Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Мартель, Ф. Мерль, П. Рафаэль, Ж. Шефтель, Динамика вблизи солитонов и образование особенностей в L^2 -критических задачах, *УМН*, 2014, том 69, выпуск 2, 77–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9574>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 14:32:44

УДК 517.95

Динамика вблизи солитонов и образование особенностей в L^2 -критических задачах

И. Мартель, Ф. Мерль, П. Рафаэль, Ж. Шефтель

В обзоре описано современное состояние вопроса об образовании особенностей для двух канонических дисперсивных задач: L^2 -критического нелинейного уравнения Шрёдингера и L^2 -критического обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза. В частности, рассмотрен получивший в последнее время большую популярность вопрос о классификации потоков с начальными данными, близкими к солитону.

Библиография: 72 названия.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шрёдингера, обобщенное уравнение Кортевега–де Фриза, критическое уравнение, разрушение, солитон, профиль разрушения, качественное поведение решений, нелинейное дисперсивное уравнение.

DOI: 10.4213/rm9574

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	78
1.1. L^2 -критические задачи (NLS) и (gKdV)	78
1.2. Теория локального существования и разрушение	79
1.3. Основное состояние и точный порог глобального существования	79
2. L^2 -критическая задача для (NLS)	80
2.1. Разрушение с минимальной массой	80
2.2. Разрушение по закону повторного логарифма	82
2.3. Пороговая динамика	84
2.4. Структурная неустойчивость закона повторного логарифма	85
2.5. Разрушение для L^2 -суперкритической модели (NLS)	86
2.6. Задачи, критические по энергии	88
2.7. Открытые вопросы	88
3. L^2 -критическая задача (gKdV)	89
3.1. Существование разрушающихся решений	89
3.2. Описание разрушения и классификация поведения потока вблизи основного состояния	90

4. Обзор классификации потока для (gKdV)	94
4.1. Приближенный профиль разрушения	95
4.2. Нелинейное разложение потока	97
4.3. Функционал Ляпунова энергии/вириала	98
4.4. Жесткость и выбор динамики	100
4.5. Построение разрушающегося решения минимальной массы	101
4.6. Решения в режиме выхода	102
Список литературы	103

1. Введение

Изучение образования особенностей в нелинейных дисперсивных уравнениях вызвало значительный интерес за последние тридцать лет. В последнее время были разработаны мощные средства для построения и описания разрушающихся решений, позволившие доказать ряд классических гипотез в этой области. Под описанием разрушающихся решений обычно понимается нахождение скорости и профиля разрушения, а также описание поведения точек накопления. Начнем с формулировки двух основных уравнений, о которых пойдет речь ниже.

1.1. L^2 -критические задачи (NLS) и (gKdV). Целью статьи является обзор недавних достижений (сделанных за последние десять лет) в вопросе об образовании особенностей для двух канонических задач: L^2 -критического нелинейного уравнения Шрёдингера

$$(NLS) \quad \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + u|u|^{4/d} = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases} \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \quad u \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

и L^2 -критического (одномерного) обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза

$$(gKdV) \quad \begin{cases} \partial_t u + (u_{xx} + u^5)_x = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases} \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Эти две модели обладают особыми алгебраическими свойствами. Решения обеих моделей сохраняют так называемую энергию

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 - \frac{1}{2 + 4/d} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^{2+4/d} = E(u_0)$$

и массу

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |u_0|^2$$

(для (gKdV) всюду берется $d = 1$). Понятие L^2 -критичности означает, что симметрия масштабирования изучаемых уравнений:

если $u(t, x)$ – решение, то и $u_\lambda(t, x) := \begin{cases} \lambda^{d/2} u(\lambda^2 t, \lambda x) & \text{для (NLS)} \\ \lambda^{1/2} u(\lambda^3 t, \lambda x) & \text{для (gKdV)} \end{cases}$ – решение,

оставляет L^2 -норму неизменной.

1.2. Теория локального существования и разрушение. Согласно Джинибру и Вело [17], задача (1) локально корректна в $H^1(\mathbb{R}^d)$. Согласно работе Кенига, Понсе и Веги [24], задача (2) локально корректна в $H^1(\mathbb{R})$. Таким образом, для любых начальных данных $u_0 \in H^1$ можно указать число T , $0 < T \leq +\infty$, и единственное максимальное решение $u(t) \in \mathcal{C}([0, T), H^1)$ задачи (1) или (2) со следующими свойствами:

- либо $T = +\infty$ и тогда решение глобально определено в H^1 ;
- либо $T < +\infty$ и тогда решение разрушается за конечное время:

$$\lim_{t \uparrow T} \|\nabla u(t)\|_{L^2} = +\infty.$$

1.3. Основное состояние и точный порог глобального существования. Исключительные решения, распространяющиеся без деформирования (и называемые бегущими волнами или солитонами) играют важную роль в анализе задачи. Действительно, анзац

$$u(t, x) = \begin{cases} Q(x)e^{it} & \text{для (NLS),} \\ Q(x - t) & \text{для (gKdV)} \end{cases} \quad (3)$$

приводит к полулинейной эллиптической задаче

$$\Delta Q - Q + Q^{1+4/d} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

которая допускает единственное с точностью до пространственных сдвигов положительное H^1 -решение, называемое уединенной волной основного состояния. Явная вариационная характеристика решения Q , связанная с точными соболевскими оценками, позволила дать в 1980-х годах первый точный критерий глобального существования (или разрушения) решений уравнения (NLS) в работах Вейнштейна [70] и Берестецкого и Казенаве [3]. В частности, любое H^1 -начальное условие со свойством

$$\|u_0\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2}$$

порождает единственное глобальное решение $u \in \mathcal{C}([0, +\infty), H^1)$ как для (NLS), так и для (gKdV). В случае (NLS) известно также, что это решение рассеивается, т. е. ведет себя как свободная волна при $t \rightarrow +\infty$:

$$\text{существуют } u_{\pm\infty} \in H^1 \text{ такие, что } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|u(t) - e^{it\Delta} u_{\pm\infty}\|_{L^2} = 0.$$

См. об этом книгу [8] и недавний окончательный результат [9], а также имеющиеся там ссылки. Иными словами, уединенная волна основного состояния — это *наименьший недисперсионный и, тем самым, нелинейный объект*.

Во многих нелинейных задачах ожидается, что уединенные волны служат строительными блоками нелинейной динамики: при больших временах любое решение распадается на некоторое число уединенных волн и остаток, являющийся свободной волной. Для интегрируемых задач этот факт хорошо известен еще с 1960-х годов, по крайней мере на формальном уровне. Была объяснена

также роль уединенных волн в режиме разрушения: Q оказывается универсальным профилем разрушения решений, изначально близких к Q , независимо от скорости разрушения. В такой ситуации фундаментальным объектом изучения является образование особенностей. При этом вопрос о полном описании нелинейного потока вблизи уединенной волны основного состояния стал одной из важнейших и настоятельных задач в данной области.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 излагаются результаты о разрушении решений (NLS) вблизи Q , полученные в [46]–[48], [50], [53], [66]. В разделе 3 мы обсуждаем описание потока (gKdV) вблизи основного состояния, полученное в [39]–[41]. Обзор некоторых доказательств для (gKdV) приведен в разделе 4.

2. L^2 -критическая задача для (NLS)

В этом разделе содержится обзор современного состояния вопроса об образовании особенностей для L^2 -критического уравнения (NLS), а также представлены некоторые результаты по связанным с этим задачам.

2.1. Разрушение с минимальной массой. Как сказано во введении, начальные данные $u_0 \in H^1$ массы $\|u_0\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2}$ порождают глобальные ограниченные решения. Для (NLS) этот критерий является точным благодаря так называемому псевдоконформному преобразованию (хорошо известной симметрии линейного потока Шрёдингера и (NLS) в L^2 -критическом случае): если $u(t, x)$ – решение (NLS), то решением является и функция

$$v(t, x) = \frac{1}{|t|^{d/2}} u\left(-\frac{1}{t}, \frac{x}{t}\right) e^{i|x|^2/(4t)}. \quad (4)$$

Применяя это преобразование к уединенной волне $u(t, x) = Q(x)e^{it}$, получаем *явное разрушающееся решение минимальной массы*:

$$S_{\text{NLS}}(t, x) = \frac{1}{|t|^{d/2}} Q\left(\frac{x}{t}\right) e^{i|x|^2/(4t) - i/t}, \quad \|S_{\text{NLS}}(t)\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}. \quad (5)$$

Динамика, порождаемая гладкими начальными данными $S_{\text{NLS}}(-1)$, видна из явной формулы: $S_{\text{NLS}}(t)$ рассеивается при $t \rightarrow -\infty$ и разрушается при $t \uparrow 0$ со скоростью

$$\|\nabla S_{\text{NLS}}(t)\|_{L^2} \sim \frac{1}{|t|}. \quad (6)$$

Важной чертой решения (5) является *компактность* $S_{\text{NLS}}(t)$ с точностью до симметрий потока. Это означает, что вся масса уходит на образование особенностей:

$$|S_{\text{NLS}}(t)|^2 \rightharpoonup \|Q\|_{L^2}^2 \delta_{x=0} \quad \text{при } t \uparrow 0. \quad (7)$$

Интуиция подсказывает, что подобное поведение должно быть исключительным и можно ожидать классификации всех таких минимальных решений¹.

¹Это – дисперсивная интуиция, которая, например, неверна в параболическом случае (см. [4]).

Первый результат в этом направлении был доказан Мерлем с помощью псевдоконформной симметрии.

ТЕОРЕМА 1 (классификация разрушающихся решений минимальной массы [42]). Пусть $u_0 \in H^1$ и

$$\|u_0\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}.$$

Допустим, что соответствующее решение (NLS) разрушается за конечное время T , $0 < T < +\infty$. Тогда

$$u(t) = S_{\text{NLS}}(t)$$

с точностью до симметрий уравнения (NLS).

Вопрос о существовании минимальных элементов в других задачах был долгое время открыт (в основном, из-за того, что существование минимального элемента для (NLS) целиком опиралось на наличие исключительной псевдоконформной симметрии). Мерль [43] рассмотрел неоднородную задачу

$$i\partial_t u + \Delta u + k(x)u|u|^2 = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (8)$$

в которой полная группа симметрий нарушена, и получил ряд результатов о несуществовании минимальных элементов для негладких k . Напротив, в недавней работе [66] был выведен точный критерий существования и единственности минимальных решений в терминах неоднородности $k(x)$ (о существовании см. также [1]).

ТЕОРЕМА 2 (существование и единственность критического элемента для задачи (8) [66]). Пусть точка $x_0 \in \mathbb{R}^2$ такова, что

$$k(x_0) = 1 \quad \text{и} \quad \nabla^2 k(x_0) < 0.$$

Пусть энергия E_0 начального условия и удовлетворяет неравенству

$$E_0 + \frac{1}{8} \int \nabla^2 k(x_0)(y, y) Q^4 > 0. \quad (9)$$

Тогда уравнение (8) имеет единственное (с точностью до фазового сдвига) H^1 -решение энергии E_0 и критической массы, разрушающееся при $T = 0$ в точке x_0 . При этом

$$\lim_{t \rightarrow 0} \text{Im} \left(\int \nabla u \bar{u} \right) = 0. \quad (10)$$

Таким образом, при выполнении условия (9) минимальные элементы с невырожденной точкой разрушения полностью классифицированы. В [66] также показано, что условие (9) необходимо для разрушения. Доказательство теоремы 2 использует динамическую конструкцию и новые функционалы Ляпунова на уровне минимальной массы. Дальнейшее обобщение на случай нелокальной дисперсии

$$i\partial_t u - (-\Delta)^{1/2} u + u|u|^2 = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

было сделано в [27], см. также обобщение на случай неплоского основного многообразия в [5]. Эти работы показывают, что существование разрушающихся решений минимальной массы есть общее свойство, не зависящее от наличия исключительной псевдоконформной симметрии модели.

