Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Зелик, А. А. Ильин, Асимптотика функций Грина
и точные интерполяционные неравенства, *УМН*, 2014,
том 69, выпуск 2, 23–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9575>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 14:02:07

УДК 517.518+517.972

Посвящается памяти профессора М. И. Вишика

Асимптотика функций Грина и точные интерполяционные неравенства

С. В. Зелик, А. А. Ильин

Предложен общий метод нахождения точных постоянных во вложениях пространств Соболева $H^m(\mathcal{M})$, определенных на n -мерном римановом многообразии $\mathcal{M}$, в пространство ограниченных непрерывных функций при $m > n/2$. Метод основан на анализе асимптотического поведения по отношению к спектральному параметру функции Грина эллиптического оператора порядка $2m$, область определения квадратного корня из которого определяет норму соответствующего пространства Соболева. Подробно рассматриваются n -мерный тор T^n и n -мерная сфера S^n , а также некоторые многообразия с границей. В определенных случаях, когда $\mathcal{M}$ компактно, получены мультипликативные неравенства с остаточными членами различного вида (корректорами). Из неравенств с корректорами для периодических функций выводятся неравенства, улучшающие известные неравенства Карлсона.

Библиография: 28 названий.

Ключевые слова: неравенства Соболева, интерполяционные неравенства, функции Грина, точные постоянные, неравенство Карлсона.

DOI: 10.4213/gm9575

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	24
2. Часть I. Общая теория.....	30
2.1. Предположения и предварительные сведения.....	30
2.2. Интерполяционное неравенство и вариационная задача.....	31
2.3. Функции Грина и воспроизводящие функционалы.....	32
2.4. Основной результат.....	35
2.5. Асимптотическое разложение при больших λ	39
2.6. Вариационное представление $V(\xi, \lambda)$	41
2.7. Обобщения.....	42

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 12-01-00203, 11-01-00339), Министерства образования и науки РФ (соглашение № 8502) и Программы РАН № 1.

© С. В. Зелик, А. А. Ильин, 2014

3. Часть II. Примеры и приложения	43
3.1. Случай $\mathbb{R}^n$	43
3.2. Симметрические многообразия	44
3.3. Многообразия с границей	63
Список литературы	74

1. Введение

В этой работе предложен общий метод нахождения точных постоянных в мультипликативных неравенствах Соболева, Гальярдо, Ниренберга, описывающих вложение гильбертовых пространств Соболева $H^m(\mathcal{M})$ в пространство ограниченных непрерывных функций $C(\mathcal{M})$. Здесь $\mathcal{M}$ – n -мерное многообразие и $m > n/2$. Рассматриваются следующие интегральные неравенства:

$$\|u\|_{L_\infty(\mathcal{M})}^2 \leq K \|u\|_{H^l(\mathcal{M})}^{2\theta} \|u\|_{H^m(\mathcal{M})}^{2(1-\theta)}, \quad (1.1)$$

где $-\infty < l < n/2 < m < \infty$, так что $0 < \theta = \frac{2m-n}{2(m-l)} < 1$.

Известно, конечно, что мультипликативные неравенства верны в гораздо более общей L_p -постановке (см., например, [3], [26]), где три нормы в (1.1) суть L_p -, L_q - и L_r -нормы, $1 \leq p, q, r \leq \infty$, а θ соответствующим образом определена по масштабной инвариантности; в этом смысле в данной работе мы рассматриваем только случай L_∞ - L_2 - L_2 . В одномерном случае, когда $\mathcal{M} = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ или $(0, L)$, соответствующие интерполяционные неравенства называются неравенствами для производных. Им посвящена обширная литература (см., например, [1], [21] и библиографию в этих работах). На всей прямой общий L_p - L_q - L_r -случай функции и первой производной исчерпывающим образом рассмотрен в [23].

Точная постоянная в неравенстве (1.1) на прямой $\mathbb{R}$ была найдена в [24], более сложный случай полупрямой $\mathbb{R}_+$ разобран в [11], а явное выражение для точной постоянной в этом случае получено в [17].

Точная постоянная в неравенстве (1.1) для периодических функций с нулевым средним была найдена в [14]. В частности, для $l = 0$ там было показано, что

$$\|u\|_\infty^2 \leq K(m) \|u\|^{2\theta} \|u^{(m)}\|^{2(1-\theta)}, \quad u \in H_{\text{per}}^m(0, 2\pi), \quad \int_0^{2\pi} u(x) dx = 0,$$

где $m > 1/2$, $\theta = 1 - 1/(2m)$ и

$$K(m) = (2m\theta^\theta (1-\theta)^{1-\theta} \sin \pi\theta)^{-1}.$$

Постоянная (которая здесь такая же, как и в случае всей оси) точная, а экстремальной функции нет. Заметим также, что неравенство первого порядка, а именно

$$\|u\|_\infty^2 \leq \|u\| \|u'\|, \quad u \in H_{\text{per}}^1(0, 2\pi), \quad \int_0^{2\pi} u(x) dx = 0, \quad (1.2)$$

было получено на самом деле значительно раньше в [13] в качестве доказательства неравенства Карлсона. (В конце этого раздела мы более подробно обсудим связь наших результатов с неравенством Карлсона.)

Точные постоянные в неравенствах (1.1) на сфере $\mathbb{S}^n$ были найдены в [15].

Детальное исследование точных констант в неравенстве (1.1) и в логарифмическом неравенстве Брезиса–Галлуэ на n -мерном торе $\mathbb{T}^n$ было проведено в [2], где впервые были получены неравенства с корректорами. Например, верны следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \|u\|_\infty^2 &\leq \|u\| \|u'\| - \frac{1}{\pi} \|u\|^2, & u \in H_{\text{per}}^1(0, 2\pi), & \int_0^{2\pi} u(x) dx = 0, \\ \|u\|_\infty^2 &\leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}} \|u\|^{3/2} \|u''\|^{1/2} - \frac{2}{3\pi} \|u\|^2, & u \in H_{\text{per}}^2(0, 2\pi), & \int_0^{2\pi} u(x) dx = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где все постоянные точные, а экстремальных функций нет. Эти неравенства были получены в [2] с существенным использованием компьютерных вычислений. Чисто аналитическое доказательство их получено в данной работе в качестве одного из приложений (см. теорему 3.3).

В первой части работы описан общий метод нахождения точных постоянных в неравенствах вида (1.1), включая и неравенства с корректорами. А именно, пусть A и B суть самосопряженные неотрицательные эллиптические дифференциальные операторы на $\mathcal{M}$ порядка $2m$ и $2l$ соответственно. (Для описания основной идеи можно во введении временно предположить, что $l = 0$ и $B = \text{Id}$.) В силу эллиптической регулярности ядро A конечномерно и состоит из гладких (ортонормированных) функций:

$$\ker A = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}.$$

Обозначим $\overline{H}^m := H^m(\mathcal{M}) \cap \ker A^\perp$ и $\overline{H}^l := H^l(\mathcal{M}) \cap \ker A^\perp$. Тогда квадратные корни из A и B определяют эквивалентные нормы на $\overline{H}^m(\mathcal{M})$ и $\overline{H}^l(\mathcal{M})$:

$$\|u\|_A^2 := (Au, u) \sim \|u\|_{\overline{H}^m(\mathcal{M})}^2, \quad \|u\|_B^2 := (Bu, u) \sim \|u\|_{\overline{H}^l(\mathcal{M})}^2$$

для $u \in \overline{H}^m$ и $u \in \overline{H}^l$ соответственно.

Зафиксируем произвольную точку $\xi \in \mathcal{M}$ и рассмотрим следующий аналог неравенства (1.1):

$$|u(\xi)|^2 \leq K \|u\|_B^{2\theta} \|u\|_A^{2(1-\theta)}, \quad (1.4)$$

в котором нас интересует точная постоянная $K = K(\xi)$. Для этого мы вводим следующую экстремальную задачу: для любого $D \geq \lambda_0$, где λ_0 – первое собственное значение оператора $B^{-1/2}AB^{-1/2}$ в $\overline{H} := L_2(\mathcal{M}) \cap \ker A^\perp$, найти $\mathbb{V}(\xi, D)$ – решение следующей задачи максимизации:

$$\mathbb{V}(\xi, D) := \sup\{|u(\xi)|^2 : u \in \overline{H}^m, \|u\|_B^2 = 1, \|u\|_A^2 = D\}. \quad (1.5)$$

Тогда выполнено неравенство

$$|u(\xi)|^2 \leq \|u\|_B^2 \mathbb{V}\left(\xi, \frac{\|u\|_A^2}{\|u\|_B^2}\right)$$

и по определению $\mathbb{V}$ есть наименьшая функция, для которой оно выполнено. В частности, если решена задача (1.5), то нахождение наилучшей постоянной K в (1.4) сводится к нахождению наименьшего K , для которого выполнено следующее неравенство:

$$\mathbb{V}(\xi, D) \leqslant K D^{1-\theta}, \quad D \geqslant \lambda_0.$$

Решение задачи максимизации (1.5) выражается в терминах функции Грина следующего эллиптического оператора порядка $2m$:

$$\mathbb{A}(\lambda) := A + \lambda B, \quad \lambda > -\lambda_0.$$

А именно, пусть $G_\lambda(x, \xi)$ – его функция Грина в $\overline{H}$:

$$\mathbb{A}(\lambda)G_\lambda(\cdot, \xi) = \bar{\delta}(\cdot, \xi), \quad \bar{\delta}(x, \xi) := \delta(x, \xi) - \sum_{j=1}^k \varphi_j(x)\varphi_j(\xi),$$

где $\delta(x, \xi)$ – дельта-функция Дирака. Из эллиптической регулярности следует, что $G_\lambda(\cdot, \xi) \in \overline{H}^m \subset C(\mathcal{M})$. Тогда, как показано в теореме 2.1, в задаче (1.5) существует единственная экстремальная функция

$$u_{\lambda(D), \xi}(x) = \frac{G_{\lambda(D)}(x, \xi)}{\|G_{\lambda(D)}(\cdot, \xi)\|_B}, \quad \text{так что} \quad \mathbb{V}(\xi, D) = \frac{G_{\lambda(D)}(\xi, \xi)^2}{\|G_{\lambda(D)}(\cdot, \xi)\|_B^2},$$

где $\lambda(D)$ есть монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая соотношениям $\lim_{D \rightarrow \infty} \lambda(D) = \infty$, $\lim_{D \rightarrow \lambda_0} \lambda(D) = -\lambda_0$ и определенная как *единственное* решение уравнения

$$\|u_{\lambda(D), \xi}\|_A^2 = D.$$

Кроме того, как показано в теореме 2.2, точная постоянная K в мультипликативном неравенстве (1.4) выражается в терминах функции Грина следующим образом:

$$K = K(\xi) := \frac{1}{\theta^\theta(1-\theta)^{1-\theta}} \cdot \sup_{\lambda > 0} \{\lambda^\theta G_\lambda(\xi, \xi)\} < \infty.$$

Экстремальная функция u_* существует в том и только том случае, когда супремум по λ достигается в конечной точке $\lambda_* < \infty$, и тогда $u_*(x) = \text{const } G_{\lambda_*}(x, \xi)$. Заметим, что подход, использовавшийся в [14], [15] в случае сферы $\mathbb{S}^n$, $n \geqslant 1$, в конечном счете сводился к такой же одномерной задаче максимизации.

Последующие результаты (неравенства с корректорами) основаны на знании асимптотического поведения функции Грина при $\lambda \rightarrow \infty$:

$$G_\lambda(\xi, \xi) = \lambda^{-1}(g_1 \lambda^{1-\theta} + g_2 + g_3 \lambda^{\theta-1} + o(\lambda^{\theta-1})), \quad (1.6)$$

где $g_1 = g_1(\xi) > 0$, $g_2 = g_2(\xi)$, $g_3 = g_3(\xi)$ – некоторые известные величины. Это разложение постулируется, и его проверка для конкретных примеров является основной технической задачей.

При выполнении (1.6) в предложении 2.1 доказывается, что решение задачи (1.5) имеет следующую асимптотику при $D \rightarrow \infty$:

$$\mathbb{V}(\xi, D) = g_1 S D^{1-\theta} + g_2 \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2} S^{-1} \frac{g_2^2(1-\theta) - 2\theta g_1 g_3}{\theta^3 g_1} D^{\theta-1} + o(D^{\theta-1}),$$

$$S := \frac{1}{\theta^\theta (1-\theta)^{1-\theta}}. \quad (1.7)$$

Предположим, что третий член в (1.7) отрицательный (это всегда так при $g_3 \leq 0$). Тогда

$$\mathbb{V}(\xi, D) < g_1 S D^{1-\theta} + \frac{g_2}{\theta} \quad (1.8)$$

при больших D . В некоторых примерах во второй части статьи мы увидим, что это неравенство выполнено при всех D . Это означает, что верно мультипликативное неравенство с корректором (который отрицателен, если $g_2 < 0$):

$$|u(\xi)|^2 \leq g_1 S \|u\|_B^\theta \|u\|_A^{1-\theta} + \frac{g_2}{\theta} \|u\|_B^2,$$

где все константы точные.

В конце первой части работы в теореме 2.3 приводится следующее вариационное представление $\mathbb{V}(\xi, D)$:

$$\mathbb{V}(\xi, D) = \inf_{\lambda \in [-\lambda_0, \infty)} \{(\lambda + D) G_\lambda(\xi, \xi)\}.$$

Эта формула очень полезна для доказательства в отдельных (немногочисленных) случаях, что неравенство (1.8) выполнено для всех D . Схема такова. Обычно невозможно найти точку минимума $\lambda(D)$ в явном виде, но в любом случае для нее есть асимптотическая формула

$$\lambda(D) = \frac{\theta}{1-\theta} D + \frac{g_2}{g_1} S D^\theta + \dots$$

(см. (2.44)). Каким-то образом усечем это разложение и обозначим результат через $\lambda_*(D)$. Тогда для доказательства (1.8) мы поступаем следующим образом:

$$\mathbb{V}(\xi, D) - g_1 S D^{1-\theta} - \frac{g_2}{\theta} \leq (\lambda_*(D) + D) G_{\lambda_*(D)}(\xi, \xi) - g_1 S D^{1-\theta} - \frac{g_2}{\theta}.$$

Теперь для фиксированного ξ правая часть является функцией только переменной D , и более или менее стандартные методы могут быть использованы для доказательства отрицательности правой части для всех D . На самом деле неравенства (1.3), а также многие неравенства с корректорами, которые приводятся ниже, доказываются следуя этой схеме.

Во второй части статьи рассматриваются примеры и приложения общего подхода, описанного в первой части, и описанная выше схема используется в теореме 3.3 для чисто аналитического доказательства неравенств (1.3) (доказательство в [2] содержало некоторые достоверные вычисления на компьютере).

Сначала мы имеем дело с многообразиями без края и рассматриваем случай $A = (-\Delta)^m$, $B = (-\Delta)^l$, где Δ – оператор Лапласа–Бельтрами, и $\overline{H}^s(\mathcal{M}) = H^s(\mathcal{M}) \cap \left\{ \int_{\mathcal{M}} u(x) d\mathcal{M} = 0 \right\}$. Асимптотическая формула (1.6) для функции Грина на торе $\mathbb{T}^n$ получена с помощью формулы суммирования Пуассона. Это работает для $l = 0$. Для $l > 0$ имеется особенность, которая устраняется дифференцированием. Это в свою очередь порождает проблему нахождения постоянных интегрирования. Соответствующая техника была предложена в [2] и далее развивается в данной работе. Мы рассматриваем только один пример $n = 3$, $m = 2$, $l = 1$ и доказываем следующее неравенство на трехмерном торе $\mathbb{T}^3$:

$$\|u\|_{\infty}^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|\nabla u\| \|\Delta u\| - \frac{-\beta_3}{4\pi^3} \|\nabla u\|^2, \quad u \in \overline{H}^2(\mathbb{T}^3),$$

где постоянная интегрирования β_3 выражается в терминах сверхэкспоненциально сходящегося ряда, $\beta_3 = -8.91363291758515127$. Обе постоянные точные, а экстремальных функций нет.

Далее мы рассматриваем неравенства на сферах. На $\mathbb{S}^2$ рассматривается случай, когда $A = (-\Delta)^m$, $m > 1/2$ и $B = I$. Соответствующая функция Грина на диагонали не зависит от ξ и представляется рядом

$$G(\lambda) = \frac{1}{4\pi} \mu^m \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \varphi(\mu n(n+1)), \quad \text{где } \mu = \lambda^{-1/m}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{x^m + 1}.$$

Таким образом, нам надо изучить асимптотическое поведение функций вида

$$F(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) f(\mu n(n+1)) \quad \text{при } \mu \rightarrow 0,$$

где f достаточно гладкая и достаточно быстро убывает на бесконечности. С использованием формулы суммирования Эйлера–Маклорена это сделано в лемме 3.5:

$$F(\mu) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} f(x) dx - \frac{2}{3} f(0) - \frac{1}{15} \mu f'(0) + O(\mu^2).$$

Этим получено асимптотическое разложение вида (1.6) функции Грина и, стало быть, асимптотическое разложение (1.7) решения $\mathbb{V}(D)$ соответствующей экстремальной задачи, в котором второй и третий члены оказываются оба отрицательными. Поэтому может существовать отрицательный корректор. Для $m = 2$ мы показываем, что это действительно так и справедливо следующее неравенство (в котором обе постоянные точные и экстремальной функции нет): для $u \in \overline{H}^2(\mathbb{S}^2)$

$$\|u\|_{\infty}^2 \leq \frac{1}{4} \|u\| \|\Delta u\| - \frac{1}{3\pi} \|u\|^2.$$

Для больших m ($m = 3$, $m = 4$) отрицательный корректор также существует, но он меньше, чем второй член в разложении $\mathbb{V}(D)$.

На $\mathbb{S}^3$ рассматривается только один пример с $A = (-\Delta)^2$ и $B = -\Delta$. Ряд, выражающий функцию Грина, суммируется в явном виде, и, действуя аналогичным образом, получаем следующее точное неравенство для $u \in \overline{H}^2(\mathbb{S}^3)$:

$$\|u\|_\infty^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|\nabla u\| \|\Delta u\| - \frac{3}{4\pi^2} \|\nabla u\|^2.$$

В оставшейся части статьи мы рассматриваем многообразия с краем. Сначала доказывается точное мультипликативное неравенство для оператора Бесселя на полупрямой [10] и на конечном интервале.

Затем рассматривается неравенство для $u \in H_0^1(0, L)$. Корректор существует, но является экспоненциально малым, а именно, верно следующее неравенство:

$$\|u\|_\infty^2 \leq \|u\| \|u'\| (1 - 2e^{-L\|u'\|/\|u\|}).$$

Коэффициенты двух слагаемых справа точные, и экстремальной функции нет. Для неравенства второго порядка

$$\|u\|_\infty^2 \leq K \|u\|_{L_2(D)}^{3/2} \|u''\|_{L_2(D)}^{1/2}$$

на полуоси $D = \mathbb{R}_+$ и на интервале $D = (0, L)$, если $u \in H_0^2(D)$, то можно использовать продолжение нулем, что дает константу K такую же, как и на всей оси $\mathbb{R}$, а именно $K = \sqrt{2}/\sqrt[4]{27}$ (см. [24], а также (3.2)). При переходе к более широкому пространству $u \in H_0^1(D) \cap H^2(D)$ константа может возрасти. В теореме 3.9 показано, что это действительно происходит:

$$K_{\mathbb{R}_+} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}} \cdot (1 + e^{-\pi}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}} \cdot 1.0432 \dots,$$

$$K_{\text{int}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}} \cdot \coth \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}} \cdot 1.09033 \dots$$

В некотором смысле противоположный результат получен в теореме 3.10: константа $1/(2\pi)$ в неравенстве

$$\|u\|_\infty^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|\nabla u\| \|\Delta u\|$$

точная как для $u \in H_0^2(\Omega)$, так и для $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

В заключение отметим, что неравенства вида (1.1) находят применение в различных задачах теории уравнений с частными производными и математической физики. Например, далеко идущее обобщение на матричный случай [6] простейшего неравенства

$$\|u\|^2 \leq \|u\| \|u'\|, \quad u \in H^1(\mathbb{R}),$$

дает наилучшие на сегодняшний день оценки постоянных в неравенствах Либа–Тирринга для отрицательного следа операторов Шрёдингера в $\mathbb{R}^n$ [20].

Соответственно, неравенства с корректорами (1.3) дают по методу [7] одновременную оценку для отрицательного следа и числа отрицательных собственных значений оператора Шрёдингера на $\mathbb{S}^1$ [16].

Наконец, неравенства (1.3) улучшают известное неравенство Карлсона [5] (см. также [19] и цитированную там литературу): для $a_k \geq 0$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right)^2 \leq \pi \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2 \right)^{1/2}, \quad (1.9)$$

где постоянная π точная, и неравенство строгое, если не все a_k равны 0. Действительно, как показано в [13], неравенства (1.2) и (1.9) эквивалентны, поэтому улучшение (1.2) дает улучшение (1.9).

