находится (S_0, T_0) , выбрав, какая функция, s или t , будет на этом секторе. Тогда на границе этого сектора функция восстановлена, и мы можем восстановить ее на соседних секторах, и т. д., и тем самым восстановить везде. Таким образом, все упирается в то, чтобы правильно выбрать, какой функции, s или t , пропорциональна наша функция в секторе, где находится начальная точка (S_0, T_0) . Очевидно, что если $B_{j+1}/A_j \leq T_0/S_0 \leq B_j/A_j$, то функция (2.24) пропорциональна s , а если $B_{j+1}/A_{j+1} \leq T_0/S_0 \leq B_{j+1}/A_j$, то она пропорциональна t .

На проективном пространстве $\mathbb{RP}^1$, изоморфном окружности, можно зафиксировать ориентацию, относительно которой множества точек $\{(A_j, B_j)\}_{j \in J}$ и $\{(A_{j+1}, B_j)\}_{j \in J} \subset \mathbb{RP}^1$ образуют монотонные последовательности. Поскольку эти последовательности перемежаются, то можно превратить в монотонную последовательность их объединение. В нашем случае получается убывающая последовательность, если на проективном пространстве выбрана ориентация, согласованная с положительной ориентацией на плоскости с координатами (s, t) .

В множестве всех интерполяционных функций вводятся три важные инволюции.

Если $\varphi(s, t)$ – интерполяционная функция, то будем использовать обозначение $\varphi^*(s, t) = 1/\varphi(1/s, 1/t)$. Функцию $\varphi(t, s)$ будем обозначать $\widehat{\varphi}(s, t)$. Через $\varphi^*(s, t)$ обозначим композицию предыдущих инволюций. Если перенести эти инволюции на множество квазивогнутых функций, то получим: $\rho^*(t) = 1/\rho(1/t)$, $\widehat{\rho}(t) = t\rho(1/t)$, $\rho^*(t) = t/\rho(t)$.

Интерполяционная функция φ называется *невыврожденной*, если $\varphi \in \Phi_0$ и $\varphi^* \in \Phi_0$. Очевидно, что все перечисленные инволюции действуют в множестве невырожденных функций. Вновь отметим, что множество всех невырожденных интерполяционных функций не сильно в смысле коразмерности отличается от множества всех интерполяционных функций. С точки зрения квазивогнутых функций невырожденность означает, что область значений функций $\rho(t)$ и $\rho(t)/t$ совпадает со всей полусью $(0, \infty)$. С точки зрения спектральных разложений невырожденность означает, что обе функции φ и φ^* имеют спектральное разложение. Более того, невырожденность эквивалентна тому, что интервал J индексов спектральной последовательности совпадает с множеством всех целых чисел.

Анализ линии единичного уровня аппроксимирующей функции невырожденной интерполяционной функции φ показывает, что ее спектральное разложение

$$\varphi(s, t) \asymp \max_{j \in \mathbb{Z}} \min\left(\frac{s}{A_j}, \frac{t}{B_j}\right)$$

порождает спектральное разложение функций φ^* , φ^* и, очевидно, $\widehat{\varphi}$.

В самом деле,

$$\begin{aligned}\varphi^*(s, t) &\asymp \max_{j \in \mathbb{Z}} \min\left(\frac{s}{A_{j+1}^{-1}}, \frac{t}{B_j^{-1}}\right), \\ \varphi^*(s, t) &\asymp \max_{j \in \mathbb{Z}} \min\left(\frac{s}{B_j^{-1}}, \frac{t}{A_{j+1}^{-1}}\right). \\ \widehat{\varphi}(s, t) &\asymp \max_{j \in \mathbb{Z}} \min\left(\frac{s}{B_j}, \frac{t}{A_j}\right).\end{aligned}$$

Следовательно, спектральная последовательность функции φ^* равна

$$\left(\frac{1}{B_j}, \frac{1}{A_{j+1}}\right) = \left(1, \frac{B_j}{A_{j+1}}\right) = (A_{j+1}, B_j) \in \mathbb{RP}^1.$$

Значит, объединение последовательностей (A_{j+1}, B_j) и (A_j, B_j) в $\mathbb{RP}^1$ определяет общее для обеих функций φ и φ^* разбиение на секторы. Таким образом, функции φ и φ^* отличаются тем, что на одинаковых секторах одна из них пропорциональна s , а другая пропорциональна t .

Спектральная последовательность Осколкова–Янсона для интерполяционной функции φ , построенная по (2.21), обладает дополнительным свойством. Из самого определения видно, что эта последовательность будет спектральной и для функции φ^* , если φ невырождена. Значит, мы имеем спектральное разложение

$$\varphi^*(s, t) = \frac{st}{\varphi(s, t)} \asymp \max_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\widetilde{t}_n}{\varphi(1, \widetilde{t}_n)} \min\left(s, \frac{t}{\widetilde{t}_n}\right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\varphi^*(s, t) &= \varphi^*(t, s) \asymp \max_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\tilde{t}_n}{\varphi(1, \tilde{t}_n)} \min\left(t, \frac{s}{\tilde{t}_n}\right) = \max_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\varphi(1, \tilde{t}_n)} \min(s, t \cdot \tilde{t}_n) \\ &= \max_{n \in \mathbb{Z}} \varphi^*(1, \tilde{t}_n^{-1}) \min\left(s, \frac{t}{\tilde{t}_n^{-1}}\right),\end{aligned}$$

т.е. последовательность $\tilde{t}_n^{-1}$ будет спектральной последовательностью для φ^* наряду с $A_{n+1}/B_n = \tilde{t}_n \varphi(1, \tilde{t}_{n+1}) / \varphi(1, \tilde{t}_n)$, которая отмечена в общем случае выше.

В работе Ю. А. Брудного и А. Штейнберга [12] выяснено, когда интерполяционные функции могут иметь одинаковые спектральные последовательности. Это явление мы уже отмечали для всех степенных интерполяционных функций.

Пусть $F_0, F_1 \in \Phi$. Назовем семейство функций вида

$$F_0^{1-\theta} F_1^\theta,$$

где $0 < \theta < 1$, интерполяционной шкалой, соединяющей интерполяционные функции F_0 и F_1 . (Сами функции F_0 и F_1 в шкалу не включаются.) Если две интерполяционные функции φ_0 и φ_1 эквивалентны интерполяционным функциям, принадлежащим одной интерполяционной шкале, то такие функции будут называться *родственными*. С помощью простых геометрических соображений можно проверить, что понятие родственности является транзитивным.

Оказалось, что невырожденные родственные интерполяционные функции имеют одинаковые спектральные последовательности (см. [12]). Более того, оказалось (см. [13]), что функции φ_0 и φ_1 родственны тогда и только тогда, когда спектральные последовательности функций φ_0 и φ_1 эквивалентны и спектральные последовательности функций φ_0^* и φ_1^* эквивалентны. Точнее, существуют такие спектральные разложения функций φ_0 и φ_1 , что соответствующие спектральные последовательности эквивалентны в том смысле, что эквивалентны их числовые реализации.

Если интерполяционная функция φ может быть представлена в виде

$$\varphi(s, t) \asymp \phi(s^{1-\theta_0} t^{\theta_0}, s^{1-\theta_1} t^{\theta_1}),$$

где ϕ – интерполяционная функция и $0 < \theta_0, \theta_1 < 1$, то такая функция называется *квазистепенной*. Хорошо известно, что квазистепенные функции (вернее, соответствующие квазивогнутые функции одной переменной) описываются с помощью индексов растяжения (индексы должны быть отличны от 0 и 1), см., например, [6].

Нетрудно проверить, что любая квазистепенная функция родственна любой степенной функции. Значит, при спектральном разложении квазистепенных функций спектральную последовательность можно выбрать такую же, как и для степенной функции, т.е. любую убывающую двустороннюю геометрическую прогрессию.

Следовательно, для любого $0 < a < 1$ и любой квазистепенной функции φ

$$\varphi(s, t) \asymp \max_{j \in \mathbb{Z}} \varphi(1, a^j) \min\left(s, \frac{t}{a^j}\right) \asymp \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi(1, a^j) \min\left(s, \frac{t}{a^j}\right).$$

3. Обобщенный метод средних

3.1. Конструкция Кальдерона–Лозановского. Функция $\varphi \in \Phi$ представляет собой некое единое правило, по которому можно вставить положительное число $\varphi(s, t)$ между двумя произвольными положительными числами s и t . Очевидно, что это же правило можно применить и к произвольным положительным функциям с одинаковыми областями определения, т. е. считать функцию

$$x(m) = \varphi(x_0(m), x_1(m))$$

естественным промежуточным объектом между x_0 и x_1 . Если теперь предположить, что x_0 пробегает некоторое множество K_0 , а x_1 – множество K_1 , то мы получим некое множество $\varphi(K_0, K_1)$ функций вида $\varphi(x_0, x_1)$. Это множество естественно считать промежуточным между множествами K_0 и K_1 . А. П. Кальдерон понял, как эти соображения можно применить не только к множествам положительных функций, но и к линейным пространствам, представляющим интерес в анализе. Он подробно рассмотрел случай степенных интерполяционных функций $s^{1-\theta}t^\theta$ в довольно общей ситуации и произвольные интерполяционные функции в частных случаях. Г. Я. Лозановский подробно исследовал топологические свойства в случае вогнутых интерполяционных функций в общей ситуации. Поэтому в настоящее время данная конструкция промежуточных пространств носит название конструкция Кальдерона–Лозановского.

Пусть E_0 и E_1 – квазибанаховы решетки измеримых функций на некотором пространстве $\mathfrak{M}$ с σ -конечной мерой μ . Напомним, что E_i называется решеткой, если E_i – линейное пространство и для любой измеримой функции x из неравенства $|x| \leq |y|$ для $y \in E_i$ вытекает, что $x \in E_i$ и $\|x\|_{E_i} \leq \|y\|_{E_i}$. Для любых $\lambda \geq 0$ и $x \in E_i$ справедливо равенство $\|\lambda x\|_{E_i} = \lambda \|x\|_{E_i}$, и для любых $x, y \in E_i$

$$\|x + y\|_{E_i} \leq C_i(\|x\|_{E_i} + \|y\|_{E_i}) \quad (3.1)$$

с некоторыми положительными C_i . Пространства E_i – полные в естественной метрике.

Легко видеть, что условие (3.1) на решетке можно заменить на условие

$$\|\max(|x|, |y|)\|_{E_i} \leq C'_i \max(\|x\|_{E_i}, \|y\|_{E_i}),$$

поскольку для положительных чисел $\alpha + \beta \asymp \max(\alpha, \beta)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть φ – произвольная интерполяционная функция, а E_0 и E_1 – квазибанаховы решетки измеримых функций на пространстве $\mathfrak{M}$ с мерой. Пространство $\varphi(E_0, E_1)$ по определению состоит из всех измеримых функций x на $\mathfrak{M}$ таких, что

$$|x| = \varphi(|x_0|, |x_1|) \quad \text{для некоторых } x_0 \in E_0, x_1 \in E_1,$$

и

$$\|x\|_{\varphi(E_0, E_1)} = \inf_{x_0 \in E_0, x_1 \in E_1} \max(\|x_0\|_{E_0}, \|x_1\|_{E_1}),$$

где инфимум берется по всем представлениям $|x| = \varphi(|x_0|, |x_1|)$.

Нетрудно убедиться в том, что $\varphi(E_0, E_1)$ оказывается квазибанаховой решеткой. Если решетки E_0 и E_1 нормированы, то квазинорма на $\varphi(E_0, E_1)$ эквивалентна норме.

Прямые вычисления показывают, что если $0 < p_0, p_1 \leq \infty$, то $\varphi(L_{p_0}, L_{p_1})$ совпадает с пространством Орлича L_N , где $N(t)$ – непрерывная справа, возрастающая, обобщенно обратная функция к возрастающей функции $\varphi(t^{1/p_0}, t^{1/p_1})$. (Здесь $1/\infty = 0$.)

Напомним, что если через $N(t)$ обозначена возрастающая на $[0, \infty)$ непрерывная справа функция со значениями в $[0, \infty]$ и $N(0) = 0$, то через L_N обозначается множество всех измеримых функций x на пространстве $\mathfrak{M}$ с мерой μ таких, что для некоторого $\lambda > 0$

$$\int_{\mathfrak{M}} N\left(\frac{|x(\mathbf{m})|}{\lambda}\right) d\mu < \infty.$$

Функционал

$$\|x\|_{L_N} = \inf \left\{ \lambda : \int_{\mathfrak{M}} N\left(\frac{|x(\mathbf{m})|}{\lambda}\right) d\mu \leq 1 \right\}$$

оказывается квазинормой на L_N тогда и только тогда, когда существует такое $0 < k < 1$, что

$$N(kt) \leq \frac{1}{2} N(t).$$

Например, L_N при $N(t) = \log(1 + t)$ не является квазинормированным пространством.

Столь же просто, как и в случае L_p , проверяется, что $\varphi(L_{N_0}, L_{N_1}) = L_N$, где $N^{-1}(t) = \varphi(N_0^{-1}(t), N_1^{-1}(t))$ и обратные к возрастающим функциям рассматриваются в обобщенном смысле.

Как обычно, через l_p при $0 < p \leq \infty$ будем обозначать пространство последовательностей $\{\chi_j\}_{j \in J}$, где $J \subset \mathbb{Z}$, таких, что

$$\sum_{j \in J} |\chi_j|^p < \infty \quad \text{или} \quad \sup_{j \in J} |\chi_j| < \infty \quad \text{при } p = \infty,$$

со стандартными нормами или квазинормами. (Если множество индексов J не ясно из контекста, мы будем писать l_p^J вместо l_p .)

Если $w = \{w_j\}_{j \in J}$ – строго положительная последовательность, то через $l_p(w)$ будем обозначать весовое пространство последовательностей χ таких, что $\chi w \in l_p$, с естественными квазинормами.

Аналогично с весовыми функциональными пространствами. Через $L_p(W)$ будем обозначать пространство всех измеримых функций таких, что $fW \in L_p$, где $W(\mathbf{m})$ – измеримая строго положительная функция на $\mathfrak{M}$.

Легко проверить, что для любой интерполяционной функции φ и $0 < p \leq \infty$

$$\varphi(l_p(w_0), l_p(w_1)) = l_p(\varphi^*(w_0, w_1)), \quad \varphi(L_p(W_0), L_p(W_1)) = L_p(\varphi^*(W_0, W_1)).$$

3.2. Интерполяционные пространства и интерполяционные конструкции. Если вернуться к истокам интерполяции, где речь шла о восстановлении текстов, то ясно, что никому в голову бы не пришло задумываться над тем, как вставить осмысленный текст между строками из разных рукописей или книг. Исходные строки обязаны быть из одной книги. Симптоматично, что в интерполяции линейных операторов происходит нечто похожее. Интерполяционные пространства строятся не для двух произвольных пространств, а для пространств из “одной книги”.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Будем говорить, что два банаховых (квазибанаховых) пространства X_0 и X_1 образуют банахову пару $\{X_0, X_1\}$, если они непрерывно вложены в некоторое отделимое топологическое векторное пространство $\mathcal{X}$.

Когда речь идет о решетках измеримых функций, в качестве $\mathcal{X}$ обычно выступает пространство $S(\mathfrak{M})$ всех измеримых почти всюду конечных функций со сходимостью по мере. В случае пространств гладких функций удобнее рассматривать пространство обобщенных функций. В случае пространств операторов чаще всего все сводится к пространствам матриц.

Если $\{X_0, X_1\}$ – пара банаховых пространств (банахова пара), то естественно определены линейные пространства $X_0 + X_1 \subset \mathcal{X}$ и $X_0 \cap X_1 \subset \mathcal{X}$.

На пространстве $X_0 + X_1$ вводится семейство эквивалентных норм

$$K(s, t, x, \{X_0, X_1\}) = \inf_{x_0 \in X_0, x_1 \in X_1} (s\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1}),$$

где $x \in X_0 + X_1$, $s, t > 0$ и инфимум берется по всем представлениям x в виде $x_0 + x_1$. По умолчанию $\|x\|_{X_0 + X_1} = K(1, 1, x, \{X_0, X_1\})$.

Очевидно, что при фиксированном x функция $K(s, t, x, \{X_0, X_1\})$ является вогнутой интерполяционной функцией. Соответствующая ей вогнутая функция $K(1, t, x, \{X_0, X_1\})$ обычно обозначается $K(t, x, \{X_0, X_1\})$ и называется K -функционалом Петре.

Напомним, когда $K(s, t, x, \{X_0, X_1\}) \in \Phi_0$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы x попал в замыкание $X_0 \cap X_1$ в $X_0 + X_1$ (см., например, [3]). Это замыкание пересечения в сумме обычно обозначается $(X_0 + X_1)^\circ$.

На пространстве $X_0 \cap X_1$ также вводится семейство эквивалентных норм

$$J(s, t, x, \{X_0, X_1\}) = \max(s\|x\|_{X_0}, t\|x\|_{X_1}).$$

По умолчанию $\|x\|_{X_0 \cap X_1} = J(1, 1, x, \{X_0, X_1\})$.

Банахово пространство X будем называть промежуточным пространством пары $\{X_0, X_1\}$, если оно непрерывно вложено в то самое пространство $\mathcal{X}$ и

$$X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1.$$

В частности, пространства $X_0 \cap X_1$ и $X_0 + X_1$ с введенными нормами и X_0, X_1 будут промежуточными банаховыми пространствами для пары $\{X_0, X_1\}$.

Требование полноты пространств, кажущееся пока излишним, на самом деле обеспечивает полезное свойство промежуточных пространств. Если промежуточные пространства совпадают как множества, то их нормы эквивалентны, если же одно из них вложено в другое, то вложение всегда непрерывно.

Пусть $\{X_0, X_1\}$, $\{Y_0, Y_1\}$ – две банаховы пары. Будем говорить, что линейный оператор $T: X_0 + X_1 \rightarrow Y_0 + Y_1$ непрерывно действует из пары $\{X_0, X_1\}$ в пару $\{Y_0, Y_1\}$, если: (а) $T: X_0 \rightarrow Y_0$ и T непрерывен из X_0 в Y_0 ; (б) $T: X_1 \rightarrow Y_1$ и T непрерывен из X_1 в Y_1 . Будем это обозначать $T: \{X_0, X_1\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\}$ и коротко говорить, что T действует из $\{X_0, X_1\}$ в $\{Y_0, Y_1\}$. Для таких операторов определена норма $\|T\|_{\{X_0, X_1\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\}} = \max(\|T\|_{X_0 \rightarrow Y_0}, \|T\|_{X_1 \rightarrow Y_1})$.

Рассмотрим некоторое семейство банаховых пар. Пусть каждой паре $\{X_0, X_1\}$ из этого семейства поставлено в соответствие некоторое промежуточное пространство пары $\{X_0, X_1\}$, обозначенное $\mathcal{F}(X_0, X_1)$. Пусть для любых пар $\{X_0, X_1\}$, $\{Y_0, Y_1\}$ из этого семейства любой оператор $T: \{X_0, X_1\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\}$ отображает пространство $\mathcal{F}(X_0, X_1)$ в пространство $\mathcal{F}(Y_0, Y_1)$. В этом случае отображение $\mathcal{F}$ будем называть *интерполяционной конструкцией*.

Нетрудно видеть, что оператор T , суженный на $\mathcal{F}(X_0, X_1)$, будет непрерывен из $\mathcal{F}(X_0, X_1)$ в $\mathcal{F}(Y_0, Y_1)$ и что

$$\|T\|_{\mathcal{F}(X_0, X_1) \rightarrow \mathcal{F}(Y_0, Y_1)} \leq C \max(\|T\|_{X_0 \rightarrow Y_0}, \|T\|_{X_1 \rightarrow Y_1}) \quad (3.2)$$

для некоторой константы C , не зависящей от T .

Поскольку очевидно, что описанное отображение является ковариантным функтором на подкатегории банаховых пар с естественными морфизмами в категорию банаховых пространств, то интерполяционные конструкции называют также *интерполяционными функторами*.

Если константа C в (3.2) не зависит и от пар $\{X_0, X_1\}$, $\{Y_0, Y_1\}$, то интерполяционный функтор называется ограниченным. Если $C = 1$, то функтор называется нормализованным.

Если интерполяционный функтор задан только на одной паре, то это значит, что из $T: \{X_0, X_1\} \rightarrow \{X_0, X_1\}$ следует $T: X \rightarrow X$, где $X = \mathcal{F}(X_0, X_1)$. Промежуточные пространства, обладающие таким свойством, называются *интерполяционными пространствами* пары $\{X_0, X_1\}$ или интерполяционными пространствами между X_0 и X_1 .

Очевидно, что для любой интерполяционной конструкции $\mathcal{F}$ пространство $\mathcal{F}(X_0, X_1)$ оказывается интерполяционным пространством между X_0 и X_1 .

Другим важным свойством интерполяционных конструкций является их монотонность, которая понимается в смысле

$$X_0 \hookrightarrow Y_0, X_1 \hookrightarrow Y_1 \implies \mathcal{F}(X_0, X_1) \hookrightarrow \mathcal{F}(Y_0, Y_1),$$

где $\hookrightarrow$ обозначает непрерывное вложение. Это прямое следствие определения, примененного к тождественному оператору T и парам $\{X_0, X_1\}$, $\{Y_0, Y_1\}$.

Аналогия между интерполяционными функциями и интерполяционными конструкциями заходит еще дальше. Пусть $\alpha, \beta > 0$. Обозначим через $\alpha\mathbb{R}$ банахово пространство, совпадающее с $\mathbb{R}$, с нормой $\|x\|_{\alpha\mathbb{R}} = \alpha|x|$ и рассмотрим семейство пар $\{\alpha\mathbb{R}, \beta\mathbb{R}\}$ для всех $\alpha, \beta > 0$.

Пусть φ – интерполяционная функция, тогда $\mathcal{F}(\alpha\mathbb{R}, \beta\mathbb{R}) = \varphi(\alpha, \beta)\mathbb{R}$ является нормализованным интерполяционным функтором на данном семействе пар.

В самом деле, рассмотрим произвольный линейный оператор $T: \{\alpha\mathbb{R}, \beta\mathbb{R}\} \rightarrow \{\gamma\mathbb{R}, \delta\mathbb{R}\}$. Ясно, что $T(x) = \lambda x$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{aligned} \|T\|_{\varphi(\alpha, \beta)\mathbb{R} \rightarrow \varphi(\gamma, \delta)\mathbb{R}} &= |\lambda| \frac{\varphi(\gamma, \delta)}{\varphi(\alpha, \beta)} = |\lambda| \frac{\varphi(\alpha\gamma/\alpha, \beta\delta/\beta)}{\varphi(\alpha, \beta)} \\ &\leq \max\left(\frac{|\lambda|\gamma}{\alpha}, \frac{|\lambda|\delta}{\beta}\right) \frac{\varphi(\alpha, \beta)}{\varphi(\alpha, \beta)} = \max(\|T\|_{\alpha\mathbb{R} \rightarrow \gamma\mathbb{R}}, \|T\|_{\beta\mathbb{R} \rightarrow \delta\mathbb{R}}). \end{aligned}$$

На самом деле любой нормализованный функтор на семействе всех пар вида $\{\alpha\mathbb{R}, \beta\mathbb{R}\}$ имеет вид $\varphi(\alpha, \beta)\mathbb{R}$ для некоторой интерполяционной функции φ (см. [14]).