2.2. Разрушение по закону повторного логарифма. Разрушающееся решение (5) минимальной массы задается явной формулой, но соответствующий ему сценарий разрушения очевидно неустойчив, поскольку всякое возмущение $S_{\text{NLS}}(t)$ с субкритической массой приводит к глобально определенному решению. Вопрос об описании *устойчивых* разрушающихся решений вызывал значительный интерес начиная с 1980-х годов, когда были развиты точные численные методы и в работе Ландмана, Папаниколау, К. Салем и П.-Л. Салема [32] был предсказан “закон повторного логарифма” для (NLS).

Ограничимся теми начальными данными, масса которых лишь немного превышает минимальную массу, необходимую для образования особенностей:

$$u_0 \in \mathcal{B}_{\alpha^*} = \{u_0 \in H^1 \text{ и } \|Q\|_{L^2} < \|u_0\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2} + \alpha^*\}, \quad 0 < \alpha^* \ll 1. \quad (11)$$

Пользуясь техникой концентрации-компактности [33] и вариационным описанием основного состояния, мы выводим из предположения (11), что если $u(t)$ разрушается в момент времени $T < +\infty$, то для t , близких к T , имеет место нелинейное разложение решения:

$$u(t, x) = \frac{1}{\lambda(t)^{d/2}} (Q + \varepsilon) \left(t, \frac{x - x(t)}{\lambda(t)} \right) e^{i\gamma(t)}, \quad (12)$$

где

$$\lambda(t) \sim \frac{1}{\|\nabla u(t)\|_{L^2}}, \quad \|\varepsilon(t)\|_{H^1} \leq \delta(\alpha^*), \quad \lim_{\alpha^* \rightarrow 0} \delta(\alpha^*) = 0. \quad (13)$$

Из этого разложения видно, что, независимо от режима разрушения, уединенная волна основного состояния Q дает хорошее приближение к профилю разрушения. Это – отправная точка анализа с позиций теории возмущений в предположении (11). Точное описание разрушения теперь опирается на нахождение конечномерной динамической системы для надлежащим образом выбранных геометрических параметров $(\lambda(t), x(t), \gamma(t))$, накладывающейся на бесконечномерную динамику остаточного члена $\varepsilon(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Например, разложение разрушающегося решения минимальной массы (5) имеет вид

$$\lambda(t) = |t|, \quad \varepsilon(t, y) = Q(y)(e^{ib(t)|y|^2/4} - 1), \quad b(t) = |t|.$$

Все возможные режимы для $(\lambda(t), x(t), \gamma(t))$ в случае (NLS) на данный момент не известны, но был сделан ряд продвижений в понимании как “устойчивой”, так и “пороговой” динамики. В следующей теореме собраны результаты, полученные в [48], [46], [47], [50], [49], [59] (см. также [61]).

ТЕОРЕМА 4 [48], [46], [47], [50], [49], [59]. Пусть $d \leq 5$. Тогда существует универсальная константа $\alpha^* > 0$, для которой выполнены следующие утверждения. Пусть $u_0 \in \mathcal{B}_{\alpha^*}$, а $u \in \mathcal{C}([0, T], H^1)$, $0 < T \leq +\infty$, – соответствующее максимальное решение уравнения (1).

(i) Резкая L^2 -концентрация. Допустим, что $T < +\infty$. Тогда найдутся параметры $(\lambda(t), x(t), \gamma(t)) \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ и асимптотический профиль $u^* \in L^2$ такие, что

$$u(t) - \frac{1}{\lambda(t)^{d/2}} Q \left(\frac{x - x(t)}{\lambda(t)} \right) e^{i\gamma(t)} \rightarrow u^* \quad \text{в } L^2 \text{ при } t \rightarrow T. \quad (14)$$

При этом точка разрушения конечна:

$$x(t) \rightarrow x(T) \in \mathbb{R}^d \quad \text{при } t \rightarrow T.$$

(ii) Скорость разрушения. В условиях пункта (i) имеет место следующая альтернатива:

– либо решение эволюционирует в режиме повторного логарифма, т.е.

$$\lambda(t) \sqrt{\frac{\log |\log(T-t)|}{T-t}} \rightarrow \sqrt{2\pi} \quad \text{при } t \rightarrow T, \quad (15)$$

и тогда его асимптотический профиль негладкий:

$$u^* \notin H^1 \quad \text{и} \quad u^* \notin L^p \quad \text{ни при каком } p > 2; \quad (16)$$

– либо существует точная оценка снизу для t , близких к T ,

$$\lambda(t) \leq C(u_0)(T-t), \quad \text{или, что эквивалентно} \quad \|\nabla u(t)\|_{L^2} \geq \frac{C_1(u_0)}{T-t}, \quad (17)$$

и тогда асимптотический профиль таков, что

$$u^* \in H^1. \quad (18)$$

(iii) Достаточное условие для разрушения по закону повторного логарифма. Допустим, что $E_0 \leq 0$. Тогда решение разрушается за конечное время $T < +\infty$ в режиме повторного логарифма (15).

(iv) H^1 -устойчивость разрушения по закону повторного логарифма. Множество начальных данных из $\mathcal{B}_{\alpha^*}$, для которых соответствующее им решение задачи (1) разрушается за конечное время по закону повторного логарифма (15), открыто в H^1 .

Комментарии к теореме 4.

1. Закон повторного логарифма. Устойчивый сценарий разрушения по закону повторного логарифма (15) был предложен в первопроходческой работе [32] на основе формальных и вычислительных соображений. Первое строгое построение класса решений с такой скоростью разрушения было дано в работе Г. Перельман [58] для размерности $d = 1$. В доказательстве теоремы 4 используется свойство слабой коэрцитивности линеаризованного оператора вблизи Q , которое было доказано для размерности $d = 1$ в [48] и элементарным образом численно проверено в [16] для $d \leq 5$. Отсутствие явной формулы для основного состояния в размерности $d \geq 2$ создает трудности в доказательстве этого свойства.

2. Верхняя оценка скорости разрушения. Никаких общих верхних оценок для скорости разрушения $\|\nabla u(t)\|_{L^2}$ в L^2 -критическом случае не известно, даже при начальных данных $u_0 \in \mathcal{B}_{\alpha^*}$. Иначе обстоит дело в суперкритических режимах, для которых недавно была получена точная верхняя оценка (см. [54] и п. 2.5.3). Нижняя оценка (17) точна: она реализуется на минимальном разрушающемся элементе $S_{\text{NLS}}(t)$. Вывод различных возможностей для скорости разрушения, эквивалентный построению бесконечно растущих со

временем решений посредством псевдоконформной симметрии, связан с описанием потока вблизи основного состояния, для (NLS) все еще не завершающимся. Подсказку здесь могут дать результаты о классификации для L^2 -критической задачи (gKdV), приведенные в разделе 3.

3. *Квантование массы разрушения.* Сильная сходимость (14) точно описывает процесс разрушения в масштабно-инвариантном пространстве. Из нее, в частности, вытекает, что масса, ушедшая на образование особенности, квантуется:

$$|u(t)|^2 \rightharpoonup \|Q\|_{L^2}^2 \delta_{x=x(T)} + |u^*|^2 \quad \text{при } t \rightarrow T, \quad |u^*|^2 \in L^1.$$

Этот факт и сама сходимость (14) опираются на свойство асимптотической устойчивости уединенной волны в режиме разрушения, записываемое в терминах разложения (12) как

$$\varepsilon(t, x) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow T \text{ в } L_{\text{loc}}^2.$$

На самом деле вывод как верхних, так и нижних оценок скорости разрушения в доказательстве теоремы 4 тесно связан с вопросом о рассеянии для остаточного члена $\varepsilon(t, x)$. Такие асимптотические теоремы впервые появились для дисперсионных уравнений в [36], а значительным продвижением стал недавний классификационный результат (без ограничений на размер начальных данных) для волновых уравнений, критических по энергии [11].

4. *Асимптотический профиль.* Регулярность асимптотического профиля u^* напрямую зависит от режима разрушения потому, что регулярная и особая части решения тесно связаны между собой в устойчивом режиме повторного логарифма, но лишь слабо взаимодействуют при любом другом режиме.

2.3. Пороговая динамика. Теорема 4 описывает устойчивое разрушение по закону повторного логарифма в окрестности солитона. Но ею не исчерпывается вопрос о разрушении для (NLS) даже с начальными данными $u_0 \in \mathcal{B}_{\alpha^*}$. Так, остается еще изучить неустойчивые режимы разрушения вблизи Q . Явное разрушающееся решение $S_{\text{NLS}}(t)$ минимальной массы, определенное в (4), очевидно неустойчиво, но Бургейн и Ван [6] заметили, что при некоторых специальных возмущениях его начального условия сохраняется разрушение со скоростью $1/t$. Избыток массы в этом режиме уходит на образование *плоского и гладкого* асимптотического профиля в момент разрушения, а общий сценарий разрушения остается неизменным.

ТЕОРЕМА 5 (решения Бургейна–Вана [6]). Пусть $d = 1, 2$, а функция u^* такова, что

$$u^* \in X_A = \{f \in H^A \text{ с условием } (1 + |x|^A)f \in L^2\} \quad (19)$$

и

$$D^\alpha u^*(0) = 0 \quad \text{при } 1 \leq |\alpha| \leq A \quad (20)$$

для некоторого достаточно большого A . Тогда существует такое решение $u_{\text{BW}} \in \mathcal{C}((-\infty, 0), H^1)$ задачи (1), разрушающееся при $t = 0$, $x = 0$, для которого

$$u_{\text{BW}}(t) - S_{\text{NLS}}(t) \rightarrow u^* \quad \text{в } H^1 \text{ при } t \uparrow 0. \quad (21)$$

Более подробная формулировка дана в [6], а в [29] дополнительно обсуждается построение многообразия решений Бургейна–Вана. Заметим, что на разрушающихся решениях Бургейна–Вана реализуется нижняя оценка (17):

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2} \sim \frac{1}{T-t}.$$

Напомним, что рассеивающиеся решения L^2 -устойчивы в силу оценок Стрихарца и теории L^2 -критической задачи Коши [7]. С другой стороны, по теореме 4, решения из $\mathcal{B}_\alpha^*$, разрушающиеся за конечное время в режиме повторного логарифма, образуют открытое подмножество в H^1 . Решения Бургейна–Вана в некотором смысле отвечают пороговой неустойчивой динамике между этими двумя классами устойчивой динамики, как было показано в [53].

ТЕОРЕМА 6 (неустойчивость решений Бургейна–Вана [53]). *Пусть $d = 2$, функция u^* удовлетворяет условиям (19) и (20), а $u_{\text{BW}} \in \mathcal{C}((-\infty, 0), H^1)$ – соответствующее ей решение Бургейна–Вана. Тогда существует непрерывное отображение*

$$\eta \in [-1, 1] \rightarrow u^\eta(-1) \in \Sigma = \{f \in H^1(\mathbb{R}^d) \text{ с условием } xf \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$$

такое, что, обозначая через $u^\eta(t)$ решение (1) с начальным условием $u^\eta(-1)$ при $t = -1$, имеем

- $u^{\eta=0}(t) \equiv u_{\text{BW}}(t)$;
- для любого $\eta \in (0, 1]$ решение $u^\eta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \Sigma)$ определено глобально по времени и рассеивается;
- для любого $\eta \in [-1, 0)$ решение $u^\eta \in \mathcal{C}((-\infty, T^\eta), \Sigma)$ разрушается в режиме повторного логарифма в момент времени T^η , $-1 < T^\eta < 0$.