Для заданной последовательности $a_k \geq 0$ положим $a_0 = 0$ и рассмотрим вещественную функцию

$$u(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{|k|} e^{ikx}$$

с нулевым средним, для которой

$$\|u\|_{\infty} = u(0) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \|u\|^2 = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2, \quad \|u'\|^2 = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2.$$

Тогда неравенства (1.3) можно переформулировать в виде

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right)^2 &\leq \pi \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2 \right)^{1/2} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2, \\ \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right)^2 &\leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}} \pi \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right)^{3/4} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^4 a_k^2 \right)^{1/4} - \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где все постоянные точные, а неравенства строгие, если не все a_k равны 0. Более того, интерполяционные неравенства на торах $\mathbb{T}^n$, о которых шла речь выше, могут естественным образом считаться многомерными обобщениями неравенства Карлсона.

В статье используются общепринятые обозначения. Иногда C -норма (или L_{∞} -норма) обозначается через $\|\cdot\|_{\infty}$, а L_2 -норма – через $\|\cdot\|$.

2. Часть I. Общая теория

2.1. Предположения и предварительные сведения. Пусть $\mathcal{M}$ – компактное n -мерное риманово многообразие, и пусть

$$(u, v) := \int_{\mathcal{M}} u(x)v(x) \operatorname{mes}(dx)$$

обозначает стандартное скалярное произведение в $H := L^2(\mathcal{M}, \operatorname{mes})$ (где mes есть мера на $\mathcal{M}$, порожденная римановой метрикой). Как обычно, определим пространства Соболева $W_p^l(\mathcal{M})$, $1 \leq p \leq \infty$, как пространства распределений, обобщенные производные которых до порядка l принадлежат $L^p(\mathcal{M})$ (это определение годится для целых l ; для нецелых и/или отрицательных l пространства $W_p^l(\mathcal{M})$ определяются обычным образом с помощью интерполяции

и двойственности, см., например, [26]). В гильбертовом случае $p = 2$ обозначим через $H^m = H^m(\mathcal{M})$ пространство Соболева $W_2^m(\mathcal{M})$.

Пусть A есть эллиптический самосопряженный дифференциальный оператор на $\mathcal{M}$ порядка $2m$ с гладкими коэффициентами, который к тому же неотрицательно определен:

$$(Au, u) \geq 0, \quad u \in H^m, \quad (2.1)$$

хотя может иметь и непустое ядро. В силу классической теории эллиптической регулярности (см., например, [26]), ядро конечномерно и порождено гладкими функциями,

$$\ker A := \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}, \quad \varphi_i \in C^\infty(\mathcal{M}), \quad A\varphi_i = 0, \quad (2.2)$$

которые без потери общности считаем ортонормированными: $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$.

Обозначим через $\bar{H}$ ортогональное дополнение к $\ker A$ в $H = L^2(\mathcal{M})$ и положим

$$\bar{H}^s := H^s(\mathcal{M}) \cap \bar{H}, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

В силу теории эллиптической регулярности A осуществляет изоморфизм между $\bar{H}^{s+2m}$ и $\bar{H}^s$ для всех $s \in \mathbb{R}$, и, в частности, эквивалентная норма в $\bar{H}^m$ есть

$$\|u\|_A^2 := (Au, u), \quad u \in \bar{H}^m. \quad (2.4)$$

Также на $\mathcal{M}$ вводится второй неотрицательный самосопряженный эллиптический оператор B с гладкими коэффициентами порядка $2l < 2m$ такой, что

$$\ker B \subset \ker A \quad \text{и} \quad B \ker A \subset \ker A. \quad (2.5)$$

Тогда B осуществляет изоморфизм между $\bar{H}^{s+2l}$ и $\bar{H}^s$ для всех $s \in \mathbb{R}$, и, в частности, эквивалентная норма в $\bar{H}^l$ есть

$$\|u\|_B^2 := (Bu, u), \quad u \in \bar{H}^l. \quad (2.6)$$

Кроме того, справедлив аналог неравенства Пуанкаре:

$$\|u\|_B^2 \leq \lambda_0^{-1} \|u\|_A^2, \quad u \in \bar{H}^m, \quad (2.7)$$

где $\lambda_0 > 0$ – первое собственное значение $B^{-1/2}AB^{-1/2}$ в $\bar{H}$.

2.2. Интерполяционное неравенство и вариационная задача. Если

$$l < \frac{n}{2} < m, \quad (2.8)$$

то для любого $u \in \bar{H}^m$ верно следующее интерполяционное неравенство:

$$\|u\|_{C(\mathcal{M})} \leq C \|u\|_B^\theta \|u\|_A^{1-\theta}, \quad \frac{n}{2} = l\theta + m(1-\theta). \quad (2.9)$$

Это неравенство в рассматриваемом гильбертовом случае несложно доказать с помощью локализации и преобразования Фурье. Можно также воспользоваться вложением пространства Бесова $B_{2,1}^{n/2}$ в пространство непрерывных

функций, вещественной интерполяцией $B_{2,1}^{n/2} = (B_{2,2}^m, B_{2,2}^l)_{\theta,1} = (H^m, H^l)_{\theta,1}$ [3], [26] и установленной эквивалентностью норм:

$$\|u\|_C \leq c_1 \|u\|_{B_{2,1}^{n/2}} \leq c_2 \|u\|_{B_{2,2}^l}^\theta \|u\|_{B_{2,2}^m}^{1-\theta} = c_2 \|u\|_{H^l}^\theta \|u\|_{H^m}^{1-\theta} \leq c_3 \|u\|_B^\theta \|u\|_A^{1-\theta}.$$

Впрочем, в рассматриваемых во второй части статьи примерах неравенство (2.9) легко доказывается непосредственно.

Наша цель – уточнить неравенство (2.9) как в смысле нахождения точной постоянной $C = C(n, m, l, \mathcal{M})$, так и в смысле нахождения в нем возможных корректирующих членов. Для этого зафиксируем произвольную точку $\xi \in \mathcal{M}$, положительное число D и рассмотрим следующую задачу максимизации:

$$\mathbb{V}(\xi, D) := \sup\{|u(\xi)|^2 : u \in \bar{H}^m, \|u\|_B^2 = 1, \|u\|_A^2 = D\}. \quad (2.10)$$

Действительно, ввиду (2.9) и (2.7) функция $\mathbb{V}$ корректно определена для $\xi \in \mathcal{M}$ и любого $D \geq \lambda_0$. С другой стороны, из соображений однородности

$$|u(\xi)|^2 \leq \|u\|_B^2 \mathbb{V}\left(\xi, \frac{\|u\|_A^2}{\|u\|_B^2}\right), \quad \xi \in \mathcal{M}, \quad u \in \bar{H}^m. \quad (2.11)$$

В частности, наилучшая постоянная C в (2.9) есть наименьшая постоянная C , для которой неравенство

$$\sup_{\xi \in \mathcal{M}} \mathbb{V}(\xi, D) \leq C^2 D^{1-\theta} \quad (2.12)$$

выполняется для всех $D \geq \lambda_0$. Таким образом, изучение неравенства (2.9) сводится к исследованию экстремальной задачи (2.10).

2.3. Функции Грина и воспроизводящие функционалы. В этом разделе описываются некоторые технические средства для аналитического описания функции $\mathbb{V}$ в терминах функции Грина одного семейства эллиптических операторов на $\mathcal{M}$. А именно, положим

$$\mathbb{A}(\lambda) := A + \lambda B, \quad \lambda > -\lambda_0, \quad (2.13)$$

и пусть функция $G_\lambda(x, \xi)$ есть решение уравнения

$$\mathbb{A}(\lambda)G_\lambda(\cdot, \xi) = \bar{\delta}(\cdot, \xi), \quad \bar{\delta}(x, \xi) = \delta(x, \xi) - \sum_{i=1}^k \varphi_i(\xi)\varphi_i(x), \quad (2.14)$$

где $\delta(x, \xi)$ – это δ -функция в точке $\xi \in \mathcal{M}$, а $\bar{\delta}$ есть ее “проекция” на $\bar{H}$. Тогда в силу теоремы вложения Соболева и (2.8) выполняется включение

$$\bar{\delta}(\cdot, \xi) \in \bar{H}^{-m}$$

и в силу эллиптической регулярности

$$G_\lambda(\cdot, \xi) \in \bar{H}^m \subset C(\mathcal{M}). \quad (2.15)$$

Далее, поскольку $\mathbb{A}(\lambda)$ самосопряжен, то $G_\lambda(x, \xi) = G_\lambda(\xi, x)$ и, следовательно, из (2.15) вытекает, что

$$G_\lambda \in C(\mathcal{M} \times \mathcal{M}).$$

Кроме того,

$$u(\xi) = (\bar{\delta}(\cdot, \xi), u) = (\mathbb{A}(\lambda)G_\lambda(\cdot, \xi), u) = (G_\lambda(\cdot, \xi), \mathbb{A}(\lambda)u) \quad (2.16)$$

для всех $u \in \bar{H}^m$. В частности, выбирая $u(x) := G_\lambda(x, \xi)$, получаем

$$G_\lambda(\xi, \xi) = (\mathbb{A}(\lambda)G_\lambda(\cdot, \xi), G_\lambda(\cdot, \xi)) = \|G_\lambda(\cdot, \xi)\|_A^2 + \lambda\|G_\lambda(\cdot, \xi)\|_B^2 > 0. \quad (2.17)$$

Следующая простая лемма является тем не менее основным техническим средством метода воспроизводящих функционалов и позволит нам найти аналитическое представление для функции $\mathbb{V}$.

ЛЕММА 2.1. *Пусть выполнены перечисленные выше предположения. Тогда для любого $u \in \bar{H}^m$ и любого $\lambda > -\lambda_0$*

$$|u(\xi)|^2 \leq G_\lambda(\xi, \xi)(\|u\|_A^2 + \lambda\|u\|_B^2). \quad (2.18)$$

Кроме того, равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда $u(x) = cG_\lambda(x, \xi)$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, поскольку $\mathbb{A}(\lambda)$ положительно определен, по неравенству Коши–Буняковского–Шварца имеем

$$\begin{aligned} |u(\xi)|^2 &= (G_\lambda(\cdot, \xi), \mathbb{A}(\lambda)u)^2 \leq (\mathbb{A}(\lambda)G_\lambda, G_\lambda)(\mathbb{A}(\lambda)u, u) \\ &= G_\lambda(\xi, \xi)(\|u\|_A^2 + \lambda\|u\|_B^2), \end{aligned}$$

причем равенство здесь имеет место, лишь если $u(x) = cG_\lambda(x, \xi)$. Лемма доказана.

Обратим внимание, что до сих пор число $\lambda \geq -\lambda_0$ было свободным параметром в (2.18). В следующей лемме показано, что этот параметр можно выбрать таким образом, что отношение $\|G_\lambda(\cdot)\|_A^2 / \|G_\lambda(\cdot, \xi)\|_B^2$ будет принимать любое наперед заданное значение.

ЛЕММА 2.2. *Функция*

$$D(\lambda) = D_\xi(\lambda) := \frac{\|G_\lambda(\cdot, \xi)\|_A^2}{\|G_\lambda(\cdot, \xi)\|_B^2} \quad (2.19)$$

строго возрастает на $[-\lambda_0, \infty)$, и

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\lambda_0} D(\lambda) = \lambda_0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} D(\lambda) = \infty, \quad (2.20)$$

так что обратная функция $D \mapsto \lambda(D)$ корректно определена на $[\lambda_0, \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $D'(\lambda) > 0$. С этой целью заметим, что функция $G_\lambda(x, \xi)$ дифференцируема по λ и производная $G'_\lambda(x, \xi) := \partial_\lambda G_\lambda(x, \xi)$ удовлетворяет уравнению

$$AG'_\lambda(\cdot, \xi) + \lambda BG'_\lambda(\cdot, \xi) = \mathbb{A}(\lambda)G'_\lambda(\cdot, \xi) = -BG_\lambda(\cdot, \xi), \quad (2.21)$$

так что

$$AG'_\lambda(\cdot, \xi) = -BG_\lambda(\cdot, \xi) - \lambda BG'_\lambda(\cdot, \xi), \quad G'_\lambda(\cdot, \xi) = -\mathbb{A}(\lambda)^{-1}BG_\lambda.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|G_\lambda(\cdot, \xi)\|_B^4 D'(\lambda) &= \|G_\lambda(\cdot, \xi)\|_B^2 (AG'_\lambda(\cdot, \xi), G_\lambda(\cdot, \xi)) \\ &\quad - (BG'_\lambda(\cdot, \xi), G_\lambda(\cdot, \xi)) \|G_\lambda(\cdot, \xi)\|_A^2 \\ &= -\|G_\lambda(\cdot, \xi)\|_B^4 - \lambda \|G_\lambda(\cdot, \xi)\|_B^2 (BG'_\lambda(\cdot, \xi), G_\lambda(\cdot, \xi)) \\ &\quad - (BG'_\lambda(\cdot, \xi), G_\lambda(\cdot, \xi)) \|G_\lambda(\cdot, \xi)\|_A^2 \\ &= -\|G_\lambda(\cdot, \xi)\|_B^4 - (BG'_\lambda(\cdot, \xi), G_\lambda(\cdot, \xi)) (\mathbb{A}(\lambda)G_\lambda(\cdot, \xi), G_\lambda(\cdot, \xi)) \\ &= (\mathbb{A}(\lambda)^{-1}BG_\lambda(\cdot, \xi), BG_\lambda(\cdot, \xi)) (\mathbb{A}(\lambda)G_\lambda(\cdot, \xi), G_\lambda(\cdot, \xi)) \\ &\quad - \|G_\lambda(\cdot, \xi)\|_B^4. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского–Шварца, имеем

$$\begin{aligned} \|v\|_B^4 &= (Bv, v)^2 = (\mathbb{A}^{-1/2}(\lambda)Bv, \mathbb{A}^{1/2}(\lambda)v)^2 \\ &\leq \| \mathbb{A}^{-1/2}(\lambda)Bv \|_H^2 \| \mathbb{A}^{1/2}(\lambda)v \|_H^2 = (\mathbb{A}^{-1}(\lambda)Bv, Bv) (\mathbb{A}(\lambda)v, v) \end{aligned} \quad (2.23)$$

для всех $v \in \bar{H}^m$. Выбирая $v(x) = G_\lambda(x, \xi)$, из (2.22) получаем, что $D'(\lambda) \geq 0$. Более того, равенство в (2.23) возможно, лишь только если $\mathbb{A}(\lambda)v = \beta Bv$, $\beta \in \mathbb{R}$, что дает

$$\mathbb{A}(\lambda)v = \mathbb{A}(\lambda)G_\lambda(\cdot, \xi) = \bar{\delta}(x, \xi) = \beta BG_\lambda(\cdot, \xi) \in \bar{H}^{m-l}, \quad \text{где } m-l > 0,$$

что, конечно, невозможно, и, стало быть, $D'(\lambda) > 0$. Итак, доказано, что $D(\lambda)$ строго возрастает.

Теперь надо доказать (2.20). Начнем с предела $\lambda \rightarrow -\lambda_0$. Для того чтобы решить (2.14) вблизи $\lambda = -\lambda_0$, обозначим $w(x, \xi) = B^{1/2}G_\lambda(x, \xi)$. Тогда

$$B^{-1/2}AB^{-1/2}w + \lambda w = B^{-1/2}\bar{\delta}(x, \xi), \quad (2.24)$$

и, по определению, λ_0 есть наименьшее собственное число самосопряженного положительно определенного оператора $B^{-1/2}AB^{-1/2}$ в $\bar{H}$. Этот оператор имеет компактную резольвенту, и его спектр дискретный. Пусть $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ – семейство ортонормированных собственных функций, и пусть первые p ($p \geq 1$) из них отвечают минимальному собственному значению λ_0 . При этом $\psi_i \in C^\infty(\mathcal{M})$. Ищем w в виде

$$w(x, \xi) = \sum_{i=1}^p a_i \psi_i(x) + \sum_{i=p+1}^\infty a_i \psi_i(x) =: w_0 + w^\perp. \quad (2.25)$$

Подставляя это в (2.24) и беря скалярное произведение с $\psi_1, \dots, \psi_p$, находим коэффициенты w_0 -части решения:

$$a_i = \frac{1}{\lambda + \lambda_0} (B^{-1/2} \bar{\delta}(\cdot, \xi), \psi_i) = \frac{\tilde{\psi}_i(\xi)}{\lambda + \lambda_0}, \quad i = 1, \dots, p,$$

где мы обозначили $\tilde{\psi}_i := B^{-1/2} \psi_i$. Заметим, что $w^\perp$ -часть решения остается ограниченной при $\lambda \rightarrow -\lambda_0$. Применяя $B^{-1/2}$ к (2.25), находим $G_\lambda(x, \xi)$:

$$G_\lambda(x, \xi) = \frac{1}{\lambda + \lambda_0} \sum_{i=1}^p \tilde{\psi}_i(\xi) \tilde{\psi}_i(x) + G_\lambda^\perp(x, \xi), \quad (2.26)$$

где часть $G_\lambda^\perp(x, \xi)$ остается ограниченной при $\lambda \rightarrow -\lambda_0$. Итак,

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\lambda_0} D(\lambda) = \frac{\|\sum_{i=1}^p \tilde{\psi}_i(\xi) \tilde{\psi}_i(\cdot)\|_A^2}{\|\sum_{i=1}^p \tilde{\psi}_i(\xi) \tilde{\psi}_i(\cdot)\|_B^2} = \lambda_0 \frac{\sum_{i=1}^p \tilde{\psi}_i(\xi)^2}{\sum_{i=1}^p \tilde{\psi}_i(\xi)^2} = \lambda_0.$$

Теперь рассмотрим случай, когда $\lambda \rightarrow \infty$. Предположим, что (2.20) неверно и

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} D(\lambda) = D_{\max} < \infty.$$

Тогда

$$\|G_\lambda(\cdot, \xi)\|_A^2 \leq D_{\max} \|G_\lambda(\cdot, \xi)\|_B^2. \quad (2.27)$$

Умножая (2.14) на $G_\lambda(x, \xi)$, интегрируя по $x \in \mathcal{M}$ и используя вложение $\bar{H}^m \subset C$ и неравенство (2.27), получаем

$$\begin{aligned} \|G_\lambda(\cdot, \xi)\|_A^2 + \lambda \|G_\lambda(\cdot, \xi)\|_B^2 &= G_\lambda(\xi, \xi) \leq \|G_\lambda(\cdot, \xi)\|_C \\ &\leq C \|G_\lambda(\cdot, \xi)\|_A \leq C_1 \|G_\lambda(\cdot, \xi)\|_B. \end{aligned}$$

Вместе с (2.27) это дает

$$\|G_\lambda(\cdot, \xi)\|_A \leq C \|G_\lambda(\cdot, \xi)\|_B \leq C_2 \lambda^{-1},$$

где C_2 не зависит от $\lambda \rightarrow \infty$. Таким образом, функция $w_\lambda(x, \xi) := \lambda G_\lambda(x, \xi)$ равномерно ограничена в $\bar{H}^m$ и без потери общности можно считать, что $w_\lambda(\cdot, \xi) \rightarrow w_\infty(\cdot, \xi)$ слабо в этом пространстве. Тогда $w_\infty(\cdot, \xi) \in \bar{H}^m$ и

$$Bw_\infty(\cdot, \xi) = \bar{\delta}(\cdot, \xi).$$

Далее, поскольку $w_\infty \in \bar{H}^m$, то $\bar{\delta}(\cdot, \xi) \in \bar{H}^{m-2l}$. В силу (2.8) выполняется неравенство $m - 2l > -n/2$, так что $\delta(\cdot, \xi) \in H^{-s}$ для некоторого $s < n/2$, что невозможно. Итак, пределы (2.20) существуют, и лемма доказана.

2.4. Основной результат. Цель этого раздела – получение аналитического выражения для функции $\mathbb{V}$ в терминах введенной выше функции Грина. Соответствующий результат приведен в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполнены перечисленные выше предположения. Тогда для любого $D \in [\lambda_0, \infty)$ и любой точки $\xi \in \mathcal{M}$ супремум в (2.10) есть максимум, достигающийся на единственной функции

$$u_{\lambda(D),\xi}(x) := \frac{G_{\lambda(D)}(x, \xi)}{\|G_{\lambda(D)}(\cdot, \xi)\|_B}, \quad (2.28)$$

где функция $\lambda(D)$ определена в лемме 2.2. В частности,

$$\mathbb{V}(\xi, D) = \left(\frac{G_{\lambda(D)}(\xi, \xi)}{\|G_{\lambda(D)}(\cdot, \xi)\|_B} \right)^2. \quad (2.29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in \bar{H}^m$ и $\|u\|_B = 1$, $\|u\|_A^2 = D$. Тогда по лемме 2.2 существует единственное $\lambda = \lambda(D)$, удовлетворяющее (2.19). Согласно (2.18) с $\lambda = \lambda(D)$ имеем

$$|u(\xi)|^2 \leq G_{\lambda(D)}(\xi, \xi)(D + \lambda(D)),$$

причем равенство выполняется, лишь только если $u(x) = cG_{\lambda(D)}(x, \xi)$. Беря B -норму от обеих частей этого равенства, находим $c = \|G_{\lambda(D)}(\cdot, \xi)\|_B^{-1}$ и $u(x) = u_{\lambda(D),\xi}(x)$. Теорема доказана.

