Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Буслаев, С. П. Суетин, О существовании компактов минимальной емкости в задачах рациональной аппроксимации многозначных аналитических функций, *УМН*, 2014, том 69, выпуск 1, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9577>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 12:07:37

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

**О существовании компактов минимальной емкости
в задачах рациональной аппроксимации
многозначных аналитических функций**

В. И. Буслаев, С. П. Суетин

1. Пусть $E_1, \dots, E_m$ – набор непересекающихся континуумов в $\mathbb{C}$ (допускается вырождение континуума в точку), $E = \bigsqcup_{j=1}^m E_j$, $M(E)$ – множество единичных положительных борелевских мер μ с носителем на E таких, что $\mu(E_j) > 0$, и пусть $f = (f_1, \dots, f_m)$ – набор функций таких, что $f_j \in \mathcal{A}(E_j)$, где $\mathcal{A}(E_j)$ – множество функций, голоморфных на E_j и допускающих аналитическое продолжение с E_j вдоль любого пути в $\mathbb{C}$, не пересекающего конечное множество A_{f_j} точек, хотя бы одна из которых является точкой ветвления f_j , $j = 1, \dots, m$.

Обозначим через $\mathfrak{K}_{E,f}$ семейство компактов $K \subset \mathbb{C}$ таких, что $K \cap E = \emptyset$ и каждая из функций f_j является (однозначной) голоморфной функцией в той связной компоненте D_j дополнения $\mathbb{C} \setminus K$, которая содержит E_j , причем $f_j = f_k$, если $D_j = D_k$. Будем называть такие компакты допустимыми.

2. В последнее время в связи с задачами теории рациональной аппроксимации аналитических функций (см. прежде всего [6] и [10]) большой интерес представляет проблема существования допустимого компакта минимальной емкости, т. е. такого $F \in \mathfrak{K}_{E,f}$, что

$$\text{cap}_{V-\mu} F = \inf_{K \in \mathfrak{K}_{E,f}} \text{cap}_{V-\mu} K, \quad F \in \mathfrak{K}_{E,f}, \quad (1)$$

где $V^\mu(z)$ – сферически нормированный (см. [5]) потенциал меры $\mu \in M(E)$, $\text{cap}_{V-\mu} K$ – емкость компакта K , находящегося во внешнем поле $V^{-\mu}$ (см. [5], [2]). Частный случай $m = 1$, $E = \{\infty\}$, $f(z) = \sqrt[q]{(1 - a_1/z) \cdots (1 - a_q/z)}$ сформулированной проблемы совпадает с хорошо известной проблемой Чеботарёва о существовании континуума минимальной емкости среди всех континуумов, содержащих заданные точки $a_1, \dots, a_q$. Существование такого континуума, его единственность и описание структурных свойств в терминах квадратичных дифференциалов было независимо дано Г. Грётшем [7] и М. А. Лаврентьевым [8].

В 1985 г. Г. Шталь (см. [12]) дал положительный ответ на сформулированную проблему для случая $m = 1$, $E = \{\infty\}$ и произвольной функции $f \in \mathcal{A}(\{\infty\})$. Шталь описал структуру экстремального компакта F в терминах квадратичного дифференциала, установил свойство “симметрии” этого компакта (S -свойство) и, опираясь на S -свойство, доказал сходимость по емкости диагональных аппроксимаций Паде (АП) функции f в области $D := \mathbb{C} \setminus F$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-12430-офи-м2) и программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-2900.2014.1).

DOI: 10.4213/rm9577

После основополагающих работ Г. Штала был разработан вариационный метод (см. [9], [4], [10]), позволивший в некоторых новых задачах теории рациональных аппроксимаций для компакта, удовлетворяющего соотношению (1), установить соответствующее S -свойство, а затем, опираясь на это S -свойство, доказать сходимость по емкости соответствующих многоточечных АП, построенных по таблице узлов интерполяции, имеющей предельное распределение, описываемое мерой μ , к функции f , где $f|_{D_j} = f_j$, $j = 1, \dots, m$ (см. [2], [3], [11]). Этим в полной мере объясняется важность сформулированной проблемы.