Из результатов работы [15] следует, что на семействе пар весовых квазибанаховых пространств Орлича $\{L_{N_0}(U_0), L_{N_1}(U_1)\}$ конструкция Кальдерона–Лозановского $\varphi(L_{N_0}(U_0), L_{N_1}(U_1))$ является интерполяционной конструкцией для любой интерполяционной функции φ . В частности, $\varphi(L_{N_0}(U_0), L_{N_1}(U_1))$ интерполяционно между $L_{N_0}(U_0)$ и $L_{N_1}(U_1)$. Например, любое пространство $l_p(\varphi^*(w_0, w_1))$ интерполяционно между $l_p(w_0)$ и $l_p(w_1)$.

История доказательства интерполяционности конструкции Кальдерона–Лозановского весьма длительна и состояла из многочисленных этапов, когда рассматривались сначала только степенные функции и пространства L_p , затем более общие пространства, затем квазистепенные φ и квазибанаховы пространства Орлича и т. д. Классические интерполяционные теоремы М. Рисса, В. Орлича, Г. Торина, А. П. Кальдерона, В. Стейна, Г. Вейсса – часть этой истории. Существенный переход от степенных функций к общему случаю стал возможен благодаря методу орбит (см. [4]) и привлечению результатов типа неравенства Хинчина, неравенства Гротендика, теоремы Море–Пизье [16].

Для произвольных пар банаховых решеток пространство $\varphi(E_0, E_1)$, вообще говоря, не интерполяционно между E_0 и E_1 даже для степенных интерполяционных функций. Это происходит для банаховых решеток без свойства Фату (см. [17]).

Другая важная серия интерполяционных конструкций связана с K -функционалами.

Если $T: \{X_0, X_1\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\}$, то прямо из определения следует неравенство

$$K(s, t, T(x), \{Y_0, Y_1\}) \leq \max(\|T\|_{X_0 \rightarrow Y_0}, \|T\|_{X_1 \rightarrow Y_1}) K(s, t, x, \{X_0, X_1\}).$$

Поэтому для любой банаховой решетки E измеримых функций на полуоси $(0, \infty)$, содержащей функцию $\min(1, t)$, пространство всех $x \in X_0 + X_1$ таких, что $K(t, x, \{X_0, X_1\}) \in E$, с нормой $\|x\| = \|K(t, x, \{X_0, X_1\})\|_E$, оказывается интерполяционной конструкцией. Это пространство называется пространством K -метода с пространством-параметром E , обозначается через $(X_0, X_1)_E^K$ и порождает нормализованный интерполяционный функтор.

Наиболее известным и важным для приложений оказался случай, когда E – это пространство L_p со степенным весом:

$$E_{\theta, p} = \left\{ \chi: \int_0^\infty \left(\frac{|\chi(t)|}{t^\theta} \right)^p \frac{dt}{t} < \infty \right\},$$

где $0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq \infty$. (Интересен, конечно, и квазибанахов случай при $0 < p < 1$.)

Пространство $(X_0, X_1)_{E_{\theta,p}}^K$ обозначается через $X_{\theta,p}$. Эти пространства называются пространствами Лионса–Петре [18].

Важнейшим свойством данного интерполяционного функтора является его специфическая “устойчивость”, восходящая к интерполяционной теореме Марцинкевича (1939):

$$(l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-m}))_{\theta,p} = l_p(2^{-\theta m})$$

при любых $1 \leq p_0, p_1, p \leq \infty$ и $0 < \theta < 1$. То есть пространство $(l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-m}))_{\theta,p}$ не зависит от p_0, p_1 .

3.3. K -функционал и интерполяционные функции, банаховы пары с полным спектром. Вычисление K -функционала часто определяет решение существенных задач анализа. В простейшем случае одномерной пары $\{\alpha\mathbb{R}, \beta\mathbb{R}\}$ для любых $\alpha, \beta > 0$ прямо из определения получается, что

$$K(s, t, x, \{\alpha\mathbb{R}, \beta\mathbb{R}\}) = \min(s\alpha, t\beta)|x|.$$

Аналогично,

$$K(s, t, x, \{l_1(\alpha), l_1(\beta)\}) = \sum_{j \in J} \min(s\alpha_j, t\beta_j)|x_j|. \quad (3.3)$$

Если $1 < p \leq \infty$, то

$$K(s, t, x, \{l_p(\alpha), l_p(\beta)\}) \asymp \|x \min(s\alpha, t\beta)\|_{l_p}. \quad (3.4)$$

(Эквивалентность по совокупности всех параметров.)

Аналогичные соотношения справедливы и для весовых пространств измеримых функций, в частности,

$$K(s, t, x, \{L_\infty(\alpha), L_\infty(\beta)\}) \asymp \|x \min(s\alpha, t\beta)\|_{L_\infty}. \quad (3.5)$$

Для произвольных пар банаховых решеток E_0, E_1

$$K(s, t, x, \{E_0, E_1\}) \asymp \|x\|_{\varphi(E_0, E_1)},$$

где $\varphi(u, v) = u/s + v/t$.

Пусть теперь интерполяционная функция φ принадлежит Φ_0 , тогда благодаря (3.3) и (3.4) спектральное разложение (2.19) можно переписать в виде

$$\varphi(s, t) \asymp K\left(s, t, \mathbf{1}, \left\{l_1\left(\frac{1}{A}\right), l_1\left(\frac{1}{B}\right)\right\}\right) \asymp K\left(s, t, \mathbf{1}, \left\{l_\infty\left(\frac{1}{A}\right), l_\infty\left(\frac{1}{B}\right)\right\}\right),$$

где последовательности A_j и B_j взяты из спектрального разложения функции φ . Следовательно, для любых $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$

$$\varphi(s, t) \asymp K\left(s, t, \mathbf{1}, \left\{l_{p_0}\left(\frac{1}{A}\right), l_{p_1}\left(\frac{1}{B}\right)\right\}\right). \quad (3.6)$$

Как мы уже отмечали (см. (2.23)), в качестве спектральной последовательности любой $\varphi \in \Phi_0$ можно взять некоторую подпоследовательность любой убывающей геометрической прогрессии, т. е. $t_j = a^{k_j}$. Тогда

$$\varphi(s, t) \asymp K(s, t, \{\varphi(1, t_j)\}, \{l_{p_0}, l_{p_1}(a^{-k_j})\}) = K(s, t, A_\varphi, \{l_{p_0}, l_{p_1}(a^{-k})\}), \quad (3.7)$$

где $(A_\varphi)_{k_j} = \varphi(1, t_j)$, и $(A_\varphi)_k = 0$, если $k \neq k_j$. Это значит, что любая функция $\varphi \in \Phi_0$ с точностью до эквивалентности является K -функционалом некоторого элемента из $l_{p_0} + l_{p_1}(a^{-k})$ в паре $\{l_{p_0}, l_{p_1}(a^{-k})\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Будем говорить, что банахова пара имеет полный спектр, если для любой интерполяционной функции $\varphi \in \Phi_0$ существует $x \in X_0 + X_1$ такой, что

$$\varphi(s, t) \asymp K(s, t, x, \{X_0, X_1\}).$$

Соотношение (3.7) говорит о том, что пара $\{l_{p_0}, l_{p_1}(a^{-k})\}$ имеет полный спектр при любых $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$ и $a \neq 1$, если $-\infty < k < \infty$.

Отсюда нетрудно вывести, что любая пара пространств $\{L_{p_0}, L_{p_1}\}$ измеримых функций на пространстве с неограниченной непрерывной мерой имеет полный спектр. Аналогичная пара весовых пространств $\{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$ может утратить это свойство, например потому, что пара $\{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$ может оказаться упорядоченной.

Вообще говоря, будем называть пару упорядоченной, если $X_0 \subset X_1$ или $X_0 \supset X_1$. С точки зрения нашего определения такие пары не имеют полного спектра, поскольку

$$K(s, t, x, \{X_0, X_1\}) \leq t\|x\|_{X_1} \quad \text{и} \quad K(s, t, x, \{X_0, X_1\}) \leq s\|x\|_{X_0},$$

и функция $K(s, t, x, \{X_0, X_1\})$ оказывается ограниченной по s при любых t , если $X_0 \subset X_1$, и наоборот при $X_0 \supset X_1$. Для удобства мы будем говорить, что упорядоченная пара имеет полный спектр, если никаких других ограничений, кроме упомянутых выше, на функции вида $K(s, t, x, \{X_0, X_1\})$ не имеется.

Н. Я. Кругляк установил (см. [6]), что пара $\{X_0, X_1\}$ имеет полный спектр, если хотя бы для одного $0 < \theta < 1$ существует такой $x \in X_0 + X_1$, что

$$K(s, t, x, \{X_0, X_1\}) \asymp s^{1-\theta} t^\theta.$$

В заключение приведем предложение, которое мы будем использовать в дальнейшем и которое может послужить основой для классификации пар с неполным спектром.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть A и B – последовательности из спектрального разложения какой-либо квазивогнутой функции, тогда множество функций $\psi \in \Phi_0$ таких, что $\psi(s, t) = K(s, t, x, \{l_{p_0}(1/A), l_{p_1}(1/B)\})$, где $x \in l_{p_0}(1/A) + l_{p_1}(1/B)$, с точностью до эквивалентности не зависит от $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оказывается, что это множество функций совпадает с точностью до эквивалентности с множеством вогнутых кусочно линейных функций из Φ_0 , имеющих изломы на лучах, проходящих через точки (A_j, B_j) .

В самом деле, как отмечено выше, всякая спектральная последовательность эквивалентна некоторой подпоследовательности геометрической прогрессии, скажем, 2^n . Поэтому каждая из пар $\{l_{p_0}(1/A), l_{p_1}(1/B)\}$ естественно изоморфна дополняемой подпаре пары $\{l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-n})\}$. Как известно (см., например, [19]),

$$K(1, 2^k, x, \{l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-n})\}) \asymp \left(\sum_{n=-\infty}^k |x_n|^{p_0} \right)^{1/p_0} + 2^k \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n \cdot 2^{-n}|^{p_1} \right)^{1/p_1},$$

с естественными модификациями в случае $p_0 = \infty$ или $p_1 = \infty$.

Следовательно, любая функция $K(s, t, x, \{l_{p_0}(1/A), l_{p_1}(1/B)\})$ эквивалентна кусочно линейной вогнутой функции с изломами на лучах, проходящих через точки (A_j, B_j) .

Обратно, если $\psi \in \Phi_0$ и вогнутая функция $\psi(1, t)$ имеет изломы в точках t_j , то ее спектральную последовательность можно выбрать как подпоследовательность t_j . Для проверки этого можно использовать аналог индуктивной конструкции Осолокова–Янсона (2.21), примененной к функции $\psi(1, t_j)$, заданной в точках t_j , а не всюду на $(0, \infty)$, как обычно. Тогда

$$\psi(s, t) \asymp K(s, t, \{\psi(1, t_{m_k})\}, \{l_{p_0}, l_{p_1}(t_{m_k}^{-1})\}).$$

Предложение доказано.

3.4. Определение обобщенных пространств средних Лионса–Петре. Классические пространства средних Лионса–Петре можно определить, например, следующим образом. Пусть $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$ и $\{\gamma_k\}$ – двусторонние положительные геометрические прогрессии. Пусть знаменатель прогрессии γ лежит строго между знаменателями прогрессий α и β и поэтому найдется такое $0 < \theta < 1$, что $\gamma_k = C\alpha_k^{1-\theta}\beta_k^\theta$.

Пусть $\{X_0, X_1\}$ – банахова пара, и пусть $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$. Рассмотрим векторнозначные последовательности $x_k \in X_0 \cap X_1$ такие, что

$$\{\|x_k \alpha_k\|_{X_0}\} \in l_{p_0} \quad \text{и} \quad \{\|x_k \beta_k\|_{X_1}\} \in l_{p_1}.$$

Тогда ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k x_k \tag{3.8}$$

абсолютно сходится в $X_0 + X_1$, поскольку

$$\begin{aligned} \gamma_k \|x_k\|_{X_0+X_1} &\leq C\alpha_k^{1-\theta}\beta_k^\theta \min(\|x_k\|_{X_0}, \|x_k\|_{X_1}) \\ &\leq C\alpha_k^{1-\theta}\beta_k^\theta C_1 \min\left(\frac{1}{\alpha_k}, \frac{1}{\beta_k}\right) = CC_1 \min\left(\left(\frac{\beta_k}{\alpha_k}\right)^\theta, \left(\frac{\alpha_k}{\beta_k}\right)^{1-\theta}\right), \end{aligned}$$

где

$$C_1 = \max(\|x\|_{l_{p_0}(\alpha)}, \|x\|_{l_{p_1}(\beta)}). \tag{3.9}$$

Множество сумм всех рядов (3.8) обозначим $S(X_0, X_1, \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1)$. Можно проверить, что S будет векторным пространством и что на нем вводится норма, равная $\inf C_1$, где точная нижняя грань берется по всем последовательностям x_k , дающим одну и ту же сумму.

Легко проверить, что таким образом мы приходим к банахову пространству, промежуточному для пары $\{X_0, X_1\}$. Более того, оно оказывается интерполяционным пространством между X_0 и X_1 , т. е. для любого линейного ограниченного оператора $T: \{X_0, X_1\} \rightarrow \{X_0, X_1\}$ справедливо, что $T: S \rightarrow S$, и

$$\|T\|_{S \rightarrow S} \leq \max(\|T\|_{X_0 \rightarrow X_0}, \|T\|_{X_1 \rightarrow X_1}).$$

Знаменитая теорема Я. Петре о сокращении параметров (см. [18], [20]) утверждает, что

$$S(X_0, X_1, \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1) = (X_0, X_1)_{\theta, p_\theta},$$

где $(X_0, X_1)_{\theta, p_\theta}$ – пространство Лионса–Петре и $1/p_\theta = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$. Таким образом, три геометрические прогрессии заменяются на одну степенную функцию, а пара индексов p_0, p_1 заменяется на их среднее гармоническое.

Пусть теперь α, β и γ – произвольные двусторонние последовательности.

Через $S(X_0, X_1, \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1)$, где $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$, вновь обозначим пространство, состоящее из

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k x_k \quad (\text{сходимость в } X_0 + X_1),$$

где

$$\{\|x_k \gamma_k\|_{X_0 + X_1}\} \in l_1 \quad (3.10)$$

и

$$\{\|x_k \alpha_k\|_{X_0}\} \in l_{p_0}, \quad \{\|x_k \beta_k\|_{X_1}\} \in l_{p_1}. \quad (3.11)$$

Если из условий (3.11) вытекает (3.10), то последовательность γ будем называть промежуточной между α и β .

Например, если $p_0 = p_1 = 1$ и последовательность α возрастает, а β убывает, то постоянная последовательность γ будет промежуточной между α и β . Если α возрастает быстрее геометрической прогрессии, а β убывает быстрее геометрической прогрессии, то постоянная последовательность будет промежуточной между α и β независимо от p_0 и p_1 . Это непосредственно вытекает из оценок

$$\begin{aligned} \|x_k\|_{X_0 + X_1} &\leq \min(\|x_k\|_{X_0}, \|x_k\|_{X_1}) \leq \min\left(\frac{1}{\alpha_k}, \frac{1}{\beta_k}\right) \max(\alpha_k \|x_k\|_{X_0}, \beta_k \|x_k\|_{X_1}) \\ &\leq C \max(\alpha_k \|x_k\|_{X_0}, \beta_k \|x_k\|_{X_1}), \end{aligned}$$

где $C = \max_k \min(1/\alpha_k, 1/\beta_k)$, в первом случае и

$$\|x_k\|_{X_0 + X_1} \leq \min(\|x_k\|_{X_0}, \|x_k\|_{X_1}) \leq C_1 \min\left(\frac{1}{\alpha_k}, \frac{1}{\beta_k}\right),$$

где C_1 из (3.9), во втором.

Очевидно, что $S(X_0, X_1, \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1)$ является банаховым интерполяционным пространством для пары $\{X_0, X_1\}$.

Полезно отметить, что в приведенных здесь примерах оказывается, что

$$l_{p_0}(\alpha) \cap l_{p_1}(\beta) \subset l_1. \quad (3.12)$$

Значит, в этих случаях данное обобщение метода средних укладывается в определение, рассмотренное в [6].

Нас будет интересовать аналог теоремы Петре о сокращении параметров для обобщенной конструкции Лионса–Петре. Оказалось, что и здесь три последовательности α, β, γ можно заменить на одну интерполяционную функцию.

Рассмотрим еще один пример промежуточной последовательности. Пусть $\varphi \in \Phi_0$, рассмотрим спектральное разложение (2.15) этой функции. Тогда $\alpha_k = A_k$ возрастает быстрее геометрической прогрессии, $\beta_k = B_k$ убывает быстрее геометрической прогрессии, следовательно, постоянная последовательность $\mathbf{1}$ будет промежуточной между α и β . Таким образом, для любых $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$ мы можем определить $S(X_0, X_1, A, B, \mathbf{1}, p_0, p_1)$, где последовательности A_k и B_k взяты из спектрального разложения интерполяционной функции $\varphi \in \Phi_0$. Нашей ближайшей целью будет доказать, что пространство $S(X_0, X_1, A, B, \mathbf{1}, p_0, p_1)$ не зависит от выбора спектрального разложения функции φ , что позволит нам ввести в рассмотрение пространства $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$, равные $S(X_0, X_1, A, B, \mathbf{1}, p_0, p_1)$. Попутно мы проведем вычисления соответствующих пространств для некоторых конкретных пар.

ЛЕММА 3.1. Пусть $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$, тогда

$$S(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1), A, B, \mathbf{1}, p_0, p_1) = \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала вложение

$$S(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1), A, B, \mathbf{1}, p_0, p_1) \subset \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)). \quad (3.13)$$

Пусть $x \in S(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1), A, B, \mathbf{1}, p_0, p_1)$, т. е.

$$x = \sum_{j \in J} w_j,$$

где $\{A_j \|w_j\|_{L_{p_0}}\} \in l_{p_0}$ и $\{B_j \|w_j\|_{L_{p_1}}\} \in l_{p_1}$. Построим линейный оператор

$$T: \left\{ l_{q_0} \left(\frac{1}{A} \right), l_{q_1} \left(\frac{1}{B} \right) \right\} \rightarrow \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\},$$

где q обозначает двойственный индекс к p , т. е. $q = (1 - 1/p)^{-1}$. Положим

$$T(\xi) = \sum_{j \in J} w_j \xi_j \quad (\text{сходимость в } L_{p_0}(U_0) + L_{p_1}(U_1))$$

для $\xi \in l_{q_0}(1/A) + l_{q_1}(1/B)$.

Если $\xi \in l_{q_0}(1/A)$, то ряд $(w_j \xi_j) = (A_j w_j \xi_j / A_j)$ абсолютно сходится в $L_{p_0}(U_0)$. Если $\xi \in l_{q_1}(1/B)$, то ряд $(w_j \xi_j)$ абсолютно сходится в $L_{p_1}(U_1)$. Кроме того, всюду на $\mathfrak{M}$

$$\left| \sum_{j \in J} w_j(\mathbf{m}) \xi_j \right| \leq \sum_{j \in J} |w_j(\mathbf{m})| |\xi_j| \leq \left(\sum_{j \in J} |A_j w_j(\mathbf{m})|^{p_0} \right)^{1/p_0} \left(\sum_{j \in J} \left| \frac{\xi_j}{A_j} \right|^{q_0} \right)^{1/q_0}.$$

Так как

$$\int_{\mathfrak{M}} \sum_{j \in J} |A_j U_0(\mathbf{m}) w_j(\mathbf{m})|^{p_0} d\mathbf{m} = \sum_{j \in J} \|A_j w_j\|_{L_{p_0}(U_0)}^{p_0} < \infty,$$

получим

$$\left(\sum_{j \in J} |A_j w_j(\mathbf{m})|^{p_0} \right)^{1/p_0} = W_0(\mathbf{m}) \in L_{p_0}(U_0).$$

Аналогично,

$$\left(\sum_{j \in J} |B_j w_j(\mathbf{m})|^{p_1} \right)^{1/p_1} = W_1(\mathbf{m}) \in L_{p_1}(U_1).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |T(\xi)(\mathbf{m})| &\leq W_0(\mathbf{m}) \|\xi\|_{l_{q_0}(1/A)} \quad \text{для } \xi \in l_{q_0}\left(\frac{1}{A}\right), \\ |T(\xi)(\mathbf{m})| &\leq W_1(\mathbf{m}) \|\xi\|_{l_{q_1}(1/B)} \quad \text{для } \xi \in l_{q_1}\left(\frac{1}{B}\right). \end{aligned}$$

Это значит, что

$$\begin{aligned} T: l_{q_0}\left(\frac{1}{A}\right) &\rightarrow L_{\infty}\left(\frac{1}{W_0}\right) \subset L_{p_0}(U_0), \\ T: l_{q_1}\left(\frac{1}{B}\right) &\rightarrow L_{\infty}\left(\frac{1}{W_1}\right) \subset L_{p_1}(U_1). \end{aligned}$$

(Без ограничения общности можно считать, что почти всюду на $\mathfrak{M}$ оба веса W_0 и W_1 не обращаются в нуль.)

Легко видеть, что образ x последовательности $\mathbf{1}$ при действии оператора T совпадает с суммой

$$x = \sum_{j \in J} w_j.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} K\left(s, t, x, \left\{L_{\infty}\left(\frac{1}{W_0}\right), L_{\infty}\left(\frac{1}{W_1}\right)\right\}\right) &= K\left(s, t, T(\mathbf{1}), \left\{L_{\infty}\left(\frac{1}{W_0}\right), L_{\infty}\left(\frac{1}{W_1}\right)\right\}\right) \\ &\leq CK\left(s, t, \mathbf{1}, \left\{l_{q_0}\left(\frac{1}{A}\right), l_{q_1}\left(\frac{1}{B}\right)\right\}\right) \\ &\asymp \varphi(s, t) \end{aligned}$$

в силу спектрального разложения φ .

Ввиду (3.5), отсюда следует

$$|x(\mathbf{m})| \leq K \left(W_0(\mathbf{m}), W_1(\mathbf{m}), x, \left\{ L_\infty \left(\frac{1}{W_0} \right), L_\infty \left(\frac{1}{W_1} \right) \right\} \right) \leq C \varphi(W_0(\mathbf{m}), W_1(\mathbf{m})).$$

Так что $x \in \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))$, и вложение (3.13) доказано.

Теперь докажем вложение

$$\varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)) \subset S(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1), A, B, \mathbf{1}, p_0, p_1). \quad (3.14)$$

Пусть $a \in \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))$. Пусть $\psi(s, t)$ обозначает K -функционал элемента a , т. е.

$$\psi(s, t) = K(s, t, a, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\});$$

рассмотрим его спектральное разложение

$$\psi(s, t) \asymp \sum_{j \in J} \min \left(\frac{s}{u_j}, \frac{t}{v_j} \right) \asymp \max_{j \in J} \min \left(\frac{s}{u_j}, \frac{t}{v_j} \right).$$

(Заметим, что $\psi \in \Phi_0$, если $\varphi \in \Phi_0$.) Тогда в силу (3.6)

$$\psi(s, t) \asymp K \left(s, t, \mathbf{1}, \left\{ l_{p_0} \left(\frac{1}{u} \right), l_{p_1} \left(\frac{1}{v} \right) \right\} \right) \asymp K \left(s, t, \mathbf{1}, \left\{ l_\infty \left(\frac{1}{u} \right), l_\infty \left(\frac{1}{v} \right) \right\} \right). \quad (3.15)$$

Поскольку K -функционалы у $\mathbf{1}$ и a эквивалентны, то по теореме Спарра [21], примененной к парам $\{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$ и $\{l_{p_0}(1/u), l_{p_1}(1/v)\}$, найдутся линейные операторы

$$P: \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \left\{ l_{p_0} \left(\frac{1}{u} \right), l_{p_1} \left(\frac{1}{v} \right) \right\}$$

и

$$Q: \left\{ l_{p_0} \left(\frac{1}{u} \right), l_{p_1} \left(\frac{1}{v} \right) \right\} \rightarrow \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$$

такие, что $P(a) = \mathbf{1}$ и $Q(\mathbf{1}) = a$. Так как конструкция Кальдерона–Лозановского является интерполяционной для пар пространств L_p (см., например, [4]), мы получим $\mathbf{1} \in \varphi(l_{p_0}(1/u), l_{p_1}(1/v))$.