Таким образом, чтобы найти $\mathbb{V}$, нам нужны три функции

$$f_\xi(\lambda) := G_\lambda(\xi, \xi), \quad g_\xi(\lambda) := \|G_\lambda(\cdot, \xi)\|_B^2, \quad h_\xi(\lambda) := \|G_\lambda(\cdot, \xi)\|_A^2. \quad (2.30)$$

Тогда

$$D(\lambda) = \frac{h_\xi(\lambda)}{g_\xi(\lambda)}, \quad \mathbb{V}(\xi, \lambda) := \mathbb{V}(\xi, D(\lambda)) = \frac{f_\xi(\lambda)^2}{g_\xi(\lambda)}, \quad \lambda \in [-\lambda_0, \infty), \quad (2.31)$$

и мы имеем параметрическое представление функции $D \mapsto \mathbb{V}(\xi, D)$. В следующей лемме показано, что функции g и h могут быть выражены через f .

ЛЕММА 2.3. Функции f , g и h удовлетворяют следующим равенствам:

$$f'_\xi(\lambda) := \frac{d}{d\lambda} f_\xi(\lambda) = -g_\xi(\lambda), \quad h_\xi(\lambda) = f_\xi(\lambda) + \lambda f'_\xi(\lambda). \quad (2.32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, умножая (2.14) на $G_\lambda(x, \xi)$ и интегрируя по $x \in \mathcal{M}$, получаем

$$f_\xi(\lambda) = G_\lambda(\xi, \xi) = \|G_\lambda(\cdot, \xi)\|_A^2 + \lambda \|G_\lambda(\cdot, \xi)\|_B^2 = h_\xi(\lambda) + \lambda g_\xi(\lambda). \quad (2.33)$$

Дифференцируя это равенство по λ и используя (2.21), получаем

$$\begin{aligned} f'_\xi(\lambda) &= 2(\mathbb{A}(\lambda)G'_\lambda(\cdot, \xi), G_\lambda(\cdot, \xi)) + g_\xi(\lambda) \\ &= -2(BG_\lambda(\cdot, \xi), G_\lambda(\cdot, \xi)) + g_\xi(\lambda) = -2g_\xi(\lambda) + g_\xi(\lambda) = -g_\xi(\lambda). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Осталось заметить, что из (2.34) и (2.33) следует (2.32). Лемма доказана.

Следующая теорема говорит о том, что точная постоянная в неравенстве

$$|u(\xi)|^2 \leq K \|u\|_B^{2\theta} \|u\|_A^{2(1-\theta)}, \quad u \in \bar{H}^m, \quad (2.35)$$

выражается в терминах следующей скалярной экстремальной задачи, вновь связанной с функцией Грина $G_\lambda(\xi, \xi)$.

ТЕОРЕМА 2.2. Для фиксированного $\xi \in \mathcal{M}$ постоянная K в (2.35) дается выражением

$$K = K(\xi) := \frac{1}{\theta^\theta(1-\theta)^{1-\theta}} \cdot \sup_{\lambda > 0} \{\lambda^\theta G_\lambda(\xi, \xi)\} < \infty, \quad (2.36)$$

где θ определена в (2.9), и константа (2.36) точная. Кроме того, экстремальная функция в (2.35) существует тогда и только тогда, когда супремум в (2.36) достигается в конечной точке λ_* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Убедимся сначала, что правая часть (2.36) конечна. Действительно, в силу (2.17) и неравенства (2.9) (с некоторой не обязательно оптимальной постоянной C) имеем

$$\begin{aligned} \lambda^\theta G_\lambda(\xi, \xi)^2 &\leq \lambda^\theta \|G_\lambda(\xi, \cdot)\|_\infty^2 \leq C(\lambda \|G_\lambda(\xi, \cdot)\|_B^2)^\theta (\|G_\lambda(\xi, \cdot)\|_A^2)^{1-\theta} \\ &\leq C'(\|G_\lambda(\xi, \cdot)\|_A^2 + \lambda \|G_\lambda(\xi, \cdot)\|_B^2) = C' G_\lambda(\xi, \xi), \end{aligned}$$

и правая часть (2.36) конечна.

Докажем теперь, что (2.35) выполнено с $K = K(\xi)$. Действительно, пусть $u \in \bar{H}^m$ произвольно и

$$\lambda := \frac{\theta}{1-\theta} \frac{\|u\|_A^2}{\|u\|_B^2}.$$

Тогда, используя (2.18), получаем

$$\begin{aligned} |u(\xi)|^2 &\leq G_\lambda(\xi, \xi) \|u\|_B^2 \left(\frac{\|u\|_A^2}{\|u\|_B^2} + \lambda \right) = \frac{1}{\theta} G_\lambda(\xi, \xi) \lambda \|u\|_B^2 \\ &= \frac{1}{\theta} G_\lambda(\xi, \xi) \lambda^\theta \lambda^{1-\theta} \|u\|_B^2 = \frac{1}{\theta} \lambda^\theta G_\lambda(\xi, \xi) \left(\frac{\theta}{1-\theta} \frac{\|u\|_A^2}{\|u\|_B^2} \right)^{1-\theta} \|u\|_B^2 \\ &= \frac{1}{\theta^\theta(1-\theta)^{1-\theta}} \lambda^\theta G_\lambda(\xi, \xi) \|u\|_B^{2\theta} \|u\|_A^{2(1-\theta)} \\ &\leq \frac{1}{\theta^\theta(1-\theta)^{1-\theta}} \cdot \sup_{\lambda > 0} \{\lambda^\theta G_\lambda(\xi, \xi)\} \|u\|_B^{2\theta} \|u\|_A^{2(1-\theta)} \\ &= K(\xi) \|u\|_B^{2\theta} \|u\|_A^{2(1-\theta)}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Докажем точность постоянной $K(\xi)$. Сначала предположим, что супремум в (2.36) есть максимум, достигающийся в точке $\lambda = \lambda_*$. Тогда

$$0 = \frac{d}{d\lambda} (\lambda^\theta f_\xi(\lambda)) \Big|_{\lambda=\lambda_*} = \lambda_*^\theta (f'_\xi(\lambda_*) + \theta \lambda_*^{-1} f_\xi(\lambda_*))$$

и $\lambda_* f'_\xi(\lambda_*) + \theta f_\xi(\lambda_*) = 0$. Поэтому в силу соотношений (2.32)

$$D(\lambda_*) = \frac{h_\xi(\lambda_*)}{g_\xi(\lambda_*)} = -\frac{f_\xi(\lambda_*) + \lambda_* f'_\xi(\lambda_*)}{f'_\xi(\lambda_*)} = \frac{1-\theta}{\theta} \lambda_*.$$

Итак, $\lambda_* = \frac{\theta}{1-\theta} \frac{\|G_{\lambda_*}(\xi, \cdot)\|_A^2}{\|G_{\lambda_*}(\xi, \cdot)\|_B^2}$, и все неравенства в (2.37) становятся равенствами, если взять $u(x) = G_{\lambda_*}(\xi, x)$, и в этом случае есть точная экстремаль.

Поскольку $\lambda^\theta G_\lambda(\xi, \xi) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$, то остается лишь рассмотреть случай, когда супремум в (2.36) достигается при $\lambda \rightarrow \infty$. Тогда возможна следующая альтернатива.

1) Существует последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ из *локальных* максимумов такая, что

$$\lambda_k^\theta G_{\lambda_k}(\xi, \xi) \rightarrow \sup_{\lambda > 0} \{\lambda^\theta G_\lambda(\xi, \xi)\}.$$

Поскольку производная обращается в нуль в локальных максимумах, то, как и раньше, последовательность относительных экстремалей $u_n(x) := G_{\lambda_n}(\xi, x)$ не позволяет постоянной K быть строго меньше, чем $K(\xi)$, и константа (2.36) точная.

2) Функция $\lambda^\theta G_\lambda(\xi, \xi)$ в конечном счете монотонно возрастает при $\lambda \rightarrow \infty$. Тогда предел

$$G_\infty := \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^\theta G_\lambda(\xi, \xi) \quad (2.38)$$

существует и строго положителен. Поскольку производная интегрируема, то при $k \rightarrow \infty$

$$0 \leftarrow \delta_k = \int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{d}{d\lambda} (\lambda^\theta f_\xi(\lambda)) d\lambda = 2^k \frac{d}{d\lambda} (\lambda^\theta f_\xi(\lambda)) \Big|_{\lambda=\lambda_k},$$

и для $\lambda_k \rightarrow \infty$ и $\varepsilon_k := \delta_k \cdot 2^{-k} \lambda_k \rightarrow 0$ выполняется равенство

$$\frac{d}{d\lambda} (\lambda^\theta f_\xi(\lambda)) \Big|_{\lambda=\lambda_k} = \varepsilon_k \lambda_k^{-1}.$$

Вместе с (2.38) это дает

$$\lambda_k^\theta f_\xi(\lambda_k) = G_\infty + o_{\lambda \rightarrow \infty}(1), \quad \lambda_k^{1+\theta} f'_\xi(\lambda_k) = -\theta G_\infty + o_{\lambda \rightarrow \infty}(1).$$

Поэтому

$$\frac{D(\lambda_k)}{\lambda_k} = \frac{1-\theta}{\theta} + o_{\lambda \rightarrow \infty}(1). \quad (2.39)$$

Наконец, для $u_k(x) := G_{\lambda_k}(\xi, x)$ после очевидных преобразований получаем

$$\frac{|u_k(\xi)|^2}{\|u_k\|_B^{2\theta} \|u_k\|_A^{2(1-\theta)}} = \lambda_k^\theta G_{\lambda_k} \cdot \left(\frac{\lambda_k}{D(\lambda_k)} \right)^{1-\theta} \left(1 + \frac{D(\lambda_k)}{\lambda_k} \right). \quad (2.40)$$

Переходя к пределу $k \rightarrow \infty$ и используя (2.39), получаем справа $K(\xi)$, что доказывает, что и во втором случае $K(\xi)$ есть точная постоянная.

Осталось доказать, что если в (2.35), (2.36) есть экстремальная функция u_* , то супремум по λ в (2.36) достигается в конечной точке.

Воспользуемся элементарным тождеством для положительных a, b :

$$\lambda_*^\theta a^{2(1-\theta)} b^{2\theta} = \theta^\theta (1-\theta)^{(1-\theta)} (a^2 + \lambda_* b^2), \quad \lambda_* = \frac{\theta}{1-\theta} \frac{a^2}{b^2}.$$

Тогда для экстремальной функции u_* получаем

$$\begin{aligned} u_*(\xi) &= K(\xi) \|u\|_B^{2\theta} \|u\|_A^{2(1-\theta)} = K(\xi) \frac{\theta^\theta (1-\theta)^{(1-\theta)}}{\lambda_*^\theta} (\|u_*\|_A^2 + \lambda_* \|u_*\|_B^2) \\ &= \sup_{\lambda > 0} \{ \lambda^\theta G_\lambda(\xi, \xi) \} \frac{1}{\lambda_*^\theta} (\|u_*\|_A^2 + \lambda_* \|u_*\|_B^2), \quad \text{где } \lambda_* = \frac{\theta}{1-\theta} \frac{\|u_*\|_A^2}{\|u_*\|_B^2}. \end{aligned}$$

Лемма 2.1 теперь говорит, что в случае равенства обязательно имеем $u_*(x) = G_{\lambda_*}(x, \xi)$, и

$$\sup_{\lambda > 0} \{ \lambda^\theta G_\lambda(\xi, \xi) \} \frac{1}{\lambda_*^\theta} = G_{\lambda_*}(\xi, \xi), \quad \text{или} \quad \sup_{\lambda > 0} \{ \lambda^\theta G_\lambda(\xi, \xi) \} = \lambda_*^\theta G_{\lambda_*}(\xi, \xi).$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В рассматриваемом компактном случае выполняется неравенство Пуанкаре (2.7). Поэтому неравенство (2.35) с точной постоянной (2.36) выполняется не только для $\theta = \theta_0 := (2m - n)/(2(m - l))$, но и для всех $0 \leq \theta \leq \theta_0$ (когда A -норма имеет ббльший вес). Действительно, доказательство слово в слово такое же, даже проще, поскольку для $\theta' < \theta_0$ вместо (2.38) имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{\theta'} G_\lambda(\xi, \xi) = 0,$$

так что экстремальная функция всегда существует. Кроме того, при $\theta = 0$ имеем

$$\|u(\xi)\|^2 \leq \sup_{\lambda > 0} G_\lambda(\xi, \xi) \|u\|_A^2 = G_0(\xi, \xi) \|u\|_A^2,$$

поскольку $G_\lambda(\xi, \xi)$ убывает по λ (см. (2.26)).

2.5. Асимптотическое разложение при больших λ . В этом разделе будут выведены полезные асимптотические формулы для функции $V(\xi, D)$ при $D \rightarrow \infty$. Для этого мы должны знать асимптотическое поведение функции Грина $f_\xi(\lambda) = G_\lambda(\xi, \xi)$. Используя локализацию и метод замороженных коэффициентов, можно показать, что предел (2.38) существует и строго положителен, так что главный член асимптотического разложения G_λ мы знаем. Однако дальнейшие члены асимптотики зависят от конкретной задачи, и мы не располагаем общей формулой для них. По этой причине мы просто предполагаем, что при $\lambda \rightarrow \infty$

$$f_\xi(\lambda) = \lambda^{-1} (g_1 \lambda^{1-\theta} + g_2 + g_3 \lambda^{\theta-1} + o(\lambda^{\theta-1})), \quad (2.41)$$

где $g_1 = g_1(\xi) > 0$, $g_2 = g_2(\xi)$, $g_3 = g_3(\xi)$ – некоторые заданные числа (зависящие от ξ), и что разложение (2.41) можно продифференцировать по λ . Это предположение будет выполняться в большинстве рассматриваемых приложений. Тогда справедлив следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть выполнены предположения, перечисленные в разделе 2.1. Пусть справедливо асимптотическое разложение (2.41). Тогда для решения экстремальной задачи $\mathbb{V}(\xi, D)$ справедливо асимптотическое разложение при $D \rightarrow \infty$:

$$\mathbb{V}(\xi, D) = g_1 S D^{1-\theta} + g_2 \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2} S^{-1} \frac{g_2^2(1-\theta) - 2\theta g_1 g_3}{\theta^3 g_1} D^{\theta-1} + o(D^{\theta-1}),$$

$$S := \frac{1}{\theta^\theta (1-\theta)^{1-\theta}}. \quad (2.42)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в непосредственном (хотя и достаточно трудоемком) вычислении. Полагая для краткости $g_1 = a$, $g_2 = b$, $g_3 = c$, имеем

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= a\lambda^{-\theta} + b\lambda^{-1} + c\lambda^{-(2-\theta)} + o(\lambda^{-(2-\theta)}), \\ g(\lambda) &= a\theta\lambda^{-(1+\theta)} + b\lambda^{-2} + c(2-\theta)\lambda^{-(3-\theta)} + o(\lambda^{-(3-\theta)}), \\ h(\lambda) &= f(\lambda) - \lambda g(\lambda) = a(1-\theta)\lambda^{-\theta} - c(1-\theta)\lambda^{-(2-\theta)} + o(\lambda^{-(2-\theta)}). \end{aligned}$$

Далее находим асимптотику при $D \rightarrow \infty$ единственного решения $\lambda = \lambda(D)$ первого уравнения в (2.31):

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= \frac{h(\lambda)}{g(\lambda)} = \frac{\lambda(a(1-\theta) - c(1-\theta)\lambda^{-(2-2\theta)} + \dots)}{a\theta + b\lambda^{-(1-\theta)} + c(2-\theta)\lambda^{-(2-2\theta)} + \dots} \\ &= \frac{1-\theta}{\theta} \left(\lambda - \frac{b}{a\theta} \lambda^\theta + \frac{b^2 - 2\theta ac}{a^2 \theta^2} \lambda^{-1+2\theta} + \dots \right), \end{aligned}$$

или

$$\lambda - A\lambda^\theta + B\lambda^{-1+2\theta} + \dots = \delta := D \frac{\theta}{1-\theta}, \quad A = \frac{b}{a\theta}, \quad B = \frac{b^2 - 2\theta ac}{a^2 \theta^2}. \quad (2.43)$$

Единственное большое решение этого уравнения имеет асимптотику при $\delta \rightarrow \infty$

$$\lambda(\delta) = \delta + A\delta^\theta + C\delta^{-1+2\theta} + \dots,$$

где C находим, подставляя это выражение в (2.43), что дает

$$C = \theta A^2 - B = \frac{-b^2(1-\theta) + 2ac\theta}{a^2 \theta^2},$$

или, окончательно,

$$\lambda(D) = rD + sD^\theta + tD^{2\theta-1} + \dots, \quad (2.44)$$

где

$$r = \frac{\theta}{1-\theta}, \quad s = \frac{b}{a} \frac{1}{\theta^{1-\theta}(1-\theta)^\theta}, \quad t = \frac{2ac\theta - (1-\theta)b^2}{a^2 \theta^{3-2\theta}(1-\theta)^{2\theta-1}}.$$

Остается подставить (2.44) в $\mathbb{V} = f^2/g = D \cdot f^2/h$, где для f^2/h имеется разложение

$$\frac{f(\lambda)^2}{h(\lambda)} = \frac{a}{1-\theta} \lambda^{-\theta} + \frac{2b}{1-\theta} \lambda^{-1} + \frac{b^2 + 3ac}{(1-\theta)a} \lambda^{\theta-2} + \dots. \quad (2.45)$$

Для каждой степени из (2.44) получаем соответственно

$$\begin{aligned}\lambda(D)^{-\theta} &= \frac{1}{r^\theta} D^{-\theta} - \frac{\theta s}{r^{1+\theta}} D^{-1} + \frac{\theta(\theta+1)s^2 - 2\theta tr}{2r^{2+\theta}} D^{\theta-2} + \dots, \\ \lambda(D)^{-1} &= \frac{1}{r} D^{-1} - \frac{s}{r^2} D^{\theta-2} + \dots, \\ \lambda(D)^{\theta-2} &= \frac{1}{r^{2-\theta}} D^{\theta-2} + \dots.\end{aligned}$$

Подставляя это в (2.45) и умножая на D , после нескольких чудесных сокращений получаем асимптотическое разложение (2.42). Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В частности, если для некоторой точки $\xi \in \mathcal{M}$ третий член в (2.42) отрицательный (а это всегда так при $g_3 \leq 0$), то

$$\mathbb{V}(\xi, D) < g_1 S D^{1-\theta} + \frac{g_2}{\theta} \quad (2.46)$$

при больших D . Тогда, используя вычисления на компьютере, которые являются достоверными на ограниченных промежутках изменения D , или аналитические оценки, мы покажем во второй части статьи, что в отдельных случаях неравенство (2.46) верно для всех значений D . Тогда из этого следует улучшенный вариант неравенства (2.9) с точными постоянными:

$$|u(\xi)|^2 \leq g_1 S \|u\|_B^\theta \|u\|_A^{1-\theta} + \frac{g_2}{\theta} \|u\|_B^2. \quad (2.47)$$

Отметим также интересный факт, что

$$D'(\lambda) = \left(\frac{f_\xi(\lambda) + \lambda f'_\xi(\lambda)}{-f'_\xi(\lambda)} \right)' = \frac{2(f'_\xi(\lambda))^2 - f''_\xi(\lambda) f(\lambda)}{(f'_\lambda(\xi))^2},$$

и поэтому положительность $D'(\lambda)$, установленная в лемме 2.2, эквивалентна строгой вогнутости функции $\lambda \mapsto 1/f_\xi(\lambda)$.

2.6. Вариационное представление $\mathbb{V}(\xi, \lambda)$. В этом разделе приводится простое, но очень полезное представление функции $\mathbb{V}(\xi, \lambda)$ в терминах функции Грина $G_\lambda(\xi, \xi)$, не содержащее производных по λ и позволяющее во многих случаях аналитически доказать справедливость неравенства (2.46) для всех допустимых значений D .

ТЕОРЕМА 2.3. Если выполнены условия теоремы 2.1, то функция $\mathbb{V}(\xi, D)$, определенная в (2.29), допускает следующее вариационное представление:

$$\mathbb{V}(\xi, D) = \inf_{\lambda \in [-\lambda_0, \infty)} \{(\lambda + D) G_\lambda(\xi, \xi)\}, \quad (2.48)$$

где $D \in [\lambda_0, \infty)$, а функция Грина $G_\lambda(\xi, \xi)$ определена в (2.14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, из полученных ранее результатов следует, что функция $\lambda \mapsto (\lambda + D)G_\lambda(\xi, \xi)$ стремится к $+\infty$, когда $\lambda \rightarrow \infty$ или $\lambda \rightarrow -\lambda_0$, для любого $D \in (\lambda_0, \infty)$. Таким образом, инфимум в (2.48) достигается в некоторой точке $\lambda_* = \lambda_*(D)$ внутри этого интервала. Ясно, что в этой точке λ_0

$$G_\lambda(\xi, \xi) + (D + \lambda) \frac{d}{d\lambda} G_\lambda(\xi, \xi) = 0, \quad \text{или} \quad D = - \frac{\lambda \frac{d}{d\lambda} G_\lambda(\xi, \xi) + G_\lambda(\xi, \xi)}{\frac{d}{d\lambda} G_\lambda(\xi, \xi)} = \frac{h_\xi(\lambda)}{g_\xi(\lambda)}$$

(см. (2.30), (2.31) и (2.32)). Таким образом, уравнение для $\lambda_*(D)$ совпадает с уравнением (2.19) для $\lambda(D)$, которое имеет единственное решение, и поэтому минимум в (2.48) достигается точно в $\lambda_* = \lambda(D)$. Остается проверить, что значение в этой точке и есть $\mathbb{V}(\xi, \lambda)$. С этой целью заметим, что числа D и λ удовлетворяют первому уравнению в (2.31), поэтому, используя второе уравнение в (2.31), получаем

$$(\lambda + D)G_\lambda(\xi, \xi) = \frac{f_\lambda(\xi)(h_\xi(\lambda) + \lambda g_\xi(\lambda))}{g_\xi(\lambda)} = \frac{f_\xi(\lambda)^2}{g_\xi(\lambda)} = \mathbb{V}(\xi, D).$$

Теорема доказана.