Для случая $m = 2$, $E = \{0\} \cup \{\infty\}$, $\mu = (\delta_0 + \delta_\infty)/2$, $f_1 \in \mathcal{A}(\{0\})$, $f_2 \in \mathcal{A}(\{\infty\})$ положительный ответ на сформулированную проблему был получен в [4]; для произвольного $m \in \mathbb{N}$, $E = \bigcup_{j=1}^m \{e_j\}$, $\mu = \sum_{j=1}^m p_j \delta_{e_j} \in M(E)$, $f_j \in \mathcal{A}(\{e_j\})$, $j = 1, \dots, m$, – в работе [2]; для $m = 1$, $E \subseteq \{z \geq 1\}$, $f \in \mathcal{A}(E)$, $A_f \subset \{z < 1\}$ – в работе [1].

3. Отметим, что в исследованном в [1] случае имеется дополнительное предположение о взаимном расположении E и A_f . В общем случае без каких-либо дополнительных предположений ответ на сформулированную проблему может быть отрицательным уже при $m = 1$, т. е. вместо (1) возникает неравенство:

$$\text{cap}_{V-\mu} F > \inf_{K \in \mathfrak{K}_{E,f}} \text{cap}_{V-\mu} K \quad \text{для всех } F \in \mathfrak{K}_{E,f}. \quad (2)$$

Основным результатом настоящей работы является следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. Положим $E = [-1, 1]$. Пусть μ_1 – сужение нормированной лебеговой меры $\frac{1}{2} dx$ на E , μ_2 – равновесная мера $\frac{1}{\pi}(1-x^2)^{-1/2} dx$ отрезка E . Тогда существует функция $f \in \mathcal{A}(E)$ такая, что при всех $F \in \mathfrak{K}_{E,f}$ выполнено неравенство (2) при $\mu = \mu_k$, $k = 1, 2$. В качестве функции f может быть выбрана функция с четырьмя точками ветвления 2-го порядка, две из которых лежат в верхней полуплоскости, а две – в нижней.

Список литературы

- [1] L. Baratchart, H. Stahl, M. Yattselev, *Adv. Math.*, **229**:1 (2012), 357–407. [2] В. И. Буслаев, *Матем. сб.*, **204**:2 (2013), 39–72. [3] В. И. Буслаев, “Об аналоге теоремы Штала для набора многозначных аналитических функций”, *Матем. сб.*, **205** (2014) (в печати). [4] В. И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С. П. Суетин, *Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа*, Сборник статей, Тр. МИАН, **279**, МАИК, М., 2012, 31–58. [5] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, *Матем. сб.*, **134(176)**:3(11) (1987), 306–352. [6] А. А. Гончар, “Рациональные аппроксимации аналитических функций”, *Совр. пробл. матем.*, **1**, МИАН, М., 2003, 83–106. [7] H. Grötzsch, *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig*, **82** (1930), 251–263. [8] M. Lavrentieff, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **191** (1930), 827–829. [9] А. Мартинес-Финкельштейн, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, *Матем. сб.*, **202**:12 (2011), 113–136. [10] E. A. Rakhmanov, “Orthogonal polynomials and S -curves”, *Recent advances in orthogonal polynomials, special functions, and their applications*, *Contemp. Math.*, **578**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, 195–239. [11] Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, *Матем. сб.*, **204**:9 (2013), 115–160. [12] H. Stahl, *J. Approx. Theory*, **91**:2 (1997), 139–204.

Виктор Иванович Буслаев
(Viktor I. Buslaev)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: buslaev@mi.ras.ru

Представлено С. Ю. Немировским
Принято редколлегией

25.01.2014

Сергей Павлович Суетин
(Sergey P. Suetin)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: suetin@mi.ras.ru