Отметим, что эта теорема описывает поток вблизи решения Бургейна–Вана вдоль только одного направления неустойчивости. Основной открытый вопрос для (NLS) состоит в полном описании потока вблизи основного состояния Q . Теорема 6 есть первый шаг к описанию потока вблизи решений Бургейна–Вана, что также является интересной нерешенной задачей (см. п. 2.7 и [29]).

2.4. Структурная неустойчивость закона повторного логарифма.

С моделью (NLS) тесно связана имеющая фундаментальное физическое значение система Захарова с пространственной размерностью $d = 2, 3$ (см. [69], [71]):

$$\text{(система Захарова)} \quad \begin{cases} iu_t = -\Delta u + nu, \\ \frac{1}{c_0^2} n_{tt} = \Delta n + \Delta |u|^2, \end{cases} \quad (22)$$

для некоторой фиксированной константы c_0 , $0 < c_0 < +\infty$. В пределе $c_0 \rightarrow +\infty$ формально получается (NLS). В размерности $d = 2$ эта система имеет ту же вариационную структуру, что и (NLS), хотя симметрия масштабирования нарушена волновым взаимодействием. С помощью бифуркации из точного решения $S_{\text{NLS}}(t)$ уравнения (NLS) Глангета и Мерль [18] построили однопараметрическое семейство разрушающихся решений со скоростью разрушения

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2} \sim \frac{C(u_0)}{T-t}.$$

Численные эксперименты (Папаниколау, К. Салем, П.-Л. Салем, Ван [57]) указывают на устойчивость этих решений. Напомним также, что по результату Мерля [44] для всех разрушающихся за конечное время решений системы (22) верна нижняя оценка

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2} \geq \frac{C(u_0)}{T-t}.$$

В частности, у системы (22) нет решений, управляемых законом повторного логарифма, так что разрушение решений для динамики Захарова является в некотором смысле более устойчивым, чем для ее асимптотического предела (NLS). Это еще раз указывает на то, что устойчивый закон повторного логарифма для (NLS) тесно связан со специфической алгебраической структурой (NLS), как видно и из использования нелинейного вырождения при анализе разрушения решений в теореме 4. Подчеркнем, что подробное изучение образования особенностей для системы Захарова остается во многом открытым вопросом, хотя его можно считать первым шагом на пути к пониманию физически значимых более сложных систем, связанных с уравнениями Максвелла.

2.5. Разрушение для L^2 -суперкритической модели (NLS). Рассмотрим L^2 -суперкритическую модель (NLS):

$$(NLS) \quad \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + u|u|^{p-1} = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases} \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \quad (23)$$

где выбрано

$$p > 1 + \frac{4}{d}.$$

Симметрия масштабирования для (23) задается преобразованием

$$u_\lambda(t, x) = \lambda^{2/(p-1)} u(\lambda^2 t, \lambda x),$$

а однородное соболевское пространство, инвариантное относительно этой симметрии, есть $\dot{H}^{s_c}(\mathbb{R}^d)$, где

$$s_c = \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1},$$

причем $s_c > 0$ соответствует L^2 -суперкритическому случаю. Задача называется *субкритической по энергии* при $s_c < 1$, *критической по энергии* при $s_c = 1$ и *суперкритической по энергии* при $s_c > 1$. Следующие три результата для случая L^2 -суперкритического (NLS) были получены методами, развитыми для доказательства приведенных выше теорем. Этим иллюстрируется мощность указанных методов.

2.5.1. Решения в виде стоящих колец. Рассмотрим уравнение (NLS) пятой степени (т. е. (23) при $p = 5$), которое является L^2 -критическим в размерности $d = 1$ и L^2 -суперкритическим в размерностях $d \geq 2$. Радиально симметричные решения, разрушающиеся вдоль (нетривиальной) сферы, были построены в [60] для размерности $d = 2$ и в [65] для размерностей $d \geq 3$. Заметим, что сюда входят случаи, субкритические по энергии ($d = 2$), критические по энергии

($d = 3$) и суперкритические по энергии ($d \geq 4$). Эвристически, в полярных координатах задача принимает вид

$$i\partial_t u + \partial_r^2 u + \frac{N-1}{r}\partial_r u + u|u|^4 = 0$$

и ожидается, что при образовании особенности на единичной сфере мы имеем вблизи особенности соотношения

$$\left| \frac{\partial_r u}{r} \right| \sim |\partial_r u| \ll |\partial_r^2 u|,$$

так что в старшем порядке динамика разрушения должна описываться одномерным уравнением (NLS) пятой степени. В соответствии с этим, решения с разрушением вдоль сферы были построены в любой размерности $d \geq 2$ с помощью возмущения динамики повторного логарифма для L^2 -критического одномерного (NLS).

Дальнейшие обобщения последовали в [20], [21], [72], где были построены разрушающиеся осесимметричные решения для кубического (NLS).

2.5.2. Автомоделные решения. В L^2 -суперкритическом случае есть гипотеза о том, что так называемый автомоделный режим разрушения

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2} \sim \frac{1}{(T-t)^{1/(p-1)+1/2-d/4}} \quad \text{при } t \sim T \quad (24)$$

является устойчивым. В частности, это подтверждается численными расчетами (см., например, [69]). В работе [52] эта гипотеза была доказана для “слабо” L^2 -суперкритического случая. А именно, для фокусирующего нелинейного уравнения Шрёдингера (23) с параметром $p > 1 + 4/d$, достаточно близким к $1 + 4/d$, установлены существование и H^1 -устойчивость автомоделной динамики с разрушением за конечное время, а также дано качественное описание образования особенности вблизи момента разрушения. Эти результаты получены методами теории возмущений из приведенного в п. 2.2 анализа закона повторного логарифма для L^2 -критического случая.

2.5.3. Решения в виде схлопывающихся колец. Для нелинейного уравнения Шрёдингера (23) при $d \geq 2$ и со значениями параметра p в интервале

$$1 + \frac{4}{d} < p < \min\left(\frac{d+2}{d-2}, 5\right)$$

в работе [54] показано, что любое радиально-симметричное решение $u(t)$, разрушающееся в момент T , удовлетворяет универсальной верхней оценке

$$\int_t^T (T-\tau) \|\nabla u(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \leq C(u_0)(T-t)^{2\alpha/(1+\alpha)}, \quad (25)$$

где α выражается формулой

$$\alpha = \frac{5-p}{(p-1)(N-1)}.$$

Верхняя оценка (25) неуллучшаема, так как она достигается на некотором семействе схлопывающихся кольцевых разрушающихся решений. Существование этого семейства было впервые формально предсказано в [15]. Построение кольцевых решений в [54] использует мощный метод доказательства существования *минимальных разрушающихся элементов*, развитый в [66]. В частности, эти решения *не рассеиваются*, т. е. вся L^2 -масса решения концентрируется в начале координат, когда t стремится к моменту разрушения.

2.6. Задачи, критические по энергии. В последнее время большой интерес вызывают задачи, критические по энергии, в том числе волновые отображения, шрёдингеровские отображения и гармонический тепловой поток:

$$(\text{волновые отображения}) \quad \partial_{tt}u - \Delta u = (|\nabla u|^2 - |\partial_t u|^2)u,$$

$$(\text{шрёдингеровские отображения}) \quad u \wedge \partial_t u = \Delta u + |\nabla u|^2 u,$$

$$(\text{гармонический тепловой поток}) \quad \partial_t u = \Delta u + |\nabla u|^2 u,$$

$(t, x) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, $u(t, x) \in \mathbb{S}^2$. В этих задачах имеются стационарные решения основного состояния, минимизирующие соответствующую энергию. Эта энергия также инвариантна при симметрии масштабирования каждой из задач. Давно стоявший вопрос о существовании разрушающихся решений был решен в [30], [67], [62] для волновых отображений и в [51] для шрёдингеровских отображений. Новые примеры динамики для связанных с этими моделями полулинейных волновых уравнений, в том числе поведение, подобное основному состоянию, или разрушение за бесконечное время, были приведены в [28], [10]. Для гармонического теплового потока полный список устойчивых и неустойчивых режимов разрушения был получен в работах [63], [64], проливающих новый свет на устройство потока вблизи основного состояния. Эти работы позволяют лучше понять сценарии разрушения через нахождение явных режимов, но полное описание потока еще далеко не завершено даже для начальных данных вблизи основного состояния. Еще одна серия работ [11], [12] ставит целью классифицировать все возможные способы поведения решений (включая так называемую “гипотезу о разрешении солитона”) для критических по энергии фокусирующих нелинейных волновых уравнений в размерности 3.

2.7. Открытые вопросы. Приведем (неисчерпывающий) список интересных открытых вопросов, связанных с описанием потока вблизи уединенной волны основного состояния для L^2 -критического уравнения (NLS).

1. Образуется ли множество начальных данных, отвечающих решениям Бургейна–Вана, многообразие коразмерности 1? На это указывают работы [53] и [29].

2. В [59] показано, что для начальных условий, близких к основному состоянию в энергетическом пространстве, разрушение решений либо протекает в режиме повторного логарифма, либо идет со скоростью, не меньшей, чем при конформном разрушении (см. п. 2.2). Существуют ли в H^1 решения, скорость разрушения которых строго больше конформной? С этим связан также вопрос о существовании общей верхней оценки на скорость разрушения.

3. Можно ли дать полную классификацию поведения потока вблизи уединенной волны в духе результатов, недавно полученных для L^2 -критического уравнения (gKdV) в работах [39]–[41] (см. раздел 3)?

3. L^2 -критическая задача (gKdV)

Опишем здесь положение дел в L^2 -критической задаче (gKdV) (см. (2)), включая недавние результаты, полученные в [39]–[41]. Модель (gKdV) одномерна, и в качестве Q берется единственное (с точностью до сдвига) явное H^1 -решение уравнения $Q'' + Q^5 = Q$, а именно $Q(x) = 3^{1/4} \cosh^{-1/2}(2x)$.

3.1. Существование разрушающихся решений. Как сказано во введении, из локальной H^1 -теории задачи Коши (Кениг, Понсе и Вега [24]) и вариационного описания основного состояния (Вейнштейн [70]) вытекает, что начальные условия из H^1 с субкритической массой $\|u_0\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2}$ порождают глобальные по времени H^1 -решения. Рассеяние известно только для (неконтролируемо) малых L^2 -данных [25]. Мы изучаем эту модель потому, что она похожа на (NLS), но не обладает специфической структурой задачи (NLS) и, в частности, не имеет псевдоконформной симметрии. Заметим, что последние достижения для критических (NLS), (gKdV) и других нелинейных дисперсивных моделей помогают друг другу: каждый новый результат или подход в одной из моделей служит источником вдохновения для остальных.

