Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Кириченко, Н. А. Ежова, Конформные инварианты многообразий
Вайсмана–Грея, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 2, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm957>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 13:23:45

КОНФОРМНЫЕ ИНВАРИАНТЫ МНОГООБРАЗИЙ ВАЙСМАНА–ГРЕЯ

В. Ф. Кириченко, Н. А. Ежова

Многообразием Вайсмана–Грея (VG -многообразием) называется почти эрмитово многообразие класса $W_1 \oplus W_4$ в классификации Грея–Хервеллы [1]. Интерес к ним объясняется тем, что они образуют минимальный класс, включающий два наиболее интересных класса почти эрмитовых многообразий – приближенно келеровы многообразия и локально конформно келеровы (ллк-)многообразия. Интересной особенностью этого класса является его замкнутость относительно конформных преобразований метрики многообразия [1]. В настоящей работе выделены и изучены некоторые подклассы этого класса, обладающие аналогичным свойством.

Пусть $(M^{2n}, J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – VG -многообразие, $\mathfrak{F}(M)$ – модуль гладких векторных полей на M , ∇ – риманова связность на M , δ – оператор дифференцирования, $\Omega(X, Y) = \langle X, JY \rangle$ – фундаментальная форма структуры, $\omega = \frac{1}{n-1} \delta \Omega \circ J$ – ее форма Ли, ξ – дуальный ей вектор, называемый *вектором Ли*. Напомним [2], что в модуле $\mathfrak{F}(M)$ почти эрмитова многообразия $(M, J, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ канонически определена структура Q -алгебры $\mathfrak{B}$ над кольцом $C^\infty(M) \otimes \mathbb{C}$ комплекснозначных функций на M с операцией $X * Y = T(X, Y)$ и эрмитовой метрикой $\langle\langle X, Y \rangle\rangle = \langle X, Y \rangle + \sqrt{-1} \langle X, JY \rangle$. Поскольку в силу [1] всякое VG -многообразие является G_2 -многообразием, $\mathfrak{B}$ антикоммутативна, т.е. является K -алгеброй [2]. Введем в рассмотрение *присоединенную связность* $\tilde{\nabla} = \nabla + \mathfrak{J}$, где $\mathfrak{J}(X, Y) = T(X, Y) + \frac{1}{4} \{ \langle\langle X, Y \rangle\rangle \xi - \langle\langle \xi, Y \rangle\rangle X \}$.

Пусть R – тензор Римана–Кристоффеля, W – тензор Вейля конформной кривизны многообразия M , $\{W_{(i)}\}$, $i = 0, \dots, 7$, – его спектр [2]. Очевидно, тензоры $W_{(i)}$, $i = 0, \dots, 7$, инвариантны при конформных преобразованиях метрики многообразия и в силу свойств симметрии тензора Вейля однозначно определяются тензорами $W_{(7)}$, $W_{(0)}$, $W_{(4)}$ и $W_{(1)}$, которые мы назовем *основными конформными инвариантами* VG -многообразия. Их обращения в нуль выделяют соответствующие подклассы класса VG -многообразий, замкнутые относительно конформных преобразований метрики, которые мы обозначим C_0 , C_1 , C_2 и C_3 , соответственно. Из тождества Риччи для тензора W следует, что $C_3 \subset C_2$. Очевидно, что класс $\bigcap_{i=0}^3 C_i$ совпадает с классом конформно-плоских VG -многообразий.

ТЕОРЕМА 1. *Компактное VG -многообразие неположительной скалярной кривизны является многообразием класса C_2 тогда и только тогда, когда оно является скалярно-плоским келеровым многообразием.*

ТЕОРЕМА 2. *Компактное VG -многообразие неположительной скалярной кривизны является многообразием класса C_3 тогда и только тогда, когда оно локально голоморфно изометрично пространству $\mathbb{C}^n$, снабженному канонической келеровой структурой.*

ТЕОРЕМА 3. *Паракелерово VG -многообразие принадлежит классам C_0 и C_1 . При этом оно принадлежит классу C_2 тогда и только тогда, когда оно риччи-плоско.*