Любой элемент $a \in \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))$ принадлежит орбите последовательности $\mathbf{1}$ при действии линейных операторов из пары $\{l_\infty(1/A), l_\infty(1/B)\}$ в пару $\{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$, так как $\mathbf{1} \equiv \varphi(A_j, B_j)$ (см., например, [4]). Это значит, что существует линейный оператор $T: \{l_\infty(1/A), l_\infty(1/B)\} \rightarrow \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$ такой, что $T(\mathbf{1}) = a$.

Рассмотрим произведение $PT: \{l_\infty(1/A), l_\infty(1/B)\} \rightarrow \{l_{p_0}(1/u), l_{p_1}(1/v)\}$, которое отображает $\mathbf{1}$ в $\mathbf{1}$.

Так как $l_p \subset l_\infty$, мы можем рассмотреть оператор PT как оператор, отображающий пару $\{l_\infty(1/A), l_\infty(1/B)\}$ в пару $\{l_\infty(1/u), l_\infty(1/v)\}$. Вложения $l_p \subset l_\infty$ являются $(1, p)$ -суммирующими операторами по теореме Карла–Беннета [22]. Напомним, что линейный оператор $F: X \rightarrow Y$ называется $(1, p)$ -суммирующим оператором из банахова пространства X в банахово пространство Y , если для

любого безусловно сходящегося ряда (x_n) в пространстве X последовательность $\{\|F(x_n)\|_Y\}$ принадлежит l_p . В частности, если $p = 1$, то оператор F называется абсолютно суммирующим. Если оператор $F: X \rightarrow Y$ является $(1, p)$ -суммирующим, то $\{\|F(x_n)\|_Y\} \in l_p$ и для слабо безусловно сходящихся рядов (x_n) .

Воспользуемся теперь тем, что образ стандартной базисной последовательности e_j в пространстве l_∞ при действии линейного ограниченного оператора из l_∞ в банахово пространство X всегда оказывается слабо безусловно сходящимся рядом в X . Соответственно, образ последовательности $A_j e_j$ при действии линейного ограниченного оператора из весового пространства $l_\infty(1/A)$ в пространство $L_{p_0}(U_0)$ оказывается слабо безусловно сходящимся рядом в пространстве $L_{p_0}(U_0)$.

Тогда для $(1, p_0)$ -суммирующего оператора $P: L_{p_0}(U_0) \rightarrow l_\infty(1/u)$

$$\{A_j \|PT(e_j)\|_{l_\infty(1/u)}\} = \{\|P(T(A_j e_j))\|_{l_\infty(1/u)}\} \in l_{p_0}. \quad (3.16)$$

Аналогично,

$$\{B_j \|PT(e_j)\|_{l_\infty(1/v)}\} \in l_{p_1}. \quad (3.17)$$

Поскольку $PT(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, то

$$\mathbf{1} = \sum_{j \in J} PT(e_j) \quad (3.18)$$

ввиду абсолютной сходимости этого ряда в $l_\infty(1/u) + l_\infty(1/v)$, поэтому

$$\mathbf{1} \in S\left(l_\infty\left(\frac{1}{u}\right), l_\infty\left(\frac{1}{v}\right), A, B, \mathbf{1}, p_0, p_1\right).$$

Обозначим $w_j = PT(e_j)$. Ввиду (3.18)

$$K\left(s, t, \mathbf{1}, \left\{l_\infty\left(\frac{1}{u}\right), l_\infty\left(\frac{1}{v}\right)\right\}\right) \leq \sum_{j \in J} K\left(s, t, w_j, \left\{l_\infty\left(\frac{1}{u}\right), l_\infty\left(\frac{1}{v}\right)\right\}\right) < \infty,$$

поэтому в силу (3.15)

$$K\left(s, t, \mathbf{1}, \left\{l_{p_0}\left(\frac{1}{u}\right), l_{p_1}\left(\frac{1}{v}\right)\right\}\right) \leq C \sum_{j \in J} K\left(s, t, w_j, \left\{l_\infty\left(\frac{1}{u}\right), l_\infty\left(\frac{1}{v}\right)\right\}\right). \quad (3.19)$$

Применим к неравенству (3.19) теорему о K -делимости (см. [6]). Напомним, что теорема о K -делимости утверждает, что для любой банаховой пары $\{X_0, X_1\}$ из неравенства

$$K(t, a; \{X_0, X_1\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t) < \infty,$$

где $a \in X_0 + X_1$, а $\psi_n(t)$ – квазивогнутые функции, вытекает существование последовательности $a_n \in X_0 + X_1$ такой, что

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (\text{сходимость в } X_0 + X_1) \quad \text{и} \quad K(t, a_n; \{X_0, X_1\}) \leq 6\psi_n(t).$$

Из K -делимости для пар $\{l_{p_0}(1/u), l_{p_1}(1/v)\}$ и неравенства (3.19) следует, что существует последовательность $w'_n \in l_{p_0}(1/u) \cap l_{p_1}(1/v)$ такая, что

$$\mathbf{1} = \sum_{j \in J} w'_j$$

и

$$K\left(s, t, w'_j, \left\{l_{p_0}\left(\frac{1}{u}\right), l_{p_1}\left(\frac{1}{v}\right)\right\}\right) \leq 6CK\left(s, t, w_j, \left\{l_{\infty}\left(\frac{1}{u}\right), l_{\infty}\left(\frac{1}{v}\right)\right\}\right). \quad (3.20)$$

Так как

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} K\left(1, t, w'_j, \left\{l_{p_0}\left(\frac{1}{u}\right), l_{p_1}\left(\frac{1}{v}\right)\right\}\right) &= \|w'_j\|_{l_{p_0}(1/u)}, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} K\left(t, 1, w'_j, \left\{l_{p_0}\left(\frac{1}{u}\right), l_{p_1}\left(\frac{1}{v}\right)\right\}\right) &= \|w'_j\|_{l_{p_1}(1/v)}, \end{aligned}$$

из неравенств (3.20) следует

$$\|w'_j\|_{l_{p_0}(1/u)} \leq 6C\|w_j\|_{l_{\infty}}, \quad \|w'_j\|_{l_{p_1}(1/v)} \leq 6C\|w_j\|_{l_{\infty}(1/v)}.$$

Значит,

$$\mathbf{1} \in S\left(l_{p_0}\left(\frac{1}{u}\right), l_{p_1}\left(\frac{1}{v}\right), A, B, \mathbf{1}, p_0, p_1\right)$$

ввиду (3.16), (3.17).

Конструкция $S(X_0, X_1, A, B, \mathbf{1}, p_0, p_1)$ является интерполяционным функтором, поэтому образ $\mathbf{1}$ при действии линейного оператора $Q: \{l_{p_0}(1/u), l_{p_1}(1/v)\} \rightarrow \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$ принадлежит $S(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1), A, B, \mathbf{1}, p_0, p_1)$. То есть $a = Q(\mathbf{1}) \in S(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1), A, B, \mathbf{1}, p_0, p_1)$. Таким образом, вложение (3.14) и лемма 3.1 доказаны.

Напомним, что интерполяционная функция φ называется невырожденной, если области значений функций $\varphi(t, 1)$ и $\varphi(1, t)$ при $t > 0$ совпадают с $(0, \infty)$. Именно в этом случае спектральная последовательность функции $\varphi(s, t)$ оказывается двусторонней, т. е. $J = \mathbb{Z}$.

ЛЕММА 3.2. Если $\varphi \in \Phi_0$, то пространство $S(X_0, X_1, A, B, \mathbf{1}, p_0, p_1)$ состоит из $x \in X_0 + X_1$ таких, что

$$\mathbf{1} \in \varphi\left(l_{p_0}\left(\frac{1}{u}\right), l_{p_1}\left(\frac{1}{v}\right)\right) \quad (3.21)$$

для любой полной по Гальярдо банаховой пары $\{X_0, X_1\}$, где u_j и v_j – последовательности из спектрального разложения интерполяционной функции $K(s, t, x, \{X_0, X_1\})$, т. е.

$$K(s, t, x, \{X_0, X_1\}) \asymp \max_{j \in J} \min\left(\frac{s}{u_j}, \frac{t}{v_j}\right) \asymp \sum_{j \in J} \min\left(\frac{s}{u_j}, \frac{t}{v_j}\right).$$

Если φ невырождена, то данное описание имеет место для любой банаховой пары.

Соотношение (3.21) можно переписать в виде

$$\left\{ K\left(1, \frac{v_j}{u_j}, x, \{X_0, X_1\}\right) \right\} \in \varphi\left(l_{p_0}, l_{p_1}\left(\frac{u_j}{v_j}\right)\right),$$

где $\{v_j/u_j\}_{j \in J}$ – спектральная последовательность для вогнутой функции $K(1, t, x, \{X_0, X_1\})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что банахова пара $\{X_0, X_1\}$ называется полной по Гальярдо, если $X_0 = \tilde{X}_0$ и $X_1 = \tilde{X}_1$, где $\tilde{X}$ обозначает пополнение X по Гальярдо относительно $X_0 + X_1$. (Единичный шар пространства $\tilde{X}$ равен замыканию единичного шара пространства X в $X_0 + X_1$.)

Если $x \in S(X_0, X_1, A, B, \mathbf{1}, p_0, p_1)$, то

$$x = \sum_n w_n, \quad (3.22)$$

где

$$\{\|w_n\|_{X_0}\} \in l_{p_0}\left(\frac{1}{A}\right), \quad \{\|w_n\|_{X_1}\} \in l_{p_1}\left(\frac{1}{B}\right).$$

Из разложения (3.22) следует

$$K(s, t, x, \{X_0, X_1\}) \leq \sum_n K(s, t, w_n, \{X_0, X_1\}).$$

Вновь обозначим $\psi(s, t) = K(s, t, x, \{X_0, X_1\})$, и пусть u и v – последовательности из спектрального разложения ψ . Тогда

$$K\left(s, t, \mathbf{1}, \left\{l_{p_0}\left(\frac{1}{u}\right), l_{p_1}\left(\frac{1}{v}\right)\right\}\right) \asymp K(s, t, x, \{X_0, X_1\}) \leq \sum_n K(s, t, w_n, \{X_0, X_1\}).$$

Ввиду K -делимости пары $\{l_{p_0}(1/u), l_{p_1}(1/v)\}$ существует последовательность $w'_n \in l_{p_0}(1/u) + l_{p_1}(1/v)$ такая, что

$$\mathbf{1} = \sum_n w'_n$$

и для всех n

$$K\left(s, t, w'_n, \left\{l_{p_0}\left(\frac{1}{u}\right), l_{p_1}\left(\frac{1}{v}\right)\right\}\right) \leq 6CK(s, t, w_n, \{X_0, X_1\}). \quad (3.23)$$

В силу (3.23) получим

$$\|w'_n\|_{l_{p_0}(1/u)} \leq 6C\|w_n\|_{X_0}, \quad \|w'_n\|_{l_{p_1}(1/v)} \leq 6C\|w_n\|_{X_0}$$

так же, как это было в лемме 3.1. Поэтому $\mathbf{1} \in S(l_{p_0}(1/u), l_{p_1}(1/v), A, B, \mathbf{1}, p_0, p_1)$ и $\mathbf{1} \in \varphi(l_{p_0}(1/u), l_{p_1}(1/v))$ по лемме 3.1.

Теперь предположим, что $\mathbf{1} \in \varphi(l_{p_0}(1/u), l_{p_1}(1/v)) = S(l_{p_0}(1/u), l_{p_1}(1/v), A, B, \mathbf{1}, p_0, p_1)$, тогда

$$\mathbf{1} = \sum_n w'_n,$$

где

$$\{\|w'_n\|_{l_{p_0}(1/u)}\} \in l_{p_0}, \quad \{\|w'_n\|_{l_{p_1}(1/v)}\} \in l_{p_1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} K(s, t, a, \{X_0, X_1\}) &= \psi(s, t) \leq CK\left(s, t, \mathbf{1}, \left\{l_{p_0}\left(\frac{1}{u}\right), l_{p_1}\left(\frac{1}{v}\right)\right\}\right) \\ &\leq C \sum_n K\left(s, t, w'_n, \left\{l_{p_0}\left(\frac{1}{u}\right), l_{p_1}\left(\frac{1}{v}\right)\right\}\right). \end{aligned}$$

В силу K -делимости пары $\{X_0, X_1\}$ существует последовательность $w_n \in X_0 + X_1$ такая, что

$$a = \sum_n w_n$$

и

$$K(s, t, w_n, \{X_0, X_1\}) \leq 6CK\left(s, t, w'_n, \left\{l_{p_0}\left(\frac{1}{u}\right), l_{p_1}\left(\frac{1}{v}\right)\right\}\right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} K(1, t, w_n, \{X_0, X_1\}) &\leq 6C\|w'_n\|_{l_{p_0}(1/u)}, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} K(t, 1, w_n, \{X_0, X_1\}) &\leq 6C\|w'_n\|_{l_{p_1}(1/v)}. \end{aligned}$$

Это значит, что

$$\|w_n\|_{\tilde{X}_0} \leq 6C\|w'_n\|_{l_{p_0}}, \quad \|w_n\|_{\tilde{X}_1} \leq 6C\|w'_n\|_{l_{p_1}(u_m^{-1})}.$$

Таким образом, $a \in S(\tilde{X}_0, \tilde{X}_1, A, B, \mathbf{1}, p_0, p_1)$. Поэтому, если $X_0 = \tilde{X}_0$ и $X_1 = \tilde{X}_1$, лемма 3.2 доказана без каких-либо ограничений на функцию $\varphi \in \Phi_0$.

Если φ невырождена, то можно проверить, что

$$S(X_0, X_1, A, B, \mathbf{1}, p_0, p_1) = S(\tilde{X}_0, \tilde{X}_1, A, B, \mathbf{1}, p_0, p_1).$$

Это можно сделать непосредственно, но полезнее использовать результаты из [6], касающиеся метода средних с общими параметрами. Легко убедиться в том, что если φ невырождена, то $S(X_0, X_1, A, B, \mathbf{1}, p_0, p_1)$ описывается J -методом с невырожденным пространством-параметром, а потому и K -методом. Следовательно, пространство $S(X_0, X_1, A, B, \mathbf{1}, p_0, p_1)$ не изменится, если пару $\{X_0, X_1\}$ заменить на пару $\{\tilde{X}_0, \tilde{X}_1\}$. Следовательно, если функция φ невырождена, то $a \in S(X_0, X_1, A, B, \mathbf{1}, p_0, p_1)$. Лемма 3.2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Лемма 3.2, в частности, говорит о том, что пространства $S(X_0, X_1, A, B, \mathbf{1}, p_0, p_1)$ не зависят на самом деле от выбора спектрального разложения функции $\varphi(s, t)$, т. е. последовательностей A и B . Поэтому теперь мы можем вместо $S(X_0, X_1, A, B, \mathbf{1}, p_0, p_1)$ использовать обозначение $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$, если φ невырождена.

Конструкция $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ может быть определена не только для невырожденных интерполяционных функций.

Пусть теперь $\varphi \in \Phi_0$ и φ вырождена. Если обе $\varphi(1, t)$ и $\varphi(t, 1)$ ограничены, то $\varphi(t, s) \asymp \min(s, t)$ и, очевидно,

$$S(X_0, X_1, A, B, \mathbf{1}, p_0, p_1) = X_0 \cap X_1. \quad (3.24)$$

Пусть теперь $\varphi(1, t)$ ограничена, а $\varphi(t, 1)$ нет. В этом случае множество J индексов спектральной последовательности функции φ ограничено сверху и имеет место равенство

$$S(X_0, X_1, A, B, \mathbf{1}, p_0, p_1) = (X_0, X_1)_{\varphi, p_0, p_1}^K \cap X_0, \quad (3.25)$$

где через $(X_0, X_1)_{\varphi, p_0, p_1}^K$ обозначено пространство тех $x \in X_0 + X_1$, для которых

$$\mathbf{1} \in \varphi\left(l_{p_0}\left(\frac{1}{u}\right), l_{p_1}\left(\frac{1}{v}\right)\right),$$

где u и v – последовательности из спектрального разложения интерполяционной функции $K(s, t, x, \{X_0, X_1\})$.

Таким образом, мы можем получить описание функтора $S(X_0, X_1, A, B, \mathbf{1}, p_0, p_1)$, не зависящее от выбора спектральной последовательности для любых функций из $\varphi \in \Phi_0$. (Подробности см. в [23].) Это делает корректным следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Если интерполяционная функция φ принадлежит Φ_0 , то по определению

$$\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1} = S(X_0, X_1, A, B, \mathbf{1}, p_0, p_1),$$

где A_j и B_j – последовательности из любого спектрального разложения функции φ .

Нам в дальнейшем понадобится этот функтор для всех $\varphi \in \Phi$.

Напомним, что любая интерполяционная функция $\varphi(s, t)$ может быть представлена в виде

$$\varphi(s, t) = \alpha s + \beta t + \varphi_0(s, t),$$

где $\varphi_0 \in \Phi_0$. Если α или β больше 0, то $\varphi \notin \Phi_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Если φ – произвольная интерполяционная функция, то обозначим через $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ пространство

$$\alpha X_0 + \beta X_1 + \varphi_0(X_0, X_1)_{p_0, p_1},$$

где αX обозначает пространство X с нормой $\|x\|_{\alpha X} = \alpha \|x\|_X$, если $\alpha > 0$, и $\alpha X = 0$, если $\alpha = 0$.

Заметим, что если оба α и β больше нуля, то

$$\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1} = X_0 + X_1$$

для любых p_0 и p_1 .

Условие (3.21) не типично для теории интерполяции. Оно в некотором смысле нелинейно. Его удаётся модифицировать.

ЛЕММА 3.3. Пусть интерполяционная функция ψ принадлежит Φ_0 , и пусть u, v – последовательности из ее спектрального разложения, т. е.

$$\psi(s, t) \asymp \max_{j \in J} \min\left(\frac{s}{u_j}, \frac{t}{v_j}\right) \asymp \sum_{j \in J} \min\left(\frac{s}{u_j}, \frac{t}{v_j}\right).$$

Пусть $0 < p_0, p_1 \leq \infty$. Тогда условие $\mathbf{1} \in \varphi(l_{p_0}(1/u), l_{p_1}(1/v))$ эквивалентно тому, что существуют последовательности $\beta^0 \in l_{p_0}$ и $\beta^1 \in l_{p_1}$ такие, что

$$K\left(s, t, \mathbf{1}, \left\{l_1\left(\frac{1}{u\beta^0}\right), l_1\left(\frac{1}{v\beta^1}\right)\right\}\right) \leq C\varphi(s, t) \quad (3.26)$$

для некоторого $C > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{1} \in \varphi(l_{p_0}(1/u), l_{p_1}(1/v))$, тогда по определению $1 = \varphi(\alpha_j^0 u_j, \alpha_j^1 v_j)$, где $\{\alpha_j^0\} \in l_{p_0}$, $\{\alpha_j^1\} \in l_{p_1}$.

Продолжим нулем последовательности α^0 и α^1 с интервала J на $\mathbb{Z}$. Рассмотрим свертку $\alpha^0 \varepsilon^0$, где $\varepsilon_j^0 = (1 - \varepsilon)^j$ при $j \geq 0$ и $\varepsilon_j^0 = 0$ при $j < 0$. Обозначим $\beta^0 = \varepsilon^0 * \alpha^0$. Аналогично, $\beta^1 = \varepsilon^1 * \alpha^1$, где $\varepsilon_j^1 = (1 - \varepsilon)^j$ при $0 \geq j$ и $\varepsilon_j^1 = 0$ при $j > 0$. Выберем $\varepsilon > 0$ достаточно малым. Тогда $\beta^0 \in l_{p_0}$, $\beta^1 \in l_{p_1}$, $\beta^0 \geq \alpha^0$, $\beta^1 \geq \alpha^1$ и

$$\beta_j^0(1 - \varepsilon) \leq \beta_{j+1}^0, \quad \beta_j^1(1 - \varepsilon) \leq \beta_{j-1}^1. \quad (3.27)$$

(Здесь существенно, что рассматривается свертка с убывающей геометрической прогрессией.)

Рассмотрим теперь K -функционал последовательности $\mathbf{1}$, который мы собираемся оценить. В силу (3.3)

$$K\left(s, t, \mathbf{1}, \left\{l_1\left(\frac{1}{u\beta^0}\right), l_1\left(\frac{1}{v\beta^1}\right)\right\}\right) = \sum_{j \in J} \min\left(\frac{s}{u_j \beta_j^0}, \frac{t}{v_j \beta_j^1}\right). \quad (3.28)$$

Из (3.27) следует, что (3.28) – это спектральное разложение, поскольку при достаточно малом ε

$$u_{j+1} \beta_{j+1}^0 \geq \tilde{q} u_j \beta_j^0, \quad v_{j-1} \beta_{j-1}^1 \geq \tilde{q} v_j \beta_j^1,$$

где $\tilde{q} > 1$. Значит,

$$K\left(s, t, \mathbf{1}, \left\{l_1\left(\frac{1}{u\beta^0}\right), l_1\left(\frac{1}{v\beta^1}\right)\right\}\right) \asymp \max_{j \in J} \min\left(\frac{s}{u_j \beta_j^0}, \frac{t}{v_j \beta_j^1}\right).$$

Тогда для некоторой константы C

$$K\left(u_k \beta_k^0, v_k \beta_k^1, \mathbf{1}, \left\{l_1\left(\frac{1}{u\beta^0}\right), l_1\left(\frac{1}{v\beta^1}\right)\right\}\right) \leq C\varphi(\alpha_k^0 u_k, \alpha_k^1 v_k) \leq C\varphi(\beta_k^1 u_k, \beta_k^1 v_k).$$

Поэтому на своей линии уровня функция $K(s, t, \mathbf{1}, \{l_1(1/(u\beta^0)), l_1(1/(v\beta^1))\})$ не превосходит интерполяционной функции $C\varphi(s, t)$, значит, всюду выполнено неравенство

$$K\left(s, t, \mathbf{1}, \left\{l_1\left(\frac{1}{u\beta^0}\right), l_1\left(\frac{1}{v\beta^1}\right)\right\}\right) \leq C\varphi(s, t).$$

Пусть теперь справедливо (3.26). Тогда ввиду (3.4)

$$\begin{aligned} 1 &\leq K\left(u\beta^0, v\beta^1, \mathbf{1}, \left\{l_\infty\left(\frac{1}{u\beta^0}\right), l_\infty\left(\frac{1}{v\beta^1}\right)\right\}\right) \\ &\leq K\left(u\beta^0, v\beta^1, \mathbf{1}, \left\{l_1\left(\frac{1}{u\beta^0}\right), l_1\left(\frac{1}{v\beta^1}\right)\right\}\right) \leq C\varphi(u\beta^0, v\beta^1), \end{aligned}$$

т. е. $\mathbf{1} \in \varphi(l_{p_0}(1/u), l_{p_1}(1/v))$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Для построенных в лемме 3.3 последовательностей β^0, β^1 будет выполняться неравенство

$$K\left(s, t, \mathbf{1}, \left\{l_{q_0}\left(\frac{1}{u\beta^0}\right), l_{q_1}\left(\frac{1}{v\beta^1}\right)\right\}\right) \leq C\varphi(s, t)$$

при любых $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$.