Изучение образования особенностей для начальных данных из H^1 с массой, близкой к минимальной, т. е.

$$\|Q\|_{L^2} \leq \|u_0\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2} + \alpha^* \quad \text{для } \alpha^* \ll 1, \quad (26)$$

было начато в серии работ [34], [35], [45], [36], [38], [37]. Как и для (NLS), из вариационных ограничений вытекает, что если выполнено (26) и решение разрушается за конечное время $T < +\infty$, то оно допускает вблизи момента разрушения разложение вида

$$u(t, x) = \frac{1}{\lambda^{1/2}(t)} (Q + \varepsilon) \left(t, \frac{x - x(t)}{\lambda(t)} \right), \quad \text{где } \|\varepsilon(t)\|_{H^1} \leq \delta(\alpha^*), \quad (27)$$

причем $\lim_{\alpha^* \rightarrow 0} \delta(\alpha^*) = 0$. Поэтому, как и для (NLS), задача сводится к пониманию связи между конечномерной динамикой солитонной части (здесь это $(\lambda(t), x(t))$) и динамикой остатка $\varepsilon(t)$. В работах [34], [45], [36], [37] были введены два новых приема для (gKdV), позднее перенесенные и на (NLS):

- формула монотонности и локализованные тождества вириала по ε ;
- теоремы типа Лиувилля о классификации асимптотических решений.

Классическая гипотеза о существовании разрушающейся динамики была доказана в [45], [37]. Первоначальное доказательство в [45] было непрямым и опиралось на классификацию из [34]. Основная информация о структуре разрушения была получена в [36], включая асимптотическую устойчивость Q как профиля разрушения, т. е. то, что

$$\varepsilon(t) \rightarrow 0 \quad \text{в } L^2_{\text{loc}} \text{ при } t \rightarrow T.$$

При дополнительном предположении

$$\int_{x' > x} u_0^2(x') dx' < \frac{C}{x^6} \quad \text{для } x > 0 \quad (28)$$

первый результат о разрушении за конечное время для решений с отрицательной энергией, удовлетворяющих условию (11), был получен в [37] вместе с частичной информацией о скорости разрушения:

$$\|\nabla u(t_n)\|_{L^2} \lesssim \frac{C_u}{T - t_n} \quad \text{для подпоследовательности } t_n \rightarrow T.$$

Ниже мы увидим, что предположения об убывании типа (28) действительно необходимы для разрушения за конечное время. Наконец, в [38] показано, что H^1 -решения минимальной массы $\|u_0\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$ с убыванием на правой полуоси (28) определены глобально по времени ($t \geq 0$). Этим исключается существование разрушения с минимальной массой при условии (28).

3.2. Описание разрушения и классификация поведения потока вблизи основного состояния. В недавних работах [39]–[41] было дано полное описание потока вблизи основного состояния и тем самым завершены результаты из [34], [35], [45], [36]–[38]. Уточненные по сравнению с этими более ранними работами результаты были получены с помощью техники, развитой для изучения (NLS) [48], [46], [47], [50], [49], [59] и геометрических задач, критических по энергии [62], [51], [63].

Рассмотрим следующее множество начальных данных:

$$\mathcal{A} = \left\{ u_0 = Q + \varepsilon_0 \text{ при } \|\varepsilon_0\|_{H^1} < \alpha_0 \text{ и } \int_{y>0} y^{10} \varepsilon_0^2 < 1 \right\} \quad \text{для малого } \alpha_0 > 0.$$

Для уравнения (gKdV) необходимо рассматривать начальные данные, убывающие на правой полуоси, а не просто принадлежащие энергетическому пространству (см. теорему 11). Это – фундаментальное отличие от случая (NLS), несмотря на многие общие черты.

ТЕОРЕМА 7 (разрушение решений неположительной энергии из $\mathcal{A}$ [39]). Пусть $0 < \alpha_0 \ll 1$ и $u_0 \in \mathcal{A}$. Если $E(u_0) \leq 0$ и u_0 – не солитон, то $u(t)$ разрушается за конечное время T и существует число $\ell_0 = \ell_0(u_0) > 0$ такое, что

$$\|u_x(t)\|_{L^2} = \frac{\|Q'\|_{L^2} + o(1)}{\ell_0(T - t)} \quad \text{при } t \rightarrow T. \quad (29)$$

При этом найдутся $\lambda(t)$, $x(t)$ и $u^* \in H^1$, $u^* \neq 0$, такие, что

$$u(t, x) - \frac{1}{\lambda^{1/2}(t)} Q\left(\frac{x - x(t)}{\lambda(t)}\right) \rightarrow u^* \quad \text{в } L^2 \text{ при } t \rightarrow T, \quad (30)$$

$$\lambda(t) = (\ell_0 + o(1))(T - t), \quad x(t) = \left(\frac{1}{\ell_0^2} + o(1)\right) \frac{1}{T - t} \quad \text{при } t \rightarrow T, \quad (31)$$

Комментарии к теореме 7.

1. *Скорость разрушения и устойчивость разрушения.* Важной частью теоремы 7 является оценка скорости разрушения для $u_0 \in \mathcal{A}$ с неположительной энергией:

$$\|u_x(t)\|_{L^2} \sim \frac{C(u_0)}{T-t}. \quad (32)$$

Из нее, в частности, вытекает, что $x(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow T$. Таким образом, концентрирующийся солитон и остаточный член u^* пространственно разделяются. Заметим, что скорость разрушения в теореме 7 намного превышает ту, которая была бы для (gKdV) при масштабируемом разрушении: $\|u_x(t)\|_{L^2} \sim c(T-t)^{-1/3}$ (см. [51], [63] об аналогичном скачке в геометрических задачах, критических по энергии).

В дополнение к теореме 7 укажем, что множество начальных данных из $\mathcal{A}$, приводящих к разрушению по формулам (29)–(31), открыто в H^1 -топологии (см. [39]). Таким образом, разрушение со скоростью $(T-t)^{-1}$ является *устойчивым* для (gKdV) в отличие от (NLS).

2. *Убывание на правой полуоси.* Подчеркнем важность условия убывания начальных данных на правой пространственной полуоси, игравшего фундаментальную роль и в более ранних работах [37], [38]. Действительно, в отличие от уравнения (NLS), универсальная динамика теперь не может быть прослежена в H^1 и нужно дополнительно предположить убывание на правой полуоси (см. теорему 11 ниже). Однако мы не утверждаем, что вес y^{10} является оптимальным в условиях теоремы 7.

3. *Динамическое описание решения Q .* Напомним вариационное описание решения Q : если $E(u_0) \leq 0$, то $\|u_0\|_{L^2} > \|Q\|_{L^2}$, кроме случая, когда $u_0 \equiv Q$ с точностью до симметрий масштабирования и сдвига. Теорема 7 дает динамическое описание Q как единственного глобального решения нулевой энергии из $\mathcal{A}$, наподобие критического по массе уравнения (NLS), см. [50].

Ключом к полному описанию потока вокруг Q является случай минимальной массы, разбираемый в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 8 (существование и единственность разрушающегося элемента минимальной массы [40]).

(i) *Существование.* Существует решение $S_{\text{KdV}}(t) \in \mathcal{C}((0, +\infty), H^1)$ уравнения (2) с минимальной массой

$$\|S_{\text{KdV}}(t)\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2},$$

разрушающееся в начале координат при обратном ходе времени:

$$\begin{aligned} \|S_{\text{KdV}}(t)\|_{H^1} &= \frac{\|Q'\|_{L^2} + o(1)}{t} \quad \text{при } t \downarrow 0, \\ S_{\text{KdV}}(t, x) - \frac{1}{t^{1/2}} Q\left(\frac{x + 1/t + \bar{c}t}{t}\right) &\rightarrow 0 \quad \text{в } L^2 \text{ при } t \downarrow 0, \end{aligned} \quad (33)$$

где $\bar{c}$ – универсальная константа.

(ii) *Единственность.* Пусть функция $u_0 \in H^1$ такова, что $\|u_0\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$ и соответствующее ей решение $u(t)$ задачи (2) разрушается за конечное время.

Тогда

$$u \equiv S_{\text{KdV}}$$

с точностью до симметрий потока.

Итак, здесь содержится как существование решения минимальной массы для критической задачи (gKdV), вполне аналогичного $S_{\text{NLS}}(t)$, так и аналог классификационного результата Мерля для (NLS), т.е. теоремы 1. В отсутствие псевдоконформной симметрии единственность из теоремы 8 является чисто динамическим результатом, тесно связанным с анализом неоднородной модели (NLS) в работе [66]. Существование же связано с универсальностью “режима выхода” (см. теорему 9 ниже и набросок доказательства в разделе 4).

Заметим, что решение $S_{\text{KdV}}(t)$ разрушается с той же скоростью, что и устойчивые разрушающиеся решения из теоремы 7. Однако разрушение с минимальной массой неустойчиво при возмущениях. Например, начальное условие $S_\varepsilon(-1) = (1 - \varepsilon)S_{\text{KdV}}(-1)$ при $0 < \varepsilon < 1$ имеет субкритическую массу и, следовательно, порождает глобально определенные и ограниченные решения.

Мы напомним теперь основной результат работ [39], [40], классифицирующий поведение потока для начальных данных из $\mathcal{A}$. Определим L^2 -модулированную трубочатую окрестность солитонного многообразия:

$$\mathcal{T}_{\alpha^*} = \left\{ u \in H^1 \text{ с условием } \inf_{\lambda_0 > 0, x_0 \in \mathbb{R}} \left\| u - \frac{1}{\lambda_0^{1/2}} Q \left(\frac{\cdot - x_0}{\lambda_0} \right) \right\|_{L^2} < \alpha^* \right\}. \quad (34)$$

Здесь α_0 и α^* – универсальные константы, удовлетворяющие неравенствам

$$0 < \alpha_0 \ll \alpha^* \ll 1. \quad (35)$$

ТЕОРЕМА 9 (жесткость динамики в $\mathcal{A}$ [39], [40]). Для $u_0 \in \mathcal{A}$ возможны только три сценария:

(Разрушение) Для всех $t \in [0, T)$ имеем $u(t) \in \mathcal{T}_{\alpha^*}$, и решение разрушается за конечное время $T < +\infty$ в режиме, описанном в теореме 7: (29), (30) и (31).

(Солитон) Решение глобально определено, для всех $t \geq 0$ имеем $u(t) \in \mathcal{T}_{\alpha^*}$, и найдутся $\lambda_\infty > 0$ и $x(t)$ такие, что

$$\lambda_\infty^{1/2} u(t, \lambda_\infty \cdot + x(t)) \rightarrow Q \quad \text{в } H_{\text{loc}}^1 \text{ при } t \rightarrow +\infty, \quad (36)$$

$$|\lambda_\infty - 1| \leq o_{\alpha_0 \rightarrow 0}(1), \quad x(t) \sim \frac{t}{\lambda_\infty^2} \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \quad (37)$$

(Выход) Существует $t^* \in (0, T)$ такое, что $u(t^*) \notin \mathcal{T}_{\alpha^*}$. Пусть $t_u^* \gg 1$ – соответствующее время выхода:

$$t_u^* = \sup\{0 < t < T : \forall t' \in [0, t], u(t') \in \mathcal{T}_{\alpha^*}\}. \quad (38)$$

Тогда можно указать число $\tau^* = \tau^*(\alpha^*)$ (не зависящее от u) и параметры (λ_u^*, x_u^*) такие, что

$$\|(\lambda_u^*)^{1/2} u(t_u^*, \lambda_u^* x + x_u^*) - S_{\text{KdV}}(\tau^*, x)\|_{L^2} \leq \delta(\alpha_0),$$

где $\delta(\alpha_0) \rightarrow 0$ при $\alpha_0 \rightarrow 0$.