ТЕОРЕМА 4. *VG -многообразие класса C_3 точечно постоянной голоморфной секционной кривизны является многообразием Эйнштейна тогда и только тогда, когда оно имеет J -инвариантный тензор Риччи.*

ТЕОРЕМА 5. *Компактное VG -многообразие класса C_3 неположительной точечно постоянной голоморфной секционной кривизны локально голоморфно изометрично многообразию $\mathbb{C}^n$, снабженному канонической келеровой структурой.*

ТЕОРЕМА 6. *Конформно-плоское VG -многообразие является пространственной формой (т.е. пространством постоянной кривизны) тогда и только тогда, когда оно является многообразием точечно постоянной голоморфной секционной кривизны с J -инвариантным тензором Риччи.*

Напомним [3], что почти эрмитово многообразие $(M, J, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ называется *многообразием точечно постоянным (по Ванhecke) типа*, короче, *V-постоянного типа*, если $\exists c \in C^\infty(M)$ & $\langle R(X, Y), JX, JY \rangle - \langle R(X, Y), X, Y \rangle = c|X|^2|Y|^2$ ($X, Y \in \mathfrak{F}(M)$). Функция c называется *постоянной типа* многообразия. Если $c = \text{const}$, многообразие называется *многообразием глобально постоянным типа*. Почти эрмитово многообразие V-постоянного типа точечно постоянной голоморфной секционной кривизны называется *обобщенной комплексной пространственной формой* [3].

ТЕОРЕМА 7. *Компактное VG-многообразие неположительного V-постоянного типа является келеровым многообразием.*

Этот результат широко обобщает известный результат Вайсмана [4] о келеровости компактных паракелеровых локально конформно-келеровых многообразий.

ТЕОРЕМА 8. *VG-многообразие V-постоянного типа c является многообразием классов C_0 и C_1 . При этом оно является многообразием класса C_2 тогда и только тогда, когда оно является многообразием Эйнштейна. В этом случае многообразие является многообразием глобально постоянного типа $c = \frac{4}{n-1}\varepsilon$, где n – размерность многообразия, ε – константа Эйнштейна.*

Назовем VG-многообразие *псевдоконциркулярным*, если $\tilde{\nabla}_{(0)}\xi$ – скалярный оператор. Признаками таких многообразий являются приближенно келеровы многообразия (для них $\xi = 0$), лкк-многообразия Эйнштейна постоянной голоморфной секционной кривизны [5], конформно-плоские лкк-многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны [6]. Более того, справедлива

ТЕОРЕМА 9. *VG-многообразие класса C_3 точечно постоянной голоморфной секционной кривизны является псевдоконциркулярным тогда и только тогда, когда K-оператор его присоединенной K-алгебры [7] скалярен.*

ТЕОРЕМА 10. *Класс псевдоконциркулярных VG-многообразий нулевого V-постоянного типа совпадает с классом лкк-многообразий. Класс псевдоконциркулярных VG-многообразий ненулевого V-постоянного типа совпадает с классом шестимерных VG-многообразий с неинтегрируемой структурой.*

ТЕОРЕМА 11. *Обобщенная комплексная пространственная форма Вайсмана–Грея является пространственной формой тогда и только тогда, когда она является конформно-плоским VG-многообразием с J-инвариантным тензором Риччи.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gray A., Hervella L. // Ann. Math. Pure ed Apple. 1980. V. 123. №4. P. 35–58.
- [2] Кириченко В. Ф. // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Т. 18. Москва: ВИНТИ, 1986. С. 25–71. [3] Vanhecke L. // Hokkaido Math. J. 1977. V. 6. №1. P. 31–38.
- [4] Vaisman I. // Geom. Dedic. 1981. V. 10. №1–4. P. 129–134. [5] Кириченко В. Ф. // Матем. сб. 1991. Т. 182. №3. С. 354–363. [6] Кириченко В. Ф. // Матем. заметки. 1992. Т. 51. №5. С. 57–66. [7] Кириченко В. Ф. // Матем. заметки. 1981. Т. 29. №2. С. 265–278.

Московский педагогический
государственный университет

Принято редколлегией
09.01.1995