3.5. Связь с конструкцией Янсона $(X_0, X_1)_{\rho, p}$. В 1981 г. С. Янсон [11] предложил обобщение метода Лионса–Петре для функциональных параметров. Наше определение пространств $\varphi(X_0, X_1)_{\rho_0, p_1}$ – это развитие идей Янсона.

Пусть $\rho(t) = \varphi(1, t)$ – невырожденная квазивогнутая функция и $1 \leq p \leq \infty$. Напомним, что $\tilde{t}_j$ обозначает последовательность, построенную индукцией вверх и вниз по формуле (2.21). В данном случае $-\infty < j < \infty$.

По определению Янсона пространство $(X_0, X_1)_{\rho, p}$ состоит из $x \in X_0 + X_1$ таких, что

$$x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \rho(\tilde{t}_j) x_j \quad (\text{сходимость в } X_0 + X_1),$$

где $x_j \in X_0 \cap X_1$, и $\{\max(\|x_j\|_{X_0}, \tilde{t}_j \|x_j\|_{X_1})\} \in l_p$, т. е.

$$\begin{aligned} (X_0, X_1)_{\rho, p} &= S(X_0, X_1, \mathbf{1}, \{\tilde{t}_j\}, \{\rho(\tilde{t}_j)\}, p, p) \\ &= S\left(X_0, X_1, \left\{\frac{1}{\rho(\tilde{t}_j)}\right\}, \left\{\frac{\tilde{t}_j}{\rho(\tilde{t}_j)}\right\}, \mathbf{1}, p, p\right). \end{aligned}$$

Как отмечено в (2.22), последовательности $A_j = 1/\rho(\tilde{t}_j)$ и $B_j = \tilde{t}_j/\rho(\tilde{t}_j)$ определяют спектральное разложение для ρ или φ , поэтому

$$(X_0, X_1)_{\rho, p} = \varphi(X_0, X_1)_{p, p}, \quad (3.29)$$

где $\rho(t) = \varphi(1, t)$.

Очевидно, что

$$\varphi(X_0, X_1)_{1,1} = (X_0, X_1)_{\rho,1} \subset (X_0, X_1)_{\rho,p} \subset (X_0, X_1)_{\rho,\infty} = \varphi(X_0, X_1)_{\infty,\infty}.$$

Пространства $(X_0, X_1)_{\rho,1}$ еще называются обобщенными пространствами Лоренца. Экстремальные свойства этих пространств и другие определения можно найти в [14], [11], [4]. Отметим, например, что $X_0 \cap X_1$ плотно в $(X_0, X_1)_{\rho,1}$, т. е. $(X_0, X_1)_{\rho,1}^\circ = (X_0, X_1)_{\rho,1}$. Аналогично, $(X_0, X_1)_{\rho,p}^\circ = (X_0, X_1)_{\rho,p}$ при $p < \infty$.

Пространства $(X_0, X_1)_{\rho, p}$ описываются через K -функционал (см. [11]):

$$(X_0, X_1)_{\rho, p} = \left\{ x \in X_0 + X_1 : \left\{ \frac{K(1, \tilde{t}_j, x, \{X_0, X_1\})}{\rho(\tilde{t}_j)} \right\} \in l_p \right\}.$$

Отсюда или из леммы 3.2 легко вывести, что

$$(X_0, X_1)_{\rho, \infty} = \left\{ x \in X_0 + X_1 : \sup_{s, t} \frac{K(s, t, x, \{X_0, X_1\})}{\varphi(s, t)} < \infty \right\}. \quad (3.30)$$

Следовательно, если функция φ невырождена, то включение $x \in (X_0, X_1)_{\rho, \infty}$ влечет $K(s, t, x, \{X_0, X_1\}) \leq C\varphi(s, t)$, и $K(s, t, x, \{X_0, X_1\}) \in \Phi_0$. Поэтому $(X_0, X_1)_{\rho, \infty} \subset (X_0 + X_1)^\circ$.

Если пара $\{X_0, X_1\}$ регулярна, то сопряженные пространства образуют пару $\{X_0^*, X_1^*\}$, вложенную в пространство $(X_0 \cap X_1)^*$. Для пространств Янсона справедлива теорема двойственности

$$((X_0, X_1)_{\rho, p}^\circ)^* = (X_0^*, X_1^*)_{\rho^*, q},$$

где $\rho^*(t) = 1/\rho(1/t)$, $1/q + 1/p = 1$ (см. [11]). В частности,

$$(X_0, X_1)_{\rho, 1}^* = (X_0^*, X_1^*)_{\rho^*, \infty} \subset (X_0^* + X_1^*)^\circ. \quad (3.31)$$

3.6. Свойства интерполяционной конструкции $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$. В этом пункте будут рассматриваться относительно простые свойства конструкции $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$, такие как K -монотонность, теоремы двойственности и теоремы о реитерации. Интерполяционным свойствам и теоремам вложения посвящены пп. 3.7, 4.2, 5.2 и 6.3.

Как мы уже отмечали, благодаря (3.12) пространства $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ совпадают с пространствами метода средних, рассмотренного в [6], с параметрами $\Phi_0 = l_{p_0}(A)$ и $\Phi_1 = l_{p_1}(B)$. Поэтому для полных по Гальярдо пар $\{X_0, X_1\}$ конструкция $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ описывается K -методом (см. [6; с. 543 и с. 398]). Впрочем, пространство $S(X_0, X_1, \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1)$ для полных по Гальярдо пар $\{X_0, X_1\}$ всегда описывается K -методом. Напомним, это означает, что для функциональной банаховой решетки измеримых функций на положительной полуоси $E = S(L_\infty, L_\infty(1/t), \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1)$ имеем

$$S(X_0, X_1, \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1) = (X_0, X_1)_E^K,$$

где равенство пространств понимается как совпадение множеств, нормы оказываются эквивалентными. Следует отметить, что первые общие результаты о том, что пространства метода средних в общем случае описываются K -методом, принадлежат В. И. Дмитриеву [24].

Это свойство пространств $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ еще называется K -монотонностью на категории полных по Гальярдо пар. Мы здесь предполагали, что $\varphi \in \Phi_0$. Если же предполагать, что интерполяционная функция φ невырождена, то конструкция $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ будет K -монотонной для произвольных банаховых пар, поскольку в этом случае

$$\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1} = \varphi(\tilde{X}_0, \tilde{X}_1)_{p_0, p_1} = (\tilde{X}_0, \tilde{X}_1)_E^K = (X_0, X_1)_E^K,$$

где $\tilde{X}_i$ – пополнение по Гальярдо пространства X_i в паре $\{X_0, X_1\}$. (Подробнее см. в [6] и [25].)

Отмеченное свойство оказывается очень полезным при получении разных соотношений для конструкции $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ ввиду следующей леммы.

ЛЕММА 3.4. *Если две K -монотонные интерполяционные конструкции $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$ совпадают на семействе банаховых пар таких, что для любой $\varphi \in \Phi_0$ найдутся банахова пара $\{A_0, A_1\}$ из данного семейства и $a \in A_0 + A_1$, для которых $K(s, t, a, \{A_0, A_1\}) \asymp \varphi(s, t)$, и для всех банаховых пар имеют место вложения $\mathcal{F}_0(X_0, X_1) \subset (X_0 + X_1)^\circ$ и $\mathcal{F}_1(X_0, X_1) \subset (X_0 + X_1)^\circ$, то интерполяционные конструкции $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$ совпадают и на любой банаховой паре. В частности, если интерполяционные конструкции $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$ совпадают на некоторой паре с полным спектром, то они совпадают и на любой паре такой, что $\mathcal{F}_0(X_0, X_1) \subset (X_0 + X_1)^\circ$ и $\mathcal{F}_1(X_0, X_1) \subset (X_0 + X_1)^\circ$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай семейства, состоящего из одной пары с полным спектром. Общий случай рассматривается аналогично. Пусть $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$ – K -монотонные интерполяционные конструкции, т. е. $x \in \mathcal{F}_i(X_0, X_1) = (X_0, X_1)_{E_i}^K$, если $K(1, t, x, \{X_0, X_1\}) \in E_i$, где $i = 0, 1$, и пусть для пары $\{Y_0, Y_1\}$ с полным спектром $\mathcal{F}_0(Y_0, Y_1) = \mathcal{F}_1(Y_0, Y_1)$ с эквивалентными нормами. Поскольку пара $\{Y_0, Y_1\}$ имеет полный спектр, то для каждого $x \in \mathcal{F}_0(X_0, X_1)$ найдется $y \in Y_0 + Y_1$ такой, что $K(s, t, x, \{X_0, X_1\}) \asymp K(s, t, y, \{Y_0, Y_1\})$. Следовательно, $y \in (Y_0, Y_1)_{E_0}^K = \mathcal{F}_0(Y_0, Y_1) = \mathcal{F}_1(Y_0, Y_1) = (Y_0, Y_1)_{E_1}^K$. Поэтому $K(s, t, x, \{X_0, X_1\}) \asymp K(s, t, y, \{Y_0, Y_1\}) \in E_1$, т. е. $x \in \mathcal{F}_1(X_0, X_1)$. Значит, $\mathcal{F}_0(X_0, X_1) \subset \mathcal{F}_1(X_0, X_1)$. Аналогично, $\mathcal{F}_1(X_0, X_1) \subset \mathcal{F}_0(X_0, X_1)$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.1 (теорема о сокращении параметров). *Пусть α, β и γ – произвольные двусторонние последовательности такие, что $\gamma \in l_{q_0}(1/\alpha) + l_{q_1}(1/\beta)$, где $1/q_0 + 1/p_0 = 1$ и $1/q_1 + 1/p_1 = 1$. Тогда γ – промежуточная последовательность между α и β и если*

$$\psi(s, t) = K\left(s, t, \gamma, \left\{l_{q_0}\left(\frac{1}{\alpha}\right), l_{q_1}\left(\frac{1}{\beta}\right)\right\}\right) \in \Phi_0,$$

то

$$S(X_0, X_1, \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1) = \psi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$$

для любой полной по Гальярдо пары $\{X_0, X_1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства равенства двух интерполяционных конструкций воспользуемся леммой 3.4. Нетрудно проверить, что мы находимся в условиях этой леммы. Поэтому достаточно проверить совпадение конструкций на каждой паре вида $\{l_{p_0}(1/u), l_{p_1}(1/v)\}$, где весовые последовательности u и v взяты из спектрального разложения произвольной интерполяционной функции $\varphi \in \Phi_0$. Тогда, как уже отмечалось,

$$\varphi(s, t) \asymp K\left(s, t, \mathbf{1}, \left\{l_{p_0}\left(\frac{1}{u}\right), l_{p_1}\left(\frac{1}{v}\right)\right\}\right).$$

Пусть $x \in \psi(l_{p_0}(1/u), l_{p_1}(1/v))_{p_0, p_1} = \psi(l_{p_0}(1/u), l_{p_1}(1/v))$. Тогда найдутся $a \in l_{p_0}(1/u)$ и $b \in l_{p_1}(1/v)$ такие, что $|x| = \varphi(|a|, |b|)$. Без ограничения общности можно считать, что последовательность x нигде не обращается в нуль. Рассмотрим пару $\{l_\infty(1/|a|), l_\infty(1/|b|)\}$. Легко видеть, что эта пара вложена в пару $\{l_{p_0}(1/u), l_{p_1}(1/v)\}$ и что

$$\begin{aligned} K\left(s, t, |x|, \left\{l_\infty\left(\frac{1}{|a|}\right), l_\infty\left(\frac{1}{|b|}\right)\right\}\right) &= K\left(s, t, \psi(|a|, |b|), \left\{l_\infty\left(\frac{1}{|a|}\right), l_\infty\left(\frac{1}{|b|}\right)\right\}\right) \\ &\leq 2\psi(s, t) = 2K\left(s, t, \gamma, \left\{l_{q_0}\left(\frac{1}{\alpha}\right), l_{q_1}\left(\frac{1}{\beta}\right)\right\}\right). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Пусть f_m — линейный функционал на пространстве $l_{q_0}(1/\alpha) + l_{q_1}(1/\beta)$ с нормой $K(a_m, b_m, \chi, \{l_{q_0}(1/\alpha), l_{q_1}(1/\beta)\})$, полученный продолжением по теореме Хана–Банаха функционала $f_m(\gamma) = x_m$.

Из (3.32) следует, что $|x_m| \leq 2K(a_m, b_m, \gamma, \{l_{q_0}(1/\alpha), l_{q_1}(1/\beta)\})$, поскольку $|x_m| \leq K(a_k, b_k, |x|, \{l_\infty(1/|a|), l_\infty(1/|b|)\})$, т.е. нормы этих функционалов не превосходят 2. Следовательно,

$$\max\left(\frac{\|f_m\|_{l_{q_0}(1/\alpha)^*}}{|a_m|}, \frac{\|f_m\|_{l_{q_1}(1/\beta)^*}}{|b_m|}\right) \leq 2.$$

В случае, если одно из q_0, q_1 равно ∞ , мы можем, в силу $\varphi \in \Phi_0$, в паре $\{l_{q_0}(1/\alpha), l_{q_1}(1/\beta)\}$ заменить соответствующее пространство l_∞ на c_0 . Случай, когда оба q_0, q_1 равны ∞ , соответствует $p_0 = p_1 = 1$ и легко может быть рассмотрен отдельно с самого начала.

Обозначим через f_{mk} последовательность, задающую функционал f_m . Тогда при всех m выполнено неравенство

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha_k |f_{mk}|)^{p_0} \leq 2^{p_0} |a_m|^{p_0}$$

(с соответствующими изменениями при $p_0 = \infty$).

Аналогично,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\beta_k |f_{mk}|)^{p_1} \leq 2^{p_1} |b_m|^{p_1}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_m \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\alpha_k \left|\frac{f_{mk}}{u_m}\right|\right)^{p_0} &\leq 2^{p_0} \sum_m \left|\frac{a_m}{u_m}\right|^{p_0} = 2^{p_0} \|a\|_{l_{p_0}(1/u)}^{p_0}, \\ \sum_m \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\beta_k \left|\frac{f_{mk}}{v_m}\right|\right)^{p_1} &\leq 2^{p_1} \sum_m \left|\frac{b_m}{v_m}\right|^{p_1} = 2^{p_1} \|b\|_{l_{p_1}(1/v)}^{p_1}. \end{aligned}$$

Если обозначить через g_k последовательность столбцов матрицы f_{mk} , то, поменяв порядок суммирования, получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha_k \|g_k\|_{l_{p_0}(1/u)})^{p_0} \leq 2^{p_0} \|a\|_{l_{p_0}(1/u)}^{p_0}, \quad (3.33)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\beta_k \|g_k\|_{l_{p_1}(1/v)})^{p_1} \leq 2^{p_1} \|b\|_{l_{p_1}(1/v)}^{p_1}. \quad (3.34)$$

При этом $f_m(\gamma) = x_m$, т. е.

$$x_m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k f_{mk}, \quad \text{или} \quad x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k g_k,$$

где сходимость можно понимать и по норме в $l_{p_0}(1/u) + l_{p_1}(1/v)$ в силу (3.33), (3.34). Следовательно, $x \in S(l_{p_0}(1/u), l_{p_1}(1/v), \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1)$. Таким образом,

$$\psi\left(l_{p_0}\left(\frac{1}{u}\right), l_{p_1}\left(\frac{1}{v}\right)\right) \subset S\left(l_{p_0}\left(\frac{1}{u}\right), l_{p_1}\left(\frac{1}{v}\right), \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1\right).$$

Пусть теперь $x \in S(l_{p_0}(1/u), l_{p_1}(1/v), \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1)$. Тогда

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k x_k,$$

где $\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha_k \|x_k\|_{l_{p_0}(1/u)})^{p_0} < \infty$ и $\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\beta_k \|x_k\|_{l_{p_1}(1/v)})^{p_1} < \infty$.

Рассмотрим пару $\{l_{q_0}(1/\alpha), l_{q_1}(1/\beta)\}$ и оператор

$$T: \left\{l_{q_0}\left(\frac{1}{\alpha}\right), l_{q_1}\left(\frac{1}{\beta}\right)\right\} \rightarrow \left\{l_{p_0}\left(\frac{1}{u}\right), l_{p_1}\left(\frac{1}{v}\right)\right\},$$

который переводит последовательность ξ_k в $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k x_k$.

Поскольку $\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha_k \|x_k\|_{l_{p_0}(1/u)})^{p_0} < \infty$, получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_m \left| \frac{\alpha_k x_{mk}}{u_m} \right|^{p_0} = \sum_m \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\alpha_k x_{mk}}{u_m} \right|^{p_0} < \infty.$$

Положим $a_m = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k x_{mk}|^{p_0} \right)^{1/p_0}$, тогда $a \in l_{p_0}(1/u)$ и если $\xi \in l_{q_0}(1/\alpha)$,

то

$$|T(\xi)_m| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\xi_k| |x_{mk}| \leq \|\xi\|_{l_{q_0}(1/\alpha)} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k x_{mk}|^{p_0} \right)^{1/p_0} \leq \|\xi\|_{l_{q_0}(1/\alpha)} a_m.$$

Значит, оператор T действует из $l_{q_0}(1/\alpha)$ в $l_{\infty}(1/a)$ с нормой, не превосходящей единицы.

Аналогично, оператор T действует из $l_{q_1}(1/\beta)$ в $l_{\infty}(1/b)$, где

$$b_m = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\beta_k x_{mk}|^{p_1} \right)^{1/p_1},$$

и $b \in l_{p_1}(1/v)$.

Таким образом, $T: \{l_{q_0}(1/\alpha), l_{q_1}(1/\beta)\} \rightarrow \{l_\infty(1/a), l_\infty(1/b)\}$ и $x = T(\gamma)$. Поэтому

$$\begin{aligned} |x_m| &\leq K \left(a_m, b_m, x, \left\{ l_\infty \left(\frac{1}{a} \right), l_\infty \left(\frac{1}{b} \right) \right\} \right) \\ &\leq K \left(a_m, b_m, \gamma, \left\{ l_{p_0} \left(\frac{1}{u} \right), l_{p_1} \left(\frac{1}{v} \right) \right\} \right) = \psi(a_m, b_m), \end{aligned}$$

или $|x| \leq \psi(a, b)$. Значит, $x \in \psi(l_{p_0}(1/u), l_{p_1}(1/v))$. Следовательно,

$$S \left(\left\{ l_{p_0} \left(\frac{1}{u} \right), l_{p_1} \left(\frac{1}{v} \right) \right\}, \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1 \right) \subset \psi \left(l_{p_0} \left(\frac{1}{u} \right), l_{p_1} \left(\frac{1}{v} \right) \right).$$

Таким образом, равенство интерполяционных функторов проверено на конкретной паре $\{l_{p_0}(1/u), l_{p_1}(1/v)\}$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.2 (теорема двойственности). Пусть $\{X_0, X_1\}$ – регулярная пара, а φ – невырожденная интерполяционная функция. Тогда для любых $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$

$$(\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}^\circ)^* = \varphi^*(X_0^*, X_1^*)_{q_0, q_1}, \quad (3.35)$$

где $p_i q_i = p_i + q_i$ при $i = 0, 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем рассматривать (3.35) как равенство двух функторов. Как известно, любая пара, сопряженная к регулярной, является полной по Гальярдо. Конструкция $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}^\circ$ строится J -методом, поскольку сама конструкция $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ такова (см. [6; с. 409]). Поэтому конструкция $(\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}^\circ)^*$ будет K -монотонной на категории двойственных пар (см. [6; с. 423]). Кроме того, $(\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}^\circ)^* \subset (X_0^* + X_1^*)^\circ$.

Далее, $\varphi^*(X_0^*, X_1^*)_{q_0, q_1}$ является K -монотонной всюду, и $\varphi^*(X_0^*, X_1^*)_{q_0, q_1} \subset (X_0^* + X_1^*)^\circ$.

Таким образом, для завершения доказательства, ввиду леммы 3.4, достаточно проверить равенство (3.35) на некоторой паре с полным спектром. Естественно выбрать пару $\{l_{q_0}, l_{q_1}(2^{-n})\}$, двойственную к $\{l_{p_0}, l_{p_1}(2^n)\}$. Чтобы не загромождать обозначения, в случае, когда p_0 или p_1 равно ∞ , соответствующее l_∞ будем считать равным c_0 . Благодаря этому пара $\{l_{q_0}, l_{q_1}(2^{-n})\}$ будет парой, сопряженной к $\{l_{p_0}, l_{p_1}(2^n)\}$. С учетом данного соглашения и леммы 3.1 получим $\varphi(l_{p_0}, l_{p_1}(2^n))_{p_0, p_1} = \varphi(l_{p_0}, l_{p_1}(2^n))^\circ$. (По лемме 3.1, $\varphi(l_{p_0}, l_{p_1}(2^n))_{p_0, p_1} = \varphi(l_{p_0}, l_{p_1}(2^n))$ без каких-либо замен. Отсюда очевидно следует $\varphi(c_0 \cdot l_{p_0}, c_0 \cdot l_{p_1}(2^n))_{p_0, p_1} = c_0 \cdot \varphi(l_{p_0}, l_{p_1}(2^n)) = \varphi(l_{p_0}, l_{p_1}(2^n))^\circ$.) Поэтому из результатов Лозановского о двойственности [26] вытекает равенство

$$(\varphi(l_{p_0}, l_{p_1}(2^n))^\circ)^* = \varphi^*(l_{q_0}, l_{q_1}(2^{-n})).$$

(Можно также воспользоваться описанием двойственности для пространств Орлича.)

Таким образом, равенство (3.35) справедливо для пары $\{l_{p_0}, l_{p_1}(2^n)\}$. Теорема доказана ввиду полноты спектра пары $\{l_{q_0}, l_{q_1}(2^{-n})\}$ (см. замечание после определения 3.3 пары с полным спектром).

ТЕОРЕМА 3.3 (теорема о реитерации). Пусть $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$. Тогда для любой невырожденной функции ψ , степенных функций $\varphi_0(s, t) = s^{1-\theta_0}t^{\theta_0}$ и $\varphi_1(s, t) = s^{1-\theta_1}t^{\theta_1}$ и любых $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$ верно равенство

$$\psi(\varphi_0(X_0, X_1)_{p_0, p_1}, \varphi_1(X_0, X_1)_{p_0, p_1})_{p_{\theta_0}, p_{\theta_1}} = \varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}, \quad (3.36)$$

где $\varphi(s, t) = \psi(\varphi_0(s, t), \varphi_1(s, t))$ и $1/p_{\theta_i} = (1 - \theta_i)/p_0 + \theta_i/p_1$ для $i = 0, 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение доказывается подобно теореме двойственности. Интерполяционные конструкции в равенстве (3.36) обе оказываются K -монотонными. Для проверки надо использовать теорему о реитерации для пространств K -метода из [6] (теорема 3.3.11) и K -монотонность $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ для невырожденных φ (подробности см. в [25]). Таким образом, ввиду леммы 3.4 для завершения доказательства достаточно проверить это равенство на любой паре $\{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$, т. е.

$$\begin{aligned} & \psi(\varphi_0(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{p_0, p_1}, \varphi_1(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{p_0, p_1})_{p_{\theta_0}, p_{\theta_1}} \\ &= \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{p_0, p_1}. \end{aligned}$$

По лемме 3.1

$$\varphi_0(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{p_0, p_1} = \varphi_0(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)) = L_{p_{\theta_0}}(U_0^{1-\theta_0}U_1^{\theta_0})$$

для функции φ_0 . Аналогично, $\varphi_1(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{p_0, p_1} = L_{p_{\theta_1}}(U_0^{1-\theta_1}U_1^{\theta_1})$. Тогда

$$\begin{aligned} & \psi(\varphi_0(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{p_0, p_1}, \varphi_1(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{p_0, p_1})_{p_{\theta_0}, p_{\theta_1}} \\ &= \psi(L_{p_{\theta_0}}(U_0^{1-\theta_0}U_1^{\theta_0}), L_{p_{\theta_1}}(U_0^{1-\theta_1}U_1^{\theta_1}))_{p_{\theta_0}, p_{\theta_1}} \\ &= \psi(L_{p_{\theta_0}}(U_0^{1-\theta_0}U_1^{\theta_0}), L_{p_{\theta_1}}(U_0^{1-\theta_1}U_1^{\theta_1})) \\ &= \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)) \end{aligned}$$

по лемме 3.1 и определению конструкции Кальдерона–Лозановского.