Теорема 9 классифицирует все возможные способы поведения решений, начальные данные которых принадлежат $\mathcal{A}$, а также описывает долговременную динамику в режиме выхода. Этот вопрос неожиданно оказался тесно связанным с динамикой в случае минимальной массы. Действительно, всякое выходящее решение в момент выхода близко к универсальному профилю $S_{\text{KdV}}(\tau^*)$ с точностью до большого дефокусирующего масштабирования $\lambda_u^* \gg 1$, при условии дисперсивного поведения. Ввиду универсальности S_{KdV} как аттрактора всех выходящих решений, важный открытый вопрос состоит в том, чтобы продолжить теорему 9, поняв поведение $S_{\text{KdV}}(t)$ при $t \rightarrow +\infty$. В случае критического по массе уравнения (NLS) его решение $S_{\text{NLS}}(t)$ рассеивается при $t \rightarrow \infty$. Рассеяние $S_{\text{KdV}}(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ является нерешенной задачей². Наша гипотеза состоит в том, что $S_{\text{KdV}}(t)$ действительно рассеивается. Поскольку рассеяние является открытым свойством в L^2 (см. [25]), отсюда вытекает приводимое ниже следствие.

СЛЕДСТВИЕ 10 [40]. *Допустим, что $S_{\text{KdV}}(t)$ рассеивается при $t \rightarrow +\infty$. Тогда всякое решение, описываемое сценарием выхода, глобально определено для всех положительных времен и рассеивается при $t \rightarrow +\infty$.*

Связанные с этим теоремы жесткости вблизи уединенных волн были также получены в работах Наканиши, Шлага [55], [56] и Кригера, Наканиши, Шлага [28] для суперкритических волновых уравнений и уравнений Шрёдингера. Эти авторы использовали методы теории инвариантных множеств Берестецкого и Казенаве [3], подход Кенига–Мерля через концентрацию-компактность [23], классификацию минимальной динамики [13], [14], и еще одну дополнительную лемму о невозвращении для режима выхода. Эта лемма утверждает, что решение в режиме выхода не может вернуться назад к солитонам и постепенно рассеивается. (В критических ситуациях требуется более тонкий анализ, который еще не завершен, см. [28].) В работах [55], [56] как утверждение о разрушении, так и лемма о невозвращении опираются на специальную алгебраическую структуру – тождество вириала, которое отсутствует для (gKdV). Приведенные выше результаты для (gKdV) основаны на явном вычислении решений во всех режимах, а не на алгебраических тождествах типа вириала. Действительно, вводя разложение (27), можно показать, что в старшем порядке $\lambda(t)$ удовлетворяет системе

$$\lambda_{tt} = 0, \quad \lambda(0) = 1. \quad (39)$$

Грубо говоря, наши три режима (Выход), (Разрушение), (Солитон) отвечают соответственно случаям, когда $\lambda_t(0) > 0$, $\lambda_t(0) < 0$, и пороговой динамике $\lambda_t(0) = 0$. Подробности приведены в следующем разделе.

Теперь мы укажем широкий диапазон скоростей разрушения, включая рост за бесконечное время, для начальных данных $u_0 \notin \mathcal{A}$, медленно убывающих на правой полуоси. В частности, скорость разрушения $1/(T-t)$ имела универсальное значение в $\mathcal{A}$ вследствие обыкновенного дифференциального уравнения старшего порядка (39), которое может быть обосновано только в предположении убывания $u_0 \in \mathcal{A}$. Но если начальное условие убывает медленно, то его

²Под рассеянием в случае (gKdV) понимается существование решения $v(t, x)$ уравнения Эйри $\partial_t v + v_{xxx} = 0$ такого, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|S_{\text{KdV}}(t) - v(t)\|_{L^2} = 0$.

хвост может взаимодействовать с уединенной волной, движущейся вправо, и это иногда приводит к новым экзотическим сингулярным режимам.

ТЕОРЕМА 11 (экзотические скорости разрушения [41]).

(i) Разрушение за конечное время. *Для каждого $\nu > 11/13$ существует решение $u \in \mathcal{C}((0, T_0), H^1)$ уравнения (2), разрушающееся в момент времени $t = 0$ и такое, что*

$$\|u_x(t)\|_{L^2} \sim t^{-\nu} \quad \text{при } t \rightarrow 0^+. \quad (40)$$

(ii) Рост за бесконечное время. *Существует решение $u \in \mathcal{C}([T_0, +\infty), H^1)$ уравнения (2), растущее до $+\infty$ и такое, что*

$$\|u_x(t)\|_{L^2} \sim e^t \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \quad (41)$$

Для каждого $\nu > 0$ существует решение $u \in \mathcal{C}([T_0, +\infty), H^1)$ уравнения (2), растущее до $+\infty$ и такое, что

$$\|u_x(t)\|_{L^2} \sim t^\nu \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \quad (42)$$

Более того, такие решения могут быть выбраны сколь угодно близкими к солитонам в H^1 -метрике.

Из доказательства теоремы 11 вытекает, что скорость разрушения напрямую связана с поведением начального условия на правой полуоси. В частности, изменяя хвост начального условия, можно построить решения с другими скоростями разрушения. Подобное явление было отмечено Густафсоном, Наканиши и Цаем [19] для глобальных по времени растущих решений гармонического теплового потока, критического по энергии. В [19] приведена явная формула, выражающая рост решения на бесконечности непосредственно через начальные условия. Континуумы различных скоростей разрушения для волновых задач, критических по энергии, были приведены в первопроходческих работах Кригера, Шлага и Татару [30], [31], см. также работу Доннингера и Кригера [10]. Отметим также результаты об устойчивости [2] и разрушении за конечное время [51] для критических по энергии шрёдингеровских отображений. Все эти результаты указывают на то, что критической топологии самой по себе недостаточно для классификации поведения потока вблизи основного состояния.

4. Обзор классификации потока для (gKdV)

Наша цель в этом разделе – дать простой обзор доказательства теоремы о классификации для потока (gKdV), включая свойство жесткости, формально выписанное в (39), из которого легко выводятся три сценария, указанные в теореме 9.

Обозначения. Обозначим через

$$Lf = -f'' + f - 5Q^4f \quad (43)$$

линеаризованный оператор в точке Q . Напомним оператор масштабирования:

$$f^\lambda = \frac{1}{\lambda^{1/2}} f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

и введем генератор L^2 -масштабирования:

$$\Lambda f = -\frac{\partial f^\lambda}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=1} = \frac{1}{2}f + yf'.$$

Скалярное произведение в L^2 обозначается через $(f, g) = \int fg \, dx$.

4.1. Приближенный профиль разрушения. Наш анализ начинается с изучения профиля решения в старшем порядке. Важно знать неустойчивые направления потока вблизи Q : выбор между ними и приводит к сценариям из теоремы 9. Будем искать решение задачи (gKdV) в виде перенормированного пузыря

$$u(t, x) = \frac{1}{\lambda^{1/2}(t)} v\left(s, \frac{x - x(t)}{\lambda(t)}\right), \quad \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\lambda^3}. \quad (44)$$

Получаем эволюционное уравнение

$$\partial_s v + (v_{yy} - v + v^5)_y + \left(\frac{x_s}{\lambda} - 1\right)v_y - \frac{\lambda_s}{\lambda}\Lambda v = 0.$$

Заморозим уравнения модуляции

$$\frac{x_s}{\lambda} - 1 = 0, \quad -\frac{\lambda_s}{\lambda} = b \quad (45)$$

и будем следовать стратегии построения разрушающихся решений, предложенной в работах [46], [62], [66]: ищем медленно модулированный профиль

$$v(s, y) = Q_{b(s)}(y), \quad Q_b = Q + bP_1 + b^2P_2 + \dots.$$

Надо подобрать такой закон изменения параметра b , который гарантировал бы разрешимость получающейся системы на $(P_i)_{i \geq 1}$. В терминах разложений

$$b_s = -c_2b^2 - c_3b^3 + \dots, \quad Q_b = Q + bP_1 + b^2P_2 + \dots, \quad v(s, y) = Q_{b(s)}(y)$$

мы хотим решить следующую систему, разлагая по степеням параметра b :

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_s v + (v_{yy} - v + v^5)_y + \left(\frac{x_s}{\lambda} - 1\right)v_y - \frac{\lambda_s}{\lambda}\Lambda v \\ &= b_s \frac{\partial Q_b}{\partial b} + ((Q_b)_{yy} - Q_b + Q_b^5)_y + b\Lambda Q_b. \end{aligned}$$

- В порядке $O(1)$ получается уравнение уединенной волны:

$$(Q_{yy} - Q + Q^5)_y = 0.$$

- В порядке $O(b)$ имеем уравнение

$$\Lambda Q + (LP_1)' = 0, \quad (46)$$

где L – оператор, определенный в (43). Из инвариантности относительно сдвигов вытекает существование (единственного в силу теории обыкновенных дифференциальных уравнений) нетривиального элемента ядра: $LQ' = 0$. Следовательно, для разрешимости уравнения (46) требуется условие сокращения

$$(\Lambda Q, Q) = 0,$$

которое и в самом деле выполняется благодаря L^2 -критической инвариантности задачи. Однако, поскольку $\int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda Q \neq 0$, решение P_1 уравнения (46) будет иметь нетривиальный рост либо на правой полуоси, либо на левой. Выберем в качестве P_1 то единственное решение (46), которое экспоненциально убывает при $y \rightarrow +\infty$, но ведет себя как ненулевая константа при $y \rightarrow -\infty$.

- В порядке $O(b^2)$ получаем уравнение вида

$$-c_2 P_1 + (LP_2 + N(P_1))' = 0,$$

где $N(P_1)$ – некоторое явно выписываемое нелинейное выражение. Условие разрешимости

$$(-c_2 P_1 + (N(P_1))', Q) = 0$$

приводит после ряда вычислений к выбору

$$c_2 = 2.$$

Поэтому на формальном уровне мы получаем *универсальную* динамическую систему, управляющую эволюцией геометрических параметров:

$$b_s = -2b^2, \quad b = -\frac{\lambda_s}{\lambda}, \quad \frac{x_s}{\lambda} = 1, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\lambda^3} \quad (47)$$

или, эквивалентно,

$$\lambda_{tt} = 0, \quad x_t = \frac{1}{\lambda^2}, \quad b = -\lambda^2 \lambda_t. \quad (48)$$

В силу масштабной инвариантности всегда можно выбрать $\lambda(0) = 1$, и тогда фазовый портрет системы (48) выглядит так.

- Если $b(0) := b_0 < 0$, то $\lambda(t) = 1 - b_0 t \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.
- Если $b_0 = 0$, то $\lambda(t) = 1$ для всех $t \geq 0$.
- Если $b_0 > 0$, то $\lambda(t) = 1 - b_0 t$ обращается в нуль в точке $T = 1/b_0$ и интегрированием от T до t получаем, что $\lambda(t) = b_0(T - t)$.

Дальнейший анализ сводится к доказательству того, что для начальных условий из $\mathcal{A}$ описанная динамическая система управляет главной по порядку солитонной частью решения, так что три режима, указанных в теореме 9, соответствуют возмущениям трех приведенных выше случаев. Как и для конечномерной системы (48), первый и третий режимы устойчивы, а второй описывает неустойчивую пороговую динамику.