2.7. Обобщения. Здесь мы кратко обсудим возможности ослабления предположений о многообразии $\mathcal{M}$ и операторах A и B .

I) Операторы A и B – не обязательно эллиптические *дифференциальные* операторы. Вся теория слово в слово работает, если мы предположим, что A и B – эллиптические *псевдодифференциальные* операторы (например, $A = (-\Delta)^m$ и $B = (-\Delta)^l$, где Δ – оператор Лапласа–Бельтрами на $\mathcal{M}$), и, в частности, числа m и l не обязательно целые. Это даст возможность изучать интерполяционные неравенства в пространствах Соболева дробного порядка.

II) Разработанная теория естественным образом распространяется на случай многообразия с краем. Тогда необходимо снабдить эллиптические операторы A и B подходящими *краевыми условиями*, которые должны дополнительно удовлетворять условию

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B), \quad (2.49)$$

где $\mathcal{D}(A)$ и $\mathcal{D}(B)$ – области определения операторов A и B . При этих дополнительных предположениях развитая выше теория работает и для многообразий с краем.

III) Можно рассмотреть сужение пространств $\bar{H}^m$ на класс, скажем, радиально симметричных функций. Если операторы A и B тоже радиально симметричны, то вся теория также работает и в этом случае.

IV) Разработанная теория работает во многих случаях, когда $\mathcal{M}$ *некомпактно*, точнее, *неограничено*. Единственная проблема здесь в том, что в отличие от компактного случая функция Грина $G_\lambda(x, \xi)$ может иметь плохое поведение при $x, \xi \rightarrow \infty$ и в результате использовавшиеся выше интегралы могут не иметь смысла. Так что в общей теории следует налагать дополнительные условия

на $\mathcal{M}$, равно как и на операторы A и B . Однако во всех наших “некомпактных” приложениях эти вопросы будут очевидными и прозрачными, так что, для того чтобы избежать ненужных технических усложнений, мы не будем здесь развивать “общую теорию” для некомпактного случая.

3. Часть II. Примеры и приложения

3.1. Случай $\mathbb{R}^n$. Для иллюстрации нашего метода рассмотрим простейший случай, когда $M = \mathbb{R}^n$, и пусть l и m удовлетворяют неравенству $-\infty < l < n/2 < m < \infty$, так что $0 < \theta = (2m - n)/(2(m - l)) < 1$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Справедливо неравенство*

$$\|u\|_\infty^2 \leq c_{\mathbb{R}^n}(l, m) \|(-\Delta)^{l/2} u\|^{2\theta} \|(-\Delta)^{m/2} u\|^{2(1-\theta)}, \quad (3.1)$$

где точная постоянная $c_{\mathbb{R}^n}(l, m)$ есть

$$c_{\mathbb{R}^n}(l, m) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{\theta|\xi|^{2l} + (1-\theta)|\xi|^{2m}} = \frac{\sigma(n)\pi}{(2\pi)^n \cdot 2(m-l)\theta^\theta(1-\theta)^{1-\theta} \sin \pi\theta}. \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} f(x) dx$ и $\lambda > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \|u\|_\infty^2 &\leq (2\pi)^{-n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)| d\xi \right)^2 \\ &\leq (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2 (\lambda\theta|\xi|^{2l} + (1-\theta)|\xi|^{2m}) d\xi \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{\lambda\theta|\xi|^{2l} + (1-\theta)|\xi|^{2m}} \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{\lambda\theta|\xi|^{2l} + (1-\theta)|\xi|^{2m}} \\ &\quad \times (\lambda\theta \|(-\Delta)^{l/2} u\|^2 + (1-\theta) \|(-\Delta)^{m/2} u\|^2). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Далее, полагая $\lambda = \lambda_* = \|(-\Delta)^{m/2} u\|^2 / \|(-\Delta)^{l/2} u\|^2$, получаем

$$\lambda_* \theta \|(-\Delta)^{l/2} u\|^2 + (1-\theta) \|(-\Delta)^{m/2} u\|^2 = \lambda_*^\theta \|(-\Delta)^{l/2} u\|^{2\theta} \|(-\Delta)^{m/2} u\|^{2(1-\theta)}, \quad (3.4)$$

что дает

$$\|u\|_\infty^2 \leq (2\pi)^{-n} \left[\lambda_*^\theta \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{\lambda_* \theta |\xi|^{2l} + (1-\theta) |\xi|^{2m}} \right] \|(-\Delta)^{l/2} u\|^{2\theta} \|(-\Delta)^{m/2} u\|^{2(1-\theta)}.$$

Выражение в квадратных скобках на самом деле не зависит от λ_* , что и дает (3.2). Тот факт, что постоянная точная, можно проверить, подставляя

$$u_\lambda(x) = \mathcal{F}^{-1}((\lambda\theta_1|\xi|^{2l} + \theta_2|\xi|^{2m})^{-1}) \quad (3.5)$$

и вычисляя соответствующие интегралы. Однако более простой способ состоит в том, чтобы заметить, что для $u_\lambda(x)$ все неравенства в (3.3) обращаются в равенства. Далее, дифференцируя выражение в квадратных скобках по λ , получаем $\lambda = \|(-\Delta)^{l/2} u_\lambda\|^2 / \|(-\Delta)^{m/2} u_\lambda\|^2$, что и доказывает, что (3.1) для $u = u_\lambda$ превращается в равенство. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Конечно, тот же самый результат получается применением теоремы 2.1. Тогда

$$\mathbb{A}(\lambda) = (-\Delta)^m + \lambda(-\Delta)^l, \quad G_\lambda(x, \xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i\eta(x-\xi)} d\eta}{|\eta|^{2m} + \lambda|\eta|^{2l}}$$

и

$$G_\lambda(\xi, \xi) = \lambda^{-\theta} \frac{\sigma(n)\pi}{(2\pi)^n \cdot 2(m-l) \sin \pi\theta}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Для любого $D > 0$ экстремальная задача

$$\mathbb{V}(D) := \sup\{|u(0)|^2 : \|(-\Delta)^{l/2}u\|^2 = 1, \|(-\Delta)^{m/2}u\|^2 = D\} \quad (3.6)$$

имеет решение

$$\mathbb{V}(D) = c_{\mathbb{R}^n}(l, m) D^{1-\theta}. \quad (3.7)$$

Единственная экстремальная функция есть (см. (3.5))

$$U_D = \frac{u_D}{\|(-\Delta)^{l/2}u_D\|}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Для вычисления интеграла была использована формула

$$\int_0^\infty \frac{x^m}{(1+x^k)^l} dx = \frac{1}{k} B\left(\frac{m+1}{k}, l - \frac{m+1}{k}\right), \quad (3.8)$$

которая будет полезна и в дальнейшем.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. В одномерном случае постоянная $c_{\mathbb{R}}(l, m)$ найдена в [24].

3.2. Симметрические многообразия. В этом разделе рассматривается случай, когда исходное многообразие $\mathcal{M}$ симметрическое, а операторы A и B инвариантны по отношению к группе симметрий. Как следствие, функция Грина $G_\lambda(x, \xi)$, определенная в (2.14), зависит только от $x - \xi$ (поскольку любые две точки на $\mathcal{M}$ могут быть отождествлены с помощью подходящего преобразования симметрии). Поэтому ключевая функция $G_\lambda(\xi, \xi)$ на самом деле не зависит от ξ и является функцией лишь одной переменной λ :

$$G_\lambda(\xi, \xi) = G(\lambda). \quad (3.9)$$

Этот факт чрезвычайно упрощает анализ и позволяет во многих случаях получать явные выражения для точных констант в интерполяционных неравенствах. Ниже рассматриваются два примера: торы и сферы, хотя развитая техника применима и для других симметрических многообразий.

3.2.1. Тор. Мы начнем с рассмотрения n -мерного тора $\mathbb{T}^n := [-\pi, \pi]^n$ и соответствующих неравенств вида

$$\|u\|_{L_\infty(\mathbb{T}^n)} \leq C_{l,n,m} \|(-\Delta)^{l/2}u\|_{L_2(\mathbb{T}^n)}^\theta \|(-\Delta)^{m/2}u\|_{L_2(\mathbb{T}^n)}^{1-\theta} \quad (3.10)$$

для периодических функций $u \in H^m(\mathbb{T}^n)$ со средним $\langle u \rangle := \int_{\mathbb{T}^n} u(x) dx = 0$. В этом случае $A := (-\Delta)^m$, $B = (-\Delta)^l$, $\ker A = \ker B = \{\text{const}\}$ и все предположения развитой выше абстрактной теории выполнены при $l < n/2 < m$. В частности,

$$\bar{H}^m = H^m(\mathbb{T}^n) \cap \{\langle u \rangle = 0\}. \quad (3.11)$$

Функция Грина оператора $\mathbb{A}(\lambda) = (-\Delta)^m + \lambda(-\Delta)^l$ на торе $\mathbb{T}^n$ (с условием нулевого среднего) записывается с помощью кратных рядов Фурье:

$$\begin{aligned} G_\lambda(x, \xi) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}_0^n} \frac{e^{ik(x-\xi)}}{|k|^{2m} + \lambda|k|^{2l}}, \\ G_\lambda(\xi, \xi) &= G(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}_0^n} \frac{1}{|k|^{2m} + \lambda|k|^{2l}}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $k = (k_1, \dots, k_n)$ – мультииндекс, $|k|^2 = k_1^2 + \dots + k_n^2$ и сумма берется по всем $k = (k_1, \dots, k_n) \neq (0, \dots, 0)$ и $\mathbb{Z}_0^n = \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$.

3.2.1.1. *Случай $l = 0$.* Конкретный случай $l = 0$ был изучен в [2]. Тогда асимптотическое разложение $G(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ получается с помощью формулы суммирования Пуассона (см., например, [22]):

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} f\left(\frac{m}{\mu}\right) = (2\pi)^{n/2} \mu^n \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(2\pi m \mu), \quad (3.13)$$

где $\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi x} dx$ – преобразование Фурье и $\mu > 0$.

А именно,

$$\Phi_\lambda(x) = (2\pi)^{-n/2} \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{|\xi|^{2m} + \lambda}\right) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i\xi x} d\xi}{|\xi|^{2m} + \lambda}$$

есть фундаментальное решение оператора $\mathbb{A}(\lambda)$ во всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда из (3.13) следует, что

$$G(\lambda) + \frac{1}{(2\pi)^n} \lambda^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{|k|^{2m} + \lambda} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \Phi_\lambda(2\pi k). \quad (3.14)$$

Кроме того, в силу масштабной инвариантности имеем

$$\Phi_\lambda(x) = \lambda^{-1} \lambda^{n/(2m)} \Phi_1(\lambda^{1/(2m)} x)$$

и в силу аналитичности функции $\xi \mapsto 1/(|\xi|^{2m} + 1)$ получаем $|\Phi_1(x)| \leq C e^{-C_m |x|}$ для некоторых положительных C и C_m . Поэтому из (3.14) следует, что

$$G(\lambda) = \lambda^{-1} \lambda^{n/(2m)} \Phi_1(0) - \frac{1}{(2\pi)^n} \lambda^{-1} + O(e^{-C_m \lambda^{1/(2m)}}). \quad (3.15)$$

Наконец, вычисляя с помощью (3.8) интеграл $\Phi_1(0) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{|\xi|^{2m} + 1}$, находим

$$G(\lambda) = (2\pi)^{-n} \lambda^{-1} \left(\frac{\pi \sigma(n)}{2m \sin(\pi n/(2m))} \lambda^{n/(2m)} - 1 \right) + O(e^{-C_m \lambda^{1/(2m)}}), \quad (3.16)$$

где $\sigma(n) = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ – площадь поверхности $(n-1)$ -мерной единичной сферы. Поскольку $1 - \theta = n/(2m)$, то асимптотическая формула (3.16) имеет вид (2.41) с $g_3 = 0$ и из предложения 2.1 получаем

$$\mathbb{V}(D) = c_n(m)D^{n/(2m)} - k_n(m) - l_n(m)D^{-n/(2m)} + O(D^{-n/m}), \quad (3.17)$$

где

$$\begin{aligned} c_n(m) &:= c_{\mathbb{R}^n}(0, m) = \frac{\pi\sigma(n)}{(2\pi)^n n^{n/(2m)} (2m - n)^{1-n/(2m)} \sin(\pi n/(2m))}, \\ k_n(m) &:= \frac{2m}{(2\pi)^n (2m - n)}, \\ l_n(m) &:= \frac{2n^{1+n/(2m)} m^2 \sin(\pi n/(2m))}{(2\pi)^n \pi \sigma(n) (2n - m)^{2+n/(2m)}} \end{aligned} \quad (3.18)$$

(см. подробнее в [2]). Итак, поскольку $l_n(m) > 0$, то

$$\mathbb{V}(D) \leq c_n(m)D^{n/(2m)} - k_n(m) \quad (3.19)$$

для больших D , и, используя непрерывность функции $D \mapsto \mathbb{V}(D)$, заключаем, что

$$K_n(m) := \sup_{D \in [1, \infty)} \{c_n(m)D^{n/(2m)} - \mathbb{V}(D)\} < \infty \quad (3.20)$$

и

$$\mathbb{V}(D) \leq c_n(m)D^{n/(2m)} - K_n(m) \quad (3.21)$$

теперь уже для всех $D \geq 1$. Тогда согласно (2.11) получаем следующий результат из [2].

ТЕОРЕМА 3.2. *Для всех $u \in \bar{H}^m(\mathbb{T}^n)$ справедливо неравенство*

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)}^2 \leq c_n(m) \|u\|_{L_2(\mathbb{T}^n)}^{2-n/m} \|(-\Delta)^{m/2} u\|_{L_2(\mathbb{T}^n)}^{n/m} - K_n(m) \|u\|_{L_2(\mathbb{T}^n)}^2, \quad (3.22)$$

где постоянные $c_n(m)$ и $K_n(m) \leq k_n(m)$ точные и определены в (3.18) и (3.20) соответственно.

Отсюда видно, что постоянная $c_n(m)$ здесь совпадает с точной постоянной в аналогичном неравенстве во всем $\mathbb{R}^n$ (3.2). Напротив, точная постоянная $K_n(m)$ вряд ли имеет аналитическое выражение для всех n и m , поскольку в силу определения (3.20), для того чтобы получить $K_n(m)$, мы должны знать функцию $V(D)$ не только для больших D , а для всех $D \geq 1$. Как показано в [2], асимптотическое разложение (3.17) работает только для *очень больших* D (если m очень велико) и на начальном интервале D эта функция *осциллирует* (что может быть объяснено исследованием предела $m \rightarrow \infty$, см. [2]).

Кроме того, существует принципиальная разница между случаем $n = 1$ и многомерным случаем $n > 1$. В первом случае [2] всегда $K_1(m) > 0$, так что дополнительный член в (3.22) *улучшает* классическое интерполяционное неравенство. Однако в многомерном случае эта постоянная становится строго отрицательной при достаточно больших m (например, при $m > 9$ для $n = 2$

и при $m > 6$ для $n = 3$). Поэтому в этом случае дополнительный член *положителен* и необходим для выполнения интерполяционного неравенства. Другими словами, если нас интересует только классическое интерполяционное неравенство (без корректоров), то необходимо *увеличить* постоянную по сравнению со случаем $\mathbb{R}^n$.

Тем не менее, как показано в [2] с помощью достоверных вычислений, есть три конкретных случая, когда выполняется равенство $K_n(m) = k_n(m)$, и, следовательно, все постоянные в (3.22) могут быть найдены аналитически.

1) *Случай* $n = 1$ и $m = 1$: неравенство

$$\|u\|_{L_\infty(\mathbb{T}^1)}^2 \leq \|u\|_{L_2(\mathbb{T}^1)} \|u'\|_{L_2(\mathbb{T}^1)} - \frac{1}{\pi} \|u\|_{L_2(\mathbb{T}^1)}^2 \quad (3.23)$$

выполняется для всех 2π -периодических функций с нулевым средним.

2) *Случай* $n = 1$ и $m = 2$: неравенство

$$\|u\|_{L_\infty(\mathbb{T}^1)}^2 \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}} \|u\|_{L_2(\mathbb{T}^1)}^{3/2} \|u''\|_{L_2(\mathbb{T}^1)}^{1/2} - \frac{2}{3\pi} \|u\|_{L_2(\mathbb{T}^1)}^2 \quad (3.24)$$

выполняется для всех 2π -периодических функций с нулевым средним.

3) *Случай* $n = 2$ и $m = 2$: неравенство

$$\|u\|_{L_\infty(\mathbb{T}^2)}^2 \leq \frac{1}{4} \|u\|_{L_2(\mathbb{T}^2)} \|\Delta u\|_{L_2(\mathbb{T}^2)} - \frac{1}{2\pi^2} \|u\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 \quad (3.25)$$

выполняется для всех $(2\pi \times 2\pi)$ -периодических функций с нулевым средним. Как показывают вычисления, это единственный случай (по крайней мере для целого m) для двумерного тора, когда $K_n(m) = k_n(m)$, см. [2].

Используя развитую выше технику, мы сейчас приведем чисто аналитическое доказательство двух первых неравенств.

ТЕОРЕМА 3.3. *Неравенства (3.23) и (3.24) выполняются для всех 2π -периодических функций с нулевым средним, и все константы в этих неравенствах точные.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с (3.23). Поскольку

$$\Phi_\lambda(x) = (2\pi)^{-1/2} \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{\xi^2 + \lambda} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{\lambda}|x|},$$

то, используя (3.14) и суммируя геометрическую прогрессию, находим

$$G(\lambda) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} e^{-2\pi\sqrt{\lambda}|k|} - \frac{1}{2\pi\lambda} = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi\sqrt{\lambda} \coth(\pi\sqrt{\lambda}) - 1}{\lambda}. \quad (3.26)$$

По теореме 2.3, для $D \geq 1$

$$\mathbb{V}(D) = \min_{\lambda \geq -1} \{(\lambda + D)G(\lambda)\} \leq \{(\lambda + D)G(\lambda)\}|_{\lambda=D-1/2} = \left(2D - \frac{1}{2}\right) G\left(D - \frac{1}{2}\right), \quad (3.27)$$

где минимум по λ заменен значением в $\lambda = D - 1/2$. Итак, осталось только доказать, что

$$\left(2D - \frac{1}{2}\right)G\left(D - \frac{1}{2}\right) - D^{1/2} + \frac{1}{\pi} = \frac{1}{4\pi(2D-1)}(4\pi D\sqrt{4D-2} \cdot \coth \alpha - \pi\sqrt{4D-2} \cdot \coth \alpha - 2 - 8\pi D^{3/2} + 4\pi\sqrt{D}) < 0 \quad (3.28)$$

для всех $D \geq 1$, где для краткости обозначено $\alpha := \pi\sqrt{4D-2}/2$. Для упрощения правой части (3.19) используем неравенство

$$\sqrt{4D-2} < 2\sqrt{D} - \frac{1}{2}D^{-1/2} - \frac{1}{16}D^{-3/2}, \quad D \geq 1$$

(которое следует из тейлоровского разложения функции $\sqrt{1-(2D)^{-1}}$ и того факта, что все отбрасываемые члены отрицательны). Используя также, что $\coth \alpha \geq 1$ в отрицательных членах, получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(D) - D^{1/2} + \frac{1}{\pi} &\leq \frac{1}{4\pi(2D-1)} \left(4\pi D \left(8D^{1/2} - 2D^{-1/2} - \frac{D^{-3/2}}{4} \right) \coth \alpha - \pi\sqrt{4D-2} \cdot \coth \alpha - 2 - 8\pi D^{3/2} + 4\pi\sqrt{D} \right) \\ &= \frac{1}{16\pi D^{1/2}(2D-1)} \left(32\pi D^2(\coth \alpha - 1) - 8\pi D \coth \alpha - \pi \coth \alpha - 4\pi\sqrt{4D-2}\sqrt{D} - 8\sqrt{D} + 16\pi D \right) \\ &< \frac{1}{16\pi D^{1/2}(2D-1)} \left(\frac{64\pi D^2}{e^{2\alpha} - 1} - 8\pi D - \pi - 4\pi\sqrt{4D-2}\sqrt{D} - 8\sqrt{D} + 16\pi D \right) \\ &= \frac{1}{16\pi D^{1/2}(2D-1)} \left(\frac{64\pi D^2}{\exp(\pi\sqrt{4D-2}) - 1} + \frac{4\pi}{1 + \sqrt{1-(2D)^{-1}}} - \pi - 8\sqrt{D} \right). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Функция $f(D) := \frac{64\pi D^2}{\exp(\pi\sqrt{4D-2}) - 1}$ строго убывает при $D \geq 1$, поскольку производная

$$f'(D) = - \frac{128\pi D \left(\sqrt{4D-2} - \sqrt{4D-2} \exp(\pi\sqrt{4D-2}) + \pi D \exp(\pi\sqrt{4D-2}) \right)}{(-1 + \exp(\pi\sqrt{4D-2}))^2 \sqrt{4D-2}}$$

строго отрицательна при $D \geq 1$. Аналогично, второе и последнее слагаемые справа в (3.29) строго убывают, и заменяя их на максимальное значение в $D = 1$, окончательно получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(D) - D^{1/2} + \frac{1}{\pi} &< \frac{1}{16\pi D^{1/2}(2D-1)} \left(\frac{64\pi}{\exp(\pi\sqrt{2}) - 1} + \frac{8\pi}{2 + \sqrt{2}} - \pi - 8 \right) \\ &= \frac{1}{16\pi D^{1/2}(2D-1)} (-1.3873 \dots) < 0, \end{aligned}$$

что и доказывает неравенство (3.23). То, что все константы точные, следует из полученной ранее асимптотики (3.17):

$$\mathbb{V}(D) = D^{1/2} - \frac{1}{\pi} + O(D^{-1/2}) \quad \text{при } D \rightarrow \infty.$$

Заметим, что общая формула (2.44) в нашем случае дает $\lambda(D) = D - (2/\pi)\sqrt{D} + \dots$. Годятся и другие подстановки λ в (3.27), например, $\lambda = D - 1$, $\lambda = D - (2/\pi)\sqrt{D}$. Однако $\lambda = D$ не годится.