С другой стороны,

$$\varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{p_0, p_1} = \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)).$$

Теорема доказана, поскольку при любых $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$ среди произвольных пар вида $\{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$ на пространствах с σ -конечной мерой легко найти пары с полным спектром (см. замечание после определения 3.3 пары с полным спектром).

3.7. Обобщенный метод средних для квазибанаховых решеток. Результаты об альтернативном описании обобщенного метода средних с помощью леммы 3.2 для банаховых пар позволяют перенести это определение и на случай квазибанаховых пар.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Пусть $\varphi \in \Phi_0$ и $0 < p_0, p_1 \leq \infty$. Обозначим через $\Psi(\varphi, p_0, p_1)$ множество интерполяционных функций ψ , удовлетворяющих условию $\mathbf{1} \in \varphi(l_{p_0}(1/u), l_{p_1}(1/v))$, где u, v – последовательности из какого-либо спектрального разложения ψ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.7. Пусть φ – невырожденная интерполяционная функция и $0 < p_0, p_1 \leq \infty$, а $\{X_0, X_1\}$ – пара квазибанаховых решеток. Тогда по определению $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ состоит из $x \in X_0 + X_1$ таких, что интерполяционная функция $K(s, t, x, \{X_0, X_1\})$ принадлежит $\Psi(\varphi, p_0, p_1)$.

Определим $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ в случае вырожденных интерполяционных функций из Φ_0 на основе формул (3.24) и (3.25) с учетом определения 3.4.

В силу леммы 3.2 это определение согласуется с определением $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ для банаховых пар при $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$.

К сожалению, простейшие свойства, такие как интерполяционность или даже линейность пространства $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$, из определения прямо не следуют. Тем не менее с помощью данного определения пространств средних описываются интерполяционные орбиты относительно идеалов Неймана–Шаттена в разделе 4. Благодаря этому там же удается проверить и линейность пространства $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ и его интерполяционность.

Основным инструментом при рассмотрении квазибанаховых пространств, как обычно, является степенное преобразование (см., например, [3; гл. 5]).

Пусть E – квазибанахова функциональная решетка, $\alpha > 0$. Обозначим через E^α квазибанахову решетку, состоящую из измеримых функций x таких, что $|x|^{1/\alpha} \in E$, с естественной квазинормой $\|x\|_{E^\alpha} = \||x|^{1/\alpha}\|_E^\alpha$.

В частности, $(L_p)^\alpha = L_{p/\alpha}$, а для весового пространства имеет место равенство $L_p(U)^\alpha = L_{p/\alpha}(U^\alpha)$. Нетрудно проверить, что для любой интерполяционной функции φ и квазибанаховых решеток E_0, E_1

$$\varphi(E_0, E_1)^\alpha = \varphi^{\{\alpha\}}(E_0^\alpha, E_1^\alpha),$$

где через $\varphi^{\{\alpha\}}(s, t)$ обозначено $\varphi^\alpha(s^{1/\alpha}, t^{1/\alpha})$.

ЛЕММА 3.5 [27]. Пусть $\{E_0, E_1\}$ – пара функциональных квазибанаховых решеток, тогда для любого $x \in E_0 + E_1$, $x \geq 0$,

$$K(s, t, x, \{E_0, E_1\})^\alpha \asymp K(s^\alpha, t^\alpha, x^\alpha, \{E_0^\alpha, E_1^\alpha\}),^1$$

или

$$K(s, t, x^\alpha, \{E_0^\alpha, E_1^\alpha\}) \asymp K^{\{\alpha\}}(s, t, x, \{E_0, E_1\}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что для функциональных квазибанаховых решеток

$$\begin{aligned} K(s, t, x, \{E_0, E_1\}) &\asymp \inf_A (s \|x \chi_A\|_{E_0} + t \|x(1 - \chi_A)\|_{E_1}) \\ &\asymp \inf_A \max(s \|x \chi_A\|_{E_0}, t \|x(1 - \chi_A)\|_{E_1}), \end{aligned}$$

где инфимум берется по всем измеримым множествам A области определения функций из банаховых решеток, а χ_A – характеристическая функция множества A .

¹В частных случаях это утверждение известно сравнительно давно. См., например, [28].

Поэтому

$$\begin{aligned} K(s^\alpha, t^\alpha, x^\alpha, \{E_0^\alpha, E_1^\alpha\}) &\asymp \inf_A \max(s^\alpha \|x^\alpha \chi_A\|_{E_0^\alpha}, t^\alpha \|x^\alpha (1 - \chi_A)\|_{E_1^\alpha}) \\ &\asymp \left(\inf_A \max(s \|x \chi_A\|_{E_0}, t \|x (1 - \chi_A)\|_{E_1}) \right)^\alpha \\ &\asymp K(s, t, x, \{E_0, E_1\})^\alpha. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3.6. *Для любой интерполяционной функции $\varphi \in \Phi_0$ и любых $0 < s_0, s_1 \leq \infty$*

$$(\varphi(E_0, E_1)_{s_0, s_1})^\alpha = \varphi^{\{\alpha\}}(E_0^\alpha, E_1^\alpha)_{s_0/\alpha, s_1/\alpha}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y \in (\varphi(E_0, E_1)_{s_0, s_1})^\alpha$, тогда $|y| = x^\alpha$, где $x \in \varphi(E_0, E_1)_{s_0, s_1}$. Обозначим, как и прежде, через u_j, v_j последовательности из спектрального разложения функции $\psi(s, t) = K(s, t, x, \{E_0, E_1\})$. Тогда по определению $1 \in \varphi(l_{s_0}(1/u), l_{s_1}(1/v))$. Следовательно,

$$1 \in \varphi\left(l_{s_0}\left(\frac{1}{u}\right), l_{s_1}\left(\frac{1}{v}\right)\right)^\alpha = \varphi^{\{\alpha\}}\left(l_{s_0/\alpha}\left(\frac{1}{u^\alpha}\right), l_{s_1/\alpha}\left(\frac{1}{v^\alpha}\right)\right). \quad (3.37)$$

По определению спектрального разложения функции $\psi(s, t)$

$$\psi(s, t) \asymp \max \min\left(\frac{s}{u_j}, \frac{t}{v_j}\right),$$

поэтому

$$\psi^{\{\alpha\}}(s, t) \asymp \max \min\left(\frac{s}{u_j^\alpha}, \frac{t}{v_j^\alpha}\right),$$

т. е. последовательности u^α, v^α определяют спектральное разложение функции

$$\psi^{\{\alpha\}}(s, t) = K^{\{\alpha\}}(s, t, x, \{E_0, E_1\}) \asymp K(s, t, x^\alpha, \{E_0^\alpha, E_1^\alpha\}),$$

ввиду леммы 3.5. Поэтому (3.37) означает, что $y = x^\alpha \in \varphi(E_0^\alpha, E_1^\alpha)_{s_0/\alpha, s_1/\alpha}$. Лемма доказана.

Из этих результатов прямо вытекает следующая теорема, обобщающая лемму 3.1.

ТЕОРЕМА 3.4. *Для любых $0 < p_0, p_1 \leq \infty$, любых весовых функций U_0 и U_1 и любой $\varphi \in \Phi$*

$$\varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{p_0, p_1} = \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.1 равенство уже доказано для $p_0, p_1 \geq 1$. Применяя к нему степенное преобразование с показателем α , получим ввиду леммы 3.6

$$\varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{p_0, p_1}^\alpha = \varphi^{\{\alpha\}}(L_{p_0/\alpha}(U_0^\alpha), L_{p_1/\alpha}(U_1^\alpha))_{p_0/\alpha, p_1/\alpha}.$$

С другой стороны,

$$\varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))^\alpha = \varphi^{\{\alpha\}}(L_{p_0/\alpha}(U_0^\alpha), L_{p_1/\alpha}(U_1^\alpha)).$$

Подобрав α и p_0, p_1 так, чтобы p_0/α и p_1/α давали любую наперед заданную пару положительных чисел, получаем нужное равенство, поскольку преобразование $\varphi \mapsto \varphi^{\{\alpha\}}$ биективно на Φ_0 при любом $\alpha > 0$, а отображение $U \mapsto U^\alpha$ биективно на множестве положительных измеримых функций. Теорема доказана.

4. Интерполяционные орбиты операторных идеалов, действующих в гильбертовых парах

4.1. Орбиты элементов относительно идеалов Неймана–Шаттена.

Через $\{H_0, H_1\}$ будем обозначать пару гильбертовых пространств. Без ограничения общности будем предполагать, что оба гильбертовых пространства пары сепарабельны и что $H_0 \cap H_1$ плотно в H_0 и в H_1 . Пространства H_0 и H_1 , вообще говоря, могут и не иметь общего ортогонального базиса, но сколь угодно малое возмущение нормы одного них может превратить исходную гильбертову пару в изоморфную пару, в пространствах которой есть общий не более чем счетный ортогональный базис e_k . Следовательно, любая наша гильбертова пара изоморфна весовой паре пространств последовательностей $\{l_2(\alpha), l_2(\beta)\}$, где $\alpha_k = \|e_k\|_{H_0}$, $\beta_k = \|e_k\|_{H_1}$. Стандартный базис в весовом пространстве l_2 также будем обозначать e_k .

Пусть H и G – гильбертовы пространства, $0 < p < \infty$. Через $S_p(H \rightarrow G)$, как обычно, обозначается множество линейных операторов, действующих из H в G , таких, что

$$\mathrm{tr}(T^*T)^{p/2} < \infty,$$

где tr – след оператора в пространстве H , с нормой или квазинормой

$$\|T\|_{S_p(H \rightarrow G)} = (\mathrm{tr}(T^*T)^{p/2})^{1/p}.$$

Эти пространства обычно называют идеалами Неймана–Шаттена.

Обычно $S_\infty(H \rightarrow G)$ обозначает пространство всех вполне непрерывных операторов, действующих из H в G . Однако для нас более естественным будет через $S_\infty(H \rightarrow G)$ обозначать пространство всех ограниченных линейных операторов, действующих из H в G , с естественной нормой. Пространства $S_p(H \rightarrow G)$ оказываются нормированными при $p \geq 1$ или квазинормированными при $0 < p < 1$ идеалами. Это, в частности, означает, что

$$\|UTS\|_{S_p(\tilde{H} \rightarrow \tilde{G})} \leq \|U\|_{S_\infty(G \rightarrow \tilde{G})} \|T\|_{S_p(H \rightarrow G)} \|S\|_{S_\infty(\tilde{H} \rightarrow H)}$$

для любых $S \in S_\infty(\tilde{H} \rightarrow H)$, $T \in S_p(H \rightarrow G)$, $U \in S_\infty(G \rightarrow \tilde{G})$ и любых гильбертовых пространств $H, \tilde{H}, G$ и $\tilde{G}$.

Более того, справедлив аналог обобщенного неравенства Гёльдера

$$\|T'T''\|_{S_q(H \rightarrow G)} \leq \|T'\|_{S_p(\tilde{H} \rightarrow G)} \|T''\|_{S_r(H \rightarrow \tilde{H})},$$

где $0 < p, q, r \leq \infty$ таковы, что $1/q = 1/p + 1/r$.

Нас будут интересовать операторы T , действующие из гильбертовой пары $\{H_0, H_1\}$ в гильбертову пару $\{G_0, G_1\}$, такие, что $T \in S_{p_0}(H_0 \rightarrow G_0) \cap S_{p_1}(H_1 \rightarrow G_1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Интерполяционной орбитой элемента $a \in H_0 + H_1$ при действии операторов из идеала $S_{p_0}(H_0 \rightarrow G_0) \cap S_{p_1}(H_1 \rightarrow G_1)$ мы будем называть множество

$$\text{Orb}(a, S_{p_0}(H_0 \rightarrow G_0) \cap S_{p_1}(H_1 \rightarrow G_1)) \subset G_0 + G_1,$$

состоящее из элементов вида Ta , где $T \in S_{p_0}(H_0 \rightarrow G_0) \cap S_{p_1}(H_1 \rightarrow G_1)$.

Очевидно, что данная орбита является линейным пространством, на котором естественным образом вводится норма или квазинорма

$$\|x\|_{\text{Orb}} = \inf_{\substack{T \in S_{p_0}(H_0 \rightarrow G_0) \cap S_{p_1}(H_1 \rightarrow G_1) \\ x = Ta}} \max(\|T\|_{S_{p_0}(H_0 \rightarrow G_0)}, \|T\|_{S_{p_1}(H_1 \rightarrow G_1)}),$$

превращающая орбиту в полное пространство.

Оказалось, что обобщенные пространства средних тесно связаны с орбитами идеалов Неймана–Шаттена.

ТЕОРЕМА 4.1. Для любых $0 < p_0, p_1 \leq \infty$

$$\text{Orb}(a, S_{p_0}(H_0 \rightarrow G_0) \cap S_{p_1}(H_1 \rightarrow G_1)) = \varphi(G_0, G_1)_{p_0, p_1},$$

где $\varphi(s, t) = K(s, t, a, \{H_0, H_1\})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вложение

$$\varphi(G_0, G_1)_{p_0, p_1} \subset \text{Orb}(a, S_{p_0}(H_0 \rightarrow G_0) \cap S_{p_1}(H_1 \rightarrow G_1))$$

легко следует из леммы 3.3. В самом деле, пусть $b \in \varphi(H_0, H_1)_{p_0, p_1}$, тогда

$$K\left(s, t, 1, \left\{l_2\left(\frac{1}{\beta_0 u}\right), l_2\left(\frac{1}{\beta_1 v}\right)\right\}\right) \leq C \varphi(s, t), \quad (4.1)$$

где u, v – последовательности из спектрального разложения функции $\psi(s, t) = K(s, t, b, \{G_0, G_1\})$. Очевидно, что оператор вложения

$$\left\{l_2\left(\frac{1}{\beta_0 u}\right), l_2\left(\frac{1}{\beta_1 v}\right)\right\} \subset \left\{l_2\left(\frac{1}{u}\right), l_2\left(\frac{1}{v}\right)\right\}$$

принадлежит идеалу $S_{p_0}(l_2(1/(\beta_0 u)) \rightarrow l_2(1/u)) \cap S_{p_1}(l_2(1/(\beta_1 v)) \rightarrow l_2(1/v))$. Из неравенства (4.1) и теоремы Седаева [29] (частный случай теоремы Спарра

для гильбертовых пар) следует, что найдется линейный ограниченный оператор $F: \{H_0, H_1\} \rightarrow \{l_2(1/(\beta_0 u)), l_2(1/(\beta_1 v))\}$, переводящий a в $\mathbf{1}$. Вновь по теореме Седаева найдется линейный ограниченный оператор $\tilde{F}: \{l_2(1/u), l_2(1/v)\} \rightarrow \{G_0, G_1\}$, переводящий $\mathbf{1}$ в b . Тогда композиция F , упомянутого вложения и $\tilde{F}$ переводит a в b и принадлежит идеалу $S_{p_0}(H_0 \rightarrow G_0) \cap S_{p_1}(H_1 \rightarrow G_1)$.

Доказательство обратного вложения разбивается на этапы. Нам будет удобно предполагать, что пара $\{G_0, G_1\}$ имеет полный спектр.

Рассмотрим сначала случай $2 \leq p_0, p_1 \leq \infty$. Будем считать, что пара $\{H_0, H_1\}$ отождествлена с парой $\{l_2(\alpha), l_2(\beta)\}$. Пусть a отождествлено с последовательностью a_k , тогда

$$Ta = \sum_k a_k T(e_k) \quad (\text{сходимость в } G_0 + G_1).$$

Напомним, что если $T \in S_p(H \rightarrow G)$ при $2 \leq p \leq \infty$, то $\{\|T(e_k)\|_G\} \in l_p$ для любого ортонормированного базиса e_k в H (см., например, [30]). Поэтому для $T \in S_{p_0}(l_2(\alpha) \rightarrow G_0) \cap S_{p_1}(l_2(\beta) \rightarrow G_1)$

$$\|T(e_k)\|_{G_0} \in l_{p_0}\left(\frac{1}{\alpha}\right), \quad \|T(e_k)\|_{G_1} \in l_{p_1}\left(\frac{1}{\beta}\right).$$

Значит, $T(a) \in S(G_0, G_1, 1/\alpha, 1/\beta, |a|, p_0, p_1) = \varphi(G_0, G_1)_{p_0, p_1}$ по теореме 3.1, где $\varphi(s, t) \asymp K(s, t, |a|, \{l_2(\alpha), l_2(\beta)\}) \asymp K(s, t, a, \{H_0, H_1\})$. Таким образом, теорема доказана при $2 \leq p_0, p_1 \leq \infty$.

Обозначим для краткости $\text{Orb}(a, S_{p_0}(H_0 \rightarrow G_0) \cap S_{p_1}(H_1 \rightarrow G_1))$ через Orb . Предположим, что теорема доказана при $h \leq p_0, p_1 \leq \infty$. Докажем, что она верна при $h/2 \leq p_0, p_1 \leq \infty$. Ясно, что отсюда утверждение теоремы будет следовать по индукции.

Пусть $x \in \text{Orb}$, где $h/2 \leq p_0, p_1 \leq \infty$, т. е. $x = Ta$, где $T \in S_{p_0}(H_0 \rightarrow G_0) \cap S_{p_1}(H_1 \rightarrow G_1)$. Факторизуем T "пополам", т. е. представим T в виде произведения $T'T''$, где

$$T'' \in S_{2p_0}(H_0 \rightarrow F_0) \cap S_{2p_1}(H_1 \rightarrow F_1), \quad T' \in S_{2p_0}(F_0 \rightarrow G_0) \cap S_{2p_1}(F_1 \rightarrow G_1),$$

а $\{F_0, F_1\}$ – некоторая гильбертова пара. Такое представление возможно (см., например, [4; лемма 11.1.1]).

Поскольку $h \leq 2p_0, 2p_1 \leq \infty$, образ a при действии оператора T'' содержится в $\varphi(F_0, F_1)_{2p_0, 2p_1}$ в силу нашего предположения. Далее, $x \in \varphi_\xi(G_0, G_1)_{2p_0, 2p_1}$, где $\varphi_\xi(s, t) = K(s, t, \xi, \{F_0, F_1\})$, а $\xi = T''(a_\varphi)$, так как $x = T'(\xi)$. Следовательно,

$$x \in \bigcup_{\xi \in \varphi(F_0, F_1)_{2p_0, 2p_1}} \varphi_\xi(G_0, G_1)_{2p_0, 2p_1} \subset \bigcup_{\psi \in \Psi(\varphi, 2p_0, 2p_1)} \psi(G_0, G_1)_{2p_0, 2p_1} = Q.$$

Значит, $\text{Orb} \subset Q$. Покажем, что $Q \subset \varphi(G_0, G_1)_{p_0, p_1}$ при $p_0, p_1 \geq h/2$, что и завершит доказательство теоремы.

Вложение $Q \subset \varphi(G_0, G_1)_{p_0, p_1}$ по определению $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ следует из равенства

$$\bigcup_{\psi \in \Psi(\varphi, 2p_0, 2p_1)} \Psi(\psi, 2p_0, 2p_1) = \Psi(\varphi, p_0, p_1).$$

Причем нам известно, что равенство выполняется для всех $p_0, p_1 \geq h$ и всех $\varphi \in \Phi_0$, т. е.

$$\Psi(\varphi, \bar{p}_0, \bar{p}_1) = \bigcup_{\psi \in \Psi(\varphi, 2\bar{p}_0, 2\bar{p}_1)} \Psi(\psi, 2\bar{p}_0, 2\bar{p}_1), \quad (4.2)$$

если $h \leq \bar{p}_0, \bar{p}_1 \leq \infty$, ввиду полноты спектра пары $\{G_0, G_1\}$.

Рассмотрим степенное преобразование на множестве интерполяционных функций: $\varphi \mapsto \varphi^{\{\theta\}} = \varphi^\theta(s^{1/\theta}, t^{1/\theta})$, и применим его к равенству (4.2).

Тогда

$$(\Psi(\varphi, \bar{p}_0, \bar{p}_1))^{\{\theta\}} = \bigcup_{\psi \in \Psi(\varphi, 2\bar{p}_0, 2\bar{p}_1)} (\Psi(\psi, 2\bar{p}_0, 2\bar{p}_1))^{\{\theta\}}. \quad (4.3)$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что

$$(\Psi(\varphi, \bar{p}_0, \bar{p}_1))^{\{\theta\}} = \Psi\left(\varphi^{\{\theta\}}, \frac{\bar{p}_0}{\theta}, \frac{\bar{p}_1}{\theta}\right)$$

для любого положительного θ и любых $\bar{p}_0, \bar{p}_1 > 0$.

Для любых $p_0, p_1 \geq h/2$ выберем $\theta > 1$ так, чтобы выполнялись неравенства $\bar{p}_0 = p_0\theta \geq h$ и $\bar{p}_1 = p_1\theta \geq h$. Тогда из (4.3) следует равенство

$$\Psi(\varphi^{\{\theta\}}, p_0, p_1) = \bigcup_{\psi \in \Psi(\varphi, 2\bar{p}_0, 2\bar{p}_1)} \Psi\left(\psi^{\{\theta\}}, \frac{2\bar{p}_0}{\theta}, \frac{2\bar{p}_1}{\theta}\right).$$

Условие $\psi \in \Psi(\varphi, 2\bar{p}_0, 2\bar{p}_1)$, как мы уже замечали выше, эквивалентно условию $\psi^{\{\theta\}} \in \Psi(\varphi^{\{\theta\}}, 2\bar{p}_0/\theta, 2\bar{p}_1/\theta)$.

Значит,

$$\Psi(\varphi^{\{\theta\}}, p_0, p_1) = \bigcup_{\psi^{\{\theta\}} \in \Psi(\varphi^{\{\theta\}}, 2\bar{p}_0/\theta, 2\bar{p}_1/\theta)} \Psi\left(\psi^{\{\theta\}}, \frac{2\bar{p}_0}{\theta}, \frac{2\bar{p}_1}{\theta}\right).$$

И поскольку $2\bar{p}_0/\theta = 2p_0$ и $2\bar{p}_1/\theta = 2p_1$, получаем

$$\Psi(\varphi^{\{\theta\}}, p_0, p_1) = \bigcup_{\psi^{\{\theta\}} \in \Psi(\varphi^{\{\theta\}}, 2p_0, 2p_1)} \Psi(\psi^{\{\theta\}}, 2p_0, 2p_1).$$

Если изменить обозначения и учесть то, что преобразование $\varphi \mapsto \varphi^{\{\theta\}}$ взаимно однозначно на множестве Φ_0 интерполяционных функций, то последнее равенство можно переписать в виде

$$\Psi(\varphi, p_0, p_1) = \bigcup_{\psi \in \Psi(\varphi, 2p_0, 2p_1)} \Psi(\psi, 2p_0, 2p_1),$$

что и требовалось. Тем самым теорема 4.1 доказана.

4.2. Цепное правило для параметров метода средних. В данном пункте орбитальное описание метода средних в гильбертовых парах используется для доказательства нетривиальных свойств метода средних. В частности, здесь наконец проверена линейность пространства $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ в квазибанаховом случае, так же как и интерполяционность этого пространства.