4.2. Нелинейное разложение потока. Всякое решение $u(t, x)$ уравнения (2), близкое в H^1 -смысле к солитону, допускает разложение

$$u(t, x) = \frac{1}{\lambda^{1/2}(t)}(Q_{b(t)} + \varepsilon)(s, y), \quad y = \frac{x - x(t)}{\lambda(t)}, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\lambda^3(t)},$$

где (s, y) – перенормированные временная и пространственная переменные. Параметры $(b(t), \lambda(t), x(t))$, описывающие смещение вдоль солитонного семейства, можно однозначно зафиксировать так, чтобы для ε выполнялись, тождественно по времени, следующие условия ортогональности:

$$(\varepsilon, Q) = (\varepsilon, \Lambda Q) = (\varepsilon, y\Lambda Q) = 0. \quad (49)$$

Этот выбор условий ортогональности обоснован в лемме 12 ниже. Перенормированный поток для ε принимает вид

$$\varepsilon_s - (L\varepsilon)_y = \left(\frac{\lambda_s}{\lambda} + b\right)\Lambda Q + \left(\frac{x_s}{\lambda} - 1\right)Q' + \frac{\lambda_s}{\lambda}\Lambda\varepsilon + O(b^2 + |b_s| + |\varepsilon|^2). \quad (50)$$

Динамическая система, управляющая параметрами (b, λ, x) , выводится из этого уравнения и (49). По сравнению с идеализированной системой (47), она содержит дополнительные возмущающие члены, возникающие из b^2 , b_s и ε . Обычно из конструкции Q_b и (необходимых в этом месте) условий убывания начальных данных вытекает оценка вида

$$|b_s + 2b^2| + \left|\frac{\lambda_s}{\lambda} + b\right| \lesssim \int |\varepsilon|^2 e^{-|y|} + O(b^3). \quad (51)$$

Для обоснования динамики остается обеспечить равномерную оценку на $\varepsilon(s)$ в надлежащей норме, выбор которой имеет существенное значение.

Пренебрегая пока членами порядка два и выше в уравнении на ε , изучим упрощенную модель

$$\tilde{\varepsilon}_s - (L\tilde{\varepsilon})_y = \alpha(s)\Lambda Q + \beta(s)Q'. \quad (52)$$

Для нее можно доказать следующую формулу монотонности.

ЛЕММА 12. Пусть $\tilde{\varepsilon}(s, y)$ удовлетворяет уравнению (52) и условиям ортогональности (49). Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Закон сохранения энергии на уровне $\tilde{\varepsilon}$:

$$\forall s, \quad (L\tilde{\varepsilon}(s), \tilde{\varepsilon}(s)) = (L\tilde{\varepsilon}(0), \tilde{\varepsilon}(0)). \quad (53)$$

2. Оценка вирialа

$$\frac{d}{ds} \int y \tilde{\varepsilon}^2 = -H(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon}), \quad (54)$$

где

$$H(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon}) = \int (3\tilde{\varepsilon}_y^2 + \tilde{\varepsilon}^2 - 5Q^4\tilde{\varepsilon}^2 + 20yQ'Q^3\tilde{\varepsilon}^2) \geq \mu_0 \|\tilde{\varepsilon}(s)\|_{H^1}^2. \quad (55)$$

3. Смешанная оценка вириала и монотонности энергии: для $B \gg 1$ и $\mu_1 > 0$ имеем

$$\frac{d}{ds} \left[\int \left(\tilde{\varepsilon}_y^2 \psi \left(\frac{y}{B} \right) + \tilde{\varepsilon}^2 \varphi \left(\frac{y}{B} \right) - 5Q^4 \tilde{\varepsilon}^2 \psi \left(\frac{y}{B} \right) \right) \right] + \mu_1 \int (\tilde{\varepsilon}_y^2 + \tilde{\varepsilon}^2) \varphi' \left(\frac{y}{B} \right) \leq 0, \quad (56)$$

$$\int \left(\tilde{\varepsilon}_y^2 \psi \left(\frac{y}{B} \right) + \tilde{\varepsilon}^2 \varphi \left(\frac{y}{B} \right) - 5Q^4 \tilde{\varepsilon}^2 \psi \left(\frac{y}{B} \right) \right) \geq \mu_1 \int \left(\tilde{\varepsilon}_y^2 \psi \left(\frac{y}{B} \right) + \tilde{\varepsilon}^2 \varphi \left(\frac{y}{B} \right) \right), \quad (57)$$

где гладкие функции φ и ψ удовлетворяют

$$\varphi(y) = \begin{cases} e^y & \text{при } y < -1, \\ 1 + y & \text{при } -1/2 < y < 1/2, \\ y & \text{при } y > 1, \end{cases} \quad \varphi' \geq 0 \quad \text{на } \mathbb{R}, \quad (58)$$

$$\psi(y) = \begin{cases} e^{2y} & \text{при } y < -1, \\ 1 & \text{при } y > -1/2, \end{cases} \quad \psi' \geq 0 \quad \text{на } \mathbb{R}. \quad (59)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тождества (53) и (54) доказываются прямым вычислением на основе уравнения для ε и классических свойств оператора L (см. [70]). Коэрцитивность $H(\varepsilon, \varepsilon)$ установлена в [34]. Оценка (56) получается прямым вычислением и оценками из неравенства (55), примененного к надлежащей локализации решения ε . Здесь точно сопрягаются результаты о монотонности из [34] (напоминающие о сглаживающем эффекте Като [22]) и локализованные оценки вириала. Свойство коэрцитивности (57) вытекает из хорошо известных свойств оператора L : для $\mu > 0$

$$(\varepsilon, Q) = (\varepsilon, y\Lambda Q) = (\varepsilon, \Lambda Q) = 0 \quad \Rightarrow \quad (L\varepsilon, \varepsilon) \geq \mu \|\varepsilon\|_{H^1}^2$$

(см. [70]), и соображений локализации.

4.3. Функционал Ляпунова энергии/вириала. Смешанные энергетические оценки Моравец (56) обеспечивают как поточечные оценки для граничного члена, так и пространственно-временную оценку в некоторой локальной норме. На нелинейном уровне эти средства требуют тонкого обращения из-за пространственной локализации: основная трудность в том, чтобы следить за нелинейными членами с помощью только тех весовых норм, которые указаны в (56). Эта трудность хорошо известна, и наш выбор весов (φ, ψ) сделан именно для ее преодоления. Наличие оператора смещения $(\lambda_s/\lambda)\Lambda\varepsilon$ в правой части уравнения (50) также препятствует пространственной локализации, и здесь нам требуется условие убывания на правой пространственной полуоси, т.е. условие $u_0 \in \mathcal{A}$. Такая стратегия контролирования остаточного члена ε с помощью смешанных оценок энергии/вириала уже применялась к задачам о разрушении в работах [62], [66], но там провести пространственную локализацию было легче. Стратегия, разработанная для (gKdV) в [39], такова.

При фиксированном $B \gg 1$ определим весовые нормы

$$\mathcal{N}(s) = \int \left(\varepsilon_y^2 \psi \left(\frac{y}{B} \right) + \varepsilon^2 \varphi \left(\frac{y}{B} \right) \right)$$

и нелинейный функционал

$$\mathcal{F}_i(s) = \int \left(\varepsilon_y^2 \psi \left(\frac{y}{B} \right) + \varepsilon^2 (1 + \mathcal{J}_i) \varphi \left(\frac{y}{B} \right) - \frac{1}{3} ((\varepsilon + Q_b)^6 - Q_b^6 - 6\varepsilon Q_b^5) \psi \left(\frac{y}{B} \right) \right),$$

где введены следующие нелинейные поправки низшего порядка³:

$$\mathcal{J}_i = (1 - J_1)^{-4i} - 1, \quad J_1 = (\varepsilon, \rho_1), \quad \rho_1(y) = \frac{4}{(\int Q)^2} \int_{-\infty}^y \Lambda Q.$$

Тогда методом Ляпунова получается результат о монотонности, имеющий вид индуктивно улучшаемой оценки⁴.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13 [39]. Пусть на некотором интервале $[0, s_0]$ выполнены следующие условия.

(H1) Малость:

$$\|\varepsilon(s)\|_{L^2} + |b(s)| + \mathcal{N}(s) \leq \kappa^*. \quad (60)$$

(H2) Сравнимость b и λ :

$$\frac{|b(s)| + \mathcal{N}(s)}{\lambda^2(s)} \leq \kappa^*. \quad (61)$$

(H3) Весовая L^2 -оценка на правой полуоси:

$$\int_{y>0} y^{10} \varepsilon^2(s, x) dx \leq 10 \left(1 + \frac{1}{\lambda^{10}(s)} \right). \quad (62)$$

Тогда на $[0, s_0]$ для $B \gg 1$, $\mu > 0$ имеют место следующие оценки:

(i) масштабно-инвариантная ляпуновская оценка

$$\frac{d}{ds} \mathcal{F}_1 + \mu \int (\varepsilon_y^2 + \varepsilon^2) \varphi' \left(\frac{y}{B} \right) \lesssim |b|^4; \quad (63)$$

(ii) масштабно-весовая H^1 -ляпуновская оценка

$$\frac{d}{ds} \left\{ \frac{\mathcal{F}_2}{\lambda^2} \right\} + \frac{\mu}{\lambda^2} \int (\varepsilon_y^2 + \varepsilon^2) \varphi' \left(\frac{y}{B} \right) \lesssim \frac{|b|^4}{\lambda^2}; \quad (64)$$

(iii) поточечные оценки

$$|J_1| + |J_2| \lesssim \mathcal{N}^{1/2}, \quad (65)$$

$$\mathcal{N} \lesssim \mathcal{F}_j \lesssim \mathcal{N}, \quad j = 1, 2.$$

³Их можно при первом чтении игнорировать.

⁴Именно с его помощью мы и следим за нелинейными членами.

4.4. Жесткость и выбор динамики. Заметим, что оценка (64) контролирует рассеивающиеся слагаемые ε независимо от динамики и потому выполняется во всех возможных режимах: разрушения, солитонного поведения или выхода. В частности, (64) сводит оценку ε к контролю только лишь параметра b . Пользуясь этой оценкой и конечномерным эволюционным уравнением (51), получаем следующую формулу жесткости для b .

ЛЕММА 14 (оценка динамики параметра b , [39]). *Если выполнены условия (Н1)–(Н3) предложения 13, то при $0 \leq s_1 \leq s_2 < s_0$ имеем*

$$\left| \frac{b(s_2)}{\lambda^2(s_2)} - \frac{b(s_1)}{\lambda^2(s_1)} \right| \leq \frac{C^*}{10} \left[\frac{b^2(s_1)}{\lambda^2(s_1)} + \frac{b^2(s_2)}{\lambda^2(s_2)} + \frac{\mathcal{N}(s_1)}{\lambda^2(s_1)} \right] \quad (66)$$

для некоторой универсальной константы $C^* > 0$.

Три сценария из теоремы 9 напрямую вытекают из (66). Действительно, есть только две возможности.

– Либо найдется момент времени s_1 , когда $|b(s_1)|$ доминирует над ε в том смысле, что

$$\frac{|b(s_1)|}{\lambda^2(s_1)} \gg \frac{\mathcal{N}(s_1)}{\lambda^2(s_1)}. \quad (67)$$

Тогда, согласно (66) и априорным оценкам (60), (61), это свойство распространяется на все последующие времена и мы имеем

$$\forall s_2 \geq s_1, \quad \frac{b(s_2)}{\lambda^2(s_2)} \sim \frac{b(s_1)}{\lambda^2(s_1)} = c_0 \neq 0.$$

Тем самым, в силу (51),

$$\frac{b}{\lambda^2} \sim \frac{-\lambda_s}{\lambda^3} = -\lambda_t \sim c_0.$$

Если $c_0 > 0$, то λ обращается в нуль за конечное время T , $\lambda(t) \sim c_0(T-t)$, и это соответствует режиму разрушения. Если $c_0 < 0$, то λ (а значит, и b) растет и решение $u(t)$ удаляется в L^2 -метрике от уединенной волны: это режим выхода. Заметим, что условие (67) открыто, так что оба этих режима устойчивы.