Теперь рассмотрим (3.24). Суммируя ряд с помощью вычетов (см. [25; раздел 3.3]):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^4 + n^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4\mu^3} \frac{\sinh(\pi\sqrt{2}\mu) + \sin(\pi\sqrt{2}\mu)}{\cosh(\pi\sqrt{2}\mu) - \cos(\pi\sqrt{2}\mu)} - \frac{1}{2\mu^4},$$

находим

$$G(\lambda) = \frac{2}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + \lambda} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{4\lambda^{3/4}} \frac{\sinh(\pi\sqrt{2}\lambda^{1/4}) + \sin(\pi\sqrt{2}\lambda^{1/4})}{\cosh(\pi\sqrt{2}\lambda^{1/4}) - \cos(\pi\sqrt{2}\lambda^{1/4})} - \frac{1}{2\lambda} \right). \quad (3.30)$$

Поскольку

$$\frac{\sinh \alpha + \sin \alpha}{\cosh \alpha - \cos \alpha} \leq \frac{\sinh \alpha + 1}{\cosh \alpha - 1} < 1 + 4.1e^{-\alpha}$$

для $\alpha = \pi\sqrt{2}\lambda^{1/4} \geq \pi\sqrt{2} = 4.4428\dots$, то

$$G(\lambda) < G_1(\lambda) := \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{4\lambda^{3/4}} (1 + 4.1e^{-\pi\sqrt{2}\lambda^{1/4}}) - \frac{1}{2\lambda} \right).$$

Используя теорему 2.3 и подставляя $\lambda = 3D - 3/2$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(D) &= \min_{\lambda \geq -1} \{(\lambda + D)G(\lambda)\} \leq \{(\lambda + D)G(\lambda)\} \big|_{\lambda=3(D-1/2)} \\ &= \left(4D - \frac{3}{2}\right) G\left(3D - \frac{3}{2}\right) < \left(4D - \frac{3}{2}\right) G_1\left(3D - \frac{3}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Поэтому достаточно показать, что

$$R(D) := \left(4D - \frac{3}{2}\right) G_1\left(3D - \frac{3}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}} D^{1/4} + \frac{2}{3\pi} \leq 0.$$

Полагая $x := (3D - 3/2)^{1/4}$, $x \geq (3/2)^{1/4} = 1.1066\dots$, имеем

$$\begin{aligned} 6\pi R(D) &= (8x^4 + 3) \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{4x^3} (1 + 4.1e^{-\pi\sqrt{2}x}) - \frac{1}{2x^4} \right) - 2\sqrt{2}\pi \left(x^4 + \frac{3}{2} \right)^{1/4} + 4 \\ &= 2\pi\sqrt{2} \left(\left(x + \frac{3}{8x^3} - \left(x^4 + \frac{3}{2} \right)^{1/4} \right) + \left(x + \frac{3}{8x^3} \right) 4.1e^{-\pi\sqrt{2}x} \right) \\ &\quad - \frac{3}{2x^4} =: R(x). \end{aligned}$$

Первый член в скобках порядка $O(x^{-7})$, второй экспоненциально мал, поэтому $R(x) < 0$ уже при $x \geq 2$. Далее, $R(x) < 0$ и на интервале $x \in [(3/2)^{1/4}, 2]$, в чем можно убедиться непосредственно. Итак, $R(x) < 0$ для всех x .

В заключение заметим, что общая формула (2.44) дает

$$\lambda(D) = 3D - \frac{4\sqrt{2}}{\pi^{4/3}} D^{3/4} + \dots,$$

что и объясняет (по крайней мере в главном члене) использованную подстановку $\lambda = 3D - 3/2$. Теорема доказана.

3.2.1.2. *Случай $l > 0$.* Анализ функции Грина (3.12) в случае $l > 0$ более тонкий. Действительно, теперь функция $k \rightarrow 1/(|k|^{2m} + \lambda|k|^{2l})$ имеет особенность при $k = 0$. Поэтому соответствующее фундаментальное решение $\Phi_\lambda(x)$ не является быстро убывающим и прямое применение формулы Пуассона не дает желаемого результата. Для преодоления этого обстоятельства, следуя [2], мы положим $\mu = \lambda^{-1}$ и перепишем (3.14) в виде

$$G(\lambda) = (2\pi)^{-n} \mu \sum_{k \in \mathbb{Z}_0^n} \frac{1}{k^{2l}(\mu|k|^{2(m-l)} + 1)} =: (2\pi)^{-n} \mu \tilde{G}(\mu). \quad (3.32)$$

Тогда, s раз дифференцируя $\tilde{G}(\mu)$ по μ , получаем

$$\frac{d^s \tilde{G}(\mu)}{d\mu^s} = (-1)^s s! \sum_{k \in \mathbb{Z}_0^n} \frac{|k|^{2(m-l)s-2l}}{(\mu|k|^{2(m-l)} + 1)^{s+1}} \quad (3.33)$$

и функция $k \mapsto |k|^{2(m-l)s-2l}/(\mu|k|^{2(m-l)} + 1)^{s+1}$ уже регулярна при $k = 0$, если $s \geq l/(m-l)$ (а убывание по $k \rightarrow \infty$ остается порядка $|k|^{2m}$ для всех s). Теперь мы можем применить формулу Пуассона для того, чтобы выяснить (аналогично (3.14)) асимптотическое поведение функции (3.33) при $\mu \rightarrow 0+$. Затем после s интегрирований мы получим асимптотику исходной функции $G(\lambda)$ с точностью до s постоянных интегрирования, которые каким-то образом нужно найти, см. ниже.

Мы проиллюстрируем этот метод для конкретного случая $l = 1$ и $m = 2$. При этом рассмотрим лишь двумерный ($n = 2$) и трехмерный ($n = 3$) случаи, хотя общий случай рассматривается аналогично.

Пусть $n = 2$. Тогда $\tilde{G}(\mu)$ надо продифференцировать только один раз, чтобы убрать особенность при $k = 0$:

$$\frac{d\tilde{G}(\mu)}{d\mu} = \frac{d}{d\mu} \sum_{k \in \mathbb{Z}_0^2} \frac{1}{|k|^2(1 + \mu|k|^2)} = - \sum_{k \in \mathbb{Z}_0^2} \frac{1}{(1 + \mu|k|^2)^2}. \quad (3.34)$$

Применяя формулу Пуассона, с учетом равенства $\mathcal{F}((1 + |x|^2)^{-2}) = |\xi|K_1(|\xi|)/2$ получаем

$$\frac{d\tilde{G}(\mu)}{d\mu} = -\frac{\pi}{\mu} + 1 - 2\pi^2 \mu^{-3/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}_0^2} |k|K_1(2\pi\mu^{-1/2}|k|), \quad (3.35)$$

где $K_n(z)$ – модифицированная функция Бесселя порядка n [27]. Интегрируя этот ряд по μ и используя формулу $K'_0(x) = -K_1(x)$, получаем нужную формулу

$$\tilde{G}(\mu) = \pi \ln \frac{1}{\mu} + \beta + \mu - 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}_0^2} K_0(2\pi\mu^{-1/2}|k|), \quad (3.36)$$

где β – постоянная интегрирования. Как показано в [2], на основании формулы Харди

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_0^2} \frac{1}{|k|^{2s}} = 4\zeta(1+s)\beta(1+s),$$

где $\zeta(s)$ и $\beta(s)$ – дзета-функция Римана и бета-функция Дирихле, для постоянной интегрирования получается аналитическое выражение

$$\beta = \pi\gamma + 4\beta'(1) = \pi \left(2\gamma + 2\ln 2 + 3\ln \pi - 4\ln \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \right), \quad (3.37)$$

где γ – постоянная Эйлера–Маскерони, а $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера. Таким образом, получен следующий результат.

ЛЕММА 3.1. Пусть $n = 2$, $m = 2$, $l = 1$. Тогда для $\lambda > 0$ функция Грина (3.32) имеет следующее представление:

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= \frac{1}{4\pi} \lambda^{-1} \ln \lambda + \frac{\beta}{4\pi^2 \lambda} + \frac{1}{4\pi^2 \lambda^2} - \frac{1}{2\pi} \lambda^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}_0^2} K_0(2\pi\lambda^{1/2}|k|) \\ &\leq \frac{1}{4\pi^2 \lambda} \left(\pi \ln \lambda + \beta + \frac{1}{\lambda} \right), \end{aligned} \quad (3.38)$$

где β определена в (3.37). Кроме того, член, содержащий сумму бesselевых функций в (3.38), экспоненциально мал (порядка $O(e^{-\pi\lambda^{1/2}})$) при $\lambda \rightarrow \infty$.

Заметим, что случай $n = 2$ и $m = 2$, $l = 1$ есть предельный случай в (2.9), в котором появляется дополнительный логарифмический член, и соответствующее неравенство обычно называется неравенством Брезиса–Галлуэ (см. [4]). Хотя условие (2.8) формально и нарушается, большая часть развитой выше теории работает и в этом предельном случае. В частности, как показано в [2] на основе (3.38), существует постоянная $L > 0$ такая, что

$$\mathbb{V}(D) \leq \frac{1}{4\pi} (\ln D + \ln(1 + \ln D) + L), \quad D \geq 1, \quad (3.39)$$

где постоянная $1/(4\pi)$ точная, и численно найденное значение L равно 2.15627. Это дает улучшенный вариант неравенства Брезиса–Галлуэ в форме

$$\|u\|_{C(\mathbb{T}^2)}^2 \leq \frac{1}{4\pi} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 \left(\ln \frac{\|\Delta u\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2}{\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2} + \ln \left(1 + \ln \frac{\|\Delta u\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2}{\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2} \right) + L \right). \quad (3.40)$$

Рассмотрим теперь трехмерный случай $n = 3$ с $m = 2$ и $l = 1$. Тогда

$$\tilde{G}(\mu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_0^3} \frac{1}{|k|^2(1 + \mu|k|^2)}, \quad \frac{d\tilde{G}(\mu)}{d\mu} = - \sum_{k \in \mathbb{Z}_0^3} \frac{1}{(1 + \mu|k|^2)^2}. \quad (3.41)$$

Применяя формулу суммирования Пуассона (3.13) ко второму ряду справа и вычисляя преобразование Фурье, а именно, используя формулу [22]

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{(1 + |x|^2)^2}\right)(\xi) = \frac{\pi^2}{(2\pi)^{3/2}} e^{-|\xi|}, \quad (3.42)$$

окончательно получаем

$$\frac{d\tilde{G}(\mu)}{d\mu} = 1 - \frac{\pi^2}{\mu^{3/2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} e^{-2\pi\mu^{-1/2}|k|^{1/2}}. \quad (3.43)$$

Интегрируя по μ и выделяя в сумме член с $k = 0$, получаем

$$\tilde{G}(\mu) = 2\pi^2\mu^{-1/2} + \beta_3 + \mu - \pi \sum_{k \in \mathbb{Z}_0^3} |k|^{-1/2} e^{-2\pi\mu^{-1/2}|k|^{1/2}}, \quad (3.44)$$

где β_3 – постоянная интегрирования, которая может быть найдена численно:

$$\beta_3 = -8.91363291758515127$$

(ниже показано, как эффективно ее вычислять). Итак, доказана следующая лемма.

ЛЕММА 3.2. Пусть $n = 3$, $m = 2$, $l = 1$. Тогда при $\lambda > 0$ функция Грина (3.32) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= \frac{1}{8\pi^3\lambda} \left(2\pi^2\lambda^{1/2} + \beta_3 + \lambda^{-1} - \pi \sum_{k \in \mathbb{Z}_0^3} \frac{e^{-2\pi\lambda^{1/2}|k|^{1/2}}}{|k|^{1/2}} \right) \\ &\leq \frac{1}{8\pi^3\lambda} (2\pi^2\lambda^{1/2} + \beta_3 + \lambda^{-1}), \end{aligned} \quad (3.45)$$

где β_3 определена в (3.37). Кроме того, член с суммой в середине (3.45) экспоненциально мал (порядка $O(e^{-\pi\lambda^{1/2}})$) при $\lambda \rightarrow \infty$.

Таким образом, функция Грина $G(\lambda)$ удовлетворяет условиям предложения 2.1 с $\theta = 1/2$ и $(g_1, g_2, g_3) = (8\pi^3)^{-1} \cdot (2\pi^2, \beta_3, 1)$ соответственно. Поэтому

$$\mathbb{V}(D) = \frac{1}{8\pi^3} \left(4\pi^2 D^{1/2} + 2\beta_3 - \frac{\beta_3^2 - 4\pi^2}{2\pi^2} D^{-1/2} \right) + O(D^{-1}), \quad (3.46)$$

где третий член отрицательный, что говорит о том, что может быть верно следующее неравенство:

$$\|u\|_\infty^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|\nabla u\|_{L_2(\mathbb{T}^3)} \|\Delta u\|_{L_2(\mathbb{T}^3)} - \frac{\beta_3}{4\pi^3} \|\nabla u\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2, \quad (3.47)$$

где все постоянные точные. Однако на данный момент мы доказали это неравенство лишь для больших $D = \|\Delta u\|^2 / \|\nabla u\|^2$. В следующей лемме показывается, что оно верно для всех $D \geq 1$.

ЛЕММА 3.3. Неравенство (3.47) верно для любого $u \in H^2(\mathbb{T}^3)$ с нулевым средним.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам лишь надо проверить, что неравенство

$$\mathbb{V}(D) \leq \frac{1}{8\pi^3} (4\pi^2 D^{1/2} + 2\beta_3) \quad (3.48)$$

выполняется для всех $D \geq 1$. Для этого мы вновь используем вариационное представление (3.27), где полагаем $\lambda = D - 1/2$, а также неравенство (3.45). Выделяя член $4\pi^2 D^{1/2} + 2\beta_3$, получаем

$$\begin{aligned} 8\pi^3 \mathbb{V}(D) &\leq \left(1 + \frac{D}{D - 1/2}\right) \left(2\pi^2 \sqrt{D - \frac{1}{2}} + \beta_3 + \frac{1}{D - 1/2}\right) = 4\pi^2 D^{1/2} + 2\beta_3 \\ &\quad + \frac{1}{2D - 1} \left(\pi^2 \frac{\sqrt{4D - 2}}{\sqrt{4D(4D - 2)} + 4D - 1} + \beta_3 + 4 + \frac{2}{2D - 1}\right), \end{aligned} \quad (3.49)$$

и надо проверить, что второй член в правой части всегда отрицательный. Действительно, при $D \geq 1$

$$\begin{aligned} \pi^2 \frac{\sqrt{4D - 2}}{\sqrt{4D(4D - 2)} + 4D - 1} &< \pi^2 \frac{\sqrt{4D - 2}}{\sqrt{4D(4D - 2)} + 4D - 2} \\ &= \pi^2 \frac{1}{\sqrt{4D} + \sqrt{4D - 2}} \leq \frac{\pi^2}{2 + \sqrt{2}} \end{aligned}$$

и $2/(2D - 1) \leq 2$. Тогда

$$\frac{\pi^2}{2 + \sqrt{2}} + \beta_3 + 6 = -0.022892 < 0,$$

и лемма доказана.

3.2.1.3. *Нахождение постоянных интегрирования.* Как мы уже видели, при $l > 0$ формула суммирования Пуассона позволяет найти асимптотическое разложение функции Грина $G(\lambda)$ лишь с точностью до некоторых постоянных интегрирования. Прямое вычисление этих постоянных является нетривиальной задачей, поскольку ряд (3.12) сходится недостаточно быстро, особенно для больших λ . Поэтому для их вычисления хотелось бы найти ряд, сходящийся более быстро (например, экспоненциально). В этом пункте для рассмотренного выше случая $n = 3$, $m = 2$, $l = 1$ мы приводим явную формулу для функции Грина (3.12) в терминах интегралов от так называемых тэта-функций Якоби. Используя известные соотношения для тэта-функций, мы получаем формулу для β_3 в терминах очень быстро сходящегося и удобного для вычислений ряда. Заметим также, что хотя мы и ограничились этим конкретным случаем, предлагаемый метод имеет общий характер и применим для вычисления других постоянных интегрирования, включая случай анизотропных торев и т. д.

Рассмотрим тэта-функцию Якоби (см., например, [8])

$$\theta_3(q) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{k^2}. \quad (3.50)$$

Справедливо известное тождество, играющее ключевую роль в дальнейшем:

$$\theta_3(e^{-\pi t}) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta_3(e^{-\pi t^{-1}}) \quad (3.51)$$

(это тождество вытекает из формулы (3.13) с $n = 1$, $f(x) = e^{-x^2/2}$, $\widehat{f}(\xi) = e^{-\xi^2/2}$ и $\mu = \sqrt{t/(2\pi)}$).

Используя очевидное равенство

$$\frac{1}{k(1 + \mu k)} = \int_0^\infty (1 - e^{-t/\mu}) e^{-kt} dt,$$

преобразуем (3.41) следующим образом:

$$\begin{aligned} 8\pi^3 \widetilde{G}(\mu) &= \int_0^\infty (1 - e^{-t/\mu}) \sum_{k \in \mathbb{Z}_0^3} [e^{-t}]^{k_1^2} [e^{-t}]^{k_2^2} [e^{-t}]^{k_3^2} dt \\ &= \int_0^\infty (1 - e^{-t/\mu}) ([\theta_3(e^{-t})]^3 - 1) dt. \end{aligned}$$

Разбивая интервал интегрирования, $\mathbb{R}_+ = [0, 1] \cup [1, \infty)$, и используя (3.51), приходим к

$$\begin{aligned} 8\pi^3 \widetilde{G}(\mu) &= \int_1^\infty (1 - e^{-t/\mu}) ([\theta_3(e^{-t})]^3 - 1) dt \\ &\quad + \int_0^1 (1 - e^{-t/\mu}) (\pi^{3/2} t^{-3/2} \theta_3(e^{-\pi^2 t^{-1}})^3 - 1) dt \\ &= \int_1^\infty (1 - e^{-t/\mu}) ([\theta_3(e^{-t})]^3 - 1) dt \\ &\quad + \pi^{3/2} \int_1^\infty (1 - e^{-1/(t\mu)}) t^{-1/2} (\theta_3(e^{-\pi^2 t})^3 - 1) dt \\ &\quad - \int_0^1 (1 - e^{-t/\mu}) dt + \pi^{3/2} \int_0^1 t^{-3/2} (1 - e^{-t/\mu}) dt. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Теперь можно найти асимптотическое разложение $\widetilde{G}(\mu)$ при $\mu \rightarrow 0+$. Несложные вычисления дают

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{-3/2} (1 - e^{-t/\mu}) dt &= \mu^{-1/2} \left(\int_0^\infty t^{-3/2} (1 - e^{-t}) dt - \int_{1/\mu}^\infty t^{-3/2} (1 - e^{-t}) dt \right) \\ &= \mu^{-1/2} \left(2\sqrt{\pi} - \int_{1/\mu}^\infty t^{-3/2} dt + O(e^{-1/\mu}) \right) \\ &= 2\sqrt{\pi} \mu^{-1/2} - 2 + o_\mu(1). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Учитывая, что $\theta_3(x) - 1 = O(x)$ при $x \rightarrow 0$, мы можем перейти к пределу $\mu \rightarrow 0$ в интегралах в (3.52), содержащих θ_3 , и, сравнивая получившийся результат с (3.44), находим

$$\beta_3 = -1 - 2\pi^{3/2} + \int_1^\infty (\theta_3(e^{-t})^3 - 1) dt + \pi^{3/2} \int_1^\infty t^{-1/2} (\theta_3(e^{-\pi^2 t})^3 - 1) dt. \quad (3.54)$$

Мы не знаем, можно ли сосчитать интегралы в (3.54) в явном виде, однако полученная формула очень удобна для вычисления β_3 с высокой точностью. Действительно, возвращаясь к ряду Тейлора (3.50) для тэта-функции и используя равенство

$$\int_1^\infty t^{-1/2} e^{-\alpha t} dt = \sqrt{\pi} \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}}, \quad \alpha > 0,$$

где $\operatorname{erfc}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$, получаем

$$\beta_3 = -1 - 2\pi^{3/2} + \sum_{k \in \mathbb{Z}_0^3} \left(\frac{e^{-|k|^2}}{|k|^2} + \pi \frac{\operatorname{erfc}(\pi|k|)}{|k|} \right). \quad (3.55)$$

Видим, что скорость сходимости ряда сверхэкспоненциальная, и вычисления дают значение

$$\beta_3 = -8.91363291758515127,$$

использованное в предыдущем пункте.