ЛЕММА 4.1. *Множество $\Psi(\varphi, p_0, p_1)$ является монотонной решеткой для любой $\varphi \in \Phi_0$ и любых $0 < p_0, p_1 \leq \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам нужно проверить, что если две интерполяционные функции ψ_1 и ψ_2 таковы, что $\psi_1 \leq \psi_2$ и $\psi_2 \in \Psi(\varphi, p_0, p_1)$, то $\psi_1 \in \Psi(\varphi, p_0, p_1)$. И если $\psi_1, \psi_2 \in \Psi(\varphi, p_0, p_1)$, то $\max(\psi_1, \psi_2) \in \Psi(\varphi, p_0, p_1)$.

Начнем с монотонности. Рассмотрим любую гильбертову пару $\{H_0, H_1\}$ с полным спектром и выберем $a_1 \in H_0 + H_1$ так, чтобы $\psi_1(s, t) \asymp K(s, t, a_1, \{H_0, H_1\})$, и $a_2 \in H_0 + H_1$ так, чтобы $\psi_2(s, t) \asymp K(s, t, a_2, \{H_0, H_1\})$. По определению получим, что $a_2 \in \varphi(H_0, H_1)_{p_0, p_1}$. Тогда по теореме 4.1 имеет место равенство $a_2 = T(a)$, где $K(s, t, a, \{H_0, H_1\}) \asymp \varphi(s, t)$, а $T \in S_{p_0}(H_0 \rightarrow H_0) \cap S_{p_0}(H_0 \rightarrow H_0)$. Поскольку $K(s, t, a_1, \{H_0, H_1\}) \leq CK(s, t, a_2, \{H_0, H_1\})$, по теореме Седаева найдется линейный ограниченный оператор $U: \{H_0, H_1\} \rightarrow \{H_0, H_1\}$, переводящий a_2 в a_1 . Значит, $a_1 = UT(a)$, причем $UT \in S_{p_0}(H_0 \rightarrow H_0) \cap S_{p_0}(H_0 \rightarrow H_0)$. Вновь по теореме 4.1 получаем, что $a_1 \in \varphi(H_0, H_1)_{p_0, p_1}$. Значит, $\psi_1 \in \Psi(\varphi, p_0, p_1)$.

Пусть теперь $\psi_1, \psi_2 \in \Psi(\varphi, p_0, p_1)$, т. е. выбранные выше a_1 и a_2 принадлежат $\varphi(H_0, H_1)_{p_0, p_1}$. Рассмотрим упомянутую в начале раздела 4 пару $\{l_2(\alpha), l_2(\beta)\}$, изоморфную паре $\{H_0, H_1\}$. Для простоты будем отождествлять эти пары. Тогда модули элементов a_1 и a_2 тоже будут принадлежать $\varphi(H_0, H_1)_{p_0, p_1}$. Поскольку по теореме 4.1 множество $\varphi(H_0, H_1)_{p_0, p_1}$ является орбитой элемента a и, следовательно, векторным пространством, получим, что $|a_1| + |a_2| \in \varphi(H_0, H_1)_{p_0, p_1}$, или

$$\max(\psi_1(s, t), \psi_2(s, t)) \leq K(s, t, |a_1| + |a_2|, \{H_0, H_1\}) \in \Psi(\varphi, p_0, p_1),$$

т. е. $\max(\psi_1, \psi_2) \in \Psi(\varphi, p_0, p_1)$ в силу свойства монотонности. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Для любой $\varphi \in \Phi_0$ и любых $0 < p_0, p_1 \leq \infty$ множество $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ является квазибанаховым интерполяционным пространством для пары $\{X_0, X_1\}$ квазибанаховых пространств. Это пространство оказывается K -монотонным интерполяционным пространством для полных по Гальярдо квазибанаховых пар.*

Доказательство мы оставляем читателю, уточнив, каким образом можно ввести квазинорму на $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$.

По определению считаем, что

$$\|x\|_{\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}} = \inf \|1\|_{\varphi(l_{p_0}(1/u), l_{p_1}(1/v))},$$

где инфимум берется по всем последовательностям u и v из спектрального разложения функции $K(s, t, x, \{X_0, X_1\})$ таким, что

$$K(s, t, x, \{X_0, X_1\}) \leq K\left(s, t, 1, \left\{l_\infty\left(\frac{1}{u}\right), l_\infty\left(\frac{1}{v}\right)\right\}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 4.2 (цепное правило). Пусть $0 < p_0, p_1, q_0, q_1, r_0, r_1 \leq \infty$ и $1/q_0 = 1/p_0 + 1/r_0$, $1/q_1 = 1/p_1 + 1/r_1$, тогда

$$\Psi(\varphi, q_0, q_1) = \bigcup_{\psi \in \Psi(\varphi, r_0, r_1)} \Psi(\psi, p_0, p_1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вновь, пусть $\{H_0, H_1\}$ – гильбертова пара с полным спектром. Если

$$\chi \in \bigcup_{\psi \in \Psi(\varphi, r_0, r_1)} \Psi(\psi, p_0, p_1)$$

и $\chi(s, t) \asymp K(s, t, x, \{H_0, H_1\})$, а $\psi(s, t) \asymp K(s, t, b, \{H_0, H_1\})$, то

$$\begin{aligned} x &\in \bigcup_{\psi \in \Psi(\varphi, r_0, r_1)} \psi(H_0, H_1)_{p_0, p_1} = \bigcup_{\psi \in \Psi(\varphi, r_0, r_1)} \text{Orb}(b, S_{p_0}(H_0) \cap S_{p_1}(H_1)) \\ &= \bigcup_{b \in \varphi(H_0, H_1)_{r_0, r_1}} \text{Orb}(b, S_{p_0}(H_0) \cap S_{p_1}(H_1)) \\ &= \bigcup_{b \in \text{Orb}(a, S_{r_0}(H_0) \cap S_{r_1}(H_1))} \text{Orb}(b, S_{p_0}(H_0) \cap S_{p_1}(H_1)), \end{aligned}$$

где $\varphi(s, t) = K(s, t, a, \{H_0, H_1\})$.

Значит, $x = UT(a)$, где $T \in S_{r_0}(H_0) \cap S_{r_1}(H_1)$, $U \in S_{p_0}(H_0) \cap S_{p_1}(H_1)$. Поскольку для идеалов Неймана–Шаттена $S_q(H) = S_p(H) \cdot S_r(H)$ для любого гильбертова пространства H и $1/q = 1/p + 1/r$, получим

$$\begin{aligned} \bigcup_{b \in \text{Orb}(a, S_{r_0}(H_0) \cap S_{r_1}(H_1))} \text{Orb}(b, S_{p_0}(H_0) \cap S_{p_1}(H_1)) &\subset \text{Orb}(a, S_{q_0}(H_0) \cap S_{q_1}(H_1)) \\ &= \varphi(H_0, H_1)_{q_0, q_1}. \end{aligned}$$

Таким образом, $x \in \varphi(H_0, H_1)_{q_0, q_1}$, или $\chi \in \Psi(\varphi, q_0, q_1)$. Вложение

$$\bigcup_{\psi \in \Psi(\varphi, r_0, r_1)} \Psi(\psi, p_0, p_1) \subset \Psi(\varphi, q_0, q_1)$$

доказано.

Обратное вложение доказывается аналогично сведением к орбитам идеалов Неймана–Шаттена в гильбертовых парах. Но здесь требуется обращение теоремы о факторизации наподобие теоремы Ландау о неравенстве Гёльдера: для любого $T \in S_{q_0}(H_0) \cap S_{q_1}(H_1)$ найдутся гильбертовы пространства F_0 и F_1 и операторы $U_0 \in S_{r_0}(H_0 \rightarrow F_0)$, $V_0 \in S_{p_0}(F_0 \rightarrow H_0)$ и $U_1 \in S_{r_1}(H_1 \rightarrow F_1)$, $V_1 \in S_{p_1}(F_1 \rightarrow H_1)$ такие, что $T|_{H_0} = V_0 U_0$, $T|_{H_1} = V_1 U_1$. Так же, как в лемме 11.1.1 из [4], можно показать, что пространства F_0 и F_1 образуют гильбертову пару $\{F_0, F_1\}$ и операторы U_0, U_1 определяют отображение пары $\{H_0, H_1\}$ в пару $\{F_0, F_1\}$, а операторы V_0, V_1 – отображение пары $\{F_0, F_1\}$ в $\{H_0, H_1\}$. Значит,

найдутся $T' \in S_{r_0}(H_0 \rightarrow F_0) \cap S_{r_1}(H_1 \rightarrow F_1)$ и $T'' \in S_{p_0}(F_0 \rightarrow H_0) \cap S_{p_1}(F_1 \rightarrow H_1)$ такие, что $T = T''T'$. Отсюда следует, что

$$\bigcup_{\psi \in \Psi(\varphi, r_0, r_1)} \Psi(\psi, p_0, p_1) \supset \Psi(\varphi, q_0, q_1).$$

Следствие доказано.

Цепное правило лежит в основе доказательства оптимальных интерполяционных теорем в парах пространств L_p , рассмотренных в следующем разделе.

5. Описание интерполяционных орбит в парах пространств L_p

5.1. Теорема об орбитах элементов. Внимание к обобщенному методу средних Лионса–Петре по существу связано с тем, что эта интерполяционная конструкция позволила описать интерполяционные орбиты в произвольных парах пространств L_p . В свою очередь интерес к описанию интерполяционных орбит основан на интересе к оптимальным интерполяционным теоремам, который легко объясним, поскольку они обеспечивают подчас неулучшаемые оценки и т. п.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Пусть $\{X_0, X_1\}$ и $\{Y_0, Y_1\}$ – две банаховы (квазибанаховы) пары и $a \in X_0 + X_1$. Интерполяционной орбитой элемента a при действии линейных ограниченных операторов из пары $\{X_0, X_1\}$ в пару $\{Y_0, Y_1\}$ называется множество всех элементов вида Ta , где $T: \{X_0, X_1\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\}$.

Мы будем обозначать интерполяционную орбиту через $\text{Orb}(a, \{X_0, X_1\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\})$. Очевидно, что $\text{Orb}(a, \{X_0, X_1\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\})$ оказывается линейным пространством в $Y_0 + Y_1$. На нем можно ввести норму

$$\|y\| = \inf \max(\|T\|_{X_0 \rightarrow Y_0}, \|T\|_{X_1 \rightarrow Y_1}), \quad (5.1)$$

где инфимум берется по всем операторам $T: \{X_0, X_1\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\}$ таким, что $y = Ta$. По умолчанию мы будем предполагать, что $\text{Orb}(a, \{X_0, X_1\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\})$ снабжена этой нормой.

Легко проверить, что $\text{Orb}(a, \{X_0, X_1\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\})$ оказывается интерполяционным банаховым пространством для пары $\{Y_0, Y_1\}$. Более того, соответствие $\{Y_0, Y_1\} \Rightarrow \text{Orb}(a, \{X_0, X_1\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\})$ является нормализованной интерполяционной конструкцией (нормализованным интерполяционным функтором).

Описание интерполяционных орбит в парах пространств L_p имеет продолжительную историю (см., например, обзор [31]), приведшую к теореме В. И. Дмитриева [32].

ТЕОРЕМА 5.1. Для любых $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ таких, что $p_0 \leq q_0$ и $p_1 \leq q_1$, и любых весовых функций U_0, U_1, V_0, V_1

$$\text{Orb}(a, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}) = \varphi(L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1))_{\infty, \infty},$$

где $\varphi(s, t) = K(s, t, a, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\})$.

Из (3.29) и (3.30) видно, что данным случае

$$\begin{aligned} \text{Orb}(a, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} &\rightarrow \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}) \\ &= \left\{ y \in L_{q_0}(V_0) + L_{q_1}(V_1) : \sup_{s,t} \frac{K(s, t, y, \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\})}{K(s, t, a, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\})} < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, теорема Дмитриева утверждает, что для выполнения равенства $y = Ta$, где $T: \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$K(s, t, y, \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}) \leq CK(s, t, a, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}) \quad \text{при } s, t > 0$$

для некоторого $C > 0$.

Полезно отметить, что в теореме Дмитриева пара $\{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$ в области определения операторов может рассматриваться на одном пространстве с мерой, а пара $\{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}$ в области значения операторов – на совершенно другом пространстве с мерой.

Случай $p_0 = q_0$ и $p_1 = q_1$ ранее рассмотрел Г. Спарр [21]. Для дальнейшего нам потребуется следующее следствие теоремы Спарра.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть $a \in L_{p_0}(U_0) + L_{p_1}(U_1)$ и $\tilde{a} \in L_{p_0}(\tilde{U}_0) + L_{p_1}(\tilde{U}_1)$, причем $K(s, t, a, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}) \asymp K(s, t, \tilde{a}, \{L_{p_0}(\tilde{U}_0), L_{p_1}(\tilde{U}_1)\})$, тогда существуют линейные ограниченные операторы $F: \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{L_{p_0}(\tilde{U}_0), L_{p_1}(\tilde{U}_1)\}$ и $\tilde{F}: \{L_{p_0}(\tilde{U}_0), L_{p_1}(\tilde{U}_1)\} \rightarrow \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$ такие, что $\tilde{a} = Fa$ и $a = \tilde{F}\tilde{a}$.

Основной результат этого пункта – описание интерполяционных орбит для любых $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$. Оказалось, что справедлива следующая теорема [7].

ТЕОРЕМА 5.2. Для любых $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ и любых весовых функций U_0, U_1, V_0, V_1

$$\text{Orb}(a, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}) = \varphi(L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1))_{r_0, r_1},$$

где $\varphi(s, t) = K(s, t, a, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\})$, а $1/r_0 = (1/q_0 - 1/p_0)_+$ и $1/r_1 = (1/q_1 - 1/p_1)_+$. (Как обычно, x_+ означает положительную часть x .)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что

$$\text{Orb}(a, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}) \subset \varphi(L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1))_{r_0, r_1}.$$

Ограничимся случаем $\varphi \in \Phi_0$. Оставшиеся фактически два случая легко вытекают из рассмотренного (см. определение $\varphi(X_0, X_1)_{r_0, r_1}$, если φ не принадлежит Φ_0).

Пусть $b = Ta$, где $T: \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}$. Рассмотрим последовательности A и B из спектрального разложения интерполяционной

функции φ и соответствующую пару $\{l_{p_0}(1/A), l_{p_1}(1/B)\}$. Тогда в силу (3.6)

$$\varphi(s, t) = K(s, t, a, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}) \asymp K\left(s, t, \mathbf{1}, \left\{l_{p_0}\left(\frac{1}{A}\right), l_{p_1}\left(\frac{1}{B}\right)\right\}\right).$$

Аналогично, рассмотрим последовательности u и v из спектрального разложения интерполяционной функции $\psi(s, t) = K(s, t, b, \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\})$ и пару $\{l_{q_0}(1/u), l_{q_1}(1/v)\}$. Тогда

$$K(s, t, b, \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}) \asymp K\left(s, t, \mathbf{1}, \left\{l_{q_0}\left(\frac{1}{u}\right), l_{q_1}\left(\frac{1}{v}\right)\right\}\right).$$

С помощью операторов $F, \tilde{F}$ из следствия 5.1, примененных к парам $\{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$, $\{l_{p_0}(1/A), l_{p_1}(1/B)\}$ и элементам $a, \mathbf{1}$, мы можем заменить оператор T на оператор, действующий из пары $\{l_{p_0}(1/A), l_{p_1}(1/B)\}$, а элемент a на $\mathbf{1}$. Аналогично, применяя следствие 5.1 к парам $\{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}$, $\{l_{q_0}(1/u), l_{q_1}(1/v)\}$ и элементам $b, \mathbf{1}$, мы можем заменить оператор, действующий в пару $\{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}$, на оператор, действующий в пару $\{l_{q_0}(1/u), l_{q_1}(1/v)\}$, а элемент b на $\mathbf{1}$. Таким образом, задача свелась к $T: \{l_{p_0}(1/A), l_{p_1}(1/B)\} \rightarrow \{l_{q_0}(1/u), l_{q_1}(1/v)\}$ и $T(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Описанную процедуру можно было бы назвать локализацией оператора T .

Рассмотрим линейный ограниченный оператор $L: l_p \rightarrow l_q$, причем $p > q$. Обозначим через e_n стандартную базисную последовательность в l_p . Ее образ $L(e_n)$ при действии оператора L , очевидно, будет слабо p' -суммируемой в l_q последовательностью, т.е. $\{f(L(e_n))\} \in l_{p'}$ для любого $f \in l_q^*$, где $pp' = p + p'$. Значит, после умножения на любую скалярную последовательность $\chi \in l_p$ получим, что $\chi L(e_n)$ является слабо суммируемой последовательностью в l_q . По теореме Карла–Беннета эта же последовательность в $l_\infty \supset l_q$ будет l_q -последовательностью, т.е. $\{\chi_n \|L(e_n)\|_{l_\infty}\} \in l_q$. Поскольку последовательность $\chi \in l_p$ произвольна, то по теореме Ландау отсюда получаем, что $\{\|L(e_n)\|_{l_\infty}\} \in l_r$, где $1/r = 1/q - 1/p$. Если $p \leq q$, то, очевидно, $\{\|L(e_n)\|_{l_\infty}\} \in l_\infty$. Таким образом, если $L: l_p \rightarrow l_q$, где $1 \leq p, q \leq \infty$, то $\{\|L(e_n)\|_{l_\infty}\} \in l_r$, где $1/r = (1/q - 1/p)_+$.

Применим эти соображения к оператору $T: \{l_{p_0}(1/A), l_{p_1}(1/B)\} \rightarrow \{l_{q_0}(1/u), l_{q_1}(1/v)\}$, учитывая веса.

Тогда $\{A_j \|T(e_j)\|_{l_\infty(1/u)}\} \in l_{r_0}$ и $\{B_j \|T(e_j)\|_{l_\infty(1/v)}\} \in l_{r_1}$.

Поскольку

$$\mathbf{1} = \sum_{j \in J} e_j \quad (\text{сходимость в } l_1\left(\frac{1}{A}\right) + l_1\left(\frac{1}{B}\right) \subset l_{p_0}\left(\frac{1}{A}\right) + l_{p_1}\left(\frac{1}{B}\right)),$$

получим

$$\mathbf{1} = T(\mathbf{1}) = \sum_{j \in J} T(e_j) \quad (\text{сходимость в } l_\infty\left(\frac{1}{u}\right) + l_\infty\left(\frac{1}{v}\right)).$$

Следовательно, по определению имеем $\mathbf{1} \in \varphi(l_\infty(1/u), l_\infty(1/v))_{r_0, r_1}$. Как было отмечено в (3.15), K -функционал последовательности $\mathbf{1}$ не зависит от показателей p_0, p_1 в паре $\{l_{p_0}(1/u), l_{p_1}(1/v)\}$. Поэтому, в силу леммы 3.2, $\mathbf{1} \in \varphi(l_{q_0}(1/u),$

$l_{q_1}(1/v)_{r_0, r_1}$. Значит, $b \in \varphi(L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1))_{r_0, r_1}$, и вложение $\text{Orb}(a, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}) \rightarrow \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\} \subset \varphi(L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1))_{r_0, r_1}$ доказано.

Пусть теперь некоторый b принадлежит $\varphi(L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1))_{r_0, r_1}$. Тогда $\mathbf{1} \in \varphi(l_{r_0}(1/u), l_{r_1}(1/v))$, где u, v – последовательности из спектрального разложения интерполяционной функции $\psi(s, t) = K(s, t, b, \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\})$. Следовательно, по лемме 3.3 и замечанию 3.2 для некоторых $\beta^0 \in l_{r_0}, \beta^1 \in l_{r_1}$

$$K\left(s, t, \mathbf{1}, \left\{l_{p_0}\left(\frac{1}{u\beta^0}\right), l_{p_1}\left(\frac{1}{v\beta^1}\right)\right\}\right) \leq C\varphi(s, t).$$

По теореме Спарра найдется линейный оператор $S: \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{l_{p_0}(1/u), l_{p_1}(1/v)\}$ такой, что $S(a) = \mathbf{1}$.

Вложение

$$\left\{l_{p_0}\left(\frac{1}{u\beta^0}\right), l_{p_1}\left(\frac{1}{v\beta^1}\right)\right\} \subset \left\{l_{q_0}\left(\frac{1}{u}\right), l_{q_1}\left(\frac{1}{v}\right)\right\}$$

вытекает из неравенства Гёльдера.

Композиция оператора S и этого вложения переводит a в $\mathbf{1}$ и действует из $\{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$ в $\{l_{q_0}(1/u), l_{q_1}(1/v)\}$. Если теперь применить теорему Спарра к парам $\{l_{q_0}(1/u), l_{q_1}(1/v)\}$, $\{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}$ и элементам $\mathbf{1}, b$, то найдется оператор $\tilde{S}: \{l_{q_0}(1/u), l_{q_1}(1/v)\} \rightarrow \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}$ такой, что $\tilde{S}(\mathbf{1}) = b$. Композиция этого оператора с построенным ранее дает линейный оператор $T: \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}$ такой, что $T(a) = b$. Теорема доказана.

В. И. Дмитриев [32] нашел описание орбит в случае любых $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$ и $q_0 = q_1 = 1$, а также в случае любых $1 \leq p_1, q_0 \leq \infty$ и $p_0 = q_1 = 1$. Эти результаты Дмитриева были недооценены в свое время из-за того, что найденное им описание в терминах J -метода казалось неэффективным и слишком близким к самому понятию орбиты.

5.2. Оптимальные интерполяционные теоремы в парах пространств Лебега. Как известно, первые интерполяционные теоремы Рисса и Марцинкевича не были оптимальными. И только теорема Рисса–Торина в “верхнем треугольнике” оказалась оптимальной в том смысле, что пространство образов нельзя уменьшить сразу для всех операторов, действующих в паре (см. [33]).

Основной результат данного пункта – оптимальная интерполяционная теорема для операторов, действующих из произвольной пары весовых пространств $\{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$ в аналогичную пару $\{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}$. Оказалось, что в классе пространств, построенных обобщенной конструкцией Лионса–Петре, удается получить оптимальные теоремы.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть $T: \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}$, где $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$, веса произвольны и $\varphi \in \Phi_0$ – интерполяционная функция, тогда для любых $0 < s_0, s_1 \leq \infty$

$$T: \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{s_0, s_1} \rightarrow \varphi(L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1))_{t_0, t_1},$$

где $1/t_0 = 1/s_0 + (1/q_0 - 1/p_0)_+, 1/t_1 = 1/s_1 + (1/q_1 - 1/p_1)_+$.

Если пара $\{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$ имеет полный спектр, то для любого $y \in \varphi(L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1))_{t_0, t_1}$ существуют $x \in \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{s_0, s_1}$ и $T: \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}$ такие, что $y = Tx$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем использовать описание интерполяционных орбит из теоремы 5.2. Значит, для любого $x \in \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{s_0, s_1}$

$$\begin{aligned} Tx &\in \bigcup_{b \in \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{s_0, s_1}} \text{Orb}(b, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}) \\ &= \bigcup_{b \in \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{s_0, s_1}} \psi(L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1))_{r_0, r_1}, \end{aligned}$$

где мы вновь обозначили $\psi(s, t) = K(s, t, b, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\})$, $1/r_0 = (1/q_0 - 1/p_0)_+$ и $1/r_1 = (1/q_1 - 1/p_1)_+$. Следовательно, по определению $\varphi(X_0, X_1)_{s_0, s_1}$

$$Tx \in \bigcup_{\psi \in \Psi(\varphi, s_0, s_1)} \psi(L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1))_{r_0, r_1},$$

или

$$K(s, t, Tx, \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}) \in \bigcup_{\psi \in \Psi(\varphi, s_0, s_1)} \Psi(\psi, r_0, r_1).$$

В силу следствия 4.2 правая часть равна $\Psi(\varphi, t_0, t_1)$, поэтому

$$Tx \in \varphi(L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1))_{t_0, t_1}.$$

Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Для того чтобы проверить оптимальность, заметим, что все предыдущие наши рассуждения были обратимы, кроме одного места, где условие $b \in \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{s_0, s_1}$ было заменено на $\psi \in \Psi(\varphi, s_0, s_1)$ в том смысле, что нужно рассмотреть произвольные функции ψ из Φ_0 , а не только те, которые являются K -функционалами элементов b . Если же пара $\{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$ имеет полный спектр, то это будет эквивалентной заменой.