– Либо такого момента времени s_1 не существует. Это означает, что

$$\forall s_1 \quad \frac{|b(s_1)|}{\lambda^2(s_1)} \ll \frac{\mathcal{N}(s_1)}{\lambda^2(s_1)}, \quad \text{т.е.} \quad |b(s_1)| \lesssim \mathcal{N}(s_1).$$

Тогда из пространственно-временных оценок на ε постепенно выводится, что

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\lambda_s}{\lambda} \right| \lesssim \int_0^{+\infty} |b(s)| ds \lesssim \int_0^{+\infty} \mathcal{N}(s) ds < +\infty$$

и, тем самым,

$$\lambda(s) \rightarrow \lambda_\infty > 0 \quad \text{при } s \rightarrow +\infty.$$

Это и есть пороговый режим солитонной динамики.

4.5. Построение разрушающегося решения минимальной массы.

Построение решения минимальной массы и нахождение универсального поведения решений в режиме выхода осуществляются одним и тем же приемом, основанным на компактности. Минимальное разрушающееся решение из теоремы 8 получается как предел некоторой последовательности *дефокусирующих* решений. А именно, выберем последовательность *хорошо подготовленных* начальных условий

$$u_n(0) = Q_{b_n(0)}, \quad b_n(0) = -\frac{1}{n},$$

которые по построению имеют субкритическую массу

$$\|u_n(0)\|_{L^2} - \|Q\|_{L^2} \sim \frac{c}{n}.$$

Они необходимо эволюционируют в режиме выхода по терминологии из теоремы 9. Обозначим соответствующие времена выхода через t_n^* . Точное описание потока на временном интервале $[0, t_n^*]$ известно из [39] (а также из формальных рассуждений раздела 3). В частности, мы знаем, что решение допускает разложение вида

$$u_n(t, x) = \frac{1}{\lambda_n^{1/2}(t)} (Q_{b_n(t)} + \varepsilon_n) \left(t, \frac{x - x_n(t)}{\lambda_n(t)} \right), \quad (68)$$

где пара (b_n, λ_n) ведет себя в старшем порядке так:

$$\begin{aligned} \frac{b_n(t)}{\lambda_n^2(t)} &\sim b_n(0) = -\frac{1}{n}, & (\lambda_n)_t &\sim -b_n(0), \\ \lambda_n(t) &\sim 1 - b_n(0)t, & b_n(t) &\sim b_n(0)\lambda_n^2(t). \end{aligned} \quad (69)$$

В момент выхода t_n^* решение движется строго по направлению от уединенной волны, что в наших обозначениях записывается формулой

$$b_n(t_n^*) \sim -\alpha^*,$$

причем α^* не зависит от n . Эта формула позволяет нам вычислить t_n^* и вывести из (69), что решение дефокусирующее:

$$\lambda_n^2(t_n^*) \sim \frac{b_n(t_n^*)}{b_n(0)} \sim n\alpha^* \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

Теперь перенормируем поток в момент времени t_n^* , определив решение (gKdV) формулой

$$v_n(\tau, x) = \lambda_n^{1/2}(t_n^*) u_n(t_\tau, \lambda_n(t_n^*)x + x_n(t_n^*)), \quad t_\tau = t_n^* + \tau \lambda_n^3(t_n^*).$$

Прямое вычисление дает для v_n разложение

$$v_n(\tau, x) = \frac{1}{\lambda_{v_n}^{1/2}(\tau)} (Q_{b_{v_n}} + \varepsilon_{v_n}) \left(\tau, \frac{x - x_{v_n}(\tau)}{\lambda_{v_n}(\tau)} \right),$$

в котором, согласно симметриям потока,

$$\begin{aligned}\lambda_{v_n}(\tau) &= \frac{\lambda_n(t_\tau)}{\lambda_n(t_n^*)}, & x_{v_n}(\tau) &= \frac{x_n(t_\tau) - x_n(t_n)}{\lambda_n(t_n^*)}, \\ b_{v_n}(\tau) &= b_n(t_\tau), & \varepsilon_{v_n}(\tau) &= \varepsilon_n(t_\tau).\end{aligned}$$

Перенормированные параметры можно вычислить из (69) с точностью до старшего порядка:

$$\begin{aligned}\lambda_{v_n}(\tau) &\sim \frac{1}{\lambda_n(t_n^*)} [1 - b_n(0)(t_n^* + \tau \lambda_n^3(t_n^*))] \\ &\sim \frac{1}{\lambda_n(t_n^*)} [\lambda_n(t_n^*) - \tau b_n(0) \lambda_n^3(t_n^*)] \sim 1 - \tau b_n(t_n^*) \sim 1 + \tau \alpha^*.\end{aligned}$$

Заметим, что закон эволюции $\lambda_{v_n}(\tau)$ в этом порядке не зависит от n . Это замечательное свойство имеет решающее значение для нашего подхода. Устремляя n к $+\infty$, выделим слабо сходящуюся в H^1 последовательность $v_n(0) \rightharpoonup v(0)$ такую, что соответствующие решения $v(\tau)$ уравнения (gKdV) разрушаются при обратном ходе времени в момент $\tau^* \sim -1/\alpha^*$ со скоростью разрушения $\lambda_v(\tau) \sim \tau - \tau^*$, как и ожидалось. Для выделения слабого предела нужны равномерные оценки на рассеивающийся остаток ε_{v_n} . Здесь важно, что начальные условия $u_n(0)$ *хорошо подготовлены*, откуда вытекают равномерные оценки на $\varepsilon_{v_n}(0) = \varepsilon_{u_n}(t_n^*)$ в H^1 , позволяющие нам использовать слабую H^1 -непрерывность потока для предельных переходов. Наконец, из слабой сходимости получаем, что $\|v\|_{L^2} \leq \|Q\|_{L^2}$. Но поскольку решение $v(\tau)$ разрушается за конечное время, $\|v\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$.

По поводу единственности отсылаем читателя к [40].

4.6. Решения в режиме выхода. Докажем универсальность S_{KdV} как аттрактора в случае выхода. Для этого рассмотрим последовательность начальных данных $(u_0)_n$ с $\|(u_0)_n\|_{L^2} \rightarrow \|Q\|_{L^2}$ при $n \rightarrow +\infty$, соответствующие которым решения уравнения (gKdV) находятся в режиме выхода. Запишем эти решения в момент выхода по формуле (68), перенормируем поток и выделим слабый предел при $n \rightarrow +\infty$, как выше. Доказательство проводится так же, как при построении решения минимальной массы, только теперь начальные данные не являются хорошо подготовленными и, тем самым, нет равномерной H^1 -оценки на $v_n(0)$. Эту трудность можно обойти с помощью двух дополнительных рассуждений:

1) концентрация-компактность последовательности решений в критическом L^2 -пространстве в духе [23] (тут используются средства, развитые в [68] и [26] для группы Эйри) позволяет нам выделить нетривиальный слабый предел при надлежащих ограничениях на динамику;

2) уточненные *локальные* H^1 -оценки на $v_n(\tau)$ гарантируют, что L^2 -предел указанной последовательности на самом деле принадлежит H^1 .

Следовательно, этот слабый предел является разрушающимся H^1 -элементом минимальной массы. По утверждению о единственности из теоремы 8 он равен S_{KdV} с точностью до симметрий уравнения. Этим доказано последнее заключение теоремы 9.

Список литературы

- [1] V. Banica, R. Carles, T. Duyckaerts, “Minimal blow-up solutions to the mass-critical inhomogeneous NLS equation”, *Comm. Partial Differential Equations*, **36**:3 (2010), 487–531.
- [2] I. Bejenaru, D. Tataru, *Near soliton evolution for equivariant Schrödinger maps in two spatial dimensions*, Mem. Amer. Math. Soc., **228**, № 1069, 2014, 108 pp.; 2010, 95 pp., arXiv: 1009.1608.
- [3] H. Berestycki, T. Cazenave, “Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein–Gordon non linéaires”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **293**:9 (1981), 489–492.
- [4] A. Blanchet, J. A. Carrillo, N. Masmoudi, “Infinite time aggregation for the critical Patlak–Keller–Segel model in $\mathbb{R}^2$ ”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **61**:10 (2008), 1449–1481.
- [5] T. Boulenger, *Explosion des solutions de Schrödinger de masse critique sur une variété riemannienne*, thèse de doctorat en mathématiques, Université Paris-Sud XI, Orsay, 2012, 209 pp.
- [6] J. Bourgain, W. Wang, “Construction of blowup solutions for the nonlinear Schrödinger equation with critical nonlinearity”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **25**:1-2 (1997), 197–215.
- [7] T. Cazenave, F. B. Weissler, “Some remarks on the nonlinear Schrödinger equation in the critical case”, *Nonlinear semigroups, partial differential equations and attractors* (Washington, DC, 1987), Lecture Notes in Math., **1394**, Springer, Berlin, 1989, 18–29.
- [8] T. Cazenave, *Semilinear Schrödinger equations*, Courant Lect. Notes Math., **10**, New York Univ., Courant Inst. Math. Sci., New York, NY; Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, xiv+323 pp.
- [9] B. Dodson, *Global well-posedness and scattering for the mass critical nonlinear Schrödinger equation with mass below the mass of the ground state*, 2011, 36 pp., arXiv: 1104.1114.
- [10] R. Donninger, J. Krieger, “Nonscattering solutions and blowup at infinity for the critical wave equation”, *Math. Ann.*, **357**:1 (2013), 89–163; 2012 (v3 – 2013), 53 pp., arXiv: 1201.3258.
- [11] T. Duyckaerts, C. E. Kenig, F. Merle, “Universality of the blow-up profile for small type II blow-up solutions of the energy-critical wave equation: the nonradial case”, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, **14**:5 (2012), 1389–1454.
- [12] T. Duyckaerts, C. Kenig, F. Merle, *Classification of radial solutions of the focusing, energy-critical wave equation*, 2012, 47 pp., arXiv: 1204.0031.
- [13] T. Duyckaerts, F. Merle, “Dynamics of threshold solutions for energy-critical wave equation”, *Int. Math. Res. Pap. IRMP*, 2008, rpn002, 67 pp.
- [14] T. Duyckaerts, F. Merle, “Dynamic of threshold solutions for energy-critical NLS”, *Geom. Funct. Anal.*, **18**:6 (2009), 1787–1840.
- [15] G. Fibich, N. Gavish, X.-P. Wang, “Singular ring solutions of critical and supercritical nonlinear Schrödinger equations”, *Phys. D*, **231**:1 (2007), 55–86.
- [16] G. Fibich, F. Merle, P. Raphaël, “Proof of a spectral property related to the singularity formation for the L^2 critical nonlinear Schrödinger equation”, *Phys. D*, **220**:1 (2006), 1–13.
- [17] J. Ginibre, G. Velo, “On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case”, *J. Funct. Anal.*, **32**:1 (1979), 1–32.
- [18] L. Glangetas, F. Merle, “Existence of self-similar blow-up solutions for Zakharov equation in dimension two. I”, *Comm. Math. Phys.*, **160**:1 (1994), 173–215.