3.2.2. Неравенства на сферах. Напомним основные факты, касающиеся спектра оператора Лапласа–Бельтрами на $(d-1)$ -мерной сфере $\mathbb{S}^{d-1}$:

$$-\Delta Y_n^k = \Lambda_n Y_n^k, \quad k = 1, \dots, k_d(n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Здесь Y_n^k – это ортонормированные сферические гармоники. Каждое собственное значение

$$\Lambda_n = n(n+d-2)$$

имеет кратность

$$k_d(n) = \frac{2n+d-2}{n} \binom{n+d-3}{n-1}.$$

В частности, для $d = 3, 4$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^2: \Lambda_n &= n(n+1), & k_3(n) &= 2n+1, \\ \mathbb{S}^3: \Lambda_n &= n(n+2), & k_4(n) &= (n+1)^2. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Справедливо следующее тождество [22], играющее в дальнейшем ключевую роль: для любого $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$

$$\sum_{l=1}^{k_d(n)} Y_n^l(\xi)^2 = \frac{k_d(n)}{\sigma(d)}, \quad (3.57)$$

где $\sigma(d) = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ – площадь поверхности $\mathbb{S}^{d-1}$.

Наконец, поскольку ядро Δ одномерно и состоит из констант, всюду в дальнейшем предполагается ортогональность константам:

$$\bar{H}^s(\mathbb{S}^{d-1}) = \{\varphi \in H^s(\mathbb{S}^{d-1}), (\varphi, 1) = 0\}.$$

3.2.2.1. *Неравенства на сферах: $\mathbb{S}^2$.* Мы рассмотрим приложения общей теории к неравенствам на двумерной сфере с $A = (-\Delta)^m$, $m > 1/2$, и $B = I$, где Δ – оператор Лапласа–Бельтрами. Первое положительное собственное значение $-\Delta$ есть 2, и в соответствии с (2.13) мы рассмотрим оператор

$$\mathbb{A}(\lambda) = (-\Delta)^m + \lambda I, \quad \lambda > -2^m.$$

Его функция Грина $G_\lambda(x, \xi)$ есть

$$G_\lambda(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{Y_n^k(\xi) Y_n^k(x)}{(n(n+1))^m + \lambda}, \quad x, \xi \in \mathbb{S}^2,$$

и, благодаря (3.57), функция $G_\lambda(\xi, \xi)$ не зависит от ξ и задается рядом

$$G(\lambda) = G_\lambda(\xi, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{Y_n^k(\xi)^2}{(n(n+1))^m + \lambda} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n(n+1))^m + \lambda}. \quad (3.58)$$

Полагая $\mu := \lambda^{-1/m}$, получаем

$$G(\lambda) = \frac{1}{4\pi} \mu^m \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \varphi(\mu n(n+1)),$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^m + 1}.$$

Поскольку $\varphi(0) = 1$ и $\varphi'(0) = 0$, из приводимой ниже леммы 3.5 следует, что

$$G(\lambda) = \frac{1}{4\pi} \left[\lambda^{-\theta} K - \frac{2}{3} \lambda^{-1} + 0 \cdot \lambda^{-(2-\theta)} \right] + O(\lambda^{-(3-2\theta)}), \quad (3.59)$$

где $\theta = (m-1)/m$ и

$$K = \int_0^\infty \varphi(x) dx = \frac{(1-\theta)\pi}{\sin \theta \pi}.$$

Другими словами, мы показали, что для $f_\xi(\lambda) = G(\lambda)$ справедливо асимптотическое разложение (2.41) с g_1, g_2, g_3 , не зависящими от $\xi \in \mathbb{S}^2$:

$$g_1 = \frac{K}{4\pi} = \frac{1-\theta}{4 \sin \theta \pi}, \quad g_2 = -\frac{1}{6\pi}, \quad g_3 = 0. \quad (3.60)$$

Далее, дифференцируя (3.58) и вновь используя лемму 3.5, находим асимптотическое разложение $g_\xi(\lambda) = g(\lambda)$:

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= -f'(\lambda) = -G'(\lambda) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{((n(n+1))^m + \lambda)^2} \\ &= \frac{1}{4\pi} \mu^{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{((\mu n(n+1))^m + 1)^2} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\lambda^{-(1-\theta)} \theta K - \frac{2}{3} \lambda^{-2} + 0 \cdot \lambda^{-(3-\theta)} \right] + O(\lambda^{-(4-\theta)}), \end{aligned}$$

где использовано равенство

$$\int_0^\infty \varphi(x)^2 dx = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^m + 1)^2} = \theta K.$$

Этим обосновано дифференцирование асимптотической формулы для $f(\lambda)$, как требуется в предложении 2.1, откуда получаем асимптотическое разложение функции $\mathbb{V}(D)$ на $\mathbb{S}^2$.

ТЕОРЕМА 3.4. *Функция $\mathbb{V}(D)$, являющаяся решением на $\mathbb{S}^2$ экстремальной задачи*

$$\mathbb{V}(\xi, D) := \sup \{ |u(\xi)|^2 : u \in \bar{H}^m(\mathbb{S}^2), \|u\|^2 = 1, \|(-\Delta)^{m/2} u\|^2 = D \}, \quad (3.61)$$

не зависит от $\xi \in \mathbb{S}^2$ и имеет следующее асимптотическое поведение при $D \rightarrow \infty$:

$$\mathbb{V}(D) = \frac{1}{4 \sin \theta \pi} \left(\frac{1-\theta}{\theta} \right)^\theta D^{1-\theta} - \frac{1}{6\pi\theta} - \frac{\sin \theta \pi}{18\pi^2} \frac{(1-\theta)^{1-\theta}}{\theta^{3-\theta}} D^{\theta-1} + O(D^{-(2-2\theta)}), \quad (3.62)$$

где $\theta = (m-1)/m$.

Теперь используем полученную выше асимптотику функции $\mathbb{V}(D)$ для неравенств с остаточными членами на $\mathbb{S}^2$. По теореме 2.2 точная постоянная $K = K_\theta$ в классическом интерполяционном неравенстве

$$u(\xi)^2 \leq \|u\|_\infty^2 \leq K_\theta \|u\|^{2\theta} \|(-\Delta)^m u\|^{2(1-\theta)} \quad (3.63)$$

есть

$$K_\theta = \frac{1}{\theta^\theta (1-\theta)^{1-\theta}} \sup_{\lambda \geq 0} \lambda^\theta G(\lambda) = \frac{1}{\theta^\theta (1-\theta)^{1-\theta}} \sup_{\lambda \geq 0} \frac{1}{4\pi} \lambda^\theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n(n+1))^m + \lambda}. \quad (3.64)$$

Заметим, что выражение (3.64) было получено в [14] с помощью похожих, но менее общих методов, чем использованные нами в теореме 2.2. В [14] также было показано, что при (целых) m , $2 \leq m \leq 7$, супремум достигается на бесконечности:

$$\sup_{\lambda \geq 0} \lambda^\theta G(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^\theta G(\lambda) = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^m}, \quad (3.65)$$

что дает

$$K_\theta = \frac{1}{4 \sin \theta \pi} \left(\frac{1 - \theta}{\theta} \right)^\theta$$

или, эквивалентно,

$$\mathbb{V}(D) = \mathbb{V}_m(D) < \frac{1}{4 \sin \theta \pi} \left(\frac{1 - \theta}{\theta} \right)^\theta D^{1-\theta} \quad (3.66)$$

для $2 \leq m \leq 7$. Однако для больших m супремум в (3.65) достигается в конечной точке $\lambda_* < \infty$. Объяснение этому явлению для тора было дано в [2]; ниже мы сделаем это для сферы $\mathbb{S}^2$.

ЛЕММА 3.4. *Для всех достаточно больших m функция $h(\lambda) := \lambda^\theta G(\lambda)$ достигает глобального максимума в конечной точке $\lambda_* = \lambda_*(m)$ и $h(\lambda_*) > h(\infty)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в (3.64) $\lambda = \nu^{2m}$, получаем

$$h(\lambda) = \frac{1}{4\pi} H(\nu), \quad H(\nu) = \nu^{2m-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\nu^{2m} + (n(n+1))^m}.$$

Рассмотрим разбиение полуоси $x \geq 0$ точками

$$a_n = a_n(\nu) = \frac{(n-1)n}{\nu^2}, \quad n = 1, \dots$$

Тогда непосредственная проверка показывает, что

$$H(\nu) = \frac{1}{2} \varphi(a_2)(a_2 - a_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varphi(a_n) + \varphi(a_{n+1})}{2} (a_{n+1} - a_n), \quad (3.67)$$

где $\varphi(x) = 1/(1+x^m)$. Для больших m эта функция выглядит как ступенька: $\varphi(x) \approx 1$ при $x < 1$ и $\varphi(x) \approx 0$ при $x > 1$. В силу приводимой ниже леммы 3.5

$$H(\infty) := \lim_{\nu \rightarrow \infty} H(\nu) = \int_0^\infty \varphi(x) dx = \frac{\pi/m}{\sin(\pi/m)} = 1 + o_{m \rightarrow \infty}(1).$$

Зафиксируем большое m , и пусть, скажем, $\nu = \nu_0 = \sqrt{2} + 1/100$. Тогда

$$\begin{aligned} a_1(\nu_0) &= 0, & a_2(\nu_0) &< 1 (= 0.986), & a_3(\nu_0) &\approx 3 (= 2.958); \\ a_2(\nu_0) - a_1(\nu_0) &= 0.986; & a_3(\nu_0) - a_2(\nu_0) &= 1.972. \end{aligned}$$

Поскольку $\varphi(a_2) = 1 + o_{m \rightarrow \infty}(1)$, $\varphi(a_3) = o_{m \rightarrow \infty}(1)$ и сумма от $n = 3$ до ∞ в (3.67) дает вклад порядка $o_{m \rightarrow \infty}(1)$, то

$$H(\nu_0) = \frac{0.986}{2} + \frac{1.972}{2} + o_{m \rightarrow \infty}(1) = 1.479 + o_{m \rightarrow \infty}(1).$$

Поэтому $H(\nu_0) > H(\infty)$, и лемма доказана.

Рис. 1. Графики нормированных функций $H(\nu)/H(\infty)$ при $m = 2$ и $m = 10$

Это рассуждение также объясняет начальные осцилляции функции $H(\nu)$, когда соответствующий узел $a_n(\nu)$ проходит через 1 с увеличением ν . На рис. 1 показано монотонное поведение $H(\nu)$ при $m = 2$ и начальные осцилляции $H(\nu)$ при $m = 10$. Заметим, что первый (и глобальный) максимум во втором случае расположен около $\nu = \sqrt{2}$.

Рис. 2. График функции $\mathbb{V}(D) - \bar{\mathbb{V}}(D)$ при $m = 2, 3, 4$

Переходя к неравенствам с остаточными членами, заметим, что третий член в (3.62) отрицательный, поэтому неравенство

$$\mathbb{V}(D) < \frac{1}{4 \sin \theta \pi} \left(\frac{1 - \theta}{\theta} \right)^\theta D^{1-\theta} - \frac{1}{6\pi\theta} =: \bar{\mathbb{V}}(D) \quad (3.68)$$

выполняется для всех $D \geq D_0$, где D_0 достаточно велико. На конечном интервале $[2^m, D_0]$ компьютерные вычисления достоверны, и их результаты приведены на рис. 2.

В частности, при $m = 2$

$$\mathbb{V}(D) < \bar{\mathbb{V}}(D) \quad \text{для всех } D,$$

что доказывает следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.5. Если $u \in \bar{H}^2(\mathbb{S}^2)$, то

$$\|u\|_\infty^2 \leq \frac{1}{4} \|u\| \|\Delta u\| - \frac{1}{3\pi} \|u\|^2, \quad (3.69)$$

где обе постоянные точные, а экстремальной функции нет.

При $m = 3$ и $m = 4$ функция $\mathbb{V}_m(\xi, D) - \bar{\mathbb{V}}_m(\xi, D)$ достигает глобального максимума $0.00486\dots$ при $D = 15.8\dots$ для $m = 3$ и глобального максимума $0.0189\dots$ при $D = 22.4\dots$ для $m = 4$. Соответственно получаем два точных неравенства

$$\|u\|_\infty^2 \leq \frac{1}{4 \sin \theta \pi} \left(\frac{1 - \theta}{\theta} \right)^\theta \|u\|^{2\theta} \|(-\Delta)^{m/2} u\|^{2(1-\theta)} - \frac{\varepsilon_m}{6\pi\theta} \|u\|^2, \quad m = 3, 4, \quad (3.70)$$

где $\theta = (m - 1)/m$ и $\varepsilon_3 = 0.938\dots$, $\varepsilon_4 = 0.821\dots$.

Теперь мы докажем асимптотическую формулу для функций, заданных рядом (3.71), которую мы систематически использовали выше. Итак, пусть функция $F(\mu)$ есть

$$F(\mu) := \sum_{n=1}^{\infty} (2n + 1) f(\mu n(n + 1)), \quad (3.71)$$

где f – достаточно гладкая и достаточно быстро убывающая функция. Требуется найти асимптотическое разложение $F(\mu)$ при $\mu \rightarrow 0$.

ЛЕММА 3.5. *Справедливо следующее асимптотическое разложение:*

$$F(\mu) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty f(x) dx - \frac{2}{3} f(0) - \frac{1}{15} \mu f'(0) + O(\mu^2) \quad \text{при } \mu \rightarrow 0. \quad (3.72)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$R(x) = (2x + 1) f(\mu x(x + 1))$$

и заметим, что

$$\int_0^\infty R(x) dx = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty f(\mu x(x + 1)) d(\mu x(x + 1)) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty f(x) dx. \quad (3.73)$$

Вычислим производные R до порядка 5 в $x = 0$:

$$\begin{aligned} R(0) &= f(0); \\ R'(0) &= 2f(0) + \mu f'(0); \\ R''(0) &= 6\mu f'(0) + \mu^2 f''(0); \\ R'''(0) &= 12\mu f'(0) + 12\mu^2 f''(0) + \mu^3 f'''(0); \\ R^{(4)}(0) &= 60\mu^2 f''(0) + 20\mu^3 f'''(0) + \mu^4 f^{(4)}(0); \\ R^{(5)}(0) &= 120\mu^2 f''(0) + 180\mu^3 f'''(0) + 30\mu^4 f^{(4)}(0) + \mu^5 f^{(5)}(0), \end{aligned} \quad (3.74)$$

и

$$\begin{aligned} R^{(6)}(x) &= 840\mu^3(2x + 1)f^{(3)}(\mu x(x + 1)) + 420\mu^4(2x + 1)^3 f^{(4)}(\mu x(x + 1)) \\ &\quad + 42\mu^5(2x + 1)^5 f^{(5)}(\mu x(x + 1)) + \mu^6(2x + 1)^7 f^{(6)}(\mu x(x + 1)). \end{aligned} \quad (3.75)$$

Далее мы используем формулу суммирования Эйлера–Маклорена (см., например, [18])

$$\sum_{n=0}^{\infty} R(n) = \int_0^{\infty} R(x) dx + \frac{1}{2}R(0) - \sum_{i=2}^k \frac{B_i}{i!} R^{(i-1)}(0) - \int_0^{\infty} \frac{B_k(x)}{k!} R^{(k)}(x) dx, \quad (3.76)$$

где B_k – числа Бернулли: $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$, $B_4 = -1/30$, $B_5 = 0$, $B_6 = 1/42, \dots$, а $B_k(x)$ – периодические многочлены Бернулли. Используя (3.76) с $k = 6$ и учитывая (3.73) и (3.74), получаем

$$\begin{aligned} F(\mu) = & -R(0) + \sum_{n=0}^{\infty} R(n) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} f(x) dx - \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{12}(2f'(0) + \mu f'(0)) \\ & + \frac{1}{720}(12\mu f'(0) + 12\mu^2 f''(0) + \mu^3 f'''(0)) \\ & - \frac{1}{42 \cdot 720}(120\mu^2 f''(0) + 180\mu^3 f'''(0) + 30\mu^4 f^{(4)}(0) + \mu^5 f^{(5)}(0)) \\ & - \int_0^{\infty} \frac{B_6(x)}{6!} R^{(6)}(x) dx. \end{aligned}$$

Это дает (3.72), если остаточный интегральный член имеет порядок $O(\mu^2)$. Периодические многочлены Бернулли очевидно ограничены на $(0, \infty)$. Поэтому вклад каждого члена суммы (3.75) в интеграл будет порядка μ^2 . Например, последний член дает вклад

$$\mu^6 \int_0^{\infty} x^7 g(\mu x^2) dx = \frac{1}{2} \mu^2 \int_0^{\infty} y^3 g(y) dy.$$

Три оставшихся члена в (3.75) рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

3.2.2.2. Неравенства на сферах: $\mathbb{S}^3$. На трехмерной сфере $\mathbb{S}^3$ мы рассмотрим только один пример с $l = 1$ и $m = 2$, так что $\theta = 1/2$. Обозначим $A = (-\Delta)^2$, $B = -\Delta$, и пусть

$$\mathbb{A}(\lambda) = (-\Delta)^2 - \lambda \Delta.$$

Функция Грина оператора $\mathbb{A}(\lambda)$ есть

$$G_{\lambda}(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{(n+1)^2} \frac{Y_n^k(\xi) Y_n^k(x)}{n(n+2)(n(n+2) + \lambda)},$$

и, вновь используя (3.57), видим, что $G_{\lambda}(\xi, \xi)$ не зависит от ξ :

$$G(\lambda) = G_{\lambda}(\xi, \xi) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)(n(n+2) + \lambda)} \quad \text{для любого } \xi \in \mathbb{S}^3. \quad (3.77)$$

Нам сейчас не нужен аналог леммы 3.5, поскольку ряд (3.77) суммируется в явном виде [14]:

$$G(\lambda) = \frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{\sqrt{\lambda-1}}{\lambda} \frac{\pi}{2} \coth \pi \sqrt{\lambda-1} - \frac{\lambda-1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda} \right]. \quad (3.78)$$

Применяя теорему 2.2, где $\theta = 1/2$, находим

$$\sup_{\lambda \geq 0} \sqrt{\lambda} G(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt{\lambda} G(\lambda) = \frac{1}{4\pi}, \quad (3.79)$$

что дает следующее точное неравенство на $\mathbb{S}^3$ [14]:

$$\|u\|_\infty^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|\nabla u\| \|\Delta u\|. \quad (3.80)$$

Для получения степенного разложения $G(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ мы просто заменим $\coth \pi \sqrt{\lambda - 1}$ на 1, что дает

$$G(\lambda) = \frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{\pi}{2} \lambda^{-1/2} - \frac{3}{4} \lambda^{-1} - \frac{\pi}{4} \lambda^{-3/2} + O(\lambda^{-2}) \right],$$

так что (2.41) выполняется с

$$g_1 = \frac{1}{4\pi}, \quad g_2 = -\frac{3}{8\pi^2}, \quad g_3 = -\frac{1}{8\pi}. \quad (3.81)$$

Используя предложение 2.1, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.6. *Решение $\mathbb{V}(D)$ экстремальной задачи*

$$\mathbb{V}(\xi, D) := \sup \{ |u(\xi)|^2 : u \in \bar{H}^2(\mathbb{S}^3), \|\nabla u\|^2 = 1, \|\Delta u\|^2 = D \} \quad (3.82)$$

не зависит от $\xi \in \mathbb{S}^3$ и допускает следующее асимптотическое разложение при $D \rightarrow \infty$:

$$\mathbb{V}(D) = \frac{1}{2\pi} D^{1/2} - \frac{3}{4\pi^2} - \frac{9 + 4\pi^2}{16\pi^3} D^{-1/2} + O(D^{-1}). \quad (3.83)$$

Третий член в (3.83) отрицательный, поэтому

$$\mathbb{V}(D) < \frac{1}{2\pi} \sqrt{D} - \frac{3}{4\pi^2} \quad (3.84)$$

для всех $D \geq D_0$, где D_0 достаточно велико. Аналогично теореме 3.3 и лемме 3.3, используя явную формулу (3.78), получаем следующий результат.