Таким образом, мы приходим к равенству

$$\begin{aligned} &\bigcup_{b \in \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{s_0, s_1}} \text{Orb}(b, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}) \\ &= \varphi(L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1))_{t_0, t_1}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Теорема доказана.

Очевидно, что данная теорема содержит в себе как частные случаи все классические интерполяционные теоремы для пространств L_p с весами. При этом в качестве интерполяционных пространств рассматриваются пространства, подобные пространствам Орлича, наиболее близкие к L_p с “идеологической” точки зрения. Оптимальность в данной теореме достигается за счет рассмотрения новых пространств $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$, не всегда совпадающих с классическими.

Поэтому возникает проблема подробного изучения этих пространств или проблема сравнения их с известными. Данной задаче посвящен следующий раздел о вложениях пространств $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$. Оказывается, возможны неочевидные вложения.

Равенство (5.2) может служить оправданием нового определения орбиты пространства при действии операторов из одной пары в другую. По Ароншайну и Гальярдо [34] орбитой пространства считается банахова сумма орбит всех его элементов, иными словами, по определению $\text{Orb}(E, \{X_0, X_1\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\})$ состоит из $y \in Y_0 + Y_1$ таких, что

$$y = \sum_{n \in \mathbb{Z}} T_n e_n,$$

где

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \max(\|T_n\|_{X_0 \rightarrow Y_0}, \|T_n\|_{X_1 \rightarrow Y_1}) \|e_n\|_E < \infty.$$

Из (5.2) следует, что объединение орбит элементов пространства E – это тоже осмысленный объект. Мы назовем его q -орбитой, поскольку это множество часто оказывается квазибанаховым пространством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Пусть E – промежуточное пространство банаховой пары $\{X_0, X_1\}$. Объединение орбит всех элементов пространства E при действии ограниченных линейных операторов из пары $\{X_0, X_1\}$ в банахову пару $\{Y_0, Y_1\}$ будем обозначать $\text{Qrb}(E, \{X_0, X_1\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\})$ и называть q -орбитой пространства E .

Множество $\text{Qrb}(E, \{X_0, X_1\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\})$ можно снабдить метрикой

$$\begin{aligned} d(y_1, y_2) = \inf_{T_i, e_i} \left(\max_{i=1,2} \|T_i\|_{\{X_0, X_1\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\}} \|e_1 - e_2\|_E \right. \\ \left. + \|T_1 - T_2\|_{\{X_0, X_1\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\}} \max_{i=1,2} \|e_i\|_E \right), \end{aligned}$$

где $y_i = T_i e_i$, превращающей q -орбиту в метрическое пространство.

Если $\{X_0, X_1\}$ – пара банаховых решеток, а E – функциональное банахово пространство, то q -орбита будет векторным пространством, а $d(x, 0)$ – квазинормой. В частности, оптимальность в теореме 5.3 можно сформулировать в виде равенства

$$\begin{aligned} \text{Qrb}(\varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{s_0, s_1}, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}) \\ = \varphi(L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1))_{t_0, t_1}. \end{aligned}$$

В завершение же данного раздела приведем один пример получения новой интерполяционной теоремы для классических пространств, являющейся следствием теоремы 5.2.

ТЕОРЕМА 5.4. Если φ – квазистепенная функция, то любой линейный ограниченный оператор $T: \{l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-n})\} \rightarrow \{l_{q_0}, l_{q_1}(2^{-n})\}$, где $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$, действует из $\varphi(l_{s_0}, l_{s_1}(2^{-n}))$ в $\varphi(l_{t_0}, l_{t_1}(2^{-n}))$ для любых $0 < s_0, s_1, t_0, t_1 \leq \infty$ таких, что $1/t_0 = 1/s_0 + (1/q_0 - 1/p_0)_+$, $1/t_1 = 1/s_1 + (1/q_1 - 1/p_1)_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Стандартными методами проверяется, что в случае квазистепенной функции φ пространство $\varphi(l_{p_0}, l_{p_1}(a^{-n}))_{s_0, s_1}$ не зависит от $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$ при любых $0 < s_0, s_1 \leq \infty$ и $a > 1$ (см., например, [35]). С помощью степенного преобразования это утверждение переносится на произвольные $0 < p_0, p_1 \leq \infty$. Поэтому все пространства $\varphi(l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-n}))_{s_0, s_1}$ равны $\varphi(l_{s_0}, l_{s_1}(2^{-n}))_{s_0, s_1}$. Значит, по теореме 3.4 все пространства $\varphi(l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-n}))_{s_0, s_1}$ равны $\varphi(l_{s_0}, l_{s_1}(2^{-n}))$ для квазистепенной φ . Аналогично, все $\varphi(l_{q_0}, l_{q_1}(2^{-n}))_{t_0, t_1}$ равны $\varphi(l_{t_0}, l_{t_1}(2^{-n}))$.

По теореме 5.3 имеем $T: \varphi(l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-n}))_{s_0, s_1} \rightarrow \varphi(l_{q_0}, l_{q_1}(2^{-n}))_{t_0, t_1}$, следовательно, $T: \varphi(l_{s_0}, l_{s_1}(2^{-n})) \rightarrow \varphi(l_{t_0}, l_{t_1}(2^{-n}))$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Кажется довольно естественным обобщить полученные результаты на случай аналогов рассмотренных пространств средних, когда пространства l_{p_0} и l_{p_1} заменены на более общие пространства последовательностей. Как показывают результаты, например, работы [36], существенно продвинуться в этом направлении пока не удалось. По-видимому, это связано с тем, что не удалось построить реализацию в виде таких пространств средних для конкретных пространств, представляющих интерес для анализа.

6. Теоремы вложения для пространств обобщенного метода средних при различных параметрах

6.1. Критерии вложений (частные случаи). Найденные в разделе 5 оптимальные интерполяционные теоремы, как уже отмечалось, привели нас к новым пространствам. Теперь возникает задача о том, какое место эти пространства занимают среди пространств, которые уже используются в анализе. Наиболее близкими к данному семейству, очевидно, являются пространства Орлича и пространства Лоренца с функциональными параметрами. И те и другие являются частными случаями обобщенных пространств средних. Поэтому мы приходим к задаче об оптимальных вложениях внутри рассматриваемого семейства пространств $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ для всех банаховых пар. Таким образом, речь пойдет о критерии вложения

$$\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1} \subset \psi(X_0, X_1)_{q_0, q_1} \quad (6.1)$$

произвольных банаховых или квазибанаховых пар при $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$. Мы ограничимся случаем невырожденных функциональных параметров φ и ψ .

Поскольку пространства обобщенного метода средних K -монотонны на парах, относительно полных по Гальярдо, то вложение (6.1) для всех пар эквивалентно вложению множеств $\Psi(\varphi, p_0, p_1) \subset \Psi(\psi, q_0, q_1)$. Это вложение эквивалентно вложению (6.1) на одной паре с полным спектром. В качестве такой пары удобно рассмотреть пару гильбертовых пространств $\{H_0, H_1\}$ с полным спектром.

Таким образом, все свелось к критериям вложения

$$\varphi(H_0, H_1)_{p_0, p_1} \subset \psi(H_0, H_1)_{q_0, q_1} \quad (6.2)$$

для регулярных гильбертовых пар и невырожденных φ и ψ .

Описанные ниже критерии вложения и подробные доказательства опубликованы в [27] и [37].

ТЕОРЕМА 6.1. *Для того чтобы для любой банаховой пары $\{X_0, X_1\}$ имело место вложение (6.1) при некоторых $1 \leq q_0 \leq p_0 \leq \infty$, $1 \leq q_1 \leq p_1 \leq \infty$, где φ и ψ невырождены, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathbf{1} \in \psi\left(l_{r_0}\left(\frac{1}{A}\right), l_{r_1}\left(\frac{1}{B}\right)\right), \quad (6.3)$$

где A и B – последовательности из спектрального разложения интерполяционной функции φ , а $1/r_0 = 1/q_0 - 1/p_0$, $1/r_1 = 1/q_1 - 1/p_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наиболее трудоемким и неочевидным является доказательство необходимости. По этому поводу мы отсылаем читателя к [37]. Некоторое представление о природе вложения (6.1) можно получить из доказательства достаточности условий (6.3), которое мы приведем здесь.

Рассмотрим какую-нибудь гильбертову пару $\{F_0, F_1\}$ с полным спектром. Пусть $a \in F_0 + F_1$ таков, что $\varphi(s, t) \asymp K(s, t, a, \{F_0, F_1\})$. В силу теоремы 4.1 об орбитальном описании $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$, любой $x \in \varphi(H_0, H_1)_{p_0, p_1}$ представим в виде Ta , где $T \in S_{p_0}(F_0 \rightarrow H_0) \cap S_{p_1}(F_1 \rightarrow H_1)$. С другой стороны, условие (6.3) по лемме 3.2 означает, что $a \in \psi(H_0, H_1)_{r_0, r_1}$. Поэтому, вновь по теореме 4.1, $a = Ub$, где $U \in S_{r_0}(F_0 \rightarrow F_0) \cap S_{r_1}(F_1 \rightarrow F_1)$ и $K(s, t, b, \{F_0, F_1\}) \asymp \psi(s, t)$. Следовательно, $x = TU(b)$, где произведение UT принадлежит $S_{q_0}(F_0 \rightarrow H_0) \cap S_{q_1}(F_1 \rightarrow H_1)$, так как $1/q_0 = 1/p_0 + 1/r_0$ и $1/q_1 = 1/p_1 + 1/r_1$. Значит, в силу теоремы 4.1 получаем $x \in \psi(X_0, X_1)_{q_0, q_1}$. Достаточность доказана. Теорема 6.1 доказана.

Частный случай, когда $p_0 \leq q_0$ и $p_1 \leq q_1$, значительно проще. Очевидно, что достаточным условием для любой пары $\{X_0, X_1\}$ будет неравенство $\psi \geq C\varphi$ для некоторой константы C , поскольку в этом случае $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1} \subset \psi(X_0, X_1)_{p_0, p_1} \subset \psi(X_0, X_1)_{q_0, q_1}$.

Пусть теперь вложение (6.3) имеет место для всех пар с равномерной оценкой норм, тогда $C\psi \geq \varphi$. В самом деле, рассмотрим эти вложения на одномерных парах вида $\{\alpha\mathbb{R}, \beta\mathbb{R}\}$, тогда, например, на основе леммы 3.2 получаем $\varphi(\alpha\mathbb{R}, \beta\mathbb{R})_{p_0, p_1} = \varphi^*(\alpha, \beta)\mathbb{R}$ с эквивалентностью норм относительно $\alpha, \beta > 0$. Следовательно, $\varphi^*(\alpha, \beta)\mathbb{R} \subset \psi^*(\alpha, \beta)\mathbb{R}$. Отсюда $C\varphi^* \geq \psi^*$, или $C\psi \geq \varphi$.

Оставшиеся случаи, когда $p_0 < q_0$, а $p_1 > q_1$, или $p_1 < q_1$, а $p_0 > q_0$, требуют более изощренного подхода. Но именно эти случаи могут оказаться наиболее полезными при сравнении $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ с пространствами Янсона $(X_0, X_1)_{p, p} = \varphi(X_0, X_1)_{p, p}$, обобщающими пространства Лоренца.

6.2. Описание пространств обобщенного метода средних в гильбертовых парах с помощью коорбит идеалов Неймана–Шаттена. Для доказательства теорем вложения пространств обобщенного метода средних потребовалось еще одно описание, двойственное описанию в терминах орбит.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Пусть $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$ и φ – невырожденная интерполяционная функция, а $\{F_0, F_1\}$ – гильбертова пара. Тогда коорбита относительно идеала $S_{p_0}(H_0 \rightarrow F_0) \cap S_{p_1}(H_1 \rightarrow F_1)$, обозначаемая $\text{Corb}(\varphi, S_{p_0}(H_0 \rightarrow F_0) \cap S_{p_1}(H_1 \rightarrow F_1))$, по определению состоит из $x \in H_0 + H_1$ таких, что

$$\sup_T \|T(x)\|_{\varphi(F_0, F_1)_{1,1}} < \infty, \quad (6.4)$$

где супремум берется по всем линейным операторам $T \in S_{p_0}(H_0 \rightarrow F_0) \cap S_{p_1}(H_1 \rightarrow F_1)$ таким, что $\max(\|T\|_{S_{p_0}(H_0 \rightarrow F_0)}, \|T\|_{S_{p_1}(H_1 \rightarrow F_1)}) \leq 1$.

Оказалось, что обобщенные пространства средних можно описать в терминах коорбит идеалов Неймана–Шаттена.

ТЕОРЕМА 6.2. Для любой невырожденной интерполяционной функции $\varphi(s, t)$ и любых $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$

$$\varphi(H_0, H_1)_{p_0, p_1} = \text{Corb}(\varphi, S_{p'_0}(H_0 \rightarrow F_0) \cap S_{p'_1}(H_1 \rightarrow F_1)),$$

где $\{F_0, F_1\}$ – гильбертова пара с полным спектром, а p'_0 и p'_1 – двойственные индексы к p_0 и p_1 , т. е. $1/p'_0 = 1 - 1/p_0$ и $1/p'_1 = 1 - 1/p_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \text{Corb}(\varphi, S_{p'_0}(H_0 \rightarrow F_0) \cap S_{p'_1}(H_1 \rightarrow F_1))$. Условие (6.4), в частности, означает, что орбита элемента x при действии операторов $T \in S_{p'_0}(H_0 \rightarrow F_0) \cap S_{p'_1}(H_1 \rightarrow F_1)$ содержится в $\varphi(F_0, F_1)_{1,1}$. Поскольку такая орбита в силу теоремы 4.1 совпадает с $\chi(F_0, F_1)_{p'_0, p'_1}$, где через $\chi(s, t)$ обозначена функция $K(s, t, x, \{H_0, H_1\})$, мы приходим к вложению

$$\chi(F_0, F_1)_{p'_0, p'_1} \subset \varphi(F_0, F_1)_{1,1}$$

для $\{F_0, F_1\}$, имеющей полный спектр. Такое вложение, как следует из теоремы 6.1, эквивалентно тому, что $\mathbf{1} \in \varphi(l_{r_0}(1/u), l_{r_1}(1/v))$, где $1/r_0 = 1 - 1/p'_0 = 1/p_0$ и $1/r_1 = 1 - 1/p'_1 = 1/p_1$, а u и v – последовательности из спектрального разложения для χ . А это в свою очередь означает, что $x \in \varphi(H_0, H_1)_{p_0, p_1}$.

Пусть теперь $x \in \varphi(H_0, H_1)_{p_0, p_1}$. Тогда в силу орбитального описания $\varphi(H_0, H_1)_{p_0, p_1}$ найдется оператор $U \in S_{p_0}(\tilde{F}_0 \rightarrow H_0) \cap S_{p_1}(\tilde{F}_1 \rightarrow H_1)$ такой, что $x = U(a)$, где $K(s, t, a, \{\tilde{F}_0, \tilde{F}_1\}) \asymp \varphi(s, t)$. Поэтому $T(x) = TU(a)$, причем $\|TU\|_{S_1(\tilde{F}_0 \rightarrow F_0)} \leq \|U\|_{S_{p_0}(\tilde{F}_0 \rightarrow H_0)} \|T\|_{S_{p'_0}(H_0 \rightarrow F_0)}$. Аналогично, $\|TU\|_{S_1(\tilde{F}_1 \rightarrow F_1)} \leq \|U\|_{S_{p_1}(\tilde{F}_1 \rightarrow H_1)} \|T\|_{S_{p'_1}(H_1 \rightarrow F_1)}$. Применяя орбитальное описание пространства $\varphi(F_0, F_1)_{1,1}$, т. е. равенство $\varphi(F_0, F_1)_{1,1} = \text{Orb}(a, S_1(\tilde{F}_0 \rightarrow F_0) \cap S_1(\tilde{F}_1 \rightarrow F_1))$, отсюда получим, что

$$\|T(x)\|_{\varphi(F_0, F_1)_{1,1}} \leq C \max(\|T\|_{S_{p'_0}(H_0 \rightarrow F_0)}, \|T\|_{S_{p'_1}(H_1 \rightarrow F_1)}),$$

где константа C не зависит от оператора T . Следовательно,

$$x \in \text{Corb}(\varphi, S_{p'_0}(H_0 \rightarrow F_0) \cap S_{p'_1}(H_1 \rightarrow F_1)).$$

Теорема доказана.

6.3. Критерии вложений (общий случай).

ТЕОРЕМА 6.3. *Для того чтобы для любой банаховой пары $\{X_0, X_1\}$ имело место вложение (6.1) при некоторых $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$, где φ, ψ невырождены, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathbf{1} \in \varphi\left(l_{s_0}\left(\frac{1}{u}\right), l_{s_1}\left(\frac{1}{v}\right)\right)^*, \quad (6.5)$$

где u, v – последовательности из спектрального разложения интерполяционной функции ψ , а $1/s_0 = 1 - (1/q_0 - 1/p_0)$, $1/s_1 = 1 - (1/q_1 - 1/p_1)$ и X^* означает сопряженное к X пространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим пространство $\varphi(H_0, H_1)_{p_0, p_1}$ как орбиту $\text{Orb}(a, S_{p_0}(F_0 \rightarrow H_0) \cap S_{p_1}(F_1 \rightarrow H_1))$ некоторого элемента $a \in F_0 + F_1$ такого, что $\varphi(s, t) = K(s, t, a, \{F_0, F_1\})$, а пространство $\psi(H_0, H_1)_{q_0, q_1}$ как коорбиту $\text{Corb}(\psi, S_{q'_0}(H_0 \rightarrow \tilde{F}_0) \cap S_{q'_1}(H_1 \rightarrow \tilde{F}_1))$, где $\{\tilde{F}_0, \tilde{F}_1\}$ – гильбертова пара с полным спектром. В [11] показано, что обобщенное пространство Лоренца $\Lambda_\psi(\tilde{F}_0, \tilde{F}_1)$, совпадающее с $\psi(\tilde{F}_0, \tilde{F}_1)_{1,1}$, является коорбитой пространства $l_1 = \psi(l_2(1/u), l_2(1/v))_{1,1}$ при действии линейных ограниченных операторов из пары $\{F_0, F_1\}$ в пару $\{l_2(1/u), l_2(1/v)\}$, где u и v – последовательности из спектрального разложения интерполяционной функции ψ . Это приводит к тому, что пространство $\psi(H_0, H_1)_{q_0, q_1}$ оказывается коорбитой $\text{Corb}(\psi, S_{q'_0}(H_0 \rightarrow l_2(1/u)) \cap S_{q'_1}(H_1 \rightarrow l_2(1/v)))$.

Следовательно, если $\varphi(H_0, H_1)_{p_0, p_1} \subset \psi(H_0, H_1)_{q_0, q_1}$, то для любого $U \in S_{p_0}(F_0 \rightarrow H_0) \cap S_{p_1}(F_1 \rightarrow H_1)$ и любого $V \in S_{q'_0}(H_0 \rightarrow l_2(1/u)) \cap S_{q'_1}(H_1 \rightarrow l_2(1/v))$ получим, что $VU(a) \in \psi(l_2(1/u), l_2(1/v))_{1,1}$.

Отсюда следует, что пространство $\varphi(l_2(1/u), l_2(1/v))_{s_0, s_1}$ вложено в $\psi(l_2(1/u), l_2(1/v))_{1,1} = l_1$. Для того чтобы проверить это, воспользуемся теоремой 4.1 и представим $\varphi(l_2(1/u), l_2(1/v))_{s_0, s_1}$ как орбиту $\text{Orb}(a_\varphi, S_{s_0}(F_0 \rightarrow l_2(1/u)) \cap S_{s_1}(F_1 \rightarrow l_2(1/v)))$, где $1/s_0 = 1/p_0 + 1/q'_0$, $1/s_1 = 1/p_1 + 1/q'_1$. Это значит, что если $x \in \varphi(l_2(1/u), l_2(1/v))_{s_0, s_1}$, то $x = T(a_\varphi)$, где $T \in S_{s_0}(F_0 \rightarrow l_2(1/u)) \cap S_{s_1}(F_1 \rightarrow l_2(1/v))$. Как известно (см. [4]), любой такой оператор допускает факторизацию $T = \tilde{V}\tilde{U}$, где $\tilde{U} \in S_{p_0}(F_0 \rightarrow G_0) \cap S_{p_1}(F_1 \rightarrow G_1)$, а $\tilde{V} \in S_{q'_0}(G_0 \rightarrow l_2(1/u)) \cap S_{q'_1}(G_1 \rightarrow l_2(1/v))$, где $\{G_0, G_1\}$ – подходящая гильбертова пара. В силу вышесказанного это значит, что

$$\varphi\left(l_2\left(\frac{1}{u}\right), l_2\left(\frac{1}{v}\right)\right)_{s_0, s_1} \subset \psi\left(l_2\left(\frac{1}{u}\right), l_2\left(\frac{1}{v}\right)\right)_{1,1}. \quad (6.6)$$

Таким образом, мы проверили, что из (6.1) следует (6.6). Нетрудно убедиться, что все наши предыдущие рассуждения носили обратимый характер, т. е. на самом деле условия (6.1) и (6.6) эквивалентны.