- [19] S. Gustafson, K. Nakanishi, T.-P. Tsai, “Asymptotic stability, concentration and oscillation in harmonic map heat-flow, Landau–Lifschitz and Schrödinger maps on $\mathbb{R}^2$ ”, *Comm. Math. Phys.*, **300**:1 (2010), 205–242.
- [20] J. Holmer, S. Roudenko, “A class of solutions to the 3D cubic nonlinear Schrödinger equation that blows up on a circle”, *Appl. Math. Res. Express AMRX*, 2011, №1, 23–94.
- [21] J. Holmer, S. Roudenko, “Blow-up solutions on a sphere for the 3D quintic NLS in the energy space”, *Anal. PDE*, **5**:3 (2012), 475–512.
- [22] T. Kato, “On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg–de Vries equation”, *Studies in applied mathematics*, Adv. Math. Suppl. Stud., **8**, Academic Press, New York, 1983, 93–128.
- [23] C. E. Kenig, F. Merle, “Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, nonlinear Schrödinger equation in the radial case”, *Invent. Math.*, **166**:3 (2006), 645–675.
- [24] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, “Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg–de Vries equation via the contraction principle”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **46**:4 (1993), 527–620.
- [25] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, “On the concentration of blow up solutions for the generalized KdV equation critical in L^2 ”, *Nonlinear wave equations* (Providence, RI, 1998), Contemp. Math., **263**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 131–156.
- [26] R. Killip, S. Kwon, S. Shao, M. Visan, “On the mass-critical generalized KdV equation”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **32**:1 (2012), 191–221.
- [27] J. Krieger, E. Lenzmann, P. Raphaël, “Nondispersive solutions to the L^2 -critical half-wave equation”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **209**:1 (2013), 61–129; 2012, 51 pp., arXiv:1203.2476.
- [28] J. Krieger, K. Nakanishi, W. Schlag, “Global dynamics away from the ground state for the energy-critical nonlinear wave equation”, *Amer. J. Math.*, **135**:4 (2013), 935–965; 2010, 26 pp., arXiv:1010.3799.
- [29] J. Krieger, W. Schlag, “Non-generic blow-up solutions for the critical focusing NLS in 1-D”, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, **11**:1 (2009), 1–125.
- [30] J. Krieger, W. Schlag, D. Tataru, “Renormalization and blow up for charge one equivariant critical wave maps”, *Invent. Math.*, **171**:3 (2008), 543–615.
- [31] J. Krieger, W. Schlag, D. Tataru, “Slow blow-up solutions for the $H^1(\mathbb{R}^3)$ critical focusing semilinear wave equation”, *Duke Math. J.*, **147**:1 (2009), 1–53.
- [32] M. J. Landman, G. C. Papanicolaou, C. Sulem, P.-L. Sulem, “Rate of blowup for solutions of the nonlinear Schrödinger equation at critical dimension”, *Phys. Rev. A* (3), **38**:8 (1988), 3837–3843.
- [33] P.-L. Lions, “The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. I”, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **1**:2 (1984), 109–145.
- [34] Y. Martel, F. Merle, “A Liouville theorem for the critical generalized Korteweg–de Vries equation”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **79**:4 (2000), 339–425.
- [35] Y. Martel, F. Merle, “Instability of solitons for the critical generalized Korteweg–de Vries equation”, *Geom. Funct. Anal.*, **11**:1 (2001), 74–123.
- [36] Y. Martel, F. Merle, “Stability of blow-up profile and lower bounds for blow-up rate for the critical generalized KdV equation”, *Ann. of Math.* (2), **155**:1 (2002), 235–280.
- [37] Y. Martel, F. Merle, “Blow up in finite time and dynamics of blow up solutions for the L^2 -critical generalized KdV equation”, *J. Amer. Math. Soc.*, **15**:3 (2002), 617–664 (electronic).
- [38] Y. Martel, F. Merle, “Nonexistence of blow-up solution with minimal L^2 -mass for the critical gKdV equation”, *Duke Math. J.*, **115**:2 (2002), 385–408.

- [39] Y. Martel, F. Merle, P. Raphaël, *Blow up for the critical gKdV equation I: dynamics near the soliton*, 2012, 66 pp., [arXiv:1204.4625](#).
- [40] Y. Martel, F. Merle, P. Raphaël, *Blow up for the critical gKdV equation II: minimal mass solution*, 2012, 59 pp., [arXiv:1204.4624](#).
- [41] Y. Martel, F. Merle, P. Raphaël, *Blow up for the critical gKdV equation III: exotic regimes*, 2012, 44 pp., [arXiv:1209.2510](#).
- [42] F. Merle, “Determination of blow-up solutions with minimal mass for nonlinear Schrödinger equations with critical power”, *Duke Math. J.*, **69**:2 (1993), 427–454.
- [43] F. Merle, “Nonexistence of minimal blow-up solutions of equations $iu_t = -\Delta u - k(x)|u|^{4/N}u$ in $\mathbb{R}^N$ ”, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, **64**:1 (1996), 33–85.
- [44] F. Merle, “Lower bounds for the blowup rate of solutions of the Zakharov equation in dimension two”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **49**:8 (1996), 765–794.
- [45] F. Merle, “Existence of blow-up solutions in the energy space for the critical generalized KdV equation”, *J. Amer. Math. Soc.*, **14**:3 (2001), 555–578.
- [46] F. Merle, P. Raphael, “Sharp upper bound on the blow-up rate for the critical nonlinear Schrödinger equation”, *Geom. Funct. Anal.*, **13**:3 (2003), 591–642.
- [47] F. Merle, P. Raphaël, “On universality of blow-up profile for L^2 critical nonlinear Schrödinger equation”, *Invent. Math.*, **156**:3 (2004), 565–672.
- [48] F. Merle, P. Raphaël, “The blow up dynamic and upper bound on the blow-up rate for critical nonlinear Schrödinger equation”, *Ann. of Math. (2)*, **161**:1 (2005), 157–222.
- [49] F. Merle, P. Raphaël, “Profiles and quantization of the blow up mass for critical nonlinear Schrödinger equation”, *Comm. Math. Phys.*, **253**:3 (2005), 675–704.
- [50] F. Merle, P. Raphaël, “On a sharp lower bound on the blow-up rate for the L^2 critical nonlinear Schrödinger equation”, *J. Amer. Math. Soc.*, **19**:1 (2006), 37–90 (electronic).
- [51] F. Merle, P. Raphaël, I. Rodnianski, *Blow up dynamics for smooth data equivariant solutions to the energy critical Schrödinger map problem*, 2011, 8 pp., [arXiv:1102.4308](#); *Invent. Math.* (to appear).
- [52] F. Merle, P. Raphaël, J. Szeftel, “Stable self-similar blow-up dynamics for slightly L^2 super-critical NLS equations”, *Geom. Funct. Anal.*, **20**:4 (2010), 1028–1071.
- [53] F. Merle, P. Raphaël, J. Szeftel, *The instability of Bourgain–Wang solutions for the L^2 critical NLS*, 2010, 41 pp., [arXiv:1010.5168](#); *Amer. Math. J.* (to appear).
- [54] F. Merle, P. Raphaël, J. Szeftel, *On collapsing ring blow up solutions to the mass supercritical NLS*, 2012, 48 pp., [arXiv:1202.5218](#).
- [55] K. Nakanishi, W. Schlag, “Global dynamics above the ground state energy for the focusing nonlinear Klein–Gordon equation”, *J. Differential Equations*, **250**:5 (2011), 2299–2333.
- [56] K. Nakanishi, W. Schlag, “Global dynamics above the ground state energy for the cubic NLS equation in 3D”, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **44**:1–2 (2012), 1–45; 2010 (v2 – 2011), 47 pp., [arXiv:1007.4025](#).
- [57] G. C. Papanicolaou, C. Sulem, P. L. Sulem, X. P. Wang, “Singular solutions of the Zakharov equations for Langmuir turbulence”, *Phys. Fluids B*, **3**:4 (1991), 969–980.
- [58] G. Perelman, “On the formation of singularities in solutions of the critical nonlinear Schrödinger equation”, *Ann. Henri Poincaré*, **2**:4 (2001), 605–673.
- [59] P. Raphaël, “Stability of the log-log bound for blow up solutions to the critical nonlinear Schrödinger equation”, *Math. Ann.*, **331**:3 (2005), 577–609.
- [60] P. Raphaël, “Existence and stability of a solution blowing up on a sphere for an L^2 -supercritical nonlinear Schrödinger equation”, *Duke Math. J.*, **134**:2 (2006), 199–258.
- [61] P. Raphaël, “On the singularity formation for the nonlinear Schrödinger equation”, *Evolution equations*, Lecture notes from the Clay Mathematics Institute Summer School (ETH, Zürich, June 23–July 18, 2008), Clay Math. Proc., **17**, Amer. Math. Soc., Providence, RI; Clay Math. Institute, Cambridge, MA, 2013, 269–324.

- [62] P. Raphaël, I. Rodnianski, “Stable blow up dynamics for the critical co-rotational wave maps and equivariant Yang–Mills problems”, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **115**:1 (2012), 1–122; 2009, 89 pp., arXiv:0911.0692.
- [63] P. Raphaël, R. Seiwinger, “Stable blowup dynamics for the 1-corotational energy critical harmonic heat flow”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **66**:3 (2013), 414–480.
- [64] P. Raphaël, R. Seiwinger, “Slow blow up solutions for the 1-corotational harmonic heat flow”, preprint.
- [65] P. Raphaël, J. Szeftel, “Standing ring blow up solutions to the N-dimensional quintic nonlinear Schrödinger equation”, *Comm. Math. Phys.*, **290**:3 (2009), 973–996.
- [66] P. Raphaël, J. Szeftel, “Existence and uniqueness of minimal blow-up solutions to an inhomogeneous mass critical NLS”, *J. Amer. Math. Soc.*, **24**:2 (2011), 471–546.
- [67] I. Rodnianski, J. Sterbenz, “On the formation of singularities in the critical $O(3)$ σ -model”, *Ann. of Math. (2)*, **172**:1 (2010), 187–242.
- [68] Shuanglin Shao, “The linear profile decomposition for the Airy equation and the existence of maximizers for the Airy Strichartz inequality”, *Anal. PDE*, **2** (2009), 83–117.
- [69] C. Sulem, P.L. Sulem, *The nonlinear Schrödinger equation. Self-focusing and wave collapse*, Appl. Math. Sci., **139**, Springer-Verlag, New York, 1999, xvi+350 pp.
- [70] M.I. Weinstein, “Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates”, *Comm. Math. Phys.*, **87**:4 (1983), 567–576.
- [71] В.Е. Захаров, А.Б. Шабат, “Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах”, *ЖЭТФ*, **61**:1 (1971), 118–134; англ. пер.: V.E. Zakharov, A.B. Shabat, “Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in non-linear media”, *Soviet Physics JETP*, **34**:1 (1972), 62–69.
- [72] Y. Zwiers, “Blow up of supercritical NLS on a ring”, *Anal. PDE* (to appear).

Иван Мартель

(Yvan Martel)

École Polytechnique, Centre de Mathématiques,
Palaiseau, France

E-mail: yvan.martel@uvsq.fr

Поступила в редакцию

27.10.2013

Франк Мерль

(Frank Merle)

Université de Cergy-Pontoise, Cergy-Pontoise, France;
Institut des Hautes Études Scientifiques,

Bures-sur-Ivette, France

E-mail: merle@math.u-cergy.fr

Пьер Рафаэль

(Pierre Raphaël)

Université Paul Sabatier, Toulouse, France;

Institut Universitaire de France, Paris, France

E-mail: pierre.raaphael@math.univ-toulouse.fr

Жереми Шефтель

(Jérémy Szeftel)

Centre National de la Recherche Scientifique,

Paris, France;

École Normale Supérieure, Paris, France

E-mail: jeremie.szeftel@ens.fr