ЛЕММА 3.6. *Неравенство (3.84) выполнено для всех $D \geq \sqrt{3}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2.3 для $D \geq \sqrt{3}$ (первое собственное значение $(-\Delta)^{1/2}$ на $\mathbb{S}^3$ есть $\sqrt{3}$) имеем

$$\mathbb{V}(D) = \min_{\lambda \geq -\sqrt{3}} \{(\lambda + D)G(\lambda)\} \leq \{(\lambda + D)G(\lambda)\}|_{\lambda=D} = 2DG(D). \quad (3.85)$$

Поэтому, используя (3.78) и неравенство $\sqrt{D-1} \leq \sqrt{D} - 1/(2\sqrt{D}) - 1/(8D^{3/2})$ и заменяя $\coth \pi\sqrt{D-1}$ в отрицательных членах на 1, получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(D) - \frac{1}{2\pi}\sqrt{D} + \frac{3}{4\pi^2} &\leq 2DG(D) - \frac{1}{2\pi}\sqrt{D} + \frac{3}{4\pi^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\sqrt{D-1} \coth \pi\sqrt{D-1} - \sqrt{D} + \frac{2}{\pi D} \right) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\sqrt{D} (\coth \pi\sqrt{D-1} - 1) - \frac{1}{2\sqrt{D}} - \frac{1}{8D^{3/2}} + \frac{2}{\pi D} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi D^{3/2}} \left(D^2 (\coth \pi\sqrt{D-1} - 1) - \frac{D}{2} - \frac{1}{8} + \frac{2\sqrt{D}}{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi D^{3/2}} (F_1(D) - F_2(D)) < 0, \end{aligned}$$

так как функция $F_1(D) = D^2 (\coth \pi\sqrt{D-1} - 1)$ убывает при $D \geq \sqrt{3}$ и $F_1(D) \leq F_1(\sqrt{3}) = 3 \coth(\pi\sqrt{\sqrt{3}-1} - 1) = 0.0278\dots$, а функция $F_2(D) = D/2 + 1/8 - 2\sqrt{D}/\pi$ возрастает и $F_2(D) \geq F_2(\sqrt{3}) = \sqrt{3}/2 + 1/8 - 2\sqrt[4]{3}/\pi = 0.153\dots$. Лемма доказана.

В качестве следствия получаем уточнение неравенства (3.80).

ТЕОРЕМА 3.7. Для $u \in \overline{H}^2(\mathbb{S}^3)$

$$\|u\|_\infty^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|\nabla u\| \|\Delta u\| - \frac{3}{4\pi^2} \|\nabla u\|^2, \quad (3.86)$$

где обе постоянные точные, а экстремальной функции нет.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Коэффициент при главном члене в асимптотических разложениях (3.62), (3.83) совпадает с соответствующей постоянной в случае $\mathbb{R}^n$.

3.3. Многообразие с границей.

3.3.1. Неравенство первого порядка на полуоси. Мы рассмотрим несколько неравенств на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$. На всей прямой $\mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\|u\|_\infty^2 \leq \|u\| \|u'\|, \quad (3.87)$$

где $u \in H^1(\mathbb{R})$, постоянная 1 точная, и существует единственная экстремальная функция $u_*(x) = e^{-|x|}$. Используя продолжение нулем, видим, что на $\mathbb{R}_+$ неравенство (3.87) по-прежнему выполняется, но экстремальной функции нет, поскольку $u_*(x) > 0$. С помощью развитой выше теории можно получить это неравенство в уточненной форме

$$u(\xi)^2 \leq \|u\| \|u'\| (1 - e^{-2\xi}), \quad u \in H_0^1(\mathbb{R}_+). \quad (3.88)$$

Действительно, функция Грина оператора

$$\Delta u = -u'' + u, \quad u(0) = u(\infty) = 0,$$

есть

$$G(x, \xi) = \begin{cases} e^{-\xi} \sinh x, & x < \xi, \\ e^{-x} \sinh \xi, & x \geq \xi. \end{cases}$$

Как и в лемме 2.1, отсюда получаем

$$u(\xi)^2 \leq (\|u'\|^2 + \|u\|^2)G(\xi, \xi) = (\|u'\|^2 + \|u\|^2) \frac{1 - e^{-2\xi}}{2},$$

что эквивалентно неравенству (3.88).

3.3.2. Неравенство для оператора Бесселя на полуоси и на отрезке. Мы теперь рассмотрим одномерное неравенство на полуоси $\mathbb{R}_+$ с $Au = -u'' - u/(4x^2)$ и $Bu = u$. Хотя соответствующая точная постоянная была найдена в [10] в связи с неравенствами Либа–Тирринга для сферически симметричных потенциалов (см. также [9], [12]), мы включаем этот пример для иллюстрации нашего общего подхода. Во-первых, в силу одномерного неравенства Харди

$$\int_0^\infty \frac{u(x)^2}{x^2} dx \leq 4 \int_0^\infty (u'(x))^2 dx$$

оператор A неотрицательный. В соответствии с общей теорией из раздела 2 для нахождения точной постоянной $C = C(\xi)$ в неравенстве

$$\|u\|_\infty^2 \leq C_{\mathbb{R}_+} \left(\int_0^\infty \left((u'(x))^2 - \frac{u(x)^2}{4x^2} \right) dx \right)^{1/2} \|u\| \quad (3.89)$$

нам надо выписать функцию Грина оператора

$$\mathbb{A}(\lambda)u = -u'' - \frac{u}{4x^2} + \lambda u$$

с условиями Дирихле $u(0) = u(\infty) = 0$:

$$G_\lambda(x, \xi) = \begin{cases} \sqrt{x\xi} K_0(\sqrt{\lambda}\xi) I_0(\sqrt{\lambda}x), & x < \xi, \\ \sqrt{x\xi} K_0(\sqrt{\lambda}x) I_0(\sqrt{\lambda}\xi), & x > \xi, \end{cases} \quad (3.90)$$

где K_0 и I_0 – модифицированные функции Бесселя нулевого порядка. Действительно, функции $\sqrt{x} I_0(\sqrt{\lambda}x)$ и $\sqrt{x} K_0(\sqrt{\lambda}x)$ обе удовлетворяют однородному уравнению $\mathbb{A}(\lambda)u = 0$, причем первая функция обращается в нуль в нуле, а вторая на бесконечности. Условие скачка $G'_x(\xi + 0, \xi) - G'_x(\xi - 0, \xi) = 1$ выполнено в силу известного тождества для вронскиана и производных функций Бесселя:

$$I_0(x)K'_0(x) - I'_0(x)K_0(x) = -\frac{1}{x}, \quad I'_0(x) = I_1(x), \quad K'_0(x) = -K_1(x). \quad (3.91)$$

Поэтому постоянная $C(\xi)$ в теореме 2.2 (обозначавшаяся там $K(\xi)$) в действительности не зависит от ξ и выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} C(\xi) &= 2 \sup_{\lambda \geq 0} \sqrt{\lambda} G_\lambda(\xi, \xi) = 2 \sup_{\lambda \geq 0} \sqrt{\lambda} \xi K_0(\sqrt{\lambda}\xi) I_0(\sqrt{\lambda}\xi) \\ &= 2 \sup_{r \geq 0} r K_0(r) I_0(r) = 2r K_0(r) I_0(r) \Big|_{r=r_* = 1.075\dots} \\ &= 2 \cdot 0.533\dots = 1.06\dots =: C_{\mathbb{R}_+}. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Кроме того, для любого фиксированного $\xi > 0$ неравенство (3.89) превращается в равенство при $u_*(x) = G_{\lambda_*}(x, \xi)$, где $\lambda_* = \lambda_*(\xi) = r_*^2/\xi^2$ и $\|u_*\|_\infty = u_*(\xi)$. Заметим также, что $I_0(x) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} e^x$ и $K_0(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$ при $x \rightarrow \infty$, следовательно,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r K_0(r) I_0(r) = \frac{1}{2}. \quad (3.93)$$

Несколько сложнее технически рассмотрение неравенства на конечном интервале:

$$\|u\|_\infty^2 \leq C_{\text{int}} \left(\int_0^1 \left((u'(x))^2 - \frac{u(x)^2}{4d(x)^2} \right) dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 u(x)^2 dx \right)^{1/2}, \quad (3.94)$$

где $d(x)$ – расстояние от x до концов отрезка $(0, 1)$: $d(x) = x$, $x \leq 1/2$, $d(x) = 1 - x$, $1/2 \leq x \leq 1$.

Надо выписать функцию Грина $G_\lambda(x, \xi)$ для задачи

$$\mathbb{A}(\lambda)u = -u'' - \frac{u}{4d(x)^2} + \lambda u, \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (3.95)$$

Положим $\lambda = a^2$. При $x \in (0, 1/2)$ общее решение однородного уравнения $\mathbb{A}(\lambda)u = 0$ есть $c_1 \sqrt{x} I_0(ax) + c_2 \sqrt{x} K_0(ax)$, а при $x \in (1/2, 1)$ общее решение есть $c_1 \sqrt{1-x} I_0(a(1-x)) + c_2 \sqrt{1-x} K_0(a(1-x))$. Пусть для определенности $1/2 < \xi < 1$. Построим на всем отрезке $x \in (0, 1)$ какое-нибудь C^1 -гладкое решение $w_1(x)$ однородного уравнения $\mathbb{A}(\lambda)w_1 = 0$, выходящее из нуля при $x = 0$. В силу вышесказанного оно имеет вид

$$w_1(x) = \begin{cases} \sqrt{x} I_0(ax), & 0 < x < 1/2, \\ A\sqrt{1-x} I_0(a(1-x)) + B\sqrt{1-x} K_0(a(1-x)), & 1/2 < x < 1, \end{cases}$$

где A и B – постоянные, которые определяются из условия C^1 -гладкости функции $w_1(x)$ в точке $x = 1/2$. Приравнявая в точке $x = 1/2$ значение функций и производных справа и слева, получаем линейную систему для нахождения A и B , решая которую, находим

$$\begin{aligned} A = A(a) &= 1 - I_0\left(\frac{a}{2}\right) K_0\left(\frac{a}{2}\right) - a I_1\left(\frac{a}{2}\right) K_0\left(\frac{a}{2}\right), \\ B = B(a) &= I_0\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a I_0\left(\frac{a}{2}\right) I_1\left(\frac{a}{2}\right). \end{aligned}$$

Итак, для $w_1(x)$ при $x \in (0, 1)$ имеем $\mathbb{A}(\lambda)w_1(x) = 0$, $w_1(0) = 0$.

Для $x > 1/2$ решение однородного уравнения $\mathbb{A}(\lambda)w_2 = 0$ с $w_2(1) = 0$ есть

$$w_2(x) = \sqrt{1-x} I_0(a(1-x)).$$

Осталось вычислить вронскиан, который в силу теоремы Остроградского–Лиувилля не зависит от x и который мы можем вычислить при $x > 1/2$, где мы

знаем оба решения. Пользуясь (3.91) (и учитывая, что вклад от члена с множителем A равен нулю), находим $W = w_1(x)w_2'(x) - w_1'(x)w_2(x) = -B(a)$. Отсюда в силу известной общей формулы получаем явное выражение для $G_\lambda(x, \xi)$:

$$G_\lambda(x, \xi) = \frac{1}{B(a)} \begin{cases} w_1(x)w_2(\xi), & 1/2 \leq x \leq \xi, \\ w_1(\xi)w_2(x), & 1/2 \leq \xi \leq x, \end{cases}$$

и явное выражение для ключевой функции из теоремы 2.2:

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda} G_\lambda(\xi, \xi) &= aG_{a^2}(\xi, \xi) =: S(a, \xi) \\ &= \frac{1 - I_0(a/2)K_0(a/2) - aI_1(a/2)K_0(a/2)}{I_0(a/2)^2 + aI_0(a/2)I_1(a/2)} a(1 - \xi)I_0(a(1 - \xi))^2 \\ &\quad + a(1 - \xi)I_0(a(1 - \xi))K_0(a(1 - \xi)) \end{aligned} \quad (3.96)$$

для $\xi \in [1/2, 1]$ и симметричное выражение для $\xi \in [0, 1/2]$ (с заменой всюду $1 - \xi$ на ξ).

Используя асимптотические разложения функций $I_0(x)$, $I_1(x)$ и $K_0(x)$ при $x \rightarrow \infty$, можно показать, что равномерно по $\xi \in [0, 1]$ первый член в (3.96) имеет порядок $O(1/a^3)$ при $a \rightarrow \infty$. Поэтому при больших $a \geq a_0$ поведение функции $\sqrt{\lambda} G_\lambda(\xi, \xi)$ определяется вторым слагаемым, а его поведение мы знаем (см. (3.92), (3.93)). Это объясняет появление двух “рожков” высоты, стремящейся к $0.533\dots$, в симметрично расположенных точках $\xi = r_*/a$ и $\xi = 1 - r_*/a$ (см. левый график на рис. 3).

Рис. 3. График функции $\xi \mapsto \sqrt{\lambda} G_\lambda(\xi, \xi) = S(a, \xi)$ при $a = 100$ (“рожки”), $a = 10$ и $a = 2.668\dots$ (глобальный максимум при $\xi = 1/2$, равный $0.539285\dots$)

Следовательно, если при небольших $0 < a < a_0$ в какой-то точке ξ_* значение $S(a, \xi)$ больше, чем $0.533\dots$, то весь бесконечный промежуток (a_0, ∞) можно не рассматривать. Так оно и есть. Вычисления на компьютере показывают, что при небольших a функция $S(a, \xi)$ возрастает на $\xi \in [0, 1/2]$, а максимум, равный $0.5392859275 > 0.533\dots$, достигается в $\xi = 1/2$ при $a = a_* = 2.668904$ (см. правый график на рис. 3).

Кроме того, для $\xi = 1/2$ выражение (3.96) существенно упрощается:

$$\sqrt{\lambda} G_\lambda\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = S\left(a, \frac{1}{2}\right) = \frac{(a/2)I_0(a/2)}{I_0(a/2) + aI_1(a/2)}.$$

Итак, мы нашли точную постоянную в неравенстве (3.94) и единственную экстремальную функцию:

$$C_{\text{int}} = 2 \cdot 0.539285 = 1.078571855, \quad u_*(x) = G_{a_*^2} \left(x, \frac{1}{2} \right).$$

3.3.3. Неравенство первого порядка на отрезке. В этом пункте мы рассмотрим корректирующий член для неравенства

$$\|u\|_\infty^2 \leq 1 \cdot \|u\| \|u'\|, \quad u \in H_0^1(0, L), \quad (3.97)$$

на отрезке $(0, L)$ с нулевыми граничными условиями. Постоянная 1 точная, поскольку она точная для неравенства (3.87) на всей оси $\mathbb{R}$, и мы можем использовать продолжение нулем. Единственная экстремальная функция в (3.87) не обращается в нуль, поэтому в (3.97) нет экстремальной функции. Можно было бы ожидать, что неравенство, подобное (3.22), верно и для случая конечного интервала:

$$\|u\|_\infty^2 \leq \|u\| \|u'\| - c_L \|u\|^2, \quad u \in H_0^1(0, L). \quad (3.98)$$

В действительности, как мы сейчас покажем, $c_L = 0$. Если (3.98) верно, то $c_L = c/L$, где c – абсолютная постоянная. Далее, рассмотрим усеченную экстремальную функцию

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 \leq x \leq a, \\ e^{-a}(a+1-x), & a \leq x \leq a+1, \\ 0, & x \geq 0, \end{cases}$$

и положим $\varphi_a(-x) = \varphi_a(x)$. Тогда

$$\|\varphi_a\|_\infty = 1, \quad \|\varphi_a\|^2 = 1 - \frac{1}{3}e^{-2a}, \quad \|\varphi_a'\|^2 = 1 + e^{-2a}.$$

Подставляя это в (3.98) и устремляя a к ∞ , получаем, что (3.98) может выполняться лишь при $c = 0$, как и утверждалось.

Однако корректор существует, но является экспоненциально малым. Точнее, справедлив следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.8. Пусть $u \in H_0^1(0, L)$. Тогда

$$\|u\|_\infty^2 \leq \|u\| \|u'\| (1 - 2e^{-L\|u'\|/\|u\|}). \quad (3.99)$$

Коэффициенты двух слагаемых справа точные, а экстремальной функции нет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $L = 1$. Функция Грина краевой задачи

$$-y'' + \lambda y = \delta(x, \xi), \quad y(0) = y(1) = 0$$

есть

$$G_\lambda(x, \xi) = \frac{1}{\lambda^{1/2} \sinh \lambda^{1/2}} \begin{cases} \sinh \lambda^{1/2} x \sinh \lambda^{1/2} (1 - \xi), & 0 \leq x \leq \xi; \\ \sinh \lambda^{1/2} \xi \sinh \lambda^{1/2} (1 - x), & \xi \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (3.100)$$

Максимум $G_\lambda(\xi, \xi)$ по ξ достигается при $\xi = 1/2$:

$$G_\lambda(\xi, \xi) \leq \frac{1}{2\lambda^{1/2} \sinh \lambda^{1/2}} (\cosh \lambda^{1/2} - 1) = \frac{1}{2\lambda^{1/2}} \tanh \frac{\lambda^{1/2}}{2} = G_\lambda\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Как и в лемме 2.1, справедливо неравенство

$$u(\xi)^2 \leq G_\lambda(\xi, \xi)(\|u\|^2 + \lambda\|u'\|^2) \leq G_\lambda\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)(\|u\|^2 + \lambda\|u'\|^2),$$

которое при $\xi = 1/2$ обращается в равенство для $u(x) = \text{const } G_\lambda(x, 1/2)$. Поэтому для

$$\mathbb{V}(\xi, D) := \sup\{|u(\xi)|^2 : u \in H_0^1(0, 1), \|u\|^2 = 1, \|u'\|^2 = D\}$$

выполняется неравенство $\mathbb{V}(\xi, D) \leq \mathbb{V}(1/2, D)$, и, как в (2.30), (2.31), мы получаем параметрическое представление функции $\mathbb{V}(D) := \mathbb{V}(1/2, D)$:

$$D(\lambda) = \frac{h(\lambda)}{g(\lambda)}, \quad V(D(\lambda)) = \frac{f(\lambda)^2}{g(\lambda)}, \quad \lambda \in [-\pi^2, \infty), \quad (3.101)$$

где

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\lambda^{1/2}} \tanh \frac{\lambda^{1/2}}{2}, \quad g(\lambda) = -f'(\lambda), \quad h(\lambda) = f(\lambda) - \lambda g(\lambda). \quad (3.102)$$

Тогда неравенство (3.99) эквивалентно оценке

$$\mathbb{V}(D) \leq \sqrt{D} (1 - 2e^{-\sqrt{D}}) \quad \text{для } D \geq \pi^2. \quad (3.103)$$

Используя вариационное представление из теоремы 2.3, имеем

$$\mathbb{V}(D) = \min_{\lambda \in (-\pi^2, \infty)} \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \tanh \frac{\lambda^{1/2}}{2} \cdot (\lambda + D). \quad (3.104)$$

Для краткости положим $d := \sqrt{D}$ и

$$\lambda_* = \lambda_*(D) := D(1 - 2\sqrt{D}e^{-\sqrt{D}})^2 = d^2(1 - 2de^{-d})^2. \quad (3.105)$$

Как мы увидим ниже, $\lambda_*(D)$ содержит первые два члена асимптотического разложения при $D \rightarrow \infty$ единственного решения $\lambda = \lambda(D)$ первого уравнения в (3.101), одновременно являющегося уравнением для единственной точки $\lambda = \lambda(D)$, в которой достигается глобальный минимум в (3.104). На данный же момент мы просто подставим $\lambda_*(D)$ в правую часть (3.104). Тогда (3.103) будет доказано, если мы покажем, что следующее неравенство справедливо для всех $d \geq \pi$:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{d(1 - 2de^{-d})} \tanh \frac{d(1 - 2de^{-d})}{2} \cdot (d^2(1 - 2de^{-d})^2 + d^2) \leq d(1 - 2e^{-d}), \quad (3.106)$$

или

$$\tanh \frac{d(1 - 2de^{-d})}{2} \cdot ((1 - 2de^{-d})^2 + 1) \leq 2(1 - 2e^{-d})(1 - 2de^{-d}). \quad (3.107)$$

Далее воспользуемся тем, что $\tanh(u/2) \leq 1 - 2e^{-u} + 2e^{-2u}$, и заметим, что функция $1 - 2x + 2x^2 = 2(x - 1/2)^2 + 1/2$ монотонно убывает при $x \in [0, 1/2]$, так что

$$\begin{aligned} \tanh \frac{d(1 - 2de^{-d})}{2} &\leq 1 - 2e^{-d(1-2de^{-d})} + 2e^{-2d(1-2de^{-d})} \\ &\leq 1 - 2e^{-d}(1 + 2d^2e^{-d}) + 2e^{-2d}(1 + 2d^2e^{-d})^2, \end{aligned}$$

где использовано неравенство $e^{-d(1-2de^{-d})} \geq e^{-d}(1 + 2d^2e^{-d})$, следующее из $e^x > 1 + x$.

Учитывая вышесказанное, достаточно доказать для $d \geq \pi$ неравенство

$$\begin{aligned} F(d) := & (1 - 2e^{-d}(1 + 2d^2e^{-d}) + 2e^{-2d}(1 + 2d^2e^{-d})^2)((1 - 2de^{-d})^2 + 1) \\ & - 2(1 - 2e^{-d})(1 - 2de^{-d}) \leq 0. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Упростим $F(d)$:

$$F(d) = 4e^{-2d}F_1(d),$$

где

$$\begin{aligned} F_1(d) = & -d^2 + 2d^2e^{-d} + 4d^3e^{-d} + 1 - 2de^{-d} + 2d^2e^{-2d} \\ & - 8d^3e^{-2d} + 8d^4e^{-3d} - 8d^5e^{-3d} + 8d^6e^{-4d}. \end{aligned}$$

Отбрасывая все отрицательные слагаемые, кроме $-d^2$, получаем

$$F_1(d) < -d^2 + 1 + F_2(d), \quad F_2(d) := 2d^2e^{-d} + 4d^3e^{-d} + 2d^2e^{-2d} + 8d^4e^{-3d} + 8d^6e^{-4d}.$$

Каждый член в $F_2(d)$ монотонно убывает при $d \geq \pi$, поэтому

$$F_1(d) < -\pi^2 + 1 + F_2(\pi) = -2.530 \dots < 0,$$

что и доказывает (3.103).

Для объяснения нашего выбора $\lambda_*(D)$ в (3.105) найдем асимптотическое разложение при $D \rightarrow \infty$ обратной функции $\lambda = \lambda(D)$, поскольку $\lambda_*(D)$ содержит первые два члена этого разложения. Справедливы разложения

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{1}{2\lambda^{1/2}} \tanh \frac{\lambda^{1/2}}{2} = \frac{1}{2\lambda^{1/2}} \frac{1 - e^{-\lambda^{1/2}}}{1 + e^{-\lambda^{1/2}}} \\ &= \frac{1}{2} \lambda^{-1/2} (1 - 2e^{-\lambda^{1/2}} + 2e^{-2\lambda^{1/2}} + \dots), \\ g(\lambda) &= \frac{1}{4} \lambda^{-3/2} (1 + (-2 - 2\lambda^{1/2})e^{-\lambda^{1/2}} + (2 + 4\lambda^{1/2})e^{-2\lambda^{1/2}} + \dots), \\ h(\lambda) &= \frac{1}{4} \lambda^{-1/2} (1 + (-2 + 2\lambda^{1/2})e^{-\lambda^{1/2}} + (2 - 4\lambda^{1/2})e^{-2\lambda^{1/2}} + \dots) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= \frac{h(\lambda)}{g(\lambda)} = \frac{\lambda(1 + (-2 + 2\lambda^{1/2})e^{-\lambda^{1/2}} + (2 - 4\lambda^{1/2})e^{-2\lambda^{1/2}} + \dots)}{1 + (-2 - 2\lambda^{1/2})e^{-\lambda^{1/2}} + (2 + 4\lambda^{1/2})e^{-2\lambda^{1/2}} + \dots} \\ &= \lambda + 4\lambda^{3/2}e^{-\lambda^{1/2}} + 8\lambda^2e^{-2\lambda^{1/2}} + \dots. \end{aligned}$$

Поэтому обратная функция $\lambda(D)$ имеет асимптотику

$$\lambda(D) = D(1 - 4\sqrt{D}e^{-\sqrt{D}} + \dots) = d^2(1 - 2de^{-d} + \dots)^2,$$

первые два члена которой дают (3.105).

Наконец, найдем асимптотику $\mathbb{V}(D)$ при $D \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(D) &= \frac{1}{2\sqrt{\lambda(D)}} \tanh \frac{\lambda(D)^{1/2}}{2} \cdot (\lambda(D) + D) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{d(1 - 2de^{-d} + \dots)} \tanh \frac{d(1 - 2de^{-d} + \dots)}{2} \\ &\quad \times (d^2(1 - 2de^{-d} + \dots)^2 + d^2) \\ &= d \tanh \frac{d(1 - 2de^{-d} + \dots)}{2} \cdot (1 - 2de^{-d} + \dots)(1 + 2de^{-d} + \dots) \\ &= d \tanh \frac{d(1 - 2de^{-d} + \dots)}{2} \cdot (1 + \dots) = d(1 - 2e^{-d} + \dots), \quad d = \sqrt{D}, \end{aligned}$$

что и доказывает точность коэффициентов в (3.99) и завершает доказательство теоремы 3.8.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Рассуждая аналогично предложению 2.1, можно выписать три члена асимптотического разложения $\mathbb{V}(D)$ при $D \rightarrow \infty$:

$$\mathbb{V}(D) = D^{1/2} - 2D^{1/2}e^{-D^{-1/2}} - 2D^{1/2}(D-1)e^{-2D^{-1/2}} + o(e^{-3D^{-1/2}+\varepsilon}). \quad (3.109)$$

Третий член отрицательный, поэтому неравенство (3.103) выполняется для всех достаточно больших D . Однако, как мы показали, (3.103) верно для всех $D \geq \pi^2$.

3.3.4. О неравенстве второго порядка на полуоси и на отрезке. Теперь мы хотим применить нашу теорию к одномерному неравенству второго порядка в области D ,

$$\|u\|_\infty^2 \leq K\|u\|^{3/2}\|u''\|^{1/2}, \quad u \in H_0^1(D) \cap H^2(D), \quad (3.110)$$

в двух случаях: полуоси $D = \mathbb{R}_+$ и конечного интервала $D = (0, 1)$. В обоих случаях $Au = u''''$, $Bu = u$, $\theta = 3/4$ и $\|u\|_A = \|u''\|$.

Начнем с более простого случая полуоси. Тогда надо найти фундаментальное решение уравнения

$$\mathbb{A}(\lambda)u(x) = u''''(x) + \lambda u(x) = \delta(x - \xi), \quad x, \xi > 0, \quad u(0) = u''(0) = 0.$$

Оно находится методом отражения:

$$G_\lambda(x, \xi) = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1}{\lambda^{3/4}} \left[f_0\left(\frac{\lambda^{1/4}(x - \xi)}{\sqrt{2}}\right) - f_0\left(\frac{\lambda^{1/4}(x + \xi)}{\sqrt{2}}\right) \right],$$

где

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixy} dx}{x^4 + 1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} f_0\left(\frac{|y|}{\sqrt{2}}\right), \quad f_0(x) = e^{-|x|}(\cos x + \sin |x|), \quad (3.111)$$

и $\frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1}{\lambda^{3/4}} f_0\left(\frac{\lambda^{1/4}(x-\xi)}{\sqrt{2}}\right)$ – фундаментальное решение уравнения $\mathbb{A}(\lambda)u(x) = \delta(x-\xi)$ на всей оси.

Поэтому для любого фиксированного $\xi > 0$, следуя теореме 2.2, находим

$$\sup_{\lambda>0} \lambda^{3/4} G_\lambda(\xi, \xi) = \frac{\sqrt{2}}{4} \sup_{\lambda>0} (1 - f_0(\sqrt{2}\lambda^{1/4}\xi)) = \frac{\sqrt{2}}{4} \sup_{t>0} (1 - f_0(t)) = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + e^{-\pi}),$$

так как $f_0(x)$ имеет положительные локальные максимумы в $x = 2\pi n$ (в 0 глобальный) и отрицательные локальные минимумы в $x = \pi + 2\pi n$ (в $\pm\pi$ глобальные). По теореме 2.2 получаем значение точной постоянной $K_{\mathbb{R}_+} = (4/27)^{1/4}(1 + e^{-\pi})$ и семейство экстремальных функций

$$u_*(x) = G_{\lambda(\xi)}(x, \xi) = f_0\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{\xi} - 1\right)\right) - f_0\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{\xi} + 1\right)\right), \quad (3.112)$$

где $\xi > 0$ произвольно и фиксировано, а $\lambda(\xi) = \pi^4/(4\xi^4)$.

Переходим к случаю конечного интервала. Для того чтобы найти ключевую функцию Грина $G_\lambda(\xi, \xi)$, мы должны найти решение уравнения

$$u''''(x) + \lambda u(x) = \delta(x - \xi), \quad x, \xi \in (0, 1), \quad u(0) = u''(0) = u(1) = u''(1) = 0.$$

Используя ортонормированную систему собственных функций $\{\sqrt{2} \sin \pi n x\}_{n=1}^\infty$, получаем

$$G_\lambda(x, \xi) = 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin \pi n x \sin \pi n \xi}{\pi^4 n^4 + \lambda} \quad (3.113)$$

и (полагая $\lambda = 4a^4\pi^4$ для упрощения дальнейших формул)

$$G_\lambda(\xi, \xi) = \frac{2}{\pi^4} \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin^2 \pi n \xi}{n^4 + 4a^4}.$$

Затем, используя равенство $\sin^2 \pi n \xi = 1/2 - (e^{2\pi i n \xi} + e^{-2\pi i n \xi})/4$ и формулу суммирования Пуассона

$$\sum_{n=-\infty}^\infty g(n+y) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^\infty e^{2\pi i n y} \widehat{g}(2\pi n),$$

находим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin^2 \pi n \xi}{n^4 + 4a^4} &= \frac{1}{4} \left(\sum_{n=-\infty}^\infty \frac{1}{n^4 + 4a^4} - \sum_{n=-\infty}^\infty \frac{e^{2\pi i n \xi}}{n^4 + 4a^4} \right) \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{(\sqrt{2}a)^3} \left(\sum_{n=-\infty}^\infty f(\sqrt{2}a \cdot 2\pi n) - \sum_{n=-\infty}^\infty f(\sqrt{2}a \cdot 2\pi(n+\xi)) \right) \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{(\sqrt{2}a)^3} \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \left(\sum_{n=-\infty}^\infty f_0(a \cdot 2\pi n) - \sum_{n=-\infty}^\infty f_0(a \cdot 2\pi(n+\xi)) \right), \end{aligned}$$

где $f(y) := \frac{\pi\sqrt{2}}{2} f_0\left(\frac{|y|}{\sqrt{2}}\right)$, $f_0(x) = e^{-|x|}(\cos x + \sin |x|)$, см. (3.111). Собирая все вместе, для ключевой функции в теореме 2.2 получаем

$$\lambda^{3/4} G_\lambda(\xi, \xi) = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(a \cdot 2\pi n) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(a \cdot 2\pi(n + \xi)) \right) =: \frac{\sqrt{2}}{4} S(a, \xi), \quad (3.114)$$

где $\lambda = 4a^4\pi^4$. Для больших a и $\xi \leq 1/2$ главные члены суть

$$S(a, \xi) = f_0(0) - f_0(2\pi a\xi) + O(e^{-2\pi a}),$$

и, поскольку $f_0(x)$ имеет отрицательный глобальный минимум в π , мы видим “рожок” высоты $e^{-\pi}$ над $f_0(0) = 1$ при $\xi = 1/(2a)$, дающий максимум $S(a, \xi)$ при больших a ; см. рис. 4.

Рис. 4. Графики функции $\xi \mapsto S(a, \xi)$ при $a = 0.5$, $a = 1$ (глобальный максимум при $\xi = 1/2$, равный $\coth(\pi/2)$) и $a = 10$ (“рожки”)

Что же касается глобального максимума $S(a, \xi)$, мы видим, что если $a = 1$ и $\xi = 1/2$, то в первой и второй сумме в (3.114) посчитаны один за другим все максимумы и все отрицательные минимумы функции f_0 соответственно. Поэтому

$$S(a, \xi) \leq S\left(1, \frac{1}{2}\right) = \coth \frac{\pi}{2}.$$

Итак, мы доказали следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.9. Точные постоянные в неравенстве (3.110) для полуоси и отрезка суть соответственно

$$K_{\mathbb{R}_+} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}} (1 + e^{-\pi}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}} \cdot 1.0432 \dots,$$

$$K_{\text{int}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}} \coth \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}} \cdot 1.09033 \dots$$

Для полуоси семейство экстремальных функций приведено в (3.112), а для интервала экстремальная функция дается формулой (3.113), где $\lambda = 4\pi^4$ и $\xi = 1/2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Точная постоянная в неравенстве (3.110) для $u \in H_0^2(D)$ такая же, как в случае всей оси, а именно $\sqrt{2}/\sqrt[4]{27}$, поскольку можно использовать продолжение нулем.

3.3.5. Неравенство второго порядка в 3D. В заключение мы рассмотрим неравенство второго порядка в трехмерной области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, для которого переход от пространства $H_0^2(\Omega)$ к более широкому пространству $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ не приводит к увеличению постоянной в соответствующем интерполяционном неравенстве. Это неравенство было получено в [28] некоторым специальным методом, тем не менее мы приводим его доказательство в рамках нашей общей теоремы 2.2.

ТЕОРЕМА 3.10. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ – произвольная область. Обозначим через $\dot{H}_0^1(\Omega)$ замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в норме $\|\nabla \cdot\|_{L_2(\Omega)}$. Тогда для $u \in \dot{H}_0^1(\Omega) \cap \{u: \Delta u \in L_2(\Omega)\}$ справедливо неравенство

$$\|u\|_\infty^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|\nabla u\| \|\Delta u\|, \quad (3.115)$$

где постоянная точная, и экстремальной функции нет, если $\Omega \neq \mathbb{R}^3$. В противном случае

$$u_*(x) = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{|\xi|^2 + |\xi|^4} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала предположим, что Ω – ограниченная область с гладкой границей. Тогда из эллиптической регулярности следует, что

$$u \in \dot{H}_0^1(\Omega) \cap \{u: \Delta u \in L_2(\Omega)\} = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Согласно теореме 2.2 нам надо рассмотреть функцию Грина $G_\lambda(x, \xi)$ следующего эллиптического оператора четвертого порядка:

$$\begin{aligned} (\Delta^2 - \lambda \Delta) G_\lambda(x, \xi) &= -\Delta(-\Delta + \lambda) G_\lambda(x, \xi) = \delta(x - \xi), \\ G_\lambda(x, \xi) &= \Delta G_\lambda(x, \xi) = 0, \quad \xi \in \Omega, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.116)$$

Обозначим через $g_D(x, \xi)$ функцию Грина лапласиана Дирихле:

$$-\Delta g_D(x, \xi) = \delta(x - \xi), \quad g_D(x, \xi) = 0, \quad \xi \in \Omega, \quad x \in \partial\Omega,$$

и через $g_H(x, \xi)$ функцию Грина для уравнения Гельмгольца:

$$(-\Delta + \lambda) g_H(x, \xi) = \delta(x - \xi), \quad g_H(x, \xi) = 0, \quad \xi \in \Omega, \quad x \in \partial\Omega.$$

По принципу максимума

$$0 < g_D(x, \xi) < \frac{1}{4\pi|x - \xi|}, \quad 0 < g_H(x, \xi) < \frac{e^{-\sqrt{\lambda}|x - \xi|}}{4\pi|x - \xi|}, \quad (3.117)$$

где функции справа – это соответствующие фундаментальные решения в $\mathbb{R}^3$.

Поэтому

$$\begin{aligned} 0 < G_\lambda(x, \xi) &= \int_{\Omega} g_H(x, y) g_D(y, \xi) dy < \int_{\Omega} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|}}{4\pi|x-y|} \frac{1}{4\pi|y-\xi|} dy \\ &< \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|}}{4\pi|x-y|} \frac{1}{4\pi|y-\xi|} dy = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i(\xi-x)z} dz}{|z|^2(|z|^2 + \lambda)}, \end{aligned}$$

где справа стоит фундаментальное решение уравнения (3.116) в $\mathbb{R}^3$. Следовательно,

$$G_\lambda(\xi, \xi) < \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{dz}{|z|^2(|z|^2 + \lambda)} = \frac{1}{4\pi\sqrt{\lambda}}.$$

Теперь (3.115) следует из теоремы 2.2. Постоянная $1/(2\pi)$ очевидно точная, поскольку она точна для неравенства для $u \in H_0^2(\mathbb{R}^3)$ (см. (3.2)) и (в этом случае используем продолжение нулем) для $u \in H_0^2(\Omega) \subset \dot{H}_0^1(\Omega) \cap \{u: \Delta u \in L_2(\Omega)\}$.

Исчерпывая произвольную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ограниченными областями Ω_n , можно показать, что (3.115) верно и в общем случае (см. детали в [28]). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. В отличие от предыдущего примера, фундаментальное решение (3.116) в $\mathbb{R}^3$ положительно.

Авторы выражают благодарность А. А. Лаптеву и С. И. Похожаеву за многочисленные полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] В. В. Арестов, “Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи”, *УМН*, **51**:6(312) (1996), 89–124; англ. пер.: V. V. Arestov, “Approximation of unbounded operators by bounded operators and related extremal problems”, *Russian Math. Surveys*, **51**:6 (1996), 1093–1126.
- [2] M. Bartuccelli, J. Deane, S. Zelik, “Asymptotic expansions and extremals for the critical Sobolev and Gagliardo–Nirenberg inequalities on a torus”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **143**:3 (2013), 445–482.
- [3] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975, 480 с.; англ. пер.: O. V. Besov, V. P. Il'in, S. M. Nikol'skii, *Integral representations of functions and imbedding theorems*, v. I, II, Scripta Series in Mathematics, ed. M. H. Taibleson, V. H. Winston & Sons, Washington, DC; John Wiley & Sons, New York–Toronto–London, 1978, 1979, viii+345 pp., viii+311 pp.
- [4] H. Brezis, T. Gallouet, “Nonlinear Schrödinger evolution equations”, *Nonlinear Anal.*, **4**:4 (1980), 677–681.
- [5] F. Carlson, “Une inégalité”, *Ark. Mat. Astr. Fys.*, **25B**:1 (1934), 1–5.
- [6] J. Dolbeault, A. Laptev, M. Loss, “Lieb–Thirring inequalities with improved constants”, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, **10**:4 (2008), 1121–1126.
- [7] A. Eden, C. Foias, “A simple proof of the generalized Lieb–Thirring inequalities in one-space dimension”, *J. Math. Anal. Appl.*, **162**:1 (1991), 250–254.

- [8] H. M. Edwards, *Riemann's zeta function*, reprint of the 1974 original, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2001, xiv+315 pp.
- [9] T. Ekholm, R. Frank, "Lieb–Thirring inequalities on the half-line with critical exponent", *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, **10**:3 (2008), 739–755.
- [10] R. Frank, A. Laptev, *A Lieb–Thirring inequality for spherically symmetric potentials*, preprint, 2007.
- [11] В. Н. Габушин, "О наилучшем приближении оператора дифференцирования на полупрямой", *Матем. заметки*, **6**:5 (1969), 573–582; англ. пер.: V. N. Gabushin, "On the best approximation of the differentiation operator on the half-line", *Math. Notes*, **6**:5 (1969), 804–810.
- [12] L. Geisinger, A. Laptev, T. Weidl, "Geometrical versions of improved Berezin–Li–Yau inequalities", *J. Spectr. Theory*, **1**:1 (2011), 87–109.
- [13] G. H. Hardy, "A note on two inequalities", *J. London Math. Soc.*, **s1-11**:3 (1936), 167–170.
- [14] A. A. Ilyin, "Best constants in multiplicative inequalities for sup-norms", *J. London Math. Soc.* (2), **58**:1 (1998), 84–96.
- [15] A. A. Ilyin, "Best constants in Sobolev inequalities on the sphere and in Euclidean space", *J. London Math. Soc.* (2), **59**:1 (1999), 263–286.
- [16] A. A. Ilyin, "Lieb–Thirring inequalities on some manifolds", *J. Spectr. Theory*, **2**:1 (2012), 57–78.
- [17] Г. А. Калябин, "Точные константы в неравенствах для промежуточных производных (случай Габушина)", *Функц. анализ и его прил.*, **38**:3 (2004), 29–38; англ. пер.: G. A. Kalyabin, "Sharp constants in inequalities for intermediate derivatives (the Gabushin case)", *Funct. Anal. Appl.*, **38**:3 (2004), 184–191.
- [18] В. И. Крылов, *Приближенное вычисление интегралов*, Гос. изд-во физ.-мат. лит., М., 1959, 327 с.; англ. пер.: V. I. Krylov, *Approximate calculation of integrals*, The Macmillan Co., New York–London, 1962, x+357 pp.
- [19] L. Larsson, L. Maligranda, J. Pečarić, L.-E. Persson, *Multiplicative inequalities of Carlson type and interpolation*, World Scientific Publishing Co., Hackensack, NJ, 2006, xiv+201 pp.
- [20] E. H. Lieb, W. E. Thirring, "Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrödinger Hamiltonian and their relation to Sobolev inequalities", *Studies in mathematical physics: essays in honor of Valentine Bargmann*, Princeton Ser. Phys., Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1976, 269–303.
- [21] Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, "О неравенствах для производных колмогоровского типа", *Матем. сб.*, **188**:12 (1997), 73–106; англ. пер.: G. G. Magaril-Ilyayev, V. M. Tikhomirov, "Kolmogorov-type inequalities for derivatives", *Sb. Math.*, **188**:12 (1997), 1799–1832.
- [22] И. М. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974, 336 с.; пер. с англ.: E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Math. Ser., **32**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971, x+297 pp.
- [23] B. von Sz.-Nagy, "Über integralungleichungen zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung", *Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math.*, **10** (1941), 64–74.
- [24] Л. В. Тайков, "Неравенства типа Колмогорова и наилучшие формулы численного дифференцирования", *Матем. заметки*, **4**:2 (1968), 233–238; англ. пер.: L. V. Taikov, "Kolmogorov-type inequalities and the best formulas for numerical differentiation", *Math. Notes*, **4**:2 (1968), 631–634.

- [25] Е. К. Титчмарш, *Теория функций*, ГИТТЛ, М., 1951, 506 с.; пер. с англ.: E. C. Titchmarsh, *The theory of functions*, 2nd ed., Oxford Univ. Press, London, 1939, x+454 pp.
- [26] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980, 660 с.; пер. с англ.: H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978, 528 pp.
- [27] Дж. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, ИЛ, М., 1949, 798 с.; пер. с англ.: G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, England; The Macmillan Co., New York, 1944, vi+804 pp.
- [28] Wenzheng Xie, “Integral representations and L^∞ bounds for solutions of the Helmholtz equation on arbitrary open sets in $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$ ”, *Differential Integral Equations*, **8:3** (1995), 689–698.

Сергей Витальевич Зелик
(Sergey V. Zelik)
University of Surrey, Guildford, UK
E-mail: s.zelik@surrey.ac.uk

Поступила в редакцию
27.10.2013

Алексей Андреевич Ильин
(Aleksei A. Ilyin)
Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН;
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН
E-mail: ilyin@keldysh.ru