Очевидно, что (6.6) эквивалентно вложению

$$\left(\varphi\left(l_2\left(\frac{1}{u}\right), l_2\left(\frac{1}{v}\right)\right)_{s_0, s_1}\right)^{1/2} \subset \left(\psi\left(l_2\left(\frac{1}{u}\right), l_2\left(\frac{1}{v}\right)\right)_{1,1}\right)^{1/2},$$

что в силу леммы 3.6 эквивалентно вложению

$$\varphi^{\{1/2\}}\left(l_4\left(\frac{1}{u^{1/2}}\right), l_4\left(\frac{1}{v^{1/2}}\right)\right)_{2s_0, 2s_1} \subset \psi^{\{1/2\}}\left(l_4\left(\frac{1}{u^{1/2}}\right), l_4\left(\frac{1}{v^{1/2}}\right)\right)_{2,2}.$$

Поскольку в силу предложения 3.1 множество K -функционалов в парах вида $\{l_{p_0}(1/u), l_{p_1}(1/v)\}$ не зависит от p_0 , и p_1 , последнее вложение эквивалентно такому же вложению для пары $\{l_{2s_0}(1/u^{1/2}), l_{2s_1}(1/v^{1/2})\}$, т. е.

$$\varphi^{\{1/2\}}\left(l_{2s_0}\left(\frac{1}{u^{1/2}}\right), l_{2s_1}\left(\frac{1}{v^{1/2}}\right)\right)_{2s_0, 2s_1} \subset \psi^{\{1/2\}}\left(l_{2s_0}\left(\frac{1}{u^{1/2}}\right), l_{2s_1}\left(\frac{1}{v^{1/2}}\right)\right)_{2,2}.$$

Так как $2s_0 \geq 1$ и $2s_1 \geq 1$, то можно вычислить пространства

$$\varphi^{\{1/2\}}\left(l_{2s_0}\left(\frac{1}{u^{1/2}}\right), l_{2s_1}\left(\frac{1}{v^{1/2}}\right)\right)_{2s_0, 2s_1} \quad \text{и} \quad \psi^{\{1/2\}}\left(l_{2s_0}, l_{2s_1}\left(\frac{1}{v^{1/2}}\right)\right)_{2,2}.$$

Из теоремы 3.4 следует, что

$$\varphi^{\{1/2\}}\left(l_{2s_0}\left(\frac{1}{u^{1/2}}\right), l_{2s_1}\left(\frac{1}{v^{1/2}}\right)\right)_{2s_0, 2s_1} = \varphi^{\{1/2\}}\left(l_{2s_0}\left(\frac{1}{u^{1/2}}\right), l_{2s_1}\left(\frac{1}{v^{1/2}}\right)\right).$$

Далее, поскольку последовательности $u^{1/2}$ и $v^{1/2}$ определяют спектральное разложение для функции $\psi^{\{1/2\}}$, а функция $\psi^{\{1/2\}}$, вслед за функцией ψ , невырождена, то

$$\begin{aligned} \psi^{\{1/2\}}\left(l_{2s_0}\left(\frac{1}{u^{1/2}}\right), l_{2s_1}\left(\frac{1}{v^{1/2}}\right)\right)_{2,2} &= \psi^{\{1/2\}}\left(l_2\left(\frac{1}{u^{1/2}}\right), l_2\left(\frac{1}{v^{1/2}}\right)\right)_{2,2} \\ &= \psi^{\{1/2\}}\left(l_2\left(\frac{1}{u^{1/2}}\right), l_2\left(\frac{1}{v^{1/2}}\right)\right). \end{aligned}$$

Таким образом приходим к эквивалентному вложению

$$\varphi^{\{1/2\}}\left(l_{2s_0}\left(\frac{1}{u^{1/2}}\right), l_{2s_1}\left(\frac{1}{v^{1/2}}\right)\right) \subset \psi^{\{1/2\}}\left(l_2\left(\frac{1}{u^{1/2}}\right), l_2\left(\frac{1}{v^{1/2}}\right)\right),$$

или

$$\left(\varphi\left(l_{s_0}\left(\frac{1}{u}\right), l_{s_1}\left(\frac{1}{v}\right)\right)\right)^{1/2} \subset \left(\psi\left(l_1\left(\frac{1}{u}\right), l_1\left(\frac{1}{v}\right)\right)\right)^{1/2}.$$

Следовательно, (6.1) эквивалентно

$$\varphi\left(l_{s_0}\left(\frac{1}{u}\right), l_{s_1}\left(\frac{1}{v}\right)\right) \subset \psi\left(l_1\left(\frac{1}{u}\right), l_1\left(\frac{1}{v}\right)\right) = l_1.$$

Это значит, что $l_\infty \subset \varphi(l_{s_0}(1/u), l_{s_1}(1/v))^*$. А это вложение эквивалентно $1 \in \varphi(l_{s_0}(1/u), l_{s_1}(1/v))^*$. Теорема 6.3 доказана.

Из описания сопряженных пространств (3.35) следует, что вложение (6.1) эквивалентно двойственному вложению

$$\psi^*(H_0, H_1)_{q'_0, q'_1} \subset \varphi^*(H_0, H_1)_{p'_0, p'_1}.$$

Значит, справедлив еще один критерий вложения (6.1).

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Если $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$, то вложение

$$\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1} \subset \psi(X_0, X_1)_{q_0, q_1}$$

для невырожденных функций φ, ψ и любой банаховой пары $\{X_0, X_1\}$ эквивалентно тому, что

$$1 \in \psi^*\left(l_{s_0}\left(\frac{1}{A^*}\right), l_{s_1}\left(\frac{1}{B^*}\right)\right)^*,$$

где A^* и B^* – последовательности из спектрального разложения функции $\varphi^*(s, t)$, $1/s_0 = 1 - (1/q_0 - 1/p_0)$, $1/s_1 = 1 - (1/q_1 - 1/p_1)$ и X^* обозначает сопряженное к X пространство.

Напомним, что можно взять $A_j^* = 1/A_{j+1}$, $B_j^* = 1/B_j$, где A_j, B_j – последовательности из спектрального разложения интерполяционной функции φ .

СЛЕДСТВИЕ 6.2. Для произвольной невырожденной функции ψ , любых $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$ и любых последовательностей A_n и B_n таких, что $A_{n+1} \geq qA_n$, а $B_n \geq qB_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{Z}$ и некотором $q > 1$, условия

$$1 \in \psi\left(l_{p_0}\left(\frac{1}{A_n}\right), l_{p_1}\left(\frac{1}{B_n}\right)\right) \quad \text{и} \quad 1 \in \psi\left(l_{p_0}\left(\frac{1}{A_{n+1}}\right), l_{p_1}\left(\frac{1}{B_n}\right)\right) \quad (6.7)$$

эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательности A и B порождают невырожденную интерполяционную функцию

$$\varphi(s, t) = \max_{n \in \mathbb{Z}} \min\left(\frac{s}{A_n}, \frac{t}{B_n}\right).$$

Тогда в силу теоремы 6.1 и следствия 6.1 каждое из условий (6.7) эквивалентно вложению $\varphi(X_0, X_1)_{\infty, \infty} \subset \psi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$. Следствие доказано.

7. Теоремы вложения для пространств Соболева, построенных по перестановочно инвариантной метрике

В этом завершающем разделе мы рассмотрим одно свойство обобщенных пространств средних, связанное с оптимальными теоремами вложения для пространств Соболева. Как известно [38], [39], даже для классических пространств Соболева, построенных с помощью L_p -метрики, наименьшее перестановочно инвариантное пространство вложения может оказаться существенно отличным от пространства с метрикой L_p . В работе [40] удалось показать, что если метрика, по которой построено пространство Соболева, порождена пространством, построенным обобщенным методом средних, то оптимальное пространство вложения (наименьшее в классе всех интерполяционных перестановочно инвариантных пространств) оказывается обобщенным пространством средних, построенным по некоторой паре классических пространств. Описанию этого результата и посвящен данный раздел. Явно описано соотношение между параметрами пространств, участвующих в теореме. Среди многих известных результатов, которые удастся передоказать с помощью этих соображений, разумеется, находится и ряд новых теорем вложения. В частности, получены аналоги оптимальных теорем вложения А. Чанки для пространств Орлича–Соболева [41].

Обозначим через Ω ограниченную область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей. Пусть $m < n$ – натуральное число, а $E(\Omega)$ – пространство, интерполяционное между $L_1(\Omega)$ и $L_\infty(\Omega)$. Через $W_E^m(\Omega)$ обозначается пространство обобщенных функций на Ω , для которых все частные производные до порядка m включительно принадлежат $E(\Omega)$ (см. [42]). В дальнейшем область Ω в обозначениях пространств будем опускать.

Для формулировки предельных вложений для пространств Соболева гладкости $m < n$ требуются пространства Лоренца $\Lambda_\theta(\Omega)$. Для нас будет важным тот факт, что эти пространства строятся классическим методом Лионса–Петре:

$$\Lambda_\theta = (L_1, L_\infty)_{1-\theta, 1}$$

(см. [3], [6]).

Сами предельные вложения известны с 1960-х годов и имеют вид $W_1^m \subset \Lambda_{1-m/n}$ и $W_{\Lambda_{m/n}}^m \subset L_\infty$ (см. [42]).

В [43] показано, что наименьшее пространство F , интерполяционное между $L_1(\Omega)$ и $L_\infty(\Omega)$, в которое вложено W_E^m , совпадает с интерполяционной орбитой пространства E при действии линейных операторов из пары $\{L_1, \Lambda_{m/n}\}$ в пару $\{\Lambda_{1-m/n}, L_\infty\}$.

Мы рассмотрим случай пространств E , построенных обобщенным методом средних по паре $\{L_1(\Omega), L_\infty(\Omega)\}$, т. е. $E = \varphi(L_1, L_\infty)_{p_0, p_1}$, где $\varphi \in \Phi_0$. Таким образом, приходим к задаче описания интерполяционной орбиты

$$\text{Orb}(\varphi(L_1, L_\infty)_{p_0, p_1}, \{L_1, \Lambda_{m/n}\} \rightarrow \{\Lambda_{1-m/n}, L_\infty\}).$$

Как видно из результатов предыдущих разделов, вычисление интерполяционных орбит не всегда оказывается простой задачей. Поэтому используются более простые универсальные оценки орбит, например: если $y \in \text{Orb}(a, \{X_0, X_1\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\})$, то $K(s, t, y, \{Y_0, Y_1\}) \leq K(s, t, a, \{X_0, X_1\}) = \varphi(s, t)$. Значит,

$$y \in \text{Orb}(a, \{X_0, X_1\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\}) \subset \varphi(Y_0, Y_1)_{\infty, \infty}.$$

Пространство $\varphi(Y_0, Y_1)_{\infty, \infty}$ обозначается $\text{КО}(a, \{X_0, X_1\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\})$ и называется K -орбитой элемента $a \in X_0 + X_1$ в паре $\{Y_0, Y_1\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Пусть $\{X_0, X_1\}, \{Y_0, Y_1\}$ – банаховы пары и E – промежуточное пространство пары $\{X_0, X_1\}$. K -орбитой пространства E в паре $\{Y_0, Y_1\}$ относительно пары $\{X_0, X_1\}$ называется пространство (обозначаемое $\text{КО}(E, \{X_0, X_1\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\})$), равное объединению всех K -орбит $\text{КО}(e, \{X_0, X_1\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\})$, где $e \in E$.

Из этого определения ясно, что

$$\text{Qrb}(E, \{X_0, X_1\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\}) \subset \text{КО}(E, \{X_0, X_1\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\}).$$

Для пары $\{X_0, X_1\} = \{L_1, \Lambda_{m/n}\}$ орбиты и q -орбиты совпадают между собой, а также совпадают с K -орбитами, т.е. $\text{Orb}(E, \{L_1, \Lambda_{m/n}\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\}) = \text{КО}(E, \{L_1, \Lambda_{m/n}\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\})$. Это является следствием свойств интерполяционной конструкции J -метода, рассмотренного в [4] или [6].

Таким образом, наименьшее пространство F среди интерполяционных пространств между L_1 и L_∞ , в которое вложено W_E^m , равно $\text{КО}(E, \{L_1, \Lambda_{m/n}\} \rightarrow \{\Lambda_{1-m/n}, L_\infty\})$.

ТЕОРЕМА 7.1 [40]. Пусть $\{X_0, X_1\}$ – вложенная пара с полным спектром и $X_0 \supset X_1$. Пусть $0 < \theta < 1$ и $\varphi \in \Phi_0$. Тогда для любых $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$ найдется такая интерполяционная функция $\tilde{\varphi}$, что для любой полной по Гальярдо вложенной пары $Y_0 \supset Y_1$

$$\text{КО}(\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}, \{X_0, X_\theta\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\}) = \tilde{\varphi}(Y_0, Y_1)_{p_0, p_\theta},$$

где $1/p_\theta = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$.

Следовательно, взяв $\{X_0, X_1\} = \{L_1, L_\infty\}$ и $\theta = 1 - m/n$, а также $\{Y_0, Y_1\} = \{\Lambda_{1-m/n}, L_\infty\}$, приходим к оптимальному в описанном выше смысле вложению

$$W_{\varphi(L_1, L_\infty)_{p_0, p_1}}^m \subset \tilde{\varphi}(\Lambda_{1-m/n}, L_\infty)_{p_0, p_{1-n/m}}. \quad (7.1)$$

Возникает вопрос, как найти $\tilde{\varphi}$. На самом деле в [40; теорема 7.1] доказывалось, что $\text{КО}(\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}, \{X_0, X_\theta\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\}) = S(Y_0, Y_1, A, A^{1-\theta} B^\theta, \mathbf{1}, p_0, p_\theta)$, где A и B – последовательности из спектрального разложения функции φ . Тогда по теореме 3.1 о сокращении параметров

$$\tilde{\varphi}(s, t) = K\left(s, t, \mathbf{1}, \left\{l_{q_0}\left(\frac{1}{A}\right), l_{q_1}\left(\frac{1}{A^{1-\theta} B^\theta}\right)\right\}\right).$$

Но эту функцию можно найти и без привлечения спектрального разложения функции φ . В работе [40] это сделано с помощью вычисления нижнего типа пространства $\varphi(L_1, L_\infty)_{p_0, p_1}$ между L_1 и $\Lambda_{m/n}$ (см. [14; п. 11]).

Оказывается, что

$$\tilde{\varphi}(\alpha, \beta) \asymp \sup_{f \in L_\infty, \|f\|_{L_\infty} \leq \alpha, \|f\|_{M_{1-\theta}} \leq \beta} \|f\|_{\varphi^*(L_\infty, L_1)_{q_0, q_1}}, \quad (7.2)$$

где через $M_{m/n}$ обозначено пространство Марцинкевича, сопряженное к пространству Лоренца $\Lambda_{m/n}$.

Супремум в (7.2) с точностью до эквивалентности достигается на функциях, неубывающая перестановка $f^*(u)$ которых равна $\min(\alpha, \beta u^{m/n-1})$. Поэтому

$$\tilde{\varphi}(\alpha, \beta) \asymp \|Q_{\alpha, \beta}\|_{\varphi^*(L_\infty, L_1)_{q_0, q_1}}, \quad (7.3)$$

где $Q_{\alpha, \beta}(u) = \min(\alpha, \beta u^{m/n-1})$ при $0 < u < 1$, а пространство $\varphi^*(L_\infty, L_1)_{q_0, q_1}$ рассматривается на $(0, 1)$.

Вложения (7.1) известны в случаях $p_1 = 1$, $p_1 = \infty$ (пространства Орлича) и в случае $p_0 = p_1$ (пространства Лоренца с функциональными параметрами). В остальных случаях получаются новые вложения.

Список литературы

- [1] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980, 664 с.; пер. с англ.: H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978, 528 pp.; North-Holland Math. Library, **18**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, 1978, 528 pp.
- [2] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семёнов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978, 400 с.; англ. пер.: S. G. Kreĭn, Yu. I. Petunin, E. M. Semenov, *Interpolation of linear operators*, Transl. Math. Monogr., **54**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1982, xii+375 pp.
- [3] Й. Берг, Й. Лёфстрём, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980, 264 с.; пер. с англ.: J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*, Grundlehren Math. Wiss., **223**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1978, x+207 pp.
- [4] V. I. Ovchinnikov, “The method of orbits in interpolation theory”, *Math. Rep.*, **1**:2 (1984), i–x + 349–515.
- [5] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of operators*, Pure Appl. Math., **129**, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988, xiv+469 pp.
- [6] Yu. A. Brudnyi, N. Ya. Krugliak, *Interpolation functors and interpolation spaces*, v. I, North-Holland Math. Library, **47**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1991, xvi+718 pp.
- [7] V. I. Ovchinnikov, “Interpolation orbits in couples of L_p spaces”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **334**:10 (2002), 881–884.
- [8] Ming Fan, “Interpolation methods of constants and means with quasi-power function parameters”, *Math. Scand.*, **88**:1 (2001), 79–95.
- [9] V. I. Ovchinnikov, “On the description of interpolation orbits in couples of L_p spaces when they are not described by the K -method”, *Interpolation spaces and related topics* (Haifa, 1990), Israel Math. Conf. Proc., **5**, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1992, 187–206.

- [10] К. И. Осколков, “Аппроксимативные свойства суммируемых функций на множествах полной меры”, *Матем. сб.*, **103(145)**:4(8) (1977), 563–589; англ. пер.: K. I. Oskolkov, “Approximation properties of summable functions on sets of full measure”, *Math. USSR-Sb.*, **32**:4 (1977), 489–514.
- [11] S. Janson, “Minimal and maximal methods in interpolation”, *J. Funct. Anal.*, **44**:1 (1981), 50–73.
- [12] Yu. Brudnyi, A. Shteinberg, “Calderón couples of Lipschitz spaces”, *J. Funct. Anal.*, **131**:2 (1995), 459–498.
- [13] В. И. Овчинников, А. С. Титенков, “Критерий родственности квазивогнутых функций”, *Матем. заметки*, **70**:5 (2001), 780–786; англ. пер.: V. I. Ovchinnikov, A. S. Titenkov, “A criterion for contiguity of quasiconcave functions”, *Math. Notes*, **70**:5 (2001), 708–713.
- [14] В. И. Дмитриев, С. Г. Крейн, В. И. Овчинников, “Основы теории интерполяции линейных операторов”, *Геометрия линейных пространств и теория операторов*, Изд-во Ярославского ун-та, Ярославль, 1977, 31–74.
- [15] В. И. Овчинников, “Интерполяция в квазибанаховых пространствах Орлича”, *Функц. анализ и его прил.*, **16**:3 (1982), 78–79; англ. пер.: V. I. Ovchinnikov, “Interpolation in quasi-Banach Orlicz spaces”, *Funct. Anal. Appl.*, **16**:3 (1982), 223–224.
- [16] B. Maurey, G. Pisier, “Une théorème d’extrapolation et ses conséquences”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, **277**:1 (1973), 39–42.
- [17] Г. Я. Лозановский, “Замечание об одной интерполяционной теореме Кальдерона”, *Функц. анализ и его прил.*, **6**:4 (1972), 89–90; англ. пер.: G. Ya. Lozanovskii, “A remark on an interpolational theorem of Calderon”, *Funct. Anal. Appl.*, **6**:4 (1972), 333–334.
- [18] J.-L. Lions, J. Peetre, “Sur une classe d’espaces d’interpolation”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **19**:1 (1964), 5–68.
- [19] M. Milman, “The computation of the K functional for couples of rearrangement invariant spaces”, *Results Math.*, **5**:1-2 (1982), 174–176.
- [20] J. Peetre, “Sur le nombre de paramètres dans la définition de certains espaces d’interpolation”, *Ric. Mat.*, **12** (1963), 248–261.
- [21] G. Sparr, “Interpolation of weighted L_p -spaces”, *Studia Math.*, **62**:3 (1978), 229–271.
- [22] G. Bennett, “Inclusion mappings between l_p spaces”, *J. Funct. Anal.*, **13**:1 (1973), 20–27.
- [23] В. И. Овчинников, “Интерполяционные орбиты в парах пространств Лебега”, *Функц. анализ и его прил.*, **39**:1 (2005), 56–68; англ. пер.: V. I. Ovchinnikov, “Interpolation orbits in couples of Lebesgue spaces”, *Funct. Anal. Appl.*, **39**:1 (2005), 46–56.
- [24] В. И. Дмитриев, “Двойственность интерполяционных методов констант и средних”, *Докл. АН СССР*, **214**:1 (1974), 22–24; англ. пер.: V. I. Dmitriev, “Duality between the interpolation method of constants and that of means”, *Soviet Math. Dokl.*, **15** (1974), 16–19.
- [25] Е. Д. Кравишвили, “Метод средних с произвольным функциональным параметром”, Труды математического факультета. Новая серия, **7**, ВГУ, Воронеж, 2002, 58–72.
- [26] Г. Я. Лозановский, “О некоторых банаховых структурах. IV”, *Сиб. матем. журн.*, **14**:1 (1973), 140–155; англ. пер.: G. Ya. Lozanovskii, “On some Banach lattices. IV”, *Sib. Math. J.*, **14**:1 (1973), 97–108.

- [27] В. И. Овчинников, “Квазинормированные идеалы Неймана–Шаттена и теоремы вложения для обобщенных пространств средних Лионса–Петре”, *Алгебра и анализ*, **22**:4 (2010), 214–231; англ. пер.: V. I. Ovchinnikov, “The quasinormed Neumann–Schatten ideals and embedding theorems for the generalized Lions–Peetre spaces of means”, *St. Petersburg Math. J.*, **22**:4 (2011), 669–681.
- [28] L. Maligranda, “The K-functional for symmetric spaces”, *Interpolation spaces and allied topics in analysis* (Lund, 1983), Lecture Notes in Math., **1070**, Springer, Berlin, 1984, 169–182.
- [29] А. А. Седаев, “Описание интерполяционных пространств пары $(L_{\alpha_0}^p, L_{\alpha_1}^p)$ и некоторые родственные вопросы”, *Докл. АН СССР*, **209**:4 (1973), 798–800; англ. пер.: A. A. Sedaev, “Description of interpolation spaces for the pair $(L_{\alpha_0}^p, L_{\alpha_1}^p)$ and some related problems”, *Soviet Math. Dokl.*, **14** (1973), 538–541.
- [30] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамсопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965, 448 с.; англ. пер.: I. C. Gohberg, M. G. Krein, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Transl. Math. Monogr., **18**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969, xv+378 pp.
- [31] Ю. А. Брудный, С. Г. Крейн, Е. М. Семёнов, “Интерполяция линейных операторов”, *Итоги науки и техники. Матем. анализ*, **24**, ВИНТИ, М., 1986, 3–163; англ. пер.: Yu. A. Brudnyi, S. G. Krein, E. M. Semenov, “Interpolation of linear operators”, *J. Soviet Math.*, **42**:6 (1988), 2009–2112.
- [32] В. И. Дмитриев, “Об интерполяции операторов в пространствах L_p ”, *Докл. АН СССР*, **260**:5 (1981), 1051–1054; англ. пер.: V. I. Dmitriev, “On interpolation of operators in L_p spaces”, *Soviet Math. Dokl.*, **24**:2 (1981), 373–376.
- [33] А. А. Дмитриев, Е. М. Семенов, “Оптимальность интерполяционной теоремы Рисса в верхнем треугольнике”, *Докл. АН СССР*, **258**:6 (1981), 1298–1300; англ. пер.: A. A. Dmitriev, E. M. Semenov, “Optimality of the M. Riesz interpolation theorem in the upper triangle”, *Soviet Math. Dokl.*, **23**:3 (1981), 664–666.
- [34] N. Aronszajn, E. Gagliardo, “Interpolation spaces and interpolation methods”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **68**:1 (1965), 51–117.
- [35] В. И. Овчинников, “Интерполяционная теорема для равномерно ухудшающих операторов в симметричных пространствах”, *Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Естественные науки*, **3** (1998), 119–126.
- [36] M. Mastyło, “Interpolation methods of means and orbits”, *Studia Math.*, **171**:2 (2005), 153–175.
- [37] V. I. Ovchinnikov, “Criteria for embedding of spaces constructed by the method of means with arbitrary quasi-concave functional parameters”, *J. Funct. Anal.*, **228**:1 (2005), 234–243.
- [38] K. Hansson, “Imbedding theorems of Sobolev type in potential theory”, *Math. Scand.*, **45**:1 (1979), 77–102.
- [39] H. Brézis, S. Wainger, “A note on limiting cases of Sobolev embeddings and convolution inequalities”, *Comm. Partial Differential Equations*, **5**:7 (1980), 773–789.
- [40] В. И. Овчинников, “Обобщенная интерполяционная конструкция Лионса–Петре и оптимальные теоремы вложения для пространств Соболева”, *Матем. сб.*, **205**:1 (2014), 87–104; англ. пер.: V. I. Ovchinnikov, “Generalized Lions–Peetre interpolation construction and optimal embedding theorems for Sobolev spaces”, *Sb. Math.*, **205**:1 (2014), 83–100.

- [41] A. Cianchi, “Optimal Orlicz–Sobolev embeddings”, *Rev. Mat. Iberoam.*, **20**:2 (2004), 427–474.
- [42] R. Kerman, L. Pick, “Optimal Sobolev imbeddings”, *Forum Math.*, **18**:4 (2006), 535–570.
- [43] A. Gogatishvili, V.I. Ovchinnikov, “Interpolation orbits and optimal Sobolev’s embeddings”, *J. Funct. Anal.*, **253**:1 (2007), 1–17.

Владимир Иванович Овчинников
(Vladimir I. Ovchinnikov)

Воронежский государственный университет

E-mail: vio@thebat.net

Поступила в редакцию
24.